

BAB III PEMBAHASAN

3.1 Formulasi Model

3.1.1 Model tanpa Amensalisme

Pada bagian ini dibahas model *predator-prey* dengan spesies ketiga adalah *host commensal* untuk *prey*. Model *predator-prey* dibentuk berdasarkan model dua spesies yang telah dibahas pada Subbab 2.2.1. Kehadiran spesies *host* dalam interaksinya di alam menyebabkan model *predator-prey* menjadi lebih kompleks. Spesies *host* yang dinyatakan sebagai N_3 berperan sebagai pemberi keuntungan pada *prey*. Jadi, kehadiran spesies *host* tidak mempengaruhi pertumbuhan populasi *predator*, pertumbuhan populasi spesies *host* juga tidak terpengaruh oleh pertumbuhan *predator-prey*.

Selain dipengaruhi oleh keberadaan *carrying capacity* dan pemangsaan oleh *predator*, laju pertumbuhan populasi *prey* juga dipengaruhi oleh spesies *host*. Spesies *host* pada *prey* diasumsikan sama dengan laju interaksi *prey* dan spesies *host* yang dinyatakan dengan $a_{11}CN_1N_3$. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *prey* terhadap t adalah

$$\frac{dN_1}{dt} = a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3). \quad (3.1)$$

Kehadiran spesies *host* secara logistik tidak mempengaruhi pertumbuhan populasi *predator*, sehingga model pertumbuhan populasi *predator* dinyatakan sebagai

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1). \quad (3.2)$$

Pertumbuhan populasi spesies *host* yang tidak dipengaruhi oleh kehadiran *predator-prey* dinyatakan sebagai

$$\frac{dN_3}{dt} = a_{33}N_3(K_3 - N_3). \quad (3.3)$$

Jadi, persamaan diferensial yang memodelkan dinamika populasi sistem *predator-prey* dengan kehadiran spesies *host* sebagai spesies ketiga adalah

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_1}{dt} &= a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3) \\
 \frac{dN_2}{dt} &= a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1) \\
 \frac{dN_3}{dt} &= a_{33}N_3(K_3 - N_3),
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

dengan

$$K_i = \frac{a_i}{a_{ii}} = \text{carrying capacities } N_i, \text{ dengan } i = 1,2,3;$$

$$C = \frac{a_{13}}{a_{11}} = \text{koefisien komensalisme,}$$

$$P = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \text{koefisien pemangsaan } \textit{prey},$$

$$Q = \frac{a_{21}}{a_{22}} = \text{koefisien konsumsi } \textit{predator},$$

$$a_i = \text{laju kelahiran alami } N_i, \text{ dengan } i = 1,2,3;$$

$$a_{ii} = \text{laju penurunan } N_i \text{ karena sumber daya terbatas, dengan } i = 1,2,3;$$

$$a_{12} = \text{laju penurunan } \textit{prey} \text{ karena dimangsa oleh } \textit{predator},$$

$$a_{13} = \text{laju peningkatan } \textit{prey} \text{ karena memperoleh keuntungan dari spesies ketiga,}$$

$$a_{21} = \text{laju peningkatan } \textit{predator} \text{ karena memangsa } \textit{prey},$$

semua parameter bernilai konstan dan positif.

Dari ketiga persamaan diferensial tersebut, $\frac{dN_3}{dt}$ tidak dipengaruhi variabel tak bebas lain yaitu N_1 dan N_2 sehingga $\frac{dN_3}{dt} = a_{33}N_3(K_3 - N_3)$ dapat diselesaikan secara eksak dengan langkah penyelesaian sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dN_3}{dt} &= a_{33}N_3(K_3 - N_3) \\
 \frac{dN_3}{a_{33}N_3(K_3 - N_3)} &= dt \\
 \int \left(\frac{1}{K_3 a_{33} N_3} + \frac{1}{K_3 a_{33} (K_3 - N_3)} \right) dN_3 &= \int dt \\
 \frac{\ln N_3}{K_3 a_{33}} - \frac{\ln(K_3 - N_3)}{K_3 a_{33}} &= t + B \\
 \ln \left(\frac{N_3}{K_3 - N_3} \right) &= t + B,
 \end{aligned}$$

dengan $e^B = k$, persamaan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{N_3}{N_3 - K_3} &= -e^t k \\ \frac{N_3 - K_3 + K_3}{N_3 - K_3} &= -e^t k \\ 1 + \frac{K_3}{N_3 - K_3} &= -e^t k \\ N_3 - K_3 &= \frac{K_3}{-e^t k - 1} \\ N_3(t) &= K_3 - \frac{K_3}{e^t k + 1}. \end{aligned}$$

Jika $t = 0$, maka persamaan menjadi

$$\begin{aligned} N_3(0) &= K_3 - \frac{K_3}{k + 1} \\ k + 1 &= \frac{K_3}{K_3 - N_3(0)} \end{aligned}$$

sehingga dapat diketahui nilai k yang bergantung pada nilai awal N_3 sebagai berikut.

$$k = \frac{K_3}{K_3 - N_3(0)} - 1.$$

Dengan menyelesaikan solusi eksak dari N_3 di atas, model persamaan diferensial menjadi sistem non-otonomus dua dimensi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= a_{11}N_1 \left(K_1 - N_1 - PN_2 + C \left(K_3 - \frac{K_3}{e^t K + 1} \right) \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1), \end{aligned}$$

dengan

$$K = \frac{K_3}{K_3 - N_3(0)} - 1.$$

3.1.2 Model dengan Amensalisme

Pada bagian ini dibahas model *predator-prey* dengan spesies ketiga adalah *host commensal* untuk *prey* dan *enemy* pada *predator*. Model ini dibentuk melalui model tanpa amensalisme. Selain bertindak sebagai spesies *host* pada *prey*, spesies ketiga ini juga bertindak sebagai spesies *enemy* pada *predator*. Jadi, spesies ketiga ini juga merugikan *predator*.

Interaksi *predator* dan spesies *enemy* dinyatakan dengan $a_{22}MN_2N_3$. Dengan demikian, laju pertumbuhan populasi *predator* terhadap t menjadi

$$\frac{dN_2}{dt} = a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1 - MN_3), \quad (3.5)$$

dengan

$M = \frac{a_{23}}{a_{22}}$ = koefisien amensalisme,

a_{23} = laju penurunan spesies amensal karena kerugian yang disebabkan oleh spesies *enemy*.

Persamaan diferensial yang memodelkan populasi dinamik sistem *predator-prey* dengan kehadiran spesies *host* pada *prey* dan *enemy* pada *predator* sebagai spesies ketiga adalah

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3) \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1 - MN_3) \\ \frac{dN_3}{dt} &= a_{33}N_3(K_3 - N_3). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dengan didapatkannya solusi eksak dari N_3 , sistem persamaan (3.6) menjadi sistem non-otonomus dua dimensi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} &= a_{11}N_1 \left(K_1 - N_1 - PN_2 + C \left(K_3 - \frac{K_3}{e^{tK} + 1} \right) \right) \\ \frac{dN_2}{dt} &= a_{22}N_2 \left(K_2 - N_2 + QN_1 - M \left(K_3 - \frac{K_3}{e^{tK} + 1} \right) \right) \end{aligned}$$

dengan

$$K = \frac{K_3}{K_3 - N_3(0)} - 1.$$

Karena menganalisis sistem non-otonomus itu sulit, agar perilaku sistem dapat diketahui maka dilakukan simulasi numerik. Pada Subbab 3.2 dibahas analisis dinamik sistem otonomus non-linear yaitu sistem persamaan (3.4) dan sistem persamaan (3.6). Dilakukan simulasi numerik pula untuk sistem non-otonomus. Kemudian hasil kedua simulasi numerik tersebut dibandingkan yang dibahas pada Subbab 3.3.

3.2 Analisis Dinamik Model

Pada subbab sebelumnya telah diberikan dua model *predator-prey*. Kemudian pada subbab ini dibahas analisis kestabilan dari titik kesetimbangan kedua model tersebut. Analisis kestabilan kedua model tersebut dilakukan di sekitar titik kesetimbangannya. Oleh karena itu, langkah pertama ditentukan titik kesetimbangannya, kemudian sistem ini dilinearakan dengan mengonstruksi matriks Jacobi untuk menentukan jenis kestabilannya.

3.2.1 Analisis Model tanpa Amensalisme

3.2.1.1 Penentuan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan model *predator-prey* tiga spesies diperoleh jika

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0$$

sehingga sistem (3.4) menjadi

$$\begin{aligned} a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3) &= 0 \\ a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1) &= 0 \\ a_{33}N_3(K_3 - N_3) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Solusi persamaan (3.7) secara berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$N_1 = 0 \tag{3.8}$$

atau

$$K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3 = 0, \tag{3.9}$$

$$N_2 = 0 \tag{3.10}$$

atau

$$K_2 - N_2 + QN_1 = 0, \quad (3.11)$$

$$N_3 = 0 \quad (3.12)$$

atau

$$N_3 = K_3. \quad (3.13)$$

Kombinasi keenam persamaan di atas menghasilkan 8 titik kesetimbangan.

Titik kesetimbangan $E_1(0,0,0)$, $E_2(0,0,K_3)$, $E_3(0,K_2,0)$, $E_4(K_1,0,0)$, $E_5(0,K_2,K_3)$, dan $E_6(K_1 + CK_3, 0, K_3)$ berturut-turut diperoleh dari kombinasi persamaan (3.8), (3.10), dan (3.12); persamaan (3.8), (3.10), dan (3.13); persamaan (3.8), (3.11), dan (3.12); persamaan (3.9), (3.10), dan (3.12); persamaan (3.8), (3.11), dan (3.13); serta persamaan (3.9), (3.10), dan (3.13).

Titik kesetimbangan $E_7\left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ+1}, 0\right)$ diperoleh dari kombinasi persamaan (3.9), (3.11), dan (3.12). Substitusi persamaan (3.12) ke persamaan (3.9) menghasilkan

$$\begin{aligned} K_1 - N_1 - PN_2 &= 0 \\ N_1 &= K_1 - PN_2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Kemudian persamaan (3.14) disubstitusikan ke persamaan (3.11) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K_2 - N_2 + Q(K_1 - PN_2) &= 0 \\ N_2 + PQN_2 &= K_2 + QK_1 \\ N_2(PQ + 1) &= QK_1 + K_2 \\ N_2 &= \frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Persamaan (3.15) disubstitusikan ke persamaan (3.14) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} N_1 &= K_1 - PN_2 \\ &= K_1 - P\left(\frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1}\right) \\ &= \frac{PQK_1 + K_1}{PQ + 1} - \frac{PQK_1 + PK_2}{PQ + 1} \\ N_1 &= \frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(N_1, N_2, N_3) = \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ+1}, 0 \right)$. Titik $E_7 = \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ+1}, 0 \right)$ eksis jika dan hanya jika $K_1 > PK_2$.

Titik kesetimbangan $E_8 \left(\frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ+1}, K_3 \right)$ diperoleh dari kombinasi persamaan (3.9), (3.11), dan (3.13). Substitusi persamaan (3.13) ke persamaan (3.9) menghasilkan

$$\begin{aligned} K_1 - N_1 - PN_2 + CK_3 &= 0 \\ N_1 &= K_1 - PN_2 + CK_3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Kemudian persamaan (3.16) disubstitusikan ke persamaan (3.11) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K_2 - N_2 + Q(K_1 - PN_2 + CK_3) &= 0 \\ N_2 + PQN_2 &= QK_1 + K_2 + QCK_3 \\ N_2(PQ + 1) &= QK_1 + K_2 + QCK_3 \\ N_2 &= \frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ + 1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) disubstitusikan ke persamaan (3.16) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} N_1 &= K_1 - P \left(\frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ + 1} \right) + CK_3 \\ &= \frac{PQK_1 + K_1 + PQCK_3 + CK_3}{PQ + 1} - \frac{PQK_1 + PK_2 + PQCK_3}{PQ + 1} \\ N_1 &= \frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ + 1}, \end{aligned}$$

sehingga $(N_1, N_2, N_3) = \left(\frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ+1}, K_3 \right)$. Titik $E_8 = \left(\frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ+1}, K_3 \right)$ eksis jika dan hanya jika $K_1 + CK_3 > PK_2$.

3.2.1.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan titik kesetimbangan pada model tanpa amensalisme diperiksa melalui analisis kestabilan berikut. Berdasarkan Subbab 2.3.2, sistem persamaan (3.4) merupakan sistem non-linear. Kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan melakukan linearisasi sistem (3.4) sehingga diperoleh matriks Jacobi

$$\begin{aligned}
& J(N_1, N_2, N_3) \\
&= \begin{bmatrix} K_1 a_{11} - 2a_{11}N_1 - Pa_{11}N_2 + Ca_{11}N_3 & -Pa_{11}N_1 & Ca_{11}N_1 \\ Qa_{22}N_2 & K_2 a_{22} - 2a_{22}N_2 + Qa_{22}N_1 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} - 2a_{33}N_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - 2N_1 - PN_2 + CN_3) & -Pa_{11}N_1 & Ca_{11}N_1 \\ Qa_{22}N_2 & a_{22}(K_2 - 2N_2 + QN_1) & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(K_3 - 2N_3) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matriks Jacobi di titik $E_1(0,0,0)$ adalah

$$J(E_1) = J(0,0,0) = \begin{bmatrix} K_1 a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = K_1 a_{11} > 0$, $\lambda_2 = K_2 a_{22} > 0$, dan $\lambda_3 = K_3 a_{33} > 0$ sehingga E_1 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $E_2(0,0,K_3)$ adalah

$$J(E_2) = J(0,0,K_3) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 + CK_3) & 0 & 0 \\ 0 & K_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = a_{11}(K_1 + CK_3) > 0$, $\lambda_2 = K_2 a_{22} > 0$, dan $\lambda_3 = -K_3 a_{33} < 0$ sehingga E_2 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $E_3(0,K_2,0)$ adalah

$$J(E_3) = J(0,K_2,0) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - PK_2) & 0 & 0 \\ QK_2 a_{22} & -K_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = a_{11}(K_1 - PK_2)$, $\lambda_2 = -K_2 a_{22} < 0$, dan $\lambda_3 = K_3 a_{33} > 0$ sehingga E_3 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $E_4(K_1,0,0)$ adalah

$$J(E_4) = J(K_1,0,0) = \begin{bmatrix} -K_1 a_{11} & -Pa_{11}K_1 & Ca_{11}K_1 \\ 0 & a_{22}(K_2 + QK_1) & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = -K_1 a_{11} < 0$, $\lambda_2 = a_{22}(K_2 + QK_1) > 0$, dan $\lambda_3 = K_3 a_{33} > 0$ sehingga E_4 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $E_5(0,K_2,K_3)$ adalah

$$J(E_5) = J(0, K_2, K_3) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - PK_2 + CK_3) & 0 & 0 \\ Qa_{22}K_2 & -K_2a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = a_{11}(K_1 - PK_2 + CK_3) < 0$ apabila $K_1 + CK_3 < PK_2$, $\lambda_2 = -K_2a_{22} < 0$, dan $\lambda_3 = -K_3a_{33} < 0$ sehingga E_5 stabil jika $K_1 + CK_3 < PK_2$. Matriks Jacobi di titik $E_6(K_1 + CK_3, 0, K_3)$ adalah

$$J(E_6) = J(K_1 + CK_3, 0, K_3) = \begin{bmatrix} a_{11}[K_1 - 2(K_1 + CK_3) + CK_3] & -Pa_{11}(K_1 + CK_3) & Ca_{11}(K_1 + CK_3) \\ 0 & a_{22}[K_2 + Q(K_1 + CK_3)] & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11}(K_1 + CK_3) & -Pa_{11}(K_1 + CK_3) & Ca_{11}(K_1 + CK_3) \\ 0 & a_{22}[K_2 + Q(K_1 + CK_3)] & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = -a_{11}(K_1 + CK_3) < 0$, $\lambda_2 = a_{22}[K_2 + Q(K_1 + CK_3)] > 0$, dan $\lambda_3 = -K_3a_{33} < 0$ sehingga E_6 tidak stabil.

Linearisasi sistem di titik E_7 menghasilkan matriks Jacobi

$$J(E_7) = J\left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1}, 0\right) = \begin{bmatrix} J_{11} & \frac{-a_{11}P(K_1 - PK_2)}{PQ + 1} & \frac{a_{11}C(K_1 - PK_2)}{PQ + 1} \\ \frac{a_{22}Q(K_2 + QK_1)}{PQ + 1} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_3a_{33} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} J_{11} &= a_{11} \left[K_1 - 2 \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1} \right) - P \left(\frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1} \right) \right] \\ &= \frac{a_{11}(PQK_1 + K_1 - 2K_1 + 2PK_2 - PQK_1 - PK_2)}{PQ + 1} \\ &= \frac{a_{11}(-K_1 + PK_2)}{PQ + 1} \\ &= \frac{-a_{11}(K_1 - PK_2)}{PQ + 1} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 J_{22} &= a_{22} \left[K_2 - 2 \left(\frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1} \right) + Q \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1} \right) \right] \\
 &= \frac{a_{22}(PQK_2 + K_2 - 2QK_1 - 2K_2 + QK_1 - PQK_2)}{PQ + 1} \\
 &= \frac{a_{22}(-K_2 - QK_1)}{PQ + 1} \\
 &= \frac{-a_{22}(K_2 + QK_1)}{PQ + 1}.
 \end{aligned}$$

Nilai eigen $J(E_7)$ diperoleh dari persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned}
 \left[(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + \frac{a_{11}a_{22}PQ(K_1 - PK_2)(K_2 + QK_1)}{(PQ + 1)^2} \right] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0 \\
 [(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + PQJ_{11}J_{22}] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0 \\
 [\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + J_{11}J_{22} + PQJ_{11}J_{22}] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0 \\
 [\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + (PQ + 1)J_{11}J_{22}] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0.
 \end{aligned}$$

Solusi persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{(J_{11} + J_{22}) \pm \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4(PQ + 1)J_{11}J_{22}}}{2}$$

dan

$$\lambda_3 = K_3a_{33} > 0.$$

Jadi, titik kesetimbangan E_7 pada persamaan (3.4) bersifat tidak stabil.

Linearisasi sistem di sekitar titik E_8 dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 J(E_8) &= J \left(\frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ + 1}, \frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ + 1}, K_3 \right) \\
 &= \begin{bmatrix} J_{11} & \frac{-a_{11}P(K_1 - PK_2 + CK_3)}{PQ + 1} & \frac{a_{11}C(K_1 - PK_2 + CK_3)}{PQ + 1} \\ \frac{a_{22}Q(QK_1 + K_2 + QCK_3)}{PQ + 1} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
J_{11} &= a_{11} \left[K_1 - 2 \left(\frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ + 1} \right) - P \left(\frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ + 1} \right) + CK_3 \right] \\
&= \frac{a_{11}(PQK_1 + K_1 - 2K_1 + 2PK_2 - 2CK_3 - PQK_1 - PK_2 - PQCK_3 + PQCK_3 + CK_3)}{PQ + 1} \\
&= \frac{a_{11}(-K_1 + PK_2 - CK_3)}{PQ + 1} \\
&= \frac{-a_{11}(K_1 - PK_2 + CK_3)}{PQ + 1}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
J_{22} &= a_{22} \left[K_2 - 2 \left(\frac{QK_1 + K_2 + QCK_3}{PQ + 1} \right) + Q \left(\frac{K_1 - PK_2 + CK_3}{PQ + 1} \right) \right] \\
&= \frac{a_{22}(PQK_2 + K_2 - 2QK_1 - 2K_2 - 2QCK_3 + QK_1 - PQK_2 + QCK_3)}{PQ + 1} \\
&= \frac{a_{22}(-QK_1 - K_2 - QCK_3)}{PQ + 1} \\
&= \frac{-a_{22}(QK_1 + K_2 + QCK_3)}{PQ + 1} < 0.
\end{aligned}$$

Menurut syarat eksistensi titik kesetimbangan E_8 , jelas bahwa $J_{11} < 0$.

Persamaan karakteristik berikut digunakan untuk mencari nilai eigen $J(E_8)$, yaitu

$$\begin{aligned}
&\left[(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + \frac{a_{11}a_{22}PQ(K_1 - PK_2 + CK_3)(QK_1 + K_2 + QCK_3)}{(PQ + 1)^2} \right] (\lambda + K_3a_{33}) = 0 \\
&\quad [(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + PQJ_{11}J_{22}] (\lambda + K_3a_{33}) = 0 \\
&\quad [\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + J_{11}J_{22} + PQJ_{11}J_{22}] (\lambda + K_3a_{33}) = 0 \\
&\quad [\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + (PQ + 1)J_{11}J_{22}] (\lambda + K_3a_{33}) = 0
\end{aligned}$$

sehingga

$$\lambda_{1,2} = \frac{(J_{11} + J_{22}) \pm \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4(PQ + 1)J_{11}J_{22}}}{2} < 0$$

atau

$$\lambda_3 = -K_3a_{33} < 0.$$

Berdasarkan Teorema 2.3.2, titik kesetimbangan E_8 bersifat stabil tanpa syarat.

Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.4) dirangkum dalam Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1 Syarat kestabilan titik kesetimbangan model tanpa amensalisme

Titik Tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
E_1	-	Tidak stabil	-
E_2	-	Tidak stabil	-
E_3	-	Tidak stabil	-
E_4	-	Tidak stabil	-
E_5	-	Stabil	$K_1 + CK_3 < PK_2$
E_6	-	Tidak stabil	-
E_7	$K_1 > PK_2$	Tidak stabil	-
E_8	$K_1 + CK_3 > PK_2$	Stabil	-

3.2.2 Analisis Model dengan Amensalisme

3.2.2.1 Penentuan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan model *predator-prey* tiga spesies diperoleh jika

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_2}{dt} = \frac{dN_3}{dt} = 0$$

sehingga sistem (3.6) menjadi

$$\begin{aligned} a_{11}N_1(K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3) &= 0 \\ a_{22}N_2(K_2 - N_2 + QN_1 - MN_3) &= 0 \\ a_{33}N_3(K_3 - N_3) &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Solusi sistem persamaan (3.18) secara berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$N_1 = 0 \quad (3.19)$$

atau

$$K_1 - N_1 - PN_2 + CN_3 = 0, \quad (3.20)$$

$$N_2 = 0 \quad (3.21)$$

atau

$$K_2 - N_2 + QN_1 - MN_3 = 0, \quad (3.22)$$

$$N_3 = 0 \quad (3.23)$$

atau

$$N_3 = K_3. \quad (3.24)$$

Kombinasi keenam persamaan di atas menghasilkan 8 titik kesetimbangan.

Titik kesetimbangan $T_1(0,0,0)$, $T_2(0,0,K_3)$, $T_3(K_1,0,0)$, $T_4(0,K_2,0)$, $T_5(0,K_2 - MK_3,K_3)$, $T_6(K_1 + CK_3,0,K_3)$ berturut-turut diperoleh dari kombinasi persamaan (3.19), (3.21), dan (3.23); persamaan (3.19), (3.21), dan (3.24); persamaan (3.20), (3.21), dan (3.23); persamaan (3.19), (3.22), dan (3.23); persamaan (3.19), (3.22), dan (3.24); serta persamaan (3.20), (3.21), dan (3.24). Titik kesetimbangan T_5 eksis jika dan hanya jika $K_2 > MK_3$.

Titik kesetimbangan $T_7\left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ+1}, 0\right)$ diperoleh dari kombinasi persamaan (3.20), (3.22), dan (3.23). Substitusi persamaan (3.23) ke persamaan (3.20) menghasilkan

$$\begin{aligned} K_1 - N_1 - PN_2 &= 0 \\ N_1 &= K_1 - PN_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Kemudian persamaan (3.25) disubstitusikan ke persamaan (3.22) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K_2 - N_2 + Q(K_1 - PN_2) &= 0 \\ N_2 + PQN_2 &= K_2 + QK_1 \\ N_2(PQ + 1) &= QK_1 + K_2 \\ N_2 &= \frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Persamaan (3.26) disubstitusikan ke persamaan (3.25) diperoleh

$$\begin{aligned} N_1 &= K_1 - PN_2 \\ &= K_1 - P\left(\frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1}\right) \\ &= \frac{PQK_1 + K_1}{PQ + 1} - \frac{PQK_1 + PK_2}{PQ + 1} \\ N_1 &= \frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1}, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $(N_1, N_2, N_3) = \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ+1}, 0\right)$. Titik $T_7 = \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ+1}, 0\right)$ eksis jika dan hanya jika $K_1 > PK_2$.

Titik kesetimbangan $T_8 \left(\frac{K_1 - PK_2 + (C+PM)K_3}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2 + (QC-M)K_3}{PQ+1}, K_3 \right)$ diperoleh dari kombinasi persamaan (3.20), (3.22), dan (3.24). Substitusi persamaan (3.24) ke persamaan (3.20) menghasilkan

$$\begin{aligned} K_1 - N_1 - PN_2 + CK_3 &= 0 \\ N_1 &= K_1 - PN_2 + CK_3. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Kemudian persamaan (3.27) dan persamaan (3.24) disubstitusikan ke persamaan (3.22) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} K_2 - N_2 + Q(K_1 - PN_2 + CK_3) - MK_3 &= 0 \\ N_2 + PQN_2 &= QK_1 + K_2 + QCK_3 - MK_3 \\ N_2(PQ + 1) &= QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3 \\ N_2 &= \frac{QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3}{PQ + 1}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Persamaan (3.28) disubstitusikan ke persamaan (3.27) diperoleh

$$\begin{aligned} N_1 &= K_1 - P \left(\frac{QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3}{PQ + 1} \right) + CK_3 \\ &= \frac{PQK_1 + K_1 + PQCK_3 + CK_3}{PQ + 1} - \frac{PQK_1 + PK_2 + PQCK_3 - PMK_3}{PQ + 1} \\ &= \frac{K_1 - PK_2 + CK_3 + PMK_3}{PQ + 1} \\ N_1 &= \frac{K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3}{PQ + 1} \end{aligned}$$

sehingga diperoleh

$$(N_1, N_2, N_3) = \left(\frac{K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3}{PQ + 1}, \frac{QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3}{PQ + 1}, K_3 \right).$$

Titik $T_8 \left(\frac{K_1 - PK_2 + (C+PM)K_3}{PQ+1}, \frac{QK_1 + K_2 + (QC-M)K_3}{PQ+1}, K_3 \right)$ eksis jika dan hanya jika $K_1 + CK_3 + PMK_3 > PK_2$ dan $QK_1 + K_2 + QCK_3 > MK_3$.

3.2.2.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sifat kestabilan titik kesetimbangan pada model diperiksa melalui analisis kestabilan berikut. Berdasarkan Subbab 2.3.2, sistem persamaan (3.6) merupakan sistem nonlinear. Kestabilan titik kesetimbangan diperoleh dari linearisasi sistem dengan matriks Jacobi

$$\begin{aligned}
 J(N_1, N_2, N_3) &= \begin{bmatrix} K_1 a_{11} - 2a_{11}N_1 - Pa_{11}N_2 + Ca_{11}N_3 & -Pa_{11}N_1 & Ca_{11}N_1 \\ Qa_{22}N_2 & K_2 a_{22} - 2a_{22}N_2 + Qa_{22}N_1 - Ma_{22}N_3 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} - 2a_{33}N_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - 2N_1 - PN_2 + CN_3) & -Pa_{11}N_1 & Ca_{11}N_1 \\ Qa_{22}N_2 & a_{22}(K_2 - 2N_2 + QN_1 - MN_3) & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}(K_3 - 2N_3) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Matriks Jacobi di titik $T_1(0,0,0)$ adalah

$$J(T_1) = J(0,0,0) = \begin{bmatrix} K_1 a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & K_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = K_1 a_{11} > 0$, $\lambda_2 = K_2 a_{22} > 0$, dan $\lambda_3 = K_3 a_{33} > 0$ sehingga T_1 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $T_2(0,0,K_3)$ adalah

$$J(T_2) = J(0,0,K_3) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 + CK_3) & 0 & 0 \\ 0 & K_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = a_{11}(K_1 + CK_3) > 0$, $\lambda_2 = K_2 a_{22} > 0$, dan $\lambda_3 = -K_3 a_{33} < 0$ sehingga T_2 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $T_3(K_1,0,0)$ adalah

$$J(T_3) = J(K_1,0,0) = \begin{bmatrix} -K_1 a_{11} & -Pa_{11}K_1 & Ca_{11}K_1 \\ 0 & a_{22}(K_2 + QK_1) & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

dengan nilai eigen $\lambda_1 = -K_1 a_{11} < 0$, $\lambda_2 = a_{22}(K_2 + QK_1) > 0$, dan $\lambda_3 = K_3 a_{33} > 0$ sehingga T_3 tidak stabil. Matriks Jacobi di titik $T_4(0,K_2,0)$ adalah

$$J(T_4) = J(0,K_2,0) = \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - PK_2) & 0 & 0 \\ QK_2 a_{22} & -K_2 a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & K_3 a_{33} \end{bmatrix},$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = a_{11}(K_1 - PK_2)$, $\lambda_2 = -K_2 a_{22} < 0$, dan $\lambda_3 = K_3 a_{33} > 0$ sehingga T_4 tidak stabil.

Matriks Jacobi di titik $T_5(0, K_2 - MK_3, K_3)$ adalah

$$\begin{aligned}
 J(T_5) &= J(0, K_2 - MK_3, K_3) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}[K_1 - P(K_2 - MK_3) + CK_3] & 0 & 0 \\ Qa_{22}(K_2 - MK_3) & a_{22}[K_2 - 2(K_2 - MK_3) - MK_3] & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}(K_1 - PK_2 + PMK_2 + CK_3) & 0 & 0 \\ Qa_{22}(K_2 - MK_3) & -a_{22}(K_2 - MK_3) & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

yang memiliki nilai eigen $\lambda_1 = a_{11}(K_1 - PK_2 + PMK_2 + CK_3) < 0$ apabila $K_1 + PMK_2 + CK_3 < PK_2$, $\lambda_2 = -a_{22}(K_2 - MK_3) < 0$ berdasarkan syarat eksistensi T_5 yang menyatakan bahwa $K_2 > MK_3$, dan $\lambda_3 = -K_3a_{33} < 0$ sehingga T_5 stabil apabila memenuhi syarat $K_1 + PMK_2 + CK_3 < PK_2$.

Matriks Jacobi di titik $T_6(K_1 + CK_3, 0, K_3)$ adalah

$$\begin{aligned}
 J(T_6) &= J(K_1 + CK_3, 0, K_3) \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11}[K_1 - 2(K_1 + CK_3) + CK_3] & -Pa_{11}(K_1 + CK_3) & Ca_{11}(K_1 + CK_3) \\ 0 & a_{22}[K_2 + Q(K_1 + CK_3) - MK_3] & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -a_{11}(K_1 + CK_3) & -Pa_{11}(K_1 + CK_3) & Ca_{11}(K_1 + CK_3) \\ 0 & a_{22}[K_2 + Q(K_1 + CK_3) - MK_3] & 0 \\ 0 & 0 & -K_3a_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -a_{11}(K_1 + CK_3) < 0$, $\lambda_2 = a_{22}[K_2 + Q(K_1 + CK_3) - MK_3] < 0$ apabila memenuhi $K_2 + Q(K_1 + CK_3) < MK_3$, dan $\lambda_3 = -K_3a_{33} < 0$ sehingga T_6 stabil jika $K_2 + Q(K_1 + CK_3) < MK_3$.

Linearisasi sistem di titik T_7 menghasilkan matriks Jacobi

$$\begin{aligned}
 J(T_7) &= J\left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1}, \frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1}, 0\right) \\
 &= \begin{bmatrix} J_{11} & \frac{-a_{11}P(K_1 - PK_2)}{PQ + 1} & \frac{a_{11}C(K_1 - PK_2)}{PQ + 1} \\ a_{22}Q(K_2 + QK_1) & J_{22} & 0 \\ \frac{PQ + 1}{0} & 0 & K_3a_{33} \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
J_{11} &= a_{11} \left[K_1 - 2 \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1} \right) - P \left(\frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1} \right) \right] \\
&= \frac{a_{11}(PQK_1 + K_1 - 2K_1 + 2PK_2 - PQK_1 - PK_2)}{PQ + 1} \\
&= \frac{a_{11}(-K_1 + PK_2)}{PQ + 1} \\
&= \frac{-a_{11}(K_1 - PK_2)}{PQ + 1}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
J_{22} &= a_{22} \left[K_2 - 2 \left(\frac{QK_1 + K_2}{PQ + 1} \right) + Q \left(\frac{K_1 - PK_2}{PQ + 1} \right) \right] \\
&= \frac{a_{22}(PQK_2 + K_2 - 2QK_1 - 2K_2 + QK_1 - PQK_2)}{PQ + 1} \\
&= \frac{a_{22}(-K_2 - QK_1)}{PQ + 1} \\
&= \frac{-a_{22}(K_2 + QK_1)}{PQ + 1}
\end{aligned}$$

Nilai eigen $J(T_7)$ diperoleh dari persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned}
\left[(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + \frac{a_{11}a_{22}PQ(K_1 - PK_2)(K_2 + QK_1)}{(PQ + 1)^2} \right] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0 \\
[(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + PQJ_{11}J_{22}] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0 \\
[\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + J_{11}J_{22} + PQJ_{11}J_{22}] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0 \\
[\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + (PQ + 1)J_{11}J_{22}] (\lambda - K_3a_{33}) &= 0.
\end{aligned}$$

Solusi persamaan karakteristik tersebut adalah

$$\lambda_{1,2} = \frac{(J_{11} + J_{22}) \pm \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4(PQ + 1)J_{11}J_{22}}}{2}$$

atau

$$\lambda_3 = K_3a_{33} > 0.$$

Jadi, titik kesetimbangan T_7 pada persamaan (3.6) bersifat tidak stabil.

Linearisasi sistem di sekitar titik T_8 dinyatakan dengan

$$J(T_8) = J \left(\frac{K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3}{PQ + 1}, \frac{QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3}{PQ + 1}, K_3 \right)$$

$$= \begin{bmatrix} J_{11} & \frac{-a_{11}P[K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3]}{PQ + 1} & \frac{a_{11}C[K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3]}{PQ + 1} \\ a_{22}Q \frac{[QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3]}{PQ + 1} & J_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 a_{33} \end{bmatrix}$$

dengan

$$J_{11} = a_{11} \left[K_1 - 2 \left(\frac{K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3}{PQ + 1} \right) - P \left(\frac{QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3}{PQ + 1} \right) + CK_3 \right]$$

$$= \frac{a_{11}(PQK_1 + K_1 - 2K_1 + 2PK_2 - 2CK_3 - 2PMK_3)}{PQ + 1}$$

$$= \frac{-PQK_1 - PK_2 - PQCK_3 + PMK_3 + PQCK_3 + CK_3}{PQ + 1}$$

$$= \frac{a_{11}(-K_1 + PK_2 - CK_3 - PMK_3)}{PQ + 1}$$

$$= \frac{-a_{11}(K_1 - PK_2 + CK_3 + PMK_3)}{PQ + 1}$$

dan

$$J_{22} = a_{22} \left[K_2 - 2 \left(\frac{QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3}{PQ + 1} \right) + Q \left(\frac{K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3}{PQ + 1} \right) - MK_3 \right]$$

$$= \frac{a_{22}(PQK_2 + K_2 - 2QK_1 - 2K_2 - 2QCK_3 + 2MK_3)}{PQ + 1}$$

$$= \frac{+QK_1 - PQK_2 + QCK_3 + QPMK_3 - PQMK_3 - MK_3}{PQ + 1}$$

$$= \frac{a_{22}(-QK_1 - K_2 - QCK_3 + MK_3)}{PQ + 1}$$

$$= \frac{-a_{22}(QK_1 + K_2 + QCK_3 - MK_3)}{PQ + 1}$$

Menurut syarat eksistensi titik kesetimbangan T_8 , jelas bahwa $J_{11} < 0$ dan $J_{22} < 0$. Persamaan karakteristiknya adalah

$$\left[(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + \frac{a_{11}a_{22}PQ[K_1 - PK_2 + (C + PM)K_3][QK_1 + K_2 + (QC - M)K_3]}{(PQ + 1)^2} \right] (\lambda + K_3a_{33}) = 0$$

$$[(\lambda - J_{11})(\lambda - J_{22}) + PQJ_{11}J_{22}](\lambda + K_3a_{33}) = 0$$

$$[\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + J_{11}J_{22} + PQJ_{11}J_{22}](\lambda + K_3a_{33}) = 0$$

$$[\lambda^2 - (J_{11} + J_{22})\lambda + (PQ + 1)J_{11}J_{22}](\lambda + K_3a_{33}) = 0$$

sehingga

$$\lambda_{1,2} = \frac{(J_{11} + J_{22}) \pm \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4(PQ + 1)J_{11}J_{22}}}{2} < 0$$

atau

$$\lambda_3 = -K_3a_{33} < 0.$$

Berdasarkan Teorema 2.3.2, titik kesetimbangan T_8 bersifat stabil tanpa syarat.

Hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem persamaan (3.6) dirangkum dalam Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Syarat kestabilan titik kesetimbangan model dengan amensalisme

Titik Tetap	Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
T_1	-	Tidak stabil	-
T_2	-	Tidak stabil	-
T_3	-	Tidak stabil	-
T_4	-	Tidak stabil	-
T_5	$K_2 > MK_3$	Stabil	$K_1 + PMK_2 + CK_3 < PK_2$
T_6	-	Stabil	$K_2 + Q(K_1 + CK_3) < MK_3$
T_7	$K_1 > PK_2$	Tidak stabil	-
T_8	$K_1 + PMK_3 + CK_3 > PK_2$ dan $K_2 + Q(K_1 + CK_3) > MK_3$	Stabil	-

3.3 Simulasi Numerik

Pada bagian ini dibahas simulasi numerik dengan metode Runge-Kutta orde 4 menggunakan *software* MATLAB 2008. Perilaku solusi dalam simulasi tersebut dibandingkan dengan perhitungan secara analitik pada Subbab 3.2.

3.3.1 Simulasi Model tanpa Amensalisme

Rangkuman analisis kestabilan model terdapat pada Tabel 3.1, sedangkan *source code* program ditunjukkan pada Lampiran 1. Pada model *predator-prey* tiga spesies, terdapat delapan titik kesetimbangan. Perbandingan hasil analisis dinamik titik kesetimbangan ditunjukkan melalui variasi nilai parameter dalam beberapa simulasi berikut yang diberikan pada Tabel 3.3.

Tabel 3.3 Nilai Parameter yang digunakan dalam simulasi numerik model tanpa amensalisme

Simulasi	P a r a m e t e r								
	a_{11}	a_{22}	a_{33}	K_1	K_2	K_3	P	Q	C
1	1	1	1	1	2	1	2	1	2
2	1	1	1	2	1	2	1	1	2

3.3.1.1 Simulasi 1

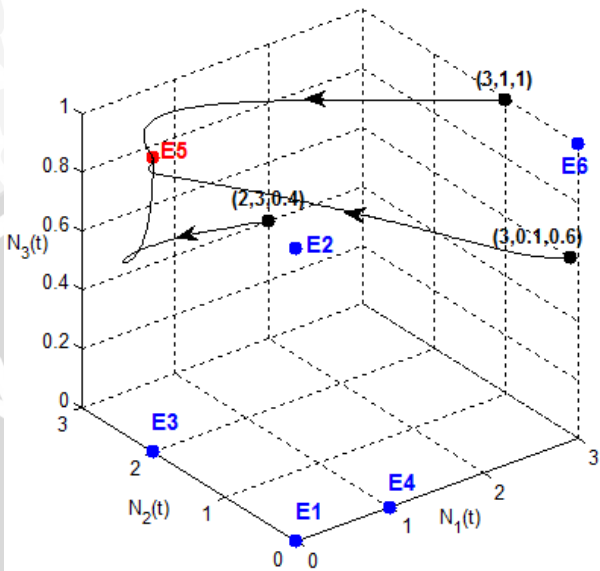
Berdasarkan Tabel 3.3, nilai parameter yang digunakan pada simulasi 1 tidak memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan E_7 yaitu

$$K_1 < PK_2.$$

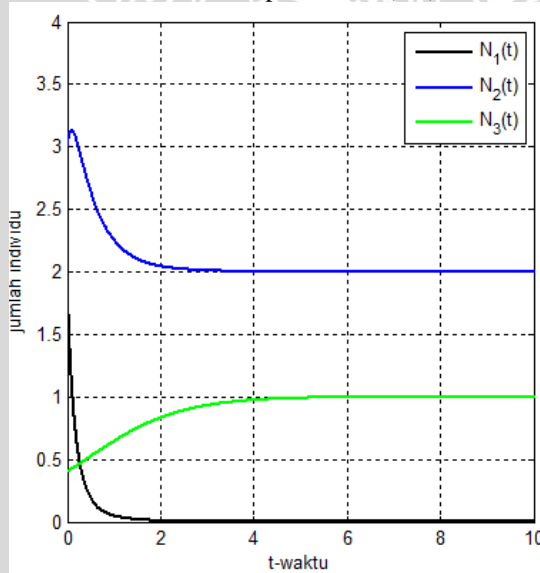
Nilai parameter tersebut juga tidak memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan E_8 tetapi memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan $E_5 = (0, K_2, K_3) = (0, 2, 1)$, yaitu

$$K_1 + CK_3 < PK_2.$$

Dengan kata lain, untuk nilai parameter pada simulasi 1, maka titik kesetimbangan E_5 bersifat stabil. Untuk lebih jelasnya, kondisi tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.1 dan Gambar 3.2.



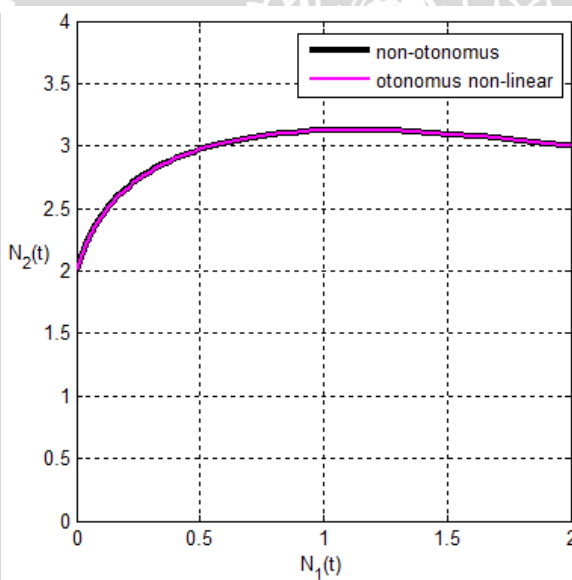
Gambar 3.1 Potret fase sistem persamaan (3.4) untuk simulasi 1



Gambar 3.2 Grafik solusi sistem persamaan (3.4) untuk simulasi 1 dengan nilai awal (2,3,0.4)

Dari Gambar 3.1 terlihat bahwa solusi dengan nilai awal $(3,0.1,0.6)$, $(3,1,1)$, dan $(2,3,0.4)$ sama-sama menuju titik kesetimbangan $E_5 = (0,2,1)$. Hal ini berarti sistem tidak dapat mempertahankan ketiganya untuk hidup bersama secara berdampingan, tetapi populasi predator dan spesies ketiga akan tetap bertahan dalam batasan nilai tertentu, yaitu K_2 dan K_3 yang masing-masing merupakan nilai *carrying capacity predator* dan spesies ketiga. Hal ini dikarenakan oleh perkalian antara koefisien pemangsaan *prey* dengan *carrying capacity predator* lebih besar dari penjumlahan antara *carrying capacity prey* dan hasil kali koefisien komensalisme dengan *carrying capacity* spesies ketiga.

Perbandingan simulasi numerik solusi $N_1(t)$ dan $N_2(t)$ antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi 1 ditunjukkan pada Gambar 3.3 berikut.



Gambar 3.3 Perbandingan sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi 1

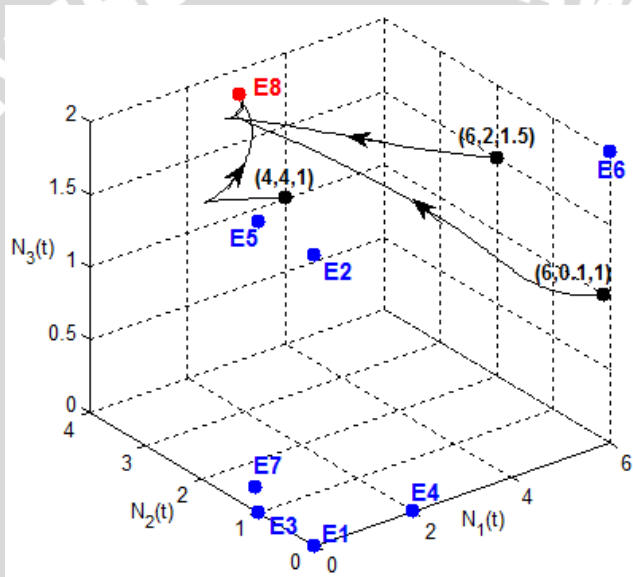
Pada Gambar 3.3 terlihat bahwa solusi yang diperoleh dari sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus sama.

3.3.1.2 Simulasi 2

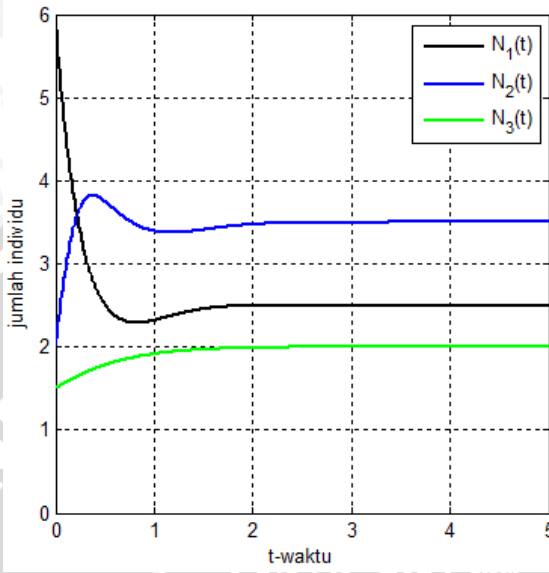
Simulasi 2 menggunakan nilai parameter seperti yang diberikan pada Tabel 3.3. Dari nilai parameter tersebut diperoleh

$$K_1 + CK_3 > PK_2,$$

sehingga syarat eksistensi titik kesetimbangan $E_8 = (2.5, 3.5, 2)$ terpenuhi. Itu berarti titik kesetimbangan E_8 bersifat stabil. Simulasi numerik yang menggambarkan keadaan tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.4 dan Gambar 3.5.



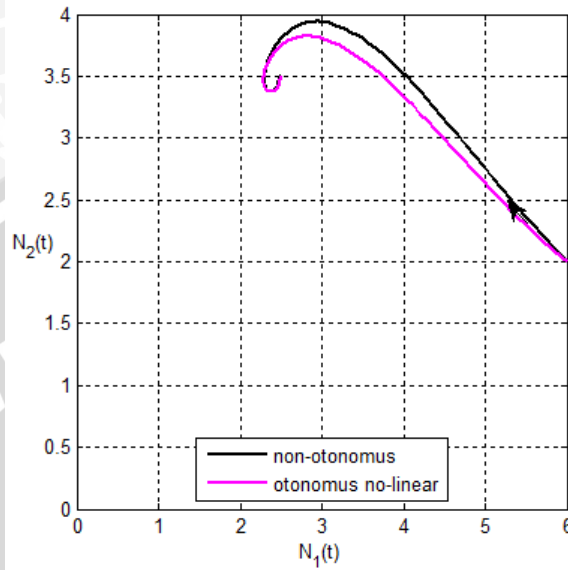
Gambar 3.4 Potret fase sistem persamaan (3.4) untuk simulasi 2



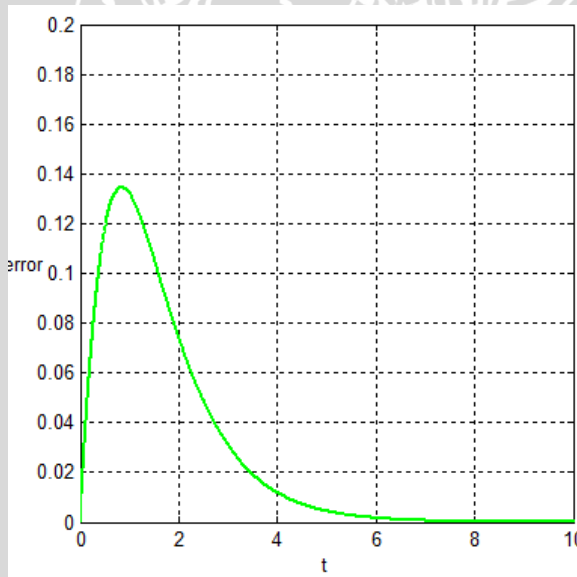
Gambar 3.5 Grafik solusi sistem persamaan (3.4) untuk simulasi 2 dengan nilai awal (6,2,1.5)

Dari Gambar 3.4 terlihat bahwa solusi dengan nilai awal (6,0,1,1), (6,2,1.5), dan (4,4,1) sama-sama menuju titik kesetimbangan E_8 . Gambar 3.5 merupakan grafik solusi $N_1(t)$, $N_2(t)$, $N_3(t)$. Dari gambar tersebut terlihat bahwa $N_1(t)$ stabil pada nilai 2.5, $N_2(t)$ stabil pada nilai 3.5, sedangkan $N_3(t)$ stabil pada nilai 2, sehingga dapat disimpulkan bahwa dengan nilai parameter pada simulasi 2, titik kesetimbangan $E_8 = (2.5, 3.5, 2)$ bersifat stabil. Hal ini berarti sistem dapat mempertahankan ketiga populasi tersebut dengan batasan nilai tertentu atau dengan kata lain ketiga spesies dapat hidup berdampingan, sebab perkalian antara koefisien pemangsaan *prey* dengan *carrying capacity predator* lebih kecil dari penjumlahan antara *carrying capacity prey* dan hasil kali koefisien komensalisme dengan *carrying capacity* spesies ketiga.

Perbandingan simulasi numerik antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi 2 ditunjukkan pada Gambar 3.6 berikut.



Gambar 3.6 Perbandingan sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi 2



Gambar 3.7 Kesalahan pemotongan pada penentuan $N_3(t)$ secara numerik

Pada Gambar 3.6 terlihat bahwa dengan nilai awal yang sama yaitu $(0.5, 0.5)$, kedua grafik menuju ke titik yang sama yaitu $(2.5, 3.5)$. Titik tersebut merupakan titik kesetimbangan $E_8 = (N_1(t), N_2(t), N_3(t)) = (2.5, 3.5, 2)$. Hal ini menunjukkan bahwa antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus terdapat sedikit perbedaan yang disebabkan oleh kesalahan pemotongan pada saat menentukan solusi $N_3(t)$ secara numerik. Gambar 3.7 adalah gambar kesalahan pemotongan tersebut. Pada Gambar 3.7 terlihat bahwa antara $t = 0$ dan $t = 4$ kesalahan pemotongan tinggi, sehingga pada Gambar 3.6 sistem non-otonomus dan otonomus non-linear menjauh.

3.3.2 Simulasi Model dengan Amensalisme

Rangkuman analisis kestabilan model terdapat pada Tabel 3.2, sedangkan *source code* program ditunjukkan pada Lampiran 2. Pada model *predator-prey* tiga spesies, terdapat delapan titik kesetimbangan. Perbandingan hasil analisis dinamik titik kesetimbangan ditunjukkan melalui variasi nilai parameter dalam beberapa simulasi berikut.

Tabel 3.4 Nilai Parameter yang digunakan dalam simulasi numerik model dengan amensalisme

Simulasi	P a r a m e t e r									
	a_{11}	a_{22}	a_{33}	K_1	K_2	K_3	P	Q	C	M
A	1	1	1	1	2	1	2	1	2	0.25
B	1	1	1	2	1	2	1	1	2	4
C	1	1	1	1	2	1	2	1	2	1

3.3.2.1 Simulasi A

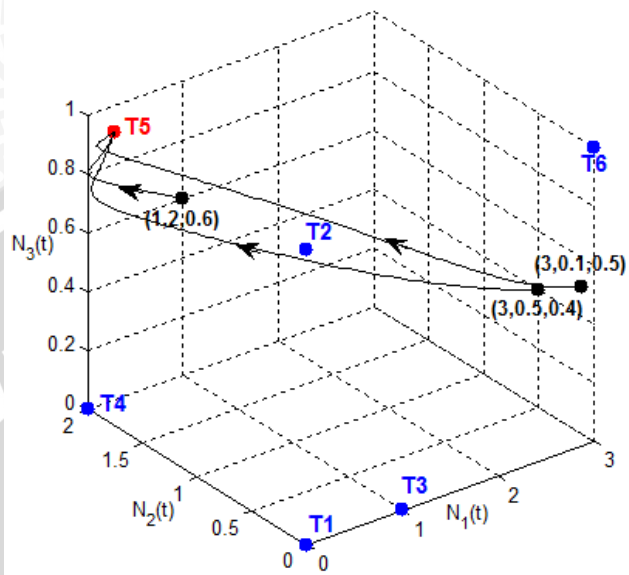
Parameter yang digunakan pada simulasi A memenuhi syarat eksistensi dan kestabilan $T_5 = (0, K_2 - M, K_3) = (0, 1.75, 1)$, yaitu

$$K_2 > MK_3$$

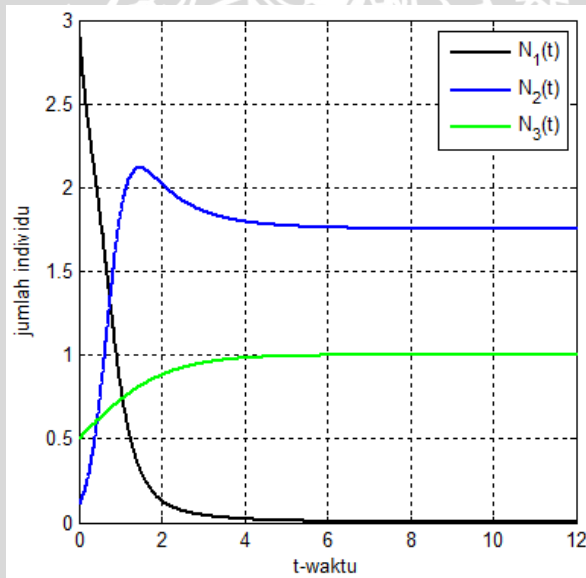
dan

$$K_1 + PMK_3 + CK_3 < PK_2.$$

Untuk lebih jelasnya, kondisi tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.8 dan Gambar 3.9.

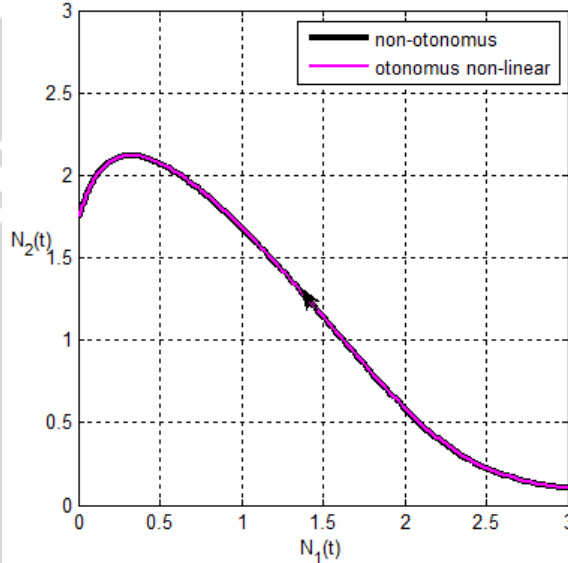


Gambar 3.8 Potret fase sistem persamaan (3.6) untuk simulasi A



Gambar 3.9 Grafik solusi sistem persamaan (3.6) untuk simulasi A dengan nilai awal (3,0,1,0,5)

Dari Gambar 3.8 terlihat bahwa solusi dengan nilai parameter pada simulasi A yang memenuhi syarat eksistensi T_5 dan nilai awal $(1,2,0.6)$, $(3,0.5,0.4)$, dan $(3,0.1,0.5)$ sama-sama menuju pada suatu titik, yaitu titik $T_5 = (0,1.75,1)$. Hal ini berarti, titik kesetimbangan T_5 bersifat stabil. Secara biologis, dengan nilai parameter tersebut, maka tidak terjadi kepunahan pada populasi *predator* dan spesies ketiga, sedangkan pada populasi *prey* mengalami kepunahan.



Gambar 3.10 Perbandingan sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi A

Perbandingan simulasi numerik antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi A di tunjukkan pada Gambar 3.10. Pada Gambar 3.10 terlihat bahwa antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus sama.

3.3.2.2 Simulasi B

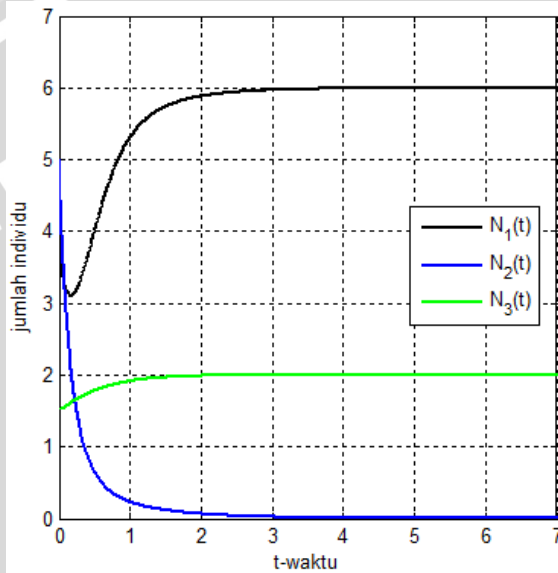
Berdasarkan Tabel 3.4, nilai parameter yang digunakan tidak memenuhi syarat eksistensi titik kesetimbangan T_5 yaitu

$$K_2 < MK_3.$$

Tetapi nilai parameter tersebut memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan T_6 yaitu

$$K_2 + Q(K_1 + CK_3) < MK_3.$$

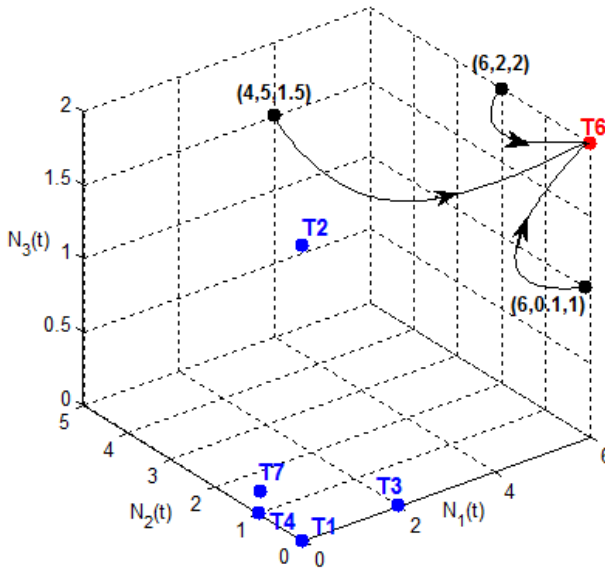
Dengan demikian, titik kesetimbangan T_8 tidak eksis. Hasil simulasi numerik yang menggambarkan kondisi tersebut ditunjukkan pada Gambar 3.11.



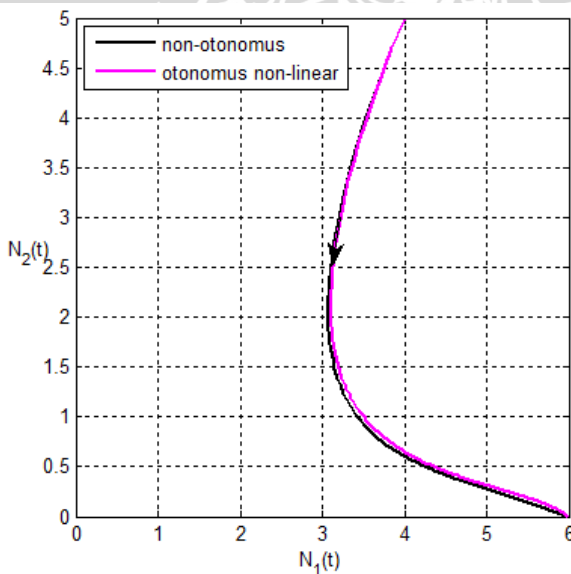
Gambar 3.11 Grafik solusi sistem persamaan (3.6) untuk simulasi B dengan nilai awal (4,5,1.5)

Dari Gambar 3.11 terlihat bahwa solusi menuju pada suatu titik kesetimbangan yaitu $T_6 = (N_1(t), N_2(t), N_3(t)) = (6,0,2)$. Secara biologis, dengan nilai parameter tersebut, maka tidak terjadi kepunahan pada populasi *prey* dan spesies ketiga, sedangkan pada populasi *predator* mengalami kepunahan. Untuk lebih jelasnya, grafik solusi pada Gambar 3.11 ditunjukkan dalam potret fase pada Gambar 3.12 dengan nilai awal (6,0,1,1), (6,2,2), dan (4,5,1,5).

Gambar 3.13 menunjukkan perbandingan simulasi numerik antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi B. Pada Gambar 3.13 terlihat bahwa antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus sama.



Gambar 3.12 Potret fase sistem persamaan (3.6) untuk simulasi B



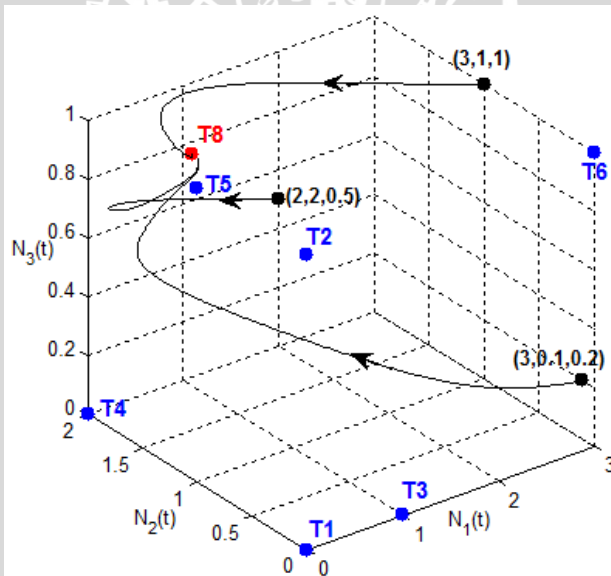
Gambar 3.13 Perbandingan sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi B

3.3.2.3 Simulasi C

Telah dijelaskan pada Subbab 3.3.2.2, syarat eksistensi titik T_8 adalah

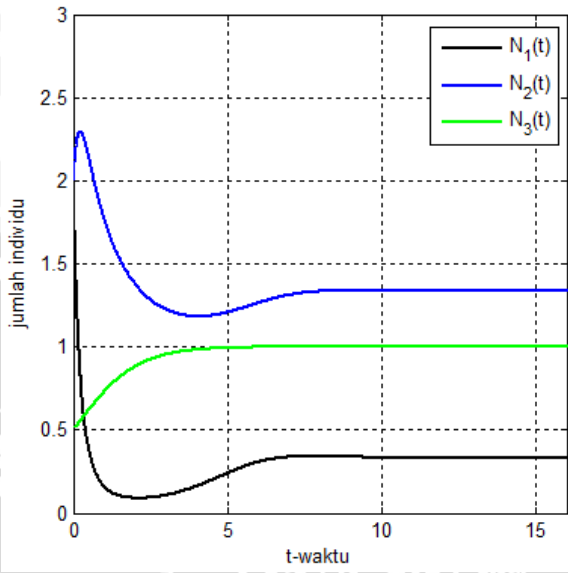
$$K_1 + PMK_3 + CK_3 > PK_2 \text{ dan } K_2 + Q(K_1 + CK_3) > MK_3.$$

Simulasi C menggunakan nilai parameter yang diberikan pada Tabel 3.4 sehingga memenuhi syarat eksistensi T_8 , dengan nilai awal $(3,0,1,0,2)$, $(3,1,1)$, dan $(2,2,0,5)$. Hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 3.14 dan Gambar 3.15. Dari Gambar 3.15 terlihat bahwa dengan nilai parameter pada simulasi C yang memenuhi syarat eksistensi T_8 , maka solusi menuju pada suatu titik, yaitu titik $T_8 = (0,3,1,3,1)$. Hal ini berarti, titik kesetimbangan T_8 bersifat stabil. Secara biologis, dengan nilai parameter tersebut, maka tidak terjadi kepunahan populasi. Ketiga populasi *prey*, *predator*, dan spesies ketiga dapat bertahan hidup secara berdampingan dalam batasan nilai tertentu.

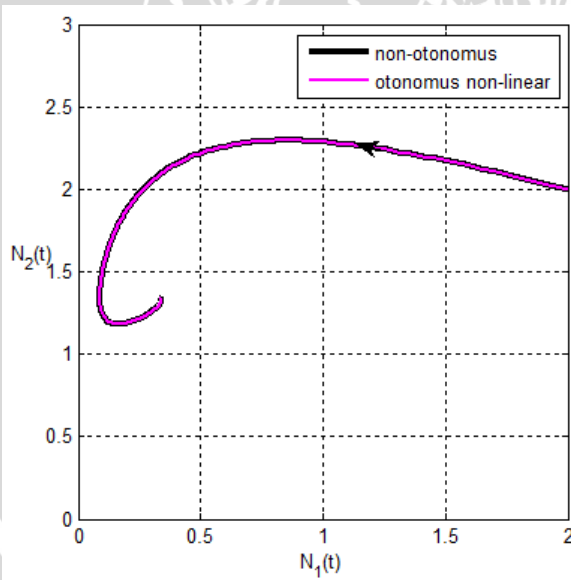


Gambar 3.14 Potret fase sistem persamaan (3.6) untuk simulasi C

Perbandingan simulasi numerik antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi C ditunjukkan pada Gambar 3.16. Pada Gambar 3.16 terlihat bahwa antara sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus sama.



Gambar 3.15 Grafik solusi sistem persamaan (3.6) untuk simulasi C dengan nilai awal (2,2,0.5)

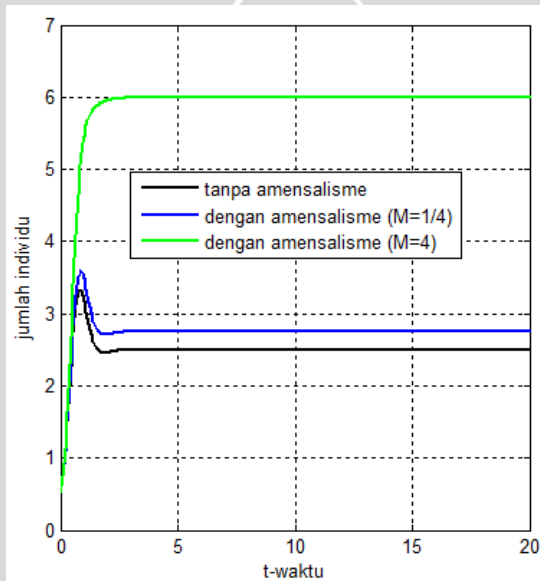


Gambar 3.16 Perbandingan sistem otonomus non-linear dan sistem non-otonomus untuk simulasi C

3.4 Efek Amensalisme

Pada bagian ini dibahas efek amensalisme yang terjadi pada ketiga spesies dan *source code* program ditunjukkan pada Lampiran 3. Dengan membandingkan hasil numerik antara model tanpa dan dengan amensalisme dengan cara menggunakan beberapa nilai parameter M , maka efek amensalisme dapat ditemukan. Pada simulasi ini digunakan nilai parameter $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{33} = 1$, $K_1 = 2$, $K_2 = 1$, $K_3 = 2$, $P = 1$, $Q = 1$, dan $C = 2$.

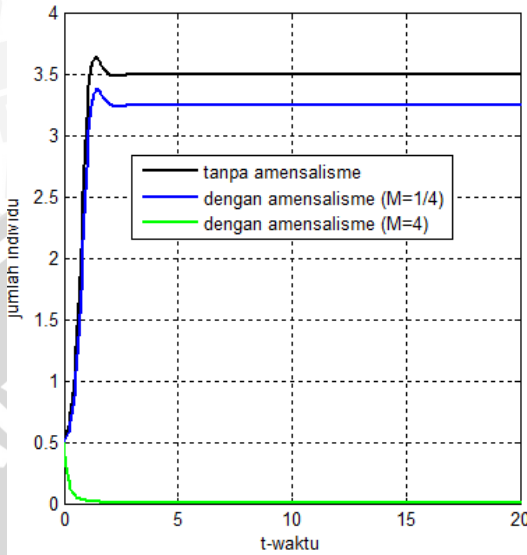
Hasil simulasi numerik yang menggambarkan populasi *prey* ditunjukkan pada Gambar 3.17. Pada Gambar 3.17 terlihat bahwa populasi *prey* semakin besar apabila nilai parameter M semakin besar. Amensalisme memberikan efek yang positif bagi populasi *prey*.



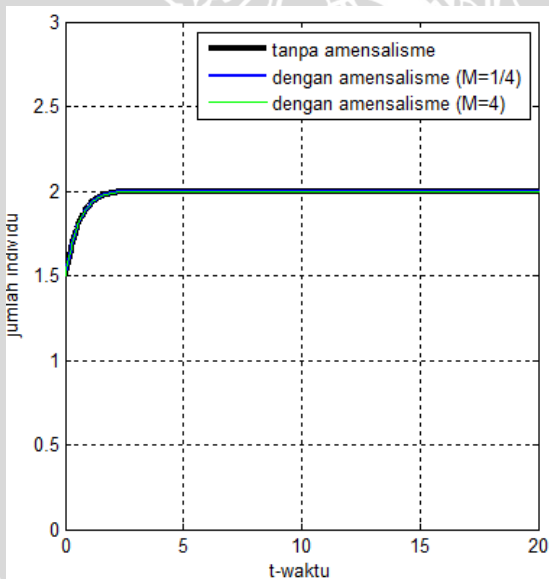
Gambar 3.17 Grafik solusi efek amensalisme bagi populasi *prey*

Hasil simulasi numerik yang menggambarkan populasi *predator* ditunjukkan pada Gambar 3.18. Pada Gambar 3.18 terlihat bahwa populasi *predator* semakin kecil apabila nilai parameter M semakin besar. Amensalisme memberikan efek negatif bagi populasi *predator*.

Hasil simulasi numerik yang menggambarkan populasi spesies ketiga ditunjukkan pada Gambar 3.19.



Gambar 3.18 Grafik solusi efek amensalisme populasi predator



Gambar 3.19 Grafik solusi populasi spesies ketiga

Pada Gambar 3.19 terlihat bahwa populasi spesies ketiga tidak dipengaruhi oleh nilai parameter M . Amensalisme tidak memberikan efek apapun bagi spesies ketiga.