

**ANALISIS DINAMIK MODEL TIGA SPESIES  
MUTUALISME DAN AMENSALISME**

**SKRIPSI**

oleh  
**ANGGUN INDRA AYU**  
**0910940036-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

**ANALISIS DINAMIK MODEL TIGA SPESIES  
MUTUALISME DAN AMENSALISME**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh  
**ANGGUN INDRA AYU**  
**0910940036-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS DINAMIK MODEL TIGA SPESIES  
MUTUALISME DAN AMENSALISME**

oleh

**ANGGUN INDRA AYU**  
**0910940036-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 30 Januari 2013  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

**Pembimbing**

**Dr. Isnani Darti, M.Si.**  
**NIP. 197312162002122001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**  
**NIP. 196709071992031001**

## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Anggun Indra Ayu  
NIM : 0910940036  
Jurusan : Matematika  
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Tiga  
Spesies Mutualisme dan  
Amensalisme

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Skripsi ini adalah hasil pemikiran saya, bukan hasil plagiat dari tulisan orang lain. Rujukan-rujukan yang tercantum pada daftar pustaka hanya digunakan sebagai acuan atau referensi.
2. Apabila suatu saat nanti diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan penuh kesadaran.

Malang, 30 Januari 2013  
yang menyatakan,

Anggun Indra Ayu  
NIM 0910940036

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ANALISIS DINAMIK MODEL TIGA SPESIES MUTUALISME DAN AMENSALISME

## ABSTRAK

Skripsi ini membahas analisis dinamik model simbiosis tiga spesies yang menggambarkan interaksi antara dua spesies mutualisme dan satu spesies amensal. Amensal merupakan spesies yang pertumbuhannya terhambat karena keberadaan spesies lain. Model tiga spesies dibentuk melalui model mutualisme dua spesies dan model amensalisme. Pada model simbiosis tiga spesies terdapat delapan titik kesetimbangan, yaitu satu titik kesetimbangan trivial, enam titik kesetimbangan batas, dan satu titik kesetimbangan interior. Analisis kestabilan titik kesetimbangan tersebut ditentukan dengan melakukan linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan. Titik kesetimbangan trivial model bersifat tidak stabil. Titik kesetimbangan batas bersifat tidak stabil atau bersifat stabil dengan syarat tertentu. Titik kesetimbangan interior bersifat stabil. Dengan menggunakan fungsi Lyapunov diperoleh kestabilan global pada titik kesetimbangan interior dan satu titik kesetimbangan batas.

**Kata kunci :** *analisis dinamik, titik kesetimbangan, mutualisme, amensal, fungsi Lyapunov.*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# DYNAMICAL ANALYSIS OF THREE SPECIES MUTUALISM AND AMENSALISM MODEL

## ABSTRACT

*This final project discusses about dynamical analysis of three species symbiosis model which describes interaction between two mutualism species and an amensal species. Amensal is a species which the growth is hampered because of another species. There are eight equilibrium points in the three species model namely a trivial equilibrium point, six boundary equilibrium points, and an interior equilibrium point. The analysis behaviour of equilibrium points is determined by linearizing system around the equilibrium point. The trivial equilibrium point is unstable. The boundary equilibrium points are unstable or stable under specific conditions. The interior equilibrium point is stable. The global stability of an interior equilibrium point and a boundary equilibrium point are found by Lyapunov function.*

**Keywords :** *dynamical, analysis, equilibrium point, mutualism, amensal, Lyapunov function.*



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan, dan petunjuk-Nya, sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Banyak pihak yang telah memberikan bantuan dalam penyusunan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dr. Isnani Darti, M.Si. selaku pembimbing, atas segala bimbingan, motivasi, bantuan, serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini,
2. Dra. Trisilowati, M.Sc., dan Drs. M. Muslikh, M.Si., selaku dosen penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, MT. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. seluruh dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. Bapak Agus Djiwandono (Ayah) dan Ibu Pahriah (Mamah), ka Angga dan adek Nike yang selalu mengiringi penulis dengan segala doa dan motivasi yang melimpah dan tiada henti,
6. Aisyah, Ochie, Cynthia, Ida, Fandia, Ninda, Reza dan teman-teman seperjuangan Matematika B 2009, atas dukungan, bantuan, dan doanya,
7. Teman-teman swiss 225k atas semangat dan bantuan yang telah diberikan serta kebersamaannya selama ini,
8. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan tidak pernah luput dari kesalahan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun, melalui email ke alamat [Anggunanjun@yahoo.co.id](mailto:Anggunanjun@yahoo.co.id).

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi berbagai pihak, serta menjadi sumber inspirasi untuk penulisan skripsi selanjutnya.

Malang, 30 Januari 2013

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xix
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Model Pertumbuhan .....	3
2.1.1 Pertumbuhan Eksponensial .....	3
2.1.2 Pertumbuhan Logistik .....	4
2.2 Model Mutualisme Dua Spesies .....	5
2.3 Model Amensalisme Dua Spesies .....	6
2.4 Sistem Dinamik .....	7
2.5 Sistem <i>Autonomous</i> .....	8
2.6 Sistem <i>Autonomous</i> Linear.....	9
2.7 Sistem <i>Autonomous</i> Nonlinear .....	10
2.8 Kriteria Routh-Hurwitz .....	13
2.9 Metode Lyapunov.....	14
<b>BAB III PEMBAHASAN</b>	
3.1 Formulasi Model .....	15
3.2 Titik Keseimbangan .....	16
3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan .....	22

3.4 Kestabilan Global .....	32
3.4.1 Kestabilan Global Titik Keseimbangan $E_7$ .....	32
3.4.2 Kestabilan Global Titik Keseimbangan $E_8$ .....	36
3.5 Simulasi Numerik .....	40
3.5.1 Simulasi I .....	41
3.5.2 Simulasi II .....	43
3.5.3 Simulasi III .....	45

**BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN**

4.1 Kesimpulan .....	47
4.2 Saran .....	47

**DAFTAR PUSTAKA** .....

**LAMPIRAN** .....



## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Syarat eksistensi dan syarat kestabilan titik kesetimbangan.....	39
Tabel 3.2 Tabel parameter simulasi numerik .....	40

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1	Kurva model eksponensial.....3
Gambar 2.2	Kurva model logistik .....5
Gambar 3.1	Grafik kemonotonan fungsi $f(s)$ .....33
Gambar 3.2	Grafik fungsi $f(s) = s - \ln s$ .....34
Gambar 3.3	Potret fase model simulasi I.....41
Gambar 3.4	Grafik solusi $x(t), y(t), z(t)$ simulasi I .....42
Gambar 3.5	Potret fase model simulasi II .....43
Gambar 3.6	Grafik solusi $x(t), y(t), z(t)$ simulasi II .....44
Gambar 3.7	Potret fase model simulasi III.....45
Gambar 3.8	Grafik solusi $x(t), y(t), z(t)$ simulasi III.....46





UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Penyederhanaan titik kesetimbangan $E_8$ .....	51
Lampiran 2 Perhitungan $\frac{dL}{dt}$ pada $E_8$ .....	53
Lampiran 3 Program model tiga spesies .....	55

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Simbiosis merupakan pola interaksi yang sangat erat dan khusus antara dua makhluk hidup yang berlainan jenis. Di dalam simbiosis terdapat hubungan yang sangat menguntungkan dan sangat merugikan. Oleh karena itu, simbiosis dapat dibedakan menjadi beberapa macam, diantaranya adalah simbiosis mutualisme, parasitisme, komensalisme, dan amensalisme.

Simbiosis mutualisme merupakan interaksi antar individu di mana kedua individu diuntungkan. Apabila salah satu individu diuntungkan dan yang lainnya dirugikan maka interaksi itu disebut simbiosis parasitisme. Simbiosis komensalisme merupakan interaksi antar individu di mana salah satu individu diuntungkan, sedangkan individu yang lainnya tidak dirugikan dan tidak diuntungkan. Namun, apabila salah satu individu dirugikan sedangkan individu yang lainnya tidak dirugikan dan tidak diuntungkan maka interaksi itu disebut amensalisme.

Model dinamika populasi merupakan model matematika yang menggambarkan peristiwa perubahan yang terjadi pada suatu populasi seperti pertumbuhan. Salah satu contoh dari model ini adalah model pertumbuhan logistik yaitu model pertumbuhan yang memperhitungkan faktor logistik berupa ketersediaan makanan dan ruang hidup.

Model mutualisme dibentuk berdasarkan model kompetisi yang di dalamnya terdapat model pertumbuhan logistik. Namun, interaksi antar kedua spesies dalam model mutualisme bernilai positif karena kedua spesies saling diuntungkan, berbeda dengan model kompetisi yang bernilai negatif untuk interaksi antar kedua spesiesnya.

Berbeda dengan Reddy, dkk. (2011) yang telah melakukan analisis kestabilan model ekologi untuk dua spesies mutualisme, pada skripsi ini terdapat spesies ketiga yang berinteraksi amensalisme dengan dua spesies mutualisme, sehingga spesies ketiga bertindak sebagai amensal. Amensal merupakan spesies yang terhambat pertumbuhannya karena keberadaan spesies lain. Jadi,

penambahan spesies ketiga tidak mempengaruhi laju pertumbuhan dua spesies mutualisme. Model matematika yang terbentuk berupa sistem persamaan diferensial biasa nonlinear yang mengacu pada model pertumbuhan logistik (*Rao dan Narayan, 2012*).

Dari model tersebut dilakukan analisis dinamik dengan menentukan titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilan dari titik kesetimbangan. Pada bagian akhir, dilakukan simulasi numerik sebagai ilustrasi dari analisis dinamik model tersebut.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana formulasi model interaksi tiga spesies,
2. bagaimana titik kesetimbangan model,
3. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model,
4. bagaimana simulasi numerik dan interpretasi hasil analisis.

## **1.3 Batasan Masalah**

Batasan-batasan masalah yang menjadi asumsi dasar pada skripsi ini adalah

1. semua parameter pada model bernilai positif dan konstan,
2. tidak dipengaruhi migrasi,
3. laju pertumbuhan ketiga spesies dibatasi oleh *carrying capacity*.

## **1.4 Tujuan**

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. memformulasikan model interaksi tiga spesies,
2. menentukan titik kesetimbangan model,
3. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
4. melakukan simulasi numerik dan menginterpretasikan hasil analisis.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

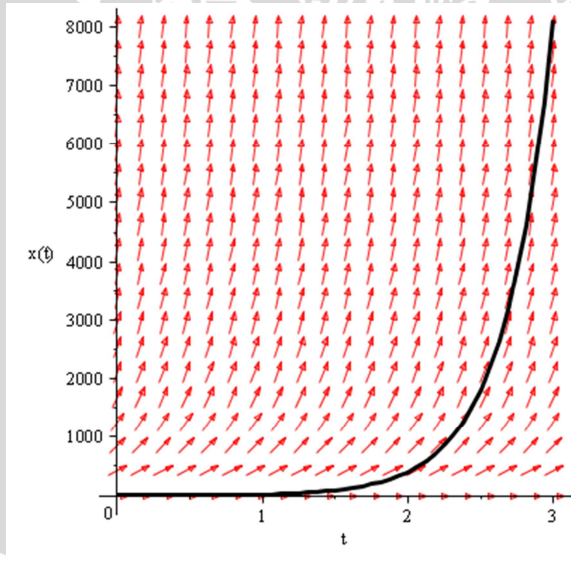
### 2.1 Model Pertumbuhan

#### 2.1.1 Pertumbuhan Eksponensial

Pertumbuhan populasi secara kontinu dengan sumber daya yang melimpah (tidak terbatas) dapat dimodelkan dalam bentuk

dengan  $x(t)$  adalah jumlah populasi pada saat  $t$  dan  $r$  merupakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi. Model pertumbuhan eksponensial menggambarkan pertumbuhan populasi karena terjadi perkembangbiakan. Jadi, selama terjadi pertumbuhan eksponensial, jumlah populasi bertambah seiring bertambahnya waktu (*Boyce dan Di Prima, 2008*).

Misalkan jumlah populasi awal  $x(0)$ , dengan  $r$  maka populasi akan terus bertambah seperti diperlihatkan pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1. Kurva model eksponensial

## 2.1.2 Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Ketika ukuran populasi bertambah, laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi tertentu. Ukuran populasi yang menghentikan pertumbuhan tersebut secara umum disebut *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya.

Laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi sehingga secara matematis laju pertumbuhan populasi dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Misalkan  $K$  adalah *carrying capacity*. Jika dalam populasi terdapat  $x$  individu, maka lingkungan masih dapat mendukung  $(K - x)$  individu. Jadi, masih terdapat bagian lingkungan yang dapat ditempati yaitu sebesar

$$\frac{(K - x)}{K}. \quad (2.1)$$

Persamaan (2.1) inilah yang sebanding dengan pertumbuhan perkapita. Oleh karena itu, persamaan logistik didefinisikan sebagai

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \frac{(K - x)}{K}$$

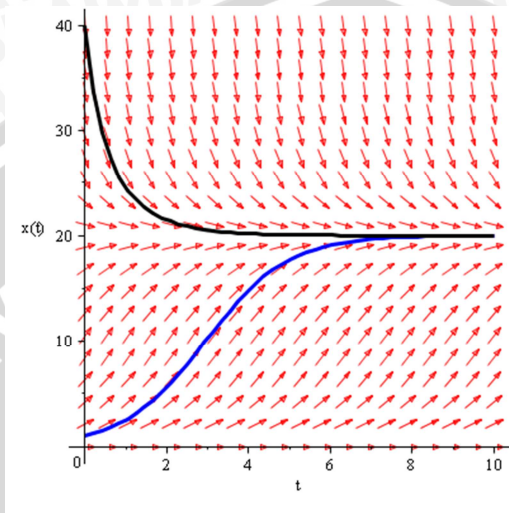
atau

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

dengan  $r > 0$  menyatakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi  $x$  (Boyce dan Di Prima, 2008).

Jika jumlah populasi awal  $x(0) < K$ , maka model pertumbuhan logistik meramalkan bahwa ukuran populasi meningkat menuju *carrying capacity*  $K$ . Tetapi jika nilai awal  $x(0) > K$ , maka model pertumbuhan logistik meramalkan bahwa jumlah populasi akan berkurang menuju *carrying capacity*  $K$ . Sebagai contoh, jika populasi awal  $x(0) = 1$ ,  $r = 1$ , dan  $K = 20$ , maka jumlah populasi meningkat dan pada akhirnya saat  $x(t) = K = 20$  laju pertumbuhan populasi berhenti. Sebaliknya jika  $x(0) = 40$ , jumlah populasi

berkurang hingga pertumbuhan populasi terhenti pada  $x = 20$ . Grafik pertumbuhan logistik diperlihatkan pada Gambar 2.2.



Gambar 2.2. Kurva model logistik

## 2.2 Model Mutualisme Dua Spesies

Model mutualisme dibentuk berdasarkan model kompetisi yang di dalamnya terdapat model pertumbuhan logistik. Namun, interaksi antar kedua spesies dalam model mutualisme bernilai positif karena kedua spesies saling diuntungkan, berbeda dengan model kompetisi yang bernilai negatif untuk interaksi antar kedua spesiesnya.

Misalkan menyatakan jumlah populasi spesies pertama dan  $x_2(t)$  adalah jumlah populasi spesies kedua. Tingkat pertumbuhan intrinsik populasi spesies pertama dinyatakan dengan  $r_1$ . Keberadaan *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan spesies pertama terbatas dinyatakan dengan  $K_1$ . Interaksi mutualisme yang terjadi antara spesies pertama dan spesies kedua dinyatakan dengan  $\alpha$ . Dengan demikian, laju pertumbuhan spesies pertama dapat dituliskan sebagai

$$(2.2)$$



Pembentukan laju pertumbuhan spesies kedua sama dengan spesies pertama. Tingkat pertumbuhan intrinsik populasi spesies kedua dinyatakan dengan  $a_2y$ . Keberadaan *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan spesies kedua terbatas dinyatakan dengan  $a_{22}y^2$ . Interaksi mutualisme yang terjadi diantara kedua spesies sama dengan  $a_{21}xy$ . Dengan demikian, laju pertumbuhan spesies kedua adalah

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - a_{22}y^2 + a_{21}xy. \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.2) dan (2.3) diperoleh model mutualisme dua spesies berupa sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - a_{11}x^2 + a_{12}xy \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - a_{22}y^2 + a_{21}xy, \end{aligned} \quad (2.4)$$

dengan

- $a_i$  = tingkat pertumbuhan alami spesies ke- $i$ ,  $i = 1,2$ ,
- $a_{ii}$  = tingkat pengurangan spesies ke- $i$  karena keterbatasan sumber daya lingkungan  $i = 1,2$ ,
- $a_{12}$  = tingkat penambahan spesies pertama karena berinteraksi dengan spesies kedua,
- $a_{21}$  = tingkat penambahan spesies kedua karena berinteraksi dengan spesies pertama

(Glass dan Murray, 2001).

### 2.3 Model Amensalisme Dua Spesies

Amensalisme adalah interaksi yang menekan satu organisme, sedangkan yang lain tetap stabil. Amensalisme juga disebut sebagai interaksi antar individu di mana salah satu individu dirugikan (amensal), sedangkan individu yang lainnya tidak dirugikan dan tidak diuntungkan (*enemy*).

Salah satu contoh interaksi amensalisme adalah jamur *Penicillium* yang mensekresikan penisilin dengan bakteri. Penisilin mampu membunuh bakteri sehingga bakteri dirugikan, tetapi jamur *Penicillium* tidak mendapatkan keuntungan maupun kerugian.

Misalkan  $x$  menyatakan jumlah populasi amensal dan  $y$  adalah jumlah populasi *enemy*. Tingkat pertumbuhan intrinsik populasi *amensal* dinyatakan dengan  $a_1x$ . Keberadaan *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan populasi amensal terbatas dinyatakan dengan  $a_{11}x^2$ . Interaksi amensalisme yang terjadi antara populasi amensal dan populasi *enemy* dinyatakan dengan  $a_{12}xy$ . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi amensal adalah

$$\frac{dx}{dt} = a_1x - a_{11}x^2 - a_{12}xy. \quad (2.5)$$

Pembentukan laju pertumbuhan populasi *enemy* sama dengan populasi amensal. Tingkat pertumbuhan intrinsik populasi *enemy* dinyatakan dengan  $a_2y$ . Keberadaan *carrying capacity* yang menyebabkan pertumbuhan populasi *enemy* terbatas dinyatakan dengan  $a_{22}y^2$ . Karena populasi *enemy* tidak mendapat pengaruh dari interaksi amensalisme, maka laju pertumbuhan populasi *enemy* tidak dipengaruhi oleh populasi amensal. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *enemy* adalah

$$\frac{dy}{dt} = a_2y - a_{22}y^2. \quad (2.6)$$

Dari persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh model amensalisme dua spesies berupa sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - a_{11}x^2 - a_{12}xy \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - a_{22}y^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

(Rao dan Narayan, 2012).

## 2.4 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang, jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau pada masa yang telah lalu.

Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskret ( $t \in Z$  atau  $N$ ) dan sistem dinamik kontinu ( $t \in R$ ). Bentuk sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), t \in Z \text{ atau } N.$$

Apabila  $t$  kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Secara geometri, sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titik-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian sistem persamaan diferensialnya (Naggle dan Edward, 1993).

## 2.5 Sistem *Autonomous*

### Definisi 2.5.1 Sistem *Autonomous*

Finizio dan Ladas (1982) mendefinisikan sistem *autonomous* pada dimensi tiga sebagai suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} &= h(x, y, z), \end{aligned} \tag{2.8}$$

dengan fungsi  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu  $t$ .

### Definisi 2.5.2 Titik Kesetimbangan

Pandang sistem *autonomous* (2.8). Titik  $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$  yang memenuhi  $f(x^*, y^*, z^*) = 0$ ,  $g(x^*, y^*, z^*) = 0$ , dan  $h(x^*, y^*, z^*) = 0$  disebut titik kritis sistem *autonomous* (2.8). Titik kritis  $\vec{x}^*$  merupakan solusi sistem (2.8) yang bernilai konstan, sebab  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dz}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan  $\frac{dx}{dt} = 0$ ,  $\frac{dy}{dt} = 0$ , dan  $\frac{dz}{dt} = 0$  disebut dengan keadaan setimbang dan titik yang memenuhinya disebut titik kesetimbangan (Ross, 1984).

### Definisi 2.5.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = (x^*, y^*, z^*)$  dikatakan

1. stabil, jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. stabil asimtotik, jika stabil dan  $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$  sedemikian sehingga sebuah solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tak stabil, apabila tidak memenuhi kriteria pertama, dengan norm yang digunakan adalah norm Euclid

(Boyce dan DiPrima, 2008).

### 2.6 Sistem *Autonomous* Linear

Sistem (2.8) dikatakan sistem *autonomous* linear pada dimensi tiga jika fungsi dari  $f$ ,  $g$ , dan  $h$  adalah fungsi yang linear. Bentuk umum dari sistem *autonomous* linear dengan tiga persamaan yaitu

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z, \end{aligned}$$

yang dapat dinyatakan sebagai  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ , di mana

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

dengan  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  dan  $\det(A) \neq 0$ .

## Teorema 2.6.1

Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2$  dan  $\lambda_3$  adalah nilai eigen matriks  $A$ . Titik kesetimbangan  $(x^*, y^*, z^*)$  bersifat

1. stabil, jika ketiga nilai eigen  $\lambda_1, \lambda_2$  dan  $\lambda_3$  mempunyai bagian riil tak positif,
2. tidak stabil, jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif

(Edward dan Penney, 2001).

## 2.7 Sistem *Autonomous Nonlinear*

Sistem (2.8) dikatakan sistem *autonomous nonlinear* pada dimensi tiga jika fungsi  $f, g$ , dan  $h$  adalah fungsi yang nonlinear. Anggap bahwa fungsi  $f, g$  dan  $h$  mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik  $(x^*, y^*, z^*)$ . Deret Taylor fungsi  $f, g$  dan  $h$  di sekitar  $(x^*, y^*, z^*)$  adalah

$$f(x, y, z) = f(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_1(x, y, z) \quad (2.9)$$

$$g(x, y, z) = g(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_2(x, y, z) \quad (2.10)$$

$$h(x, y, z) = h(x^*, y^*, z^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x}(x - x^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y}(y - y^*) + \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z}(z - z^*) + \eta_3(x, y, z), \quad (2.11)$$

dengan  $\eta_1(x, y, z), \eta_2(x, y, z)$ , dan  $\eta_3(x, y, z)$  adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu tersebut, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_1(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} &= 0 \\ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_2(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} &= 0 \\ \lim_{(x,y,z) \rightarrow (x^*,y^*,z^*)} \frac{\eta_3(x,y,z)}{\|\vec{w}\|} &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

dengan  $\vec{w} = (x - x^*, y - y^*, z - z^*)$ .

Berdasarkan persamaan (2.9), (2.10) dan (2.11), serta mengingat

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x^*)}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y^*)}{dt}, \quad \text{dan} \quad \frac{dz}{dt} = \frac{d(z-z^*)}{dt},$$

maka persamaan (2.9), (2.10), dan (2.11) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \\ z - z^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x^*, y^*, z^*) \\ g(x^*, y^*, z^*) \\ h(x^*, y^*, z^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x^*) \\ (y - y^*) \\ (z - z^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Matriks 
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix}$$
 disebut matriks Jacobi

atau *partial derivative matrix* dan dinotasikan dengan  $J(x^*, y^*, z^*)$  atau  $J$  saja jika dianggap jelas. Karena

$$f(x^*, y^*, z^*) = g(x^*, y^*, z^*) = h(x^*, y^*, z^*) = 0,$$

persamaan (2.12) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x^*, y^*, z^*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix}.$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\eta}. \quad (2.13)$$

Untuk  $(x, y, z)$  yang berada cukup dekat dengan  $(x^*, y^*, z^*)$ ,  $(u, v, w)$  bernilai kecil sehingga  $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$ . Oleh karena itu,  $\vec{\eta}$  dapat diabaikan dan sistem nonlinear (2.13) dapat dihampiri oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.14)$$

Untuk  $x = x^*$ ,  $y = y^*$ , dan  $z = z^*$  diperoleh  $(u^*, v^*, w^*) = (0, 0, 0)$  sehingga sistem linear (2.14) memiliki titik kesetimbangan  $(u^*, v^*, w^*) = (0, 0, 0)$  (Boyce dan DiPrima, 2008).

### Teorema 2.7.1

Titik kesetimbangan sistem *autonomous* nonlinear bersifat

1. stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah stabil,
2. tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan adalah tak stabil

(Edward dan Penney, 2001).

## 2.8 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu sistem linear mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^n + P_1\lambda^{n-1} + P_2\lambda^{n-2} + \dots + P_{n-1}\lambda + P_n = 0, \quad (2.15)$$

maka kestabilan titik kesetimbangan dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz tanpa harus menentukan nilai eigen matriks Jacobi.

### **Teorema 2.8.1 Kriteria Routh-Hurwitz**

Pandang polinom pada persamaan (2.15). Akar-akar persamaan tersebut memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$P_n > 0 \text{ dan } |H_1| = P_1 > 0, \quad |H_2| = \begin{vmatrix} P_1 & 1 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} P_1 & 1 & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 \\ P_5 & P_4 & P_3 \end{vmatrix} > 0, \dots, H_k = \begin{vmatrix} P_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ P_3 & P_2 & P_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & P_k \end{vmatrix} > 0,$$

dengan  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Untuk  $n = 3$ , persamaan (2.15) menjadi

$$\lambda^3 + P_1\lambda^2 + P_2\lambda + P_3 = 0. \quad (2.16)$$

Akar-akar persamaan (2.16) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

- (i)  $P_3 > 0$ ,
- (ii)  $|H_1| = P_1 > 0$ ,
- (iii)  $|H_2| = \begin{vmatrix} P_1 & 1 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} = P_1P_2 - P_3 > 0$

(Glass dan Murray, 2001).



## 2.9 Metode Lyapunov

### Definisi 2.9.1 Definit Positif dan Definit Negatif

Suatu fungsi  $\mathcal{L} : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , di mana  $V$  adalah persekitaran dengan pusat  $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$  dikatakan definit positif pada  $V$  jika  $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0$  dan definit negatif pada  $V$  jika  $\mathcal{L}(\vec{x}) < 0$  untuk  $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}$  dan  $\mathcal{L}(\vec{0}) = 0$ .

### Definisi 2.9.2 Fungsi Lyapunov Lemah

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(\vec{x})$ . Suatu fungsi  $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  disebut fungsi Lyapunov lemah jika terdapat suatu persekitaran  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  dengan pusat  $\vec{x}^*$  yang memenuhi

- (i)  $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$  dan  $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W$
- (ii)  $\frac{d\mathcal{L}(\vec{x})}{dt} \leq 0, \forall \vec{x} \in W$

### Definisi 2.9.3 Fungsi Lyapunov Kuat

Fungsi  $\mathcal{L}$  disebut fungsi Lyapunov kuat jika terdapat suatu persekitaran  $W$  dengan pusat  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.9.2 dan

$$\frac{d\mathcal{L}(\vec{x})}{dt} < 0, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in W.$$

### Teorema 2.9.1 Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = A(\vec{x})$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$ . Jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  maka  $\vec{x}^*$  bersifat stabil asimtotik global

(Arrowsmith, 1992).

## BAB III PEMBAHASAN

Pembahasan pada skripsi ini lebih ditekankan pada analisis dinamik, yaitu penentuan titik kesetimbangan, uji keberadaan titik kesetimbangan, dan penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Pada tahap akhir dilakukan beberapa simulasi numerik untuk mengilustrasikan hasil analisis dinamik yang telah diperoleh.

### 3.1 Formulasi Model

Pada bagian ini dibahas formulasi model tiga spesies yang terdiri dari dua spesies mutualisme dan satu spesies amensal. Amensal merupakan spesies yang terhambat pertumbuhannya karena keberadaan spesies lain. Jadi, penambahan spesies ketiga tidak mempengaruhi laju pertumbuhan dua spesies mutualisme, sehingga laju pertumbuhan dua spesies mutualisme dibentuk berdasarkan model mutualisme dua spesies pada Subbab 2.2 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x - a_{11}x^2 + a_{12}xy \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x - a_{22}y^2 + a_{21}xy.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Misalkan  $z$  menyatakan jumlah populasi spesies ketiga. Tingkat pertumbuhan intrinsik populasi spesies ketiga dinyatakan dengan  $a_3z$ . Selain itu, keberadaan *carrying capacity* menyebabkan pertumbuhan spesies ketiga terbatas dinyatakan dengan  $a_{33}z^2$ . Spesies ketiga bertindak sebagai amensal sehingga jumlah spesies ketiga berkurang karena pertumbuhannya terhambat oleh kedua spesies mutualisme yang dinyatakan dengan  $a_{31}xz$  dan  $a_{32}yz$ . Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi spesies ketiga adalah

$$\frac{dz}{dt} = a_3z - a_{33}z^2 - a_{31}xz - a_{32}yz,\tag{3.2}$$

dengan

$a_3 =$  tingkat pertumbuhan alami spesies ketiga,

$a_{33} =$  tingkat pengurangan spesies ketiga karena keterbatasan sumber daya lingkungan,

$a_{3i} =$  tingkat pengurangan spesies ketiga karena berinteraksi dengan spesies ke- $i$ ,  $i = 1, 2$ .

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2), maka diperoleh model tiga spesies mutualisme dan amensalisme sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_1x - a_{11}x^2 + a_{12}xy \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - a_{22}y^2 + a_{21}xy \\ \frac{dz}{dt} &= a_3z - a_{33}z^2 - a_{31}xz - a_{32}yz.\end{aligned}\tag{3.3}$$

### 3.2 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem (3.3) diperoleh ketika  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt}$  bernilai nol sehingga sistem (3.3) menjadi

$$a_1x - a_{11}x^2 + a_{12}xy = 0\tag{3.4.a}$$

$$a_2y - a_{22}y^2 + a_{21}xy = 0\tag{3.4.b}$$

$$a_3z - a_{33}z^2 - a_{31}xz - a_{32}yz = 0.\tag{3.4.c}$$

Persamaan (3.4.a) dapat ditulis dalam bentuk

$$x(a_1 - a_{11}x + a_{12}y) = 0$$

sehingga diperoleh

$$x = 0\tag{3.5.a}$$

atau

$$a_1 - a_{11}x + a_{12}y = 0.\tag{3.5.b}$$

Persamaan (3.4.b) dapat ditulis dalam bentuk

$$y(a_2 - a_{22}y + a_{21}x) = 0$$

sehingga

$$y = 0 \tag{3.5.c}$$

atau

$$a_2 - a_{22}y + a_{21}x = 0. \tag{3.5.d}$$

Persamaan (3.4.c) dapat ditulis dalam bentuk

$$z(a_3 - a_{33}z - a_{31}x - a_{32}y) = 0$$

sehingga

$$z = 0 \tag{3.5.e}$$

atau

$$a_3 - a_{33}z - a_{31}x - a_{32}y = 0. \tag{3.5.f}$$

Kombinasi dari keenam solusi tersebut menghasilkan delapan kemungkinan titik kesetimbangan yang terdiri dari satu titik kesetimbangan trivial ( $E_1$ ), enam titik kesetimbangan batas ( $E_2$  sampai dengan  $E_7$ ), dan satu titik kesetimbangan interior ( $E_8$ ).

### 1. Titik Kesetimbangan $E_1(0,0,0)$

Titik kesetimbangan ini diperoleh dari kombinasi solusi (3.5.a), (3.5.c) dan (3.5.e), yaitu  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{z} = 0$ . Titik kesetimbangan tersebut menunjukkan bahwa ketiga spesies mengalami kepunahan.

### 2. Titik Kesetimbangan $E_2\left(0,0,\frac{a_3}{a_{33}}\right)$

Titik kesetimbangan ini diperoleh dari kombinasi solusi (3.5.a), (3.5.c) dan (3.5.f), yaitu  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = 0$ , dan

$$a_3 - a_{33}z = 0$$

$$\bar{z} = \frac{a_3}{a_{33}}.$$

Titik kesetimbangan tersebut menunjukkan bahwa spesies pertama dan kedua punah, sedangkan spesies ketiga dapat bertahan hidup.

3. Titik Kesetimbangan  $E_3 \left( 0, \frac{a_2}{a_{22}}, 0 \right)$

Kombinasi dari solusi (3.5.a), (3.5.d) dan (3.5.e) menghasilkan titik kesetimbangan  $E_3$ , yaitu  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{z} = 0$ , dan

$$a_2 - a_{22}y = 0$$

$$\bar{y} = \frac{a_2}{a_{22}}.$$

Titik kesetimbangan ini menyatakan bahwa spesies pertama dan ketiga mengalami kepunahan, sedangkan spesies kedua bertahan hidup.

4. Titik Kesetimbangan  $E_4 \left( \frac{a_1}{a_{11}}, 0, 0 \right)$

Kombinasi dari solusi (3.5.b), (3.5.c) dan (3.5.e) menghasilkan titik kesetimbangan  $E_4$ , yaitu  $\bar{y} = 0$ ,  $\bar{z} = 0$  dan

$$a_1 - a_{11}x = 0$$

$$\bar{x} = \frac{a_1}{a_{11}}.$$

Titik kesetimbangan ini menyatakan bahwa spesies pertama dapat bertahan hidup, sedangkan spesies kedua dan ketiga mengalami kepunahan.

5. Titik Kesetimbangan  $E_5 \left( 0, \frac{a_2}{a_{22}}, \bar{z} \right)$

Titik kesetimbangan  $E_5$  diperoleh dari kombinasi solusi (3.5.a), (3.5.d) dan (3.5.f), yaitu  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{y} = \frac{a_2}{a_{22}}$ , dan

$$a_3 - a_{33}z - a_{32}y = 0$$

$$a_{33}z = a_3 - a_{32} \frac{a_2}{a_{22}}$$

$$\bar{z} = \frac{a_3 a_{22} - a_{32} a_2}{a_{33} a_{22}}.$$

Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa spesies pertama punah, sedangkan spesies kedua dan ketiga dapat bertahan hidup. Titik kesetimbangan  $E_5$  ada jika  $a_3a_{22} - a_{32}a_2 > 0$ .

6. Titik Kesetimbangan  $E_6 \left( \frac{a_1}{a_{11}}, 0, \bar{z} \right)$

Titik kesetimbangan  $E_6$  diperoleh dari kombinasi solusi (3.5.b), (3.5.c) dan (3.5.f) atau  $\bar{x} = \frac{a_1}{a_{11}}$ ,  $\bar{y} = 0$ , dan

$$a_3 - a_{33}z - a_{31}x = 0$$

$$a_{33}z = a_3 - a_{31} \frac{a_1}{a_{11}}$$

$$\bar{z} = \frac{a_3a_{11} - a_{31}a_1}{a_{33}a_{11}}.$$

Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa spesies pertama dan ketiga dapat bertahan hidup, sedangkan spesies kedua mengalami kepunahan. Titik kesetimbangan  $E_6$  ada jika  $a_3a_{11} - a_{31}a_1 > 0$ .

7. Titik Kesetimbangan  $E_7(\bar{x}, \bar{y}, 0)$

Titik kesetimbangan ini diperoleh dari kombinasi solusi (3.5.b), (3.5.d) dan (3.5.e), yaitu  $\bar{z} = 0$ ,

$$a_1 - a_{11}x + a_{12}y = 0$$

$$a_{11}x = a_1 + a_{12}y$$

$$x = \frac{a_1 + a_{12}y}{a_{11}}, \tag{3.6.a}$$

dan

$$a_2 - a_{22}y + a_{21}x = 0$$

$$a_{22}y = a_2 + a_{21}x$$

$$y = \frac{a_2 + a_{21}x}{a_{22}}. \tag{3.6.b}$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai dari  $\bar{x}$ , maka persamaan (3.6.b) disubstitusi ke persamaan (3.6.a) maka diperoleh persamaan (3.6.c).

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{a_1 + a_{12}y}{a_{11}} \\
 &= \frac{a_1 + a_{12} \frac{a_2 + a_{21}x}{a_{22}}}{a_{11}} \\
 &= \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2 + a_{12} a_{21} x}{a_{11} a_{22}} \\
 a_{11} a_{22} x &= a_1 a_{22} + a_{12} a_2 + a_{12} a_{21} x \\
 (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) x &= a_1 a_{22} + a_{12} a_2 \\
 \bar{x} &= \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}. \tag{3.6.c}
 \end{aligned}$$

Kemudian, substitusi persamaan (3.6.c) ke persamaan (3.6.b), maka diperoleh persamaan nilai  $\bar{y}$ .

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{a_2 + a_{21}x}{a_{22}} \\
 &= \frac{a_2 + a_{21} \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2}{(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})}}{a_{22}} \\
 &= \frac{a_2 a_{11} a_{22} - a_2 a_{12} a_{21} + a_{21} a_1 a_{22} + a_{21} a_{12} a_2}{a_{22} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \\
 &= \frac{a_{22} (a_2 a_{11} + a_{21} a_1)}{a_{22} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})} \\
 \bar{y} &= \frac{a_2 a_{11} + a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \tag{3.6.d}
 \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan ini menunjukkan bahwa kedua spesies yang bermutualisme dapat bertahan hidup sedangkan spesies ketiga punah. Titik kesetimbangan  $E_7$  ada jika  $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$ .

8. Titik Kesetimbangan  $E_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Titik kesetimbangan ini merupakan kombinasi dari solusi (3.5.b), (3.5.d) dan (3.5.f). Nilai  $\bar{x}$  dan  $\bar{y}$  pada  $E_8$  telah diperoleh di titik  $E_7$  yaitu pada persamaan (3.6.c) dan (3.6.d).

$$\bar{x} = \frac{(a_1 a_{22} + a_{12} a_2)}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$\bar{y} = \frac{(a_2 a_{11} + a_{21} a_1)}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

Selanjutnya untuk memperoleh nilai dari  $\bar{z}$ , maka persamaan (3.6.c) dan (3.6.d) disubstitusi ke dalam persamaan (3.5.f), sehingga diperoleh persamaan (3.6.e).

$$a_3 - a_{33}z - a_{31}x - a_{32}y = 0$$

$$z = \frac{a_3 - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}}$$

$$= \frac{a_3 - a_{31} \left( \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) - a_{32} \left( \frac{a_2 a_{11} + a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)}{a_{33}}$$

$$\bar{z} = \frac{a_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{31}(a_1a_{22} + a_{12}a_2) - a_{32}(a_2a_{11} + a_{21}a_1)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \quad (3.6.e)$$

Agar penyebut dari  $\bar{x}, \bar{y}$  sama dengan penyebut pada  $\bar{z}$ , maka  $\bar{x}, \bar{y}$  dikalikan dengan  $\frac{a_{33}}{a_{33}}$ , sehingga diperoleh titik kesetimbangan  $E_7$  sebagai berikut.

$$\bar{x} = \frac{a_{33}(a_1 a_{22} + a_{12} a_2)}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33}}$$

$$\bar{y} = \frac{a_{33}(a_2 a_{11} + a_{21} a_1)}{a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33}}$$

$$\bar{z} = \frac{a_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{31}(a_1a_{22} + a_{12}a_2) - a_{32}(a_2a_{11} + a_{21}a_1)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

Titik kesetimbangan  $E_8$  menunjukkan bahwa ketiga spesies dapat hidup berdampingan. Titik kesetimbangan  $E_8$  ada jika  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$  dan  $a_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{31}(a_1a_{22} + a_{12}a_2) - a_{32}(a_2a_{11} + a_{21}a_1) > 0$ .



### 3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan titik kesetimbangan pada model (3.3) diperiksa melalui analisis kestabilan berikut. Sistem (3.3) merupakan sistem yang nonlinear. Oleh karena itu sistem tersebut dilinearakan dengan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan, sehingga diperoleh matriks Jacobi sebagai berikut.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

dengan

$$\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} = a_1 - 2a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y}$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} = a_{12}\bar{x}$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} = a_{21}\bar{y}$$

$$\frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} = a_2 - 2a_{22}\bar{y} + a_{21}\bar{x}$$

$$\frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 0$$

$$\frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{x}} = -a_{31}\bar{z}$$

$$\frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{y}} = -a_{32}\bar{z}$$

$$\frac{\partial h(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y}.$$

1. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_1(0, 0, 0)$

Matriks Jacobi di titik  $E_1$  diperoleh dengan mensubstitusikan titik  $E_1$  ke matriks (3.7).

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks  $J(E_1)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_1) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)(a_3 - \lambda) = 0.$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E_1)$  adalah  $\lambda_1 = a_1$ ,  $\lambda_2 = a_2$ , dan  $\lambda_3 = a_3$ . Semua parameter bernilai positif, sehingga  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$  dan  $\lambda_3 > 0$ . Jadi, titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat tidak stabil.

2. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_2\left(0, 0, \frac{a_3}{a_{33}}\right)$

Jika titik  $E_2$  disubstitusi ke matriks (3.7) maka diperoleh matriks sebagai berikut.

$$\begin{aligned} J(E_2) &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ -a_{31} \frac{a_3}{a_{33}} & -a_{32} \frac{a_3}{a_{33}} & a_3 - 2a_{33} \frac{a_3}{a_{33}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ -a_{31} \frac{a_3}{a_{33}} & -a_{32} \frac{a_3}{a_{33}} & -a_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Nilai eigen matriks  $J(E_2)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_2) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_2 - \lambda & 0 \\ -a_{31} \frac{a_3}{a_{33}} & -a_{32} \frac{a_3}{a_{33}} & -a_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda)(-a_3 - \lambda) = 0.$$

Akar-akar dari persamaan karakteristik tersebut atau nilai eigen dari matriks  $J(E_2)$  adalah  $\lambda_1 = a_1$ ,  $\lambda_2 = a_2$ , dan  $\lambda_3 = -a_3$ . Terdapat nilai eigen yang bernilai positif, yaitu  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  maka titik kesetimbangan  $E_2$  bersifat tidak stabil.

### 3. Kestabilan titik kesetimbangan $E_3 \left(0, \frac{a_2}{a_{22}}, 0\right)$

Dengan mensubstitusi titik  $E_3$  ke matriks (3.7), diperoleh matriks sebagai berikut.

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} a_1 + a_{12} \frac{a_2}{a_{22}} & 0 & 0 \\ a_{21} \frac{a_2}{a_{22}} & a_2 - 2a_{22} \frac{a_2}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_{32} \frac{a_2}{a_{22}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} a_2 & 0 & 0 \\ a_{21} \frac{a_2}{a_{22}} & -a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks  $J(E_3)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_3) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} a_2 - \lambda & 0 & 0 \\ a_{21} \frac{a_2}{a_{22}} & -a_2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$\left(a_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} a_2 - \lambda\right) (-a_2 - \lambda) \left(a_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_2 - \lambda\right) = 0.$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E_3)$  adalah  $\lambda_1 = a_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} a_2$ ,  $\lambda_2 = -a_2$ , dan  $\lambda_3 = a_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_2$ . Salah satu nilai eigen bernilai positif, yaitu  $\lambda_1$  maka jenis kestabilan titik kesetimbangan  $E_3$  adalah tidak stabil.

#### 4. Kestabilan titik kesetimbangan $E_4 \left( \frac{a_1}{a_{11}}, 0, 0 \right)$

Matriks Jacobi di titik  $E_4$  diperoleh dengan mensubstitusikan titik  $E_4$  ke matriks (3.7).

$$\begin{aligned}
 J(E_4) &= \begin{bmatrix} a_1 - 2a_{11} \frac{a_1}{a_{11}} & a_{12} \frac{a_1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & a_2 + a_{21} \frac{a_1}{a_{11}} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_{31} \frac{a_1}{a_{11}} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Nilai eigen matriks  $J(E_4)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_4) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} -a_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(-a_1 - \lambda) \left( a_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_1 - \lambda \right) \left( a_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_1 - \lambda \right) = 0.$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E_4)$  adalah  $\lambda_1 = -a_1$ ,  $\lambda_2 = a_2 + \frac{a_{21}}{a_{11}} a_1$ , dan  $\lambda_3 = a_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_1$ . Salah satu nilai eigen bernilai positif, yaitu  $\lambda_2$  maka jenis kestabilan titik kesetimbangan  $E_4$  adalah tidak stabil.

5. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_5(0, \bar{y}, \bar{z})$

Jika titik  $E_5$  disubstitusi ke matriks (3.7) maka diperoleh matriks sebagai berikut.

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} a_1 + a_{12}\bar{y} & 0 & 0 \\ a_{21}\bar{y} & a_2 - 2a_{22}\bar{y} & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{32}\bar{y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_{12}\bar{y} & 0 & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_2 & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & A \end{bmatrix},$$

dengan

$$A = a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{32}\bar{y}$$

$$= a_3 - 2a_{33} \frac{a_3 a_{22} - a_{32} a_2}{a_{33} a_{22}} - a_{32} \frac{a_2}{a_{22}}$$

$$= -a_3 + \frac{a_{32} a_2}{a_{22}}$$

$$= -a_3 + a_{32}\bar{y},$$

sehingga matriks  $J(E_5)$  dapat ditulis menjadi

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} a_1 + a_{12}\bar{y} & 0 & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_2 & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & -a_3 + a_{32}\bar{y} \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks  $J(E_5)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_5) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_{12}\bar{y} - \lambda & 0 & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_2 - \lambda & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & -a_3 + a_{32}\bar{y} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Selanjutnya, diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut.

$$(a_1 + a_{12}\bar{y} - \lambda)(-a_2 - \lambda)(-a_3 + a_{32}\bar{y} - \lambda) = 0.$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E_5)$  adalah  $\lambda_1 = a_1 + a_{12}\bar{y}$ ,  $\lambda_2 = -a_2$ , dan  $\lambda_3 = -a_3 + a_{32}\bar{y}$ . Salah satu nilai eigen bernilai positif, yaitu  $\lambda_2$  maka jenis kestabilan titik kesetimbangan  $E_5$  adalah tidak stabil.

6. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_6 \left( \frac{a_1}{a_{11}}, 0, \bar{z} \right)$

Matriks Jacobi di titik  $E_6$  diperoleh dengan mensubstitusikan titik  $E_6$  ke matriks (3.7).

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_{11}\bar{x} & a_{12}\bar{x} & 0 \\ 0 & a_2 + a_{21}\bar{x} & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{31}\bar{x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a_1 & a_{12}\bar{x} & 0 \\ 0 & a_2 + a_{21}\bar{x} & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & B \end{bmatrix},$$

dengan

$$B = a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{31}\bar{x}$$

$$= a_3 - 2a_{33} \frac{a_3 a_{11} - a_{31} a_1}{a_{33} a_{11}} - a_{31} \frac{a_1}{a_{11}}$$

$$= -a_3 + a_{31} \frac{a_1}{a_{11}}$$

$$= -a_3 + a_{31}\bar{x},$$

sehingga matriks  $J(E_6)$  dapat ditulis menjadi

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} -a_1 & a_{12}\bar{x} & 0 \\ 0 & a_2 + a_{21}\bar{x} & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & -a_3 + a_{31}\bar{x} \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen  $J(E_6)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_6) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} -a_1 - \lambda & a_{12}\bar{x} & 0 \\ 0 & a_2 + a_{21}\bar{x} - \lambda & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & -a_{32}\bar{z} & -a_3 + a_{31}\bar{x} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-a_1 - \lambda)(a_2 + a_{21}\bar{x} - \lambda)(-a_3 + a_{31}\bar{x} - \lambda) = 0.$$

Nilai eigen dari matriks  $J(E_6)$  adalah  $\lambda_1 = -a_1$ ,  $\lambda_2 = a_2 + a_{21}\bar{x}$ , dan  $\lambda_3 = -a_3 + a_{31}\bar{x}$ . Jenis kestabilan titik kesetimbangan  $E_6$  bersifat tidak stabil karena  $\lambda_2$  bernilai positif.

7. Kestabilan titik kesetimbangan  $E_7(\bar{x}, \bar{y}, 0)$

Substitusi titik  $E_7$  ke matriks (3.7), sehingga diperoleh matriks sebagai berikut.

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} a_1 - 2a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & a_2 - 2a_{22}\bar{y} + a_{21}\bar{x} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & D & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} \end{bmatrix},$$

dengan

$$C = a_1 - 2a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y}$$

$$D = a_2 - 2a_{22}\bar{y} + a_{21}\bar{x}.$$

Substitusi persamaan (3.6.c) dan (3.6.d) ke  $C$  dan  $D$ , sehingga diperoleh

$$C = a_1 - 2a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y}$$

$$= a_1 - 2a_{11} \left( \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) + a_{12} \left( \frac{a_2 a_{11} + a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

$$= \frac{a_1(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - 2a_{11}(a_1 a_{22} + a_{12} a_2) + a_{12}(a_2 a_{11} + a_{21} a_1)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$= \frac{-a_1 a_{11} a_{22} - a_{11} a_{12} a_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

$$= -a_{11} \left( \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

$$= -a_{11}\bar{x},$$

dan

$$D = a_2 - 2a_{22}\bar{y} + a_{21}\bar{x}$$

$$= a_2 - 2a_{22} \left( \frac{a_2 a_{11} + a_{21} a_1}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right) + a_{21} \left( \frac{a_1 a_{22} + a_{12} a_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_2(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - 2a_{22}(a_2a_{11} + a_{21}a_1) + a_{21}(a_1a_{22} + a_{12}a_2)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
&= \frac{-a_{22}a_2a_{11} - a_{22}a_{21}a_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\
&= -a_{22} \left( \frac{a_2a_{11} + a_{21}a_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \right) \\
&= -a_{22}\bar{y}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut, matriks  $J(E_7)$  dapat ditulis menjadi

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} -a_{11}\bar{x} & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_{22}\bar{y} & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen  $J(E_7)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_7) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\bar{x} - \lambda & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_{22}\bar{y} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&(-a_{11}\bar{x} - \lambda)(-a_{22}\bar{y} - \lambda)(a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - \lambda) - \\
&\quad (a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - \lambda)(a_{21}\bar{y})(a_{12}\bar{x}) = 0 \\
&[(-a_{11}\bar{x} - \lambda)(-a_{22}\bar{y} - \lambda) - (a_{21}\bar{y})(a_{12}\bar{x})] \\
&\quad (a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - \lambda) = 0 \\
&[\lambda^2 + (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}] \\
&\quad (a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - \lambda) = 0. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan karakteristik (3.8), salah satu nilai eigen dari matriks  $J(E_7)$  adalah  $(a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - \lambda)$  dan dua nilai eigen lainnya diperoleh dengan mencari akar-akar dari persamaan sebagai berikut.

$$\lambda^2 + (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y} = 0. \quad (3.9)$$



Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz pada Subbab 2.8, akar-akar persamaan (3.9) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y} > 0 \text{ dan } a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} > 0,$$

dikarenakan  $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$  adalah syarat keberadaan titik kesetimbangan  $E_7$  dan  $a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y}$  pasti bernilai positif, maka persamaan (3.9) memiliki akar-akar dengan bagian riil negatif. Oleh karena itu, kestabilan titik kesetimbangan  $E_7$  stabil asimtotik jika  $a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} < 0$ .

#### 8. Kestabilan titik kesetimbangan $E_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$

Jika titik  $E_8$  disubstitusi ke matriks (3.7) maka diperoleh matriks sebagai berikut.

$$J(E_8) = \begin{bmatrix} C & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & D & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & a_{32}\bar{z} & G \end{bmatrix},$$

dengan  $C$  dan  $D$  telah diperoleh dari perhitungan pada titik  $E_7$ , yaitu

$$C = a_1 - 2a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y} = -a_{11}\bar{x},$$

$$D = a_2 - 2a_{22}\bar{y} + a_{21}\bar{x} = -a_{22}\bar{y},$$

dan

$$G = a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} = -a_{33}\bar{z}$$

(Perhitungan nilai  $G$  dapat dilihat pada Lampiran 1).

Berdasarkan perhitungan  $C$ ,  $D$ , dan  $G$ , matriks  $J(E_8)$  dapat ditulis menjadi

$$J(E_8) = \begin{bmatrix} -a_{11}\bar{x} & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_{22}\bar{y} & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & a_{32}\bar{z} & -a_{33}\bar{z} \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen  $J(E_8)$  diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $|J(E_8) - \lambda I| = 0$ , yaitu

$$\begin{vmatrix} -a_{11}\bar{x} - \lambda & a_{12}\bar{x} & 0 \\ a_{21}\bar{y} & -a_{22}\bar{y} - \lambda & 0 \\ -a_{31}\bar{z} & a_{32}\bar{z} & -a_{33}\bar{z} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-a_{11}\bar{x} - \lambda)(-a_{22}\bar{y} - \lambda)(-a_{33}\bar{z} - \lambda) - (-a_{33}\bar{z} - \lambda)a_{12}a_{21}\bar{x}\bar{y} = 0$$

$$\begin{aligned}
& -(a_{11}\bar{x} + \lambda)(a_{22}\bar{y} + \lambda)(a_{33}\bar{z} + \lambda) + (a_{33}\bar{z} + \lambda)a_{12}a_{21}\bar{x}\bar{y} = 0 \\
& (a_{11}\bar{x} + \lambda)(a_{22}\bar{y} + \lambda)(a_{33}\bar{z} + \lambda) - (a_{33}\bar{z} + \lambda)a_{12}a_{21}\bar{x}\bar{y} = 0 \\
& (a_{33}\bar{z} + \lambda)((a_{11}\bar{x} + \lambda)(a_{22}\bar{y} + \lambda) - a_{12}a_{21}\bar{x}\bar{y}) = 0 \\
& (a_{33}\bar{z} + \lambda)(\lambda^2 + (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})\lambda + a_{11}a_{22}\bar{x}\bar{y} - a_{12}a_{21}\bar{x}\bar{y}) = 0 \\
& (a_{33}\bar{z} + \lambda)(\lambda^2 + (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}) = 0 \\
& \lambda^3 + (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{33}\bar{z})\lambda^2 \\
& + ((a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})a_{33}\bar{z} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y})\lambda \\
& + (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}\bar{z} = 0.
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik yang telah diperoleh dapat disederhanakan bentuknya menjadi

$$\lambda^3 - P_1\lambda^2 - P_2\lambda + P_3 = 0, \quad (3.10)$$

dengan

$$P_1 = a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{33}\bar{z}$$

$$P_2 = (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})a_{33}\bar{z} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}$$

$$P_3 = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

Persamaan (3.10) sulit untuk diselesaikan, sehingga sifat nilai eigen akan dianalisis dengan kriteria Routh-Hurwitz.

Berdasarkan Teorema 2.8.1, akar-akar persamaan (3.10) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

- i.  $P_3 > 0$ ,
- ii.  $|H_1| = P_1 > 0$ ,
- iii.  $|H_2| = \begin{vmatrix} P_1 & 1 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} > 0$ .

Nilai parameter  $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{21} > 0$ , sehingga

$$i. P_3 = (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}\bar{z} > 0,$$

$$ii. |H_1| = P_1 = a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{33}\bar{z} > 0,$$

$$iii. |H_2| = \begin{vmatrix} P_1 & 1 \\ P_3 & P_2 \end{vmatrix} = |P_1P_2 - P_3| > 0$$

$$H_2 = (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y} + a_{33}\bar{z})((a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})a_{33}\bar{z} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}) - (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{33}a_{12}a_{21})\bar{x}\bar{y}\bar{z} > 0$$

$$H_2 = 2a_{11}a_{22}a_{33}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + a_{11}^2a_{33}\bar{x}^2\bar{y} + a_{22}^2a_{33}\bar{y}^2\bar{z} + (a_{11}\bar{x} + a_{22}\bar{y})a_{33}^2\bar{z}^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{11}\bar{x}^2\bar{y} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})a_{22}\bar{x}\bar{y}^2 > 0. \quad (3.11)$$

Jadi, titik kesetimbangan  $E_8$  bersifat stabil karena persamaan (3.11) terpenuhi.

### 3.4 Kestabilan Global

Sifat kestabilan di sekitar titik kesetimbangan telah dianalisis pada Subbab 3.3. Dari analisis tersebut, ada kemungkinan titik kesetimbangan yang bersifat stabil lokal juga bersifat stabil global. Dua titik kesetimbangan yang bersifat stabil lokal juga dimungkinkan bersifat stabil global, yaitu titik  $E_7$  dan  $E_8$ .

#### 3.4.1 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan $E_7$

Analog dengan Rao, dkk. (2012), diberikan fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan  $E_7(\bar{x}, \bar{y}, 0)$  sebagai berikut.

$$\mathcal{L}(x, y) = \left(x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}}\right) + \left(y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}}\right).$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi  $\mathcal{L}$  tersebut memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.9.2, yaitu  $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$  dan  $\mathcal{L}(x, y) > 0, \forall x, y \neq \bar{x}, \bar{y} \in W$ .

(i) Pembuktian  $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) &= \left(\bar{x} - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{\bar{x}}{\bar{x}}\right) + \left(\bar{y} - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{\bar{y}}{\bar{y}}\right) \\ &= (0 - \bar{x} \ln 1) + (0 - \bar{y} \ln 1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ .

(ii) Pembuktian  $\mathcal{L}(x, y) > 0, \forall x, y \neq \bar{x}, \bar{y} \in W$

Bukti :

Analog dengan Widayani (2012), misalkan terdapat fungsi  $f(s) = s - \ln s$ . Turunan pertama  $f(s)$  terhadap  $s$  adalah

$$f'(s) = 1 - \frac{1}{s}.$$

Titik stationer  $f(s)$  diperoleh ketika  $f'(s) = 0$ . Nilai  $s$  yang memenuhi  $f'(s) = 0$  adalah

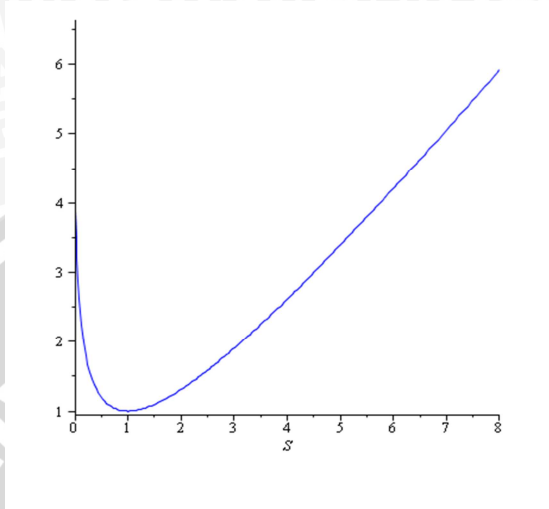
$$s = 1 \leftrightarrow y = f(1) = 1.$$

Untuk kemonotonan fungsi  $f(s)$  diperoleh ilustrasi berikut ini.



Gambar 3.1 Grafik kemonotonan fungsi  $f(s)$

Dari ilustrasi tersebut, jelas bahwa  $(1,1)$  adalah titik minimum  $f(s)$ . Grafik fungsi  $f(s)$  dapat dilihat pada Gambar 3.2, di mana dari gambar tersebut tampak jelas bahwa  $f(s) \geq 1$ .



Gambar 3.2 Grafik fungsi

(a) Misalkan  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ , diperoleh  $f(0) = 4$  sehingga

Karena  $f(1) = 1$ , maka diperoleh

$$f(x) = x^2 - 2x + 4 \quad (3.17)$$

(b) Misalkan  $f(x) = x^2 - 2x + 4$ , diperoleh  $f(0) = 4$  sehingga

Karena  $f(1) = 1$  maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 y &\geq \bar{y} + \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} \\
 y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} &\geq 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

Dari persamaan (3.17) dan (3.18) terbukti bahwa

$$x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} \geq 0 \text{ dan } y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} \geq 0,$$

sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}(x, y) = \left( x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} \right) + \left( y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} \right) > 0. \tag{3.19}$$

Dengan kata lain

$$\mathcal{L}(x, y) > 0, \forall x, y \neq \bar{x}, \bar{y} \in W.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $\mathcal{L}$  memenuhi Definisi 2.9.3 yaitu  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0, \forall x, y \neq \bar{x}, \bar{y} \in W$ .

Berdasarkan persamaan (3.5.b) dan (3.5.d),  $\bar{x}$  dan  $\bar{y}$  dapat ditulis sebagai

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_{12}y}{a_{11}}, \quad \bar{y} = \frac{a_2 + a_{21}x}{a_{22}}.$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dy} \frac{dy}{dt} \\
 &= \left( \frac{x - \bar{x}}{x} \right) \frac{dx}{dt} + \left( \frac{y - \bar{y}}{y} \right) \frac{dy}{dt} \\
 &= \left( \frac{x - \bar{x}}{x} \right) x (a_1 - a_{11}x + a_{12}y) \\
 &\quad + \left( \frac{y - \bar{y}}{y} \right) y (a_2 - a_{22}y + a_{21}x) \\
 &= (x - \bar{x})(a_1 - a_{11}x + a_{12}y) + (y - \bar{y})(a_2 - a_{22}y + a_{21}x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x - \bar{x})((a_1 + \alpha_{12}y) - \alpha_{11}x) \\
&\quad + (y - \bar{y})((a_2 + \alpha_{21}x) - \alpha_{22}y) \\
&= (a_1 + \alpha_{12}y)x - \alpha_{11}x^2 - \bar{x}(a_1 + \alpha_{12}y) + \alpha_{11}x\bar{x} \\
&\quad + (a_2 + \alpha_{21}x)y - \alpha_{22}y^2 - (a_2 + \alpha_{21}x)\bar{y} + \alpha_{22}y\bar{y} \\
&= \frac{\alpha_{11}(a_1 + \alpha_{12}y)}{\alpha_{11}}x - \alpha_{11}x^2 - \frac{\alpha_{11}(a_1 + \alpha_{12}y)}{\alpha_{11}}\bar{x} + \alpha_{11}x\bar{x} \\
&\quad + \frac{\alpha_{22}(a_2 + \alpha_{21}x)}{\alpha_{22}}y - \alpha_{22}y^2 - \frac{\alpha_{22}(a_2 + \alpha_{21}x)}{\alpha_{22}}\bar{y} + \alpha_{22}y\bar{y} \\
&= \alpha_{11}\bar{x}x - \alpha_{11}x^2 - \alpha_{11}\bar{x}^2 + \alpha_{11}x\bar{x} \\
&\quad + \alpha_{22}\bar{y}y - \alpha_{22}y^2 - \alpha_{22}\bar{y}^2 + \alpha_{22}y\bar{y} \\
&= -\alpha_{11}(x^2 - 2\bar{x}x + \bar{x}^2) - \alpha_{22}(y^2 - 2\bar{y}y + \bar{y}^2) \\
&= -\alpha_{11}(x - \bar{x})^2 - \alpha_{22}(y - \bar{y})^2 < 0.
\end{aligned}$$

Terbukti  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0$ , maka menurut definisi 2.9.3 fungsi Lyapunov  $\mathcal{L}$  adalah fungsi Lyapunov kuat, sehingga titik kesetimbangan  $E_7$  bersifat stabil asimtotik global.

### 3.4.2 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan $E_8$

Analog dengan Rao, dkk. (2012), diberikan fungsi Lyapunov untuk titik kesetimbangan  $E_8(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  sebagai berikut.

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \left(x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}}\right) + \left(y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}}\right) + \left(z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}}\right).$$

Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi  $\mathcal{L}$  tersebut memenuhi kondisi (i) pada Definisi 2.9.2, yaitu  $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$  dan  $\mathcal{L}(x, y, z) > 0, \forall x, y, z \neq \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in W$ .

(i) Pembuktian  $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$

Bukti :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) &= \left( \bar{x} - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \right) + \left( \bar{y} - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{\bar{y}}{\bar{y}} \right) \\ &\quad + \left( \bar{z} - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{\bar{z}}{\bar{z}} \right) \\ &= (0 - \bar{x} \ln 1) + (0 - \bar{y} \ln 1) + (0 - \bar{z} \ln 1) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa  $\mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$ .

(iii) Pembuktian  $\mathcal{L}(x, y, z) > 0, \forall x, y, z \neq \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in W$

Bukti :

Sebelumnya telah dibuktikan bahwa  $\mathcal{L}(x, y) > 0, \forall x, y \neq \bar{x}, \bar{y} \in W$  pada kestabilan global titik kesetimbangan  $E_7$ , sehingga diperoleh persamaan (3.19). Fungsi Lyapunov pada  $E_8$  adalah

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \left( x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} \right) + \left( y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} \right) + \left( z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}} \right),$$

sehingga cukup dibuktikan bahwa  $\left( z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}} \right) > 0$ .

Misalkan  $s = \frac{z}{\bar{z}}$ , diperoleh  $f\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \frac{z}{\bar{z}} - \ln \frac{z}{\bar{z}} \geq 1$  sehingga

$$\frac{z}{\bar{z}} \geq 1 + \ln \frac{z}{\bar{z}}.$$

Karena  $\bar{z} > 0$ , maka diperoleh

$$z \geq \bar{z} \left( 1 + \ln \frac{z}{\bar{z}} \right) = \bar{z} + \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}}$$

$$z \geq \bar{z} + \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}}$$

$$z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}} \geq 0. \tag{3.20}$$

Dari persamaan (3.17), (3.18), dan (3.20) terbukti bahwa

$$x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}} \geq 0, y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}} \geq 0, \text{ dan } z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}} \geq 0,$$



sehingga diperoleh

$$\mathcal{L}(x, y, z) = \left(x - \bar{x} - \bar{x} \ln \frac{x}{\bar{x}}\right) + \left(y - \bar{y} - \bar{y} \ln \frac{y}{\bar{y}}\right) + \left(z - \bar{z} - \bar{z} \ln \frac{z}{\bar{z}}\right) > 0.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $\mathcal{L}$  memenuhi Definisi 2.9.3 yaitu  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0, \forall x, y, z \neq \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in W$ .

Berdasarkan persamaan (3.5.b), (3.5.d), dan (3.5.f),  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , dan  $\bar{z}$  dapat ditulis sebagai

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_{12}y}{a_{11}},$$

$$\bar{y} = \frac{a_2 + a_{21}x}{a_{22}},$$

$$\bar{z} = \frac{a_3 - a_{31}x - a_{32}y}{a_{33}}.$$

Bukti :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d\mathcal{L}}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{d\mathcal{L}}{dz} \frac{dz}{dt} \\ &= \left(\frac{x - \bar{x}}{x}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{y - \bar{y}}{y}\right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{z - \bar{z}}{z}\right) \frac{dz}{dt} \\ &= -\alpha_{11}(x - \bar{x})^2 - \alpha_{22}(y - \bar{y})^2 - \alpha_{33}(z - \bar{z})^2 < 0 \end{aligned}$$

(Perhitungan  $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$  dapat dilihat pada Lampiran 2).

Terbukti  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} < 0$ , maka menurut definisi 2.9.3 fungsi Lyapunov  $\mathcal{L}$  adalah fungsi Lyapunov kuat, sehingga titik kesetimbangan  $E_3$  bersifat stabil asimtotik global.

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, syarat keberadaan dan syarat kestabilan titik kesetimbangan model secara ringkas diberikan di Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Syarat keberadaan dan syarat kestabilan titik kesetimbangan

Titik tetap	Syarat Keberadaan	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_1(0,0,0)$	tidak ada	tidak stabil	-
$E_2\left(0,0,\frac{a_3}{\alpha_{33}}\right)$	tidak ada	tidak stabil	-
$E_3\left(0,\frac{a_2}{\alpha_{22}},0\right)$	tidak ada	tidak stabil	-
$E_4\left(\frac{a_1}{\alpha_{11}},0,0\right)$	tidak ada	tidak stabil	-
$E_5\left(0,\frac{a_2}{\alpha_{22}},\bar{z}\right)$	$a_3 a_{22} - a_{32} a_2 > 0$	tidak stabil	-
$E_6\left(\frac{a_1}{\alpha_{11}},0,\bar{z}\right)$	$a_3 a_{11} - a_{31} a_1 > 0$	tidak stabil	-
$E_7(\bar{x},\bar{y},0)$	$a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$	stabil asimtotik global	$a_3 - a_{31} \bar{x} < a_{32} \bar{y}$
$E_8(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$	(i) $a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} a_{33} > 0$ (ii) $a_3(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) - a_{31}(a_1 a_{22} + a_{12} a_2) - a_{32}(a_2 a_{11} + a_{21} a_1) > 0$	stabil asimtotik global	-

### 3.5 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dibahas simulasi numerik dengan metode Runge Kutta orde 4 menggunakan *software* MATLAB 2008. Perilaku solusi dalam simulasi tersebut dibandingkan dengan perhitungan secara analitik pada Subbab 3.3. *Source code* program ditunjukkan pada Lampiran 3. Nilai parameter yang digunakan dalam simulasi numerik diberikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2 Tabel parameter simulasi numerik

Simulasi		I	II	III
Gambar		3.3 & 3.4	3.5 & 3.6	3.7 & 3.8
P a r a m e t e r	$a_1$	3	6	1.2
	$a_2$	6	7	2.4
	$a_3$	9	5	1.7
	$a_{11}$	0.2	1.3	1.9
	$a_{22}$	0.6	1.6	0.6
	$a_{33}$	0.8	2.4	0.4
	$a_{12}$	0.4	0.4	0.4
	$a_{21}$	0.06	0.7	1.7
	$a_{31}$	0.08	0.4	2.4
	$a_{32}$	0.05	0.7	0.9

### 3.5.1 Simulasi I

Simulasi I menggunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.2. Berdasarkan Tabel 3.1 tampak jelas bahwa syarat keberadaan titik  $E_5, E_6, E_7$  dan  $E_8$  terpenuhi, yaitu

$$E_5 \quad a_3 a_{22} - a_{32} a_2 = 5.10 > 0,$$

$$E_6 \quad a_3 a_{11} - a_{31} a_1 = 1.56 > 0,$$

$$E_7 \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0.096 > 0,$$

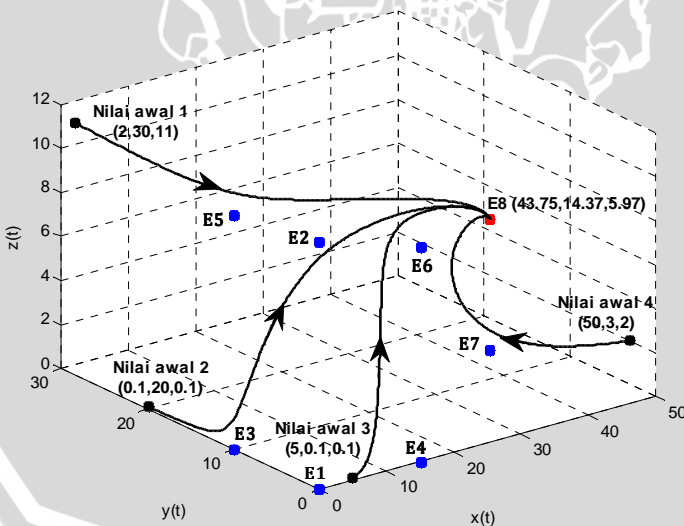
$$E_8 \quad (i) \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0.096 > 0$$

$$(ii) \quad a_3(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) - a_{31}(a_1 a_{22} + a_{12} a_2) - a_{32}(a_2 a_{11} + a_{21} a_1) = 0.45 > 0.$$

Karena syarat keberadaan dari titik  $E_8$  terpenuhi maka titik  $E_8$  bersifat stabil. Namun, untuk syarat kestabilan dari titik  $E_7$  tidak terpenuhi karena

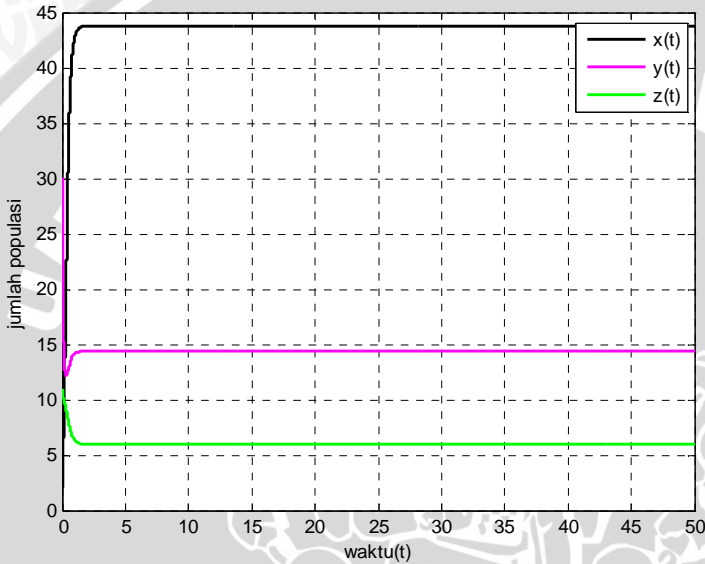
$$a_3 - a_{31} \bar{x} - a_{32} \bar{y} = 4.78 > 0.$$

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada simulasi I, hanya titik  $E_8$  yang bersifat stabil asimtotik seperti ditunjukkan Gambar 3.3.



Gambar 3.3 Potret fase model simulasi I

Gambar 3.3 menunjukkan bahwa potret fase solusi dengan beberapa nilai awal menuju ke titik kesetimbangan  $E_8$ . Dari potret fase tersebut tampak jelas bahwa dengan menggunakan nilai parameter pada simulasi I, titik kesetimbangan  $E_8$  bersifat stabil. Titik kesetimbangan  $E_5$ ,  $E_6$  dan  $E_7$  tetap ada, namun tidak stabil.



Gambar 3.4 Grafik solusi  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  pada simulasi I

Gambar 3.4 juga memperjelas bahwa grafik solusi  $x(t)$ ,  $y(t)$ , dan  $z(t)$  dengan menggunakan parameter pada simulasi I dengan salah satu nilai awal, yaitu  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 30$ , dan  $z(0) = 11$  konvergen menuju  $(43.75, 14.37, 5.97)$  dalam waktu kurang dari 5. Hal ini berarti bahwa kedua spesies mutualisme dan amensal akan hidup berdampingan dalam waktu berhingga.

### 3.5.2 Simulasi II

Pada simulasi II digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.2. Berdasarkan Tabel 3.1 tampak jelas bahwa syarat keberadaan titik  $E_5$ ,  $E_6$ , dan  $E_7$  terpenuhi, yaitu

$$E_5 \quad a_3 a_{22} - a_{32} a_2 = 3.10 > 0,$$

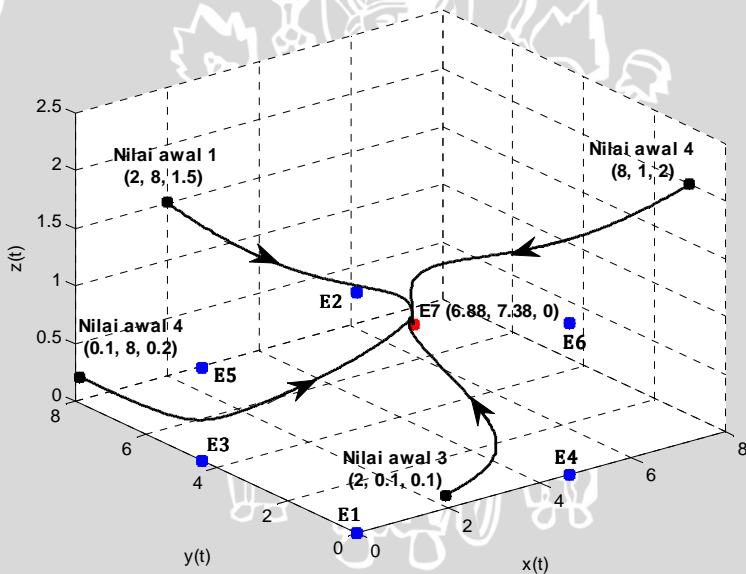
$$E_6 \quad a_3 a_{11} - a_{31} a_1 = 4.1 > 0,$$

$$E_7 \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 1.80 > 0,$$

dan syarat kestabilan dari titik  $E_7$  juga terpenuhi, yaitu

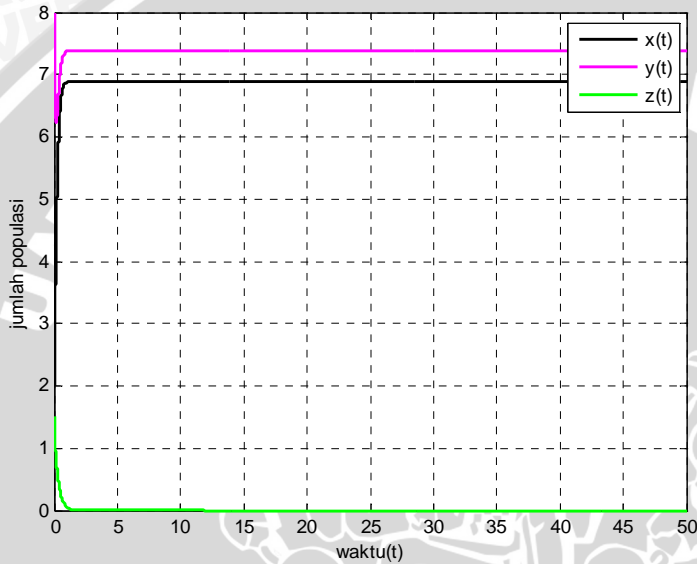
$$a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} = -2.92 < 0.$$

Berdasarkan nilai parameter yang diberikan pada simulasi II, hanya titik  $E_7$  yang bersifat stabil asimtotik seperti ditunjukkan Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Potret fase model simulasi II

Gambar 3.5 menunjukkan bahwa potret fase solusi dengan beberapa nilai awal menuju ke titik kesetimbangan  $E_7$ . Dari potret fase tersebut tampak jelas bahwa dengan menggunakan nilai parameter pada simulasi II, titik kesetimbangan  $E_7$  bersifat stabil. Titik kesetimbangan  $E_5$  dan  $E_6$  tetap ada, namun tidak stabil.



Gambar 3.6 Grafik solusi  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  pada simulasi II

Gambar 3.6 juga memperjelas bahwa grafik solusi  $x(t)$ ,  $y(t)$ , dan  $z(t)$  dengan menggunakan parameter pada simulasi II dengan salah satu nilai awal, yaitu  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 8$ , dan  $z(0) = 1.5$  konvergen menuju  $(6.88, 7.38, 0)$  dalam waktu kurang dari 5. Hal ini berarti bahwa kedua spesies mutualisme akan hidup berdampingan, sedangkan amensal akan punah dalam waktu berhingga.

### 3.5.3 Simulasi III

Pada simulasi III digunakan nilai parameter pada Tabel 3.2. Berdasarkan Tabel 3.1 tampak jelas bahwa hanya syarat keberadaan dari titik  $E_6$  dan  $E_7$  terpenuhi, yaitu

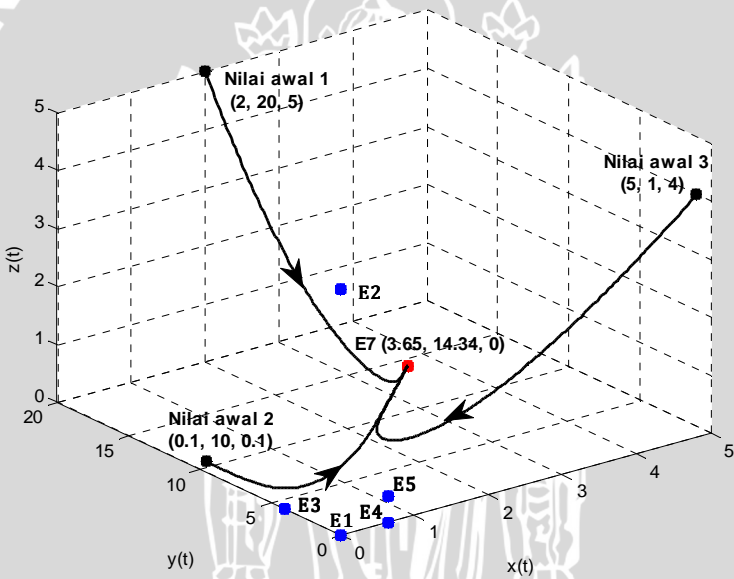
$$E_6 \quad a_3 a_{11} - a_{31} a_1 = 0.35 > 0,$$

$$E_7 \quad a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = 0.46 > 0,$$

dan syarat kestabilan dari titik  $E_7$  juga terpenuhi, yaitu

$$a_3 - a_{31} \bar{x} - a_{32} \bar{y} = -19.97 < 0.$$

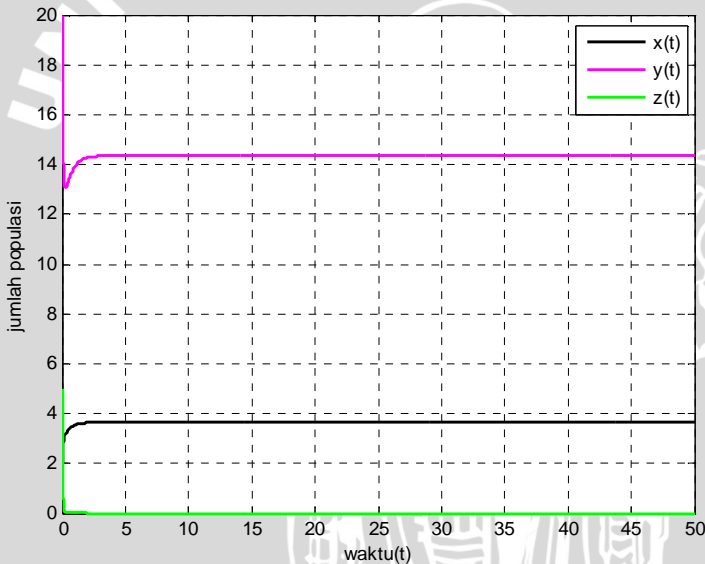
Untuk nilai parameter yang diberikan pada simulasi III, hanya titik  $E_7$  yang bersifat stabil asimtotik seperti ditunjukkan Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Potret fase model simulasi III



Gambar 3.7 menunjukkan bahwa potret fase solusi dengan beberapa nilai awal menuju ke titik kesetimbangan  $E_7$ . Dari potret fase tersebut tampak jelas bahwa dengan menggunakan nilai parameter pada simulasi III, hanya titik kesetimbangan  $E_7$  yang bersifat stabil. Gambar 3.8 juga memperjelas bahwa grafik solusi  $x(t)$ ,  $y(t)$ , dan  $z(t)$  dengan menggunakan parameter pada simulasi III dengan salah satu nilai awal, yaitu  $x(0) = 2$ ,  $y(0) = 20$ , dan  $z(0) = 5$  konvergen menuju  $(3.65, 14.34, 0)$  dalam waktu kurang dari 5. Hal ini berarti bahwa kedua spesies mutualisme hidup berdampingan, sedangkan amensal akan punah dalam waktu berhingga.



Gambar 3.8 Grafik solusi  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  pada simulasi III

## BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model simbiosis tiga spesies yang terdiri dari dua spesies mutualisme dan satu spesies amensal merupakan sistem *autonomous* nonlinear.
2. Pada model tiga spesies terdapat delapan titik kesetimbangan, yaitu satu titik kesetimbangan trivial ( $E_1$ ), enam titik kesetimbangan batas ( $E_2$  sampai dengan  $E_7$ ) yang masing-masing menggambarkan kepunahan pada salah satu atau dua spesies, dan satu titik kesetimbangan interior ( $E_8$ ) yang menunjukkan ketiga spesies hidup secara berdampingan.
3. Semua titik kesetimbangan tidak stabil, kecuali  $E_7$  dan  $E_8$  bersifat stabil asimtotik jika memenuhi syarat kestabilan dari masing-masing titik kesetimbangan. Berdasarkan analisis global dengan fungsi Lyapunov, ditunjukkan bahwa titik  $E_7$  dan  $E_8$  bersifat stabil asimtotik global.
4. Hasil simulasi numerik yang diperoleh sesuai dengan perhitungan secara analitik.

### 4.2 Saran

Pada penulisan selanjutnya, disarankan agar model tiga spesies yang telah diperoleh dapat dikembangkan dengan mengganti spesies amensal dengan spesies lain, misalnya komensal.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D. K. dan C. M. Place. 1992. *Dynamical Systems, Differential Equation, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman & Hall. London.
- Boyce, W. E. dan R. C. DiPrima. 2008. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Willey&Sons Inc. USA.
- Edward, C. H. dan D. E. Penney. 2001. *Differential Equation and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Ordinary Differential Equations with Modern Applications*. Second Edition. Wadsworth. USA.
- Glass, L. dan J. D. Murray. 2001. *Mathematical Biology : An Introduction*. Third Edition. New York : Springer-Verlag.
- Naggle, R. K. dan B. S. Edward. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Sixth Edition. Addison-Wesley. Florida.
- Rao, A. V. P., K. L. Narayan dan S. Bathul. 2012. *A Three Species Ecological Model with A Prey, Predator and Competitor to Predator and Optimal Harvesting of the Prey*. Bulletin of Society for Mathematical Service & Standarts. Vol. I/No. 1/49-62.
- Rao, K. K. dan K. L. Narayan. 2012. *Stability Analisis of A Three Species Syn-eco Dynamical System With Limited Alternative Food for All The Three Species*. Bulletin of society for mathematical services & standards vol.I/No.1/38-48.

Reddy, B. R., N. P. Kumar, dan N. Ch. Pattabhiramacharyulu. 2011. *A Model of Two Mutually interacting Species with Limited Resources of First Species and Unlimited for Second Species*. ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. Vol.6/1/61-66.

Ross, S.L. 1984. *Differential Equations*. Third Edition. John Wiley & Sons. New York.

Widayani, H. 2012. *Analisis Dinamik Model Predator-Prey dengan Perlindungan Terhadap Prey Terinfeksi*. Skripsi FMIPA UB.



## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Penyederhanaan titik kesetimbangan $E_8$

$$\begin{aligned}
 G &= a_3 - 2a_{33}\bar{z} - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} \\
 &= a_3 - a_{31}\bar{x} - a_{32}\bar{y} - 2a_{33}\bar{z} \\
 &= a_3 - a_{31} \frac{a_{33}(a_1a_{22} + a_{12}a_2)}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}} - a_{32} \frac{a_{33}(a_2a_{11} + a_{21}a_1)}{a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}} \\
 &\quad - 2a_{33} \left( \frac{a_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) - a_{31}(a_1a_{22} + a_{12}a_2)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right) \\
 &\quad + 2a_{33} \frac{a_{32}(a_2a_{11} + a_{21}a_1)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
 &= \frac{a_3(a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33}) - a_{31}a_{33}(a_1a_{22} + a_{12}a_2)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
 &\quad - \frac{a_{32}a_{33}(a_2a_{11} + a_{21}a_1) - 2a_3a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
 &\quad + \frac{2a_{31}a_{33}(a_1a_{22} + a_{12}a_2) + 2a_{32}a_{33}(a_2a_{11} + a_{21}a_1)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
 &= \frac{a_3a_{11}a_{22}a_{33} - a_3a_{12}a_{21}a_{33} - a_{31}a_1a_{22}a_{33} - a_{31}a_{12}a_2a_{33}}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
 &\quad - \frac{a_{32}a_2a_{11}a_{33} - a_{32}a_{21}a_1a_{33} - 2a_3a_{33}a_{11}a_{22} + 2a_3a_{33}a_{12}a_{21}}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
 &\quad + \frac{2a_{31}a_{33}a_1a_{22} + 2a_{31}a_{12}a_2a_{33} + 2a_{33}a_{32}a_2a_{11} + 2a_{33}a_{32}a_{21}a_1}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a_{32}a_{21}a_1a_{33} + a_1a_{22}a_{31}a_{33} + a_{11}a_2a_{32}a_{33}}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
&= \frac{-a_3a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_2a_{31} + a_3a_{12}a_{21}}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\
&= a_{33} \left( \frac{a_{31}(a_1a_{22} + a_{12}a_2) - a_3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{32}(a_2a_{11} + a_{21}a_1)}{a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \right) \\
&= -a_{33}\bar{z}.
\end{aligned}$$



**Lampiran 2. Perhitungan  $\frac{dL}{dt}$  pada  $E_8$**

$$\begin{aligned}
 \frac{dL}{dt} &= \frac{dL}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz} \frac{dz}{dt} \\
 &= \left(\frac{x - \bar{x}}{x}\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{y - \bar{y}}{y}\right) \frac{dy}{dt} + \left(\frac{z - \bar{z}}{z}\right) \frac{dz}{dt} \\
 &= \left(\frac{x - \bar{x}}{x}\right) x(a_1 - \alpha_{11}x + \alpha_{12}y) \\
 &\quad + \left(\frac{y - \bar{y}}{y}\right) y(a_2 - \alpha_{22}y + \alpha_{21}x) \\
 &\quad + \left(\frac{z - \bar{z}}{z}\right) z(a_3 - \alpha_{33}z - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y) \\
 &= (x - \bar{x})(a_1 - \alpha_{11}x + \alpha_{12}y) + (y - \bar{y})(a_2 - \alpha_{22}y + \alpha_{21}x) \\
 &\quad + (z - \bar{z})(a_3 - \alpha_{33}z - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y) \\
 &= (x - \bar{x})((a_1 + \alpha_{12}y) - \alpha_{11}x) \\
 &\quad + (y - \bar{y})((a_2 + \alpha_{21}x) - \alpha_{22}y) \\
 &\quad + (z - \bar{z})((a_3 - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y) - \alpha_{33}z) \\
 &= (a_1 + \alpha_{12}y)x - \alpha_{11}x^2 - \bar{x}(a_1 + \alpha_{12}y) + \alpha_{11}x\bar{x} \\
 &\quad + (a_2 + \alpha_{21}x)y - \alpha_{22}y^2 - (a_2 + \alpha_{21}x)\bar{y} + \alpha_{22}y\bar{y} \\
 &\quad + (a_3 - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y)z - \alpha_{33}z^2 \\
 &\quad - (a_3 - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y)\bar{z} + \alpha_{33}z\bar{z} \\
 &= \frac{\alpha_{11}(a_1 + \alpha_{12}y)}{\alpha_{11}}x - \alpha_{11}x^2 - \frac{\alpha_{11}(a_1 + \alpha_{12}y)}{\alpha_{11}}\bar{x} + \alpha_{11}x\bar{x} \\
 &\quad + \frac{\alpha_{22}(a_2 + \alpha_{21}x)}{\alpha_{22}}y - \alpha_{22}y^2 - \frac{\alpha_{22}(a_2 + \alpha_{21}x)}{\alpha_{22}}\bar{y} + \alpha_{22}y\bar{y} \\
 &\quad + \frac{\alpha_{33}(a_3 - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y)}{\alpha_{33}}z - \alpha_{33}z^2 \\
 &\quad - \frac{\alpha_{33}(a_3 - \alpha_{31}x - \alpha_{32}y)}{\alpha_{33}}\bar{z} + \alpha_{33}z\bar{z}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \alpha_{11}\bar{x}x - \alpha_{11}x^2 - \alpha_{11}\bar{x}^2 + \alpha_{11}x\bar{x} + \alpha_{22}\bar{y}y - \alpha_{22}y^2 \\
&\quad - \alpha_{22}\bar{y}^2 + \alpha_{22}y\bar{y} + \alpha_{33}z\bar{z} - \alpha_{33}z^2 - \alpha_{33}\bar{z}^2 + \alpha_{33}z\bar{z} \\
&= -\alpha_{11}(x^2 - 2\bar{x}x + \bar{x}^2) - \alpha_{22}(y^2 - 2\bar{y}y + \bar{y}^2) \\
&\quad - \alpha_{33}(z^2 - 2\bar{z}z + \bar{z}^2) \\
&= -\alpha_{11}(x - \bar{x})^2 - \alpha_{22}(y - \bar{y})^2 - \alpha_{33}(z - \bar{z})^2 < 0
\end{aligned}$$



### Lampiran 3. Program Model Tiga Spesies

Simulasi numerik sistem (3.3) dibuat pada *software MATLAB R2008a* dengan menggunakan metode Runge-Kutta Orde 4. Nilai parameter dan nilai awal sistem adalah

$$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 9, \alpha_{11} = 0.2, \alpha_{22} = 0.6, \alpha_{33} = 0.8, \\ \alpha_{12} = 0.4, \alpha_{21} = 0.06, \alpha_{31} = 0.08, \alpha_{32} = 0.05.$$

```
function dx = fx(t,x,y,z)
    dx=3*x - 0.2*x^2 + 0.4*x*y ;

function dy=fy(t,x,y,z)
    dy=6*y - 0.6*y^2 + 0.06*x*y ;

function dz = fz(t,x,y,z)
    dz=9*z - 0.8*z^2 - 0.08*z*x - 0.05*z*y;
```

#### Program utama :

```
%Metode RK 4
clear all;

dt=0.001;
t=0:dt:50;
N=length(t) - 1;
x = zeros(N+1,1);
y = zeros(N+1,1);
z= zeros(N+1,1);
x(1) = 9;
y(1) = 20;
z(1)=8;

for n = 1:N

    k11 = dt*fx(t(n),x(n),y(n),z(n));
    k12 = dt*fy(t(n),x(n),y(n),z(n));
    k13 = dt*fz(t(n),x(n),y(n),z(n));
    k21 =
dt*fx(t(n)+0.5*dt,x(n)+0.5*k11,y(n)+0.5*k12,z(n)+
.5*k13);
    k22 =
dt*fy(t(n)+0.5*dt,x(n)+0.5*k11,y(n)+0.5*k12,z(n)+
.5*k13);
```

```

k23 =
dt*fx(t(n)+0.5*dt,x(n)+0.5*k11,y(n)+0.5*k12,z(n)+0
.5*k13);
k31 =
dt*fy(t(n)+0.5*dt,x(n)+0.5*k21,y(n)+0.5*k22,z(n)+0
.5*k23);
k32 =
dt*fz(t(n)+0.5*dt,x(n)+0.5*k21,y(n)+0.5*k22,z(n)+0
.5*k23);
k33 =
dt*fz(t(n)+0.5*dt,x(n)+0.5*k21,y(n)+0.5*k22,z(n)+0
.5*k23);
k41 =
dt*fx(t(n)+dt,x(n)+k31,y(n)+k32,z(n)+k33);
k42 =
dt*fy(t(n)+dt,x(n)+k31,y(n)+k32,z(n)+k33);
k43 =
dt*fz(t(n)+dt,x(n)+k31,y(n)+k32,z(n)+k33);

x(n+1) = x(n) + (1/6)*(k11+2*k21+2*k31+k41);
y(n+1) = y(n) + (1/6)*(k12+2*k22+2*k32+k42);
z(n+1) = z(n) + (1/6)*(k13+2*k23+2*k33+k43);

%x_eks(n+1) = -1/2*x(t(n))+0.7*exp(t(n));
%solusi eksak

%err1(n+1)=abs(x(n+1)-u1_eks(n+1));
%kesalahan mutlak
%err2(n+1)=abs(y(n+1)-u2_eks(n+1));
end;

figure(1);
plot3(x,y,z,'k','LineWidth',1.5);
grid on; hold on;
xlabel('x(t)');ylabel('y(t)');zlabel('z(t)');
% perhitungan nilai x*, y*, dan z*
a1=3; a2=6; a3=9; a11=0.2; a22=0.6; a33=0.8;
a12=0.4; a21=0.06; a31=0.08; a32=0.05;
u=(a33*(a1*a22+a2*a12))/(a11*a22*a33-a12*a21*a33);
v=(a33*(a2*a11+a1*a21))/(a11*a22*a33-a12*a21*a33);
w=(a3*(a11*a22-a12*a21)-a31*(a1*a22+a12*a2)-
a32*(a2*a11+a21*a1))/(a11*a22*a33-a12*a21*a33);

```

```

plot3(u,v,w,'r*','LineWidth',5); % Plot titik E8
p=(a1*a22+a2*a12)/(a11*a22-a12*a21);
q=(a2*a11+a1*a21)/(a11*a22-a12*a21);
plot3(9,20,8,'k*','LineWidth',5); % Plot nilai awal
plot3(p,q,0,'g*','LineWidth',5); % Plot titik E_7(0,0,0)
r=a1/a11;
s=(a3*a11-a1*a31)/(a11*a33);
plot3(r,0,s,'m*','LineWidth',5); % Plot titik E_6(0,0,0)
g=a2/a22;
i=(a22*a3-a32*a2)/(a22*a33);
plot3(0,g,i,'b*','LineWidth',5); % Plot titik E_5(0,0,0)
k1=a1/a11;
plot3(k1,0,0,'b*','LineWidth',5); % Plot titik E_4(0,0,0)
m1=a2/a22;
plot3(0,m1,0,'b*','LineWidth',5); % Plot titik E_3(0,0,0)
n=a3/a33;
plot3(0,0,n,'b*','LineWidth',5); % Plot titik E_2(0,0,0)
plot3(0,0,0,'b*','LineWidth',5); % Plot titik E_1(0,0,0)
% Perhitungan nilai x ? dan y ?

% Plotting solusi x(t), y(t), dan z(t) terhadap t

figure(2)
plot(t,x,'k','LineWidth',1.5);
hold on;
plot(t,y,'m','LineWidth',1.5);
hold on;
plot(t,z,'g','LineWidth',1.5);
grid on; hold on;
xlabel('waktu(t)');ylabel('jumlah populasi');
legend('x(t)','y(t)','z(t)');

```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

