

**ANALISIS DINAMIK PERSAMAAN LOGISTIK DISKRET  
DENGAN WAKTU TUNDA**

**SKRIPSI**

oleh  
**RESI KARTIKA SARI**  
**0810940062-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

**ANALISIS DINAMIK PERSAMAAN LOGISTIK  
DISKRIT DENGAN WAKTU TUNDA**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh  
**RESI KARTIKA SARI**  
**0810940062-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2013**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**  
**ANALISIS DINAMIK PERSAMAAN LOGISTIK**  
**DISKRET DENGAN WAKTU TUNDA**

oleh  
**RESI KARTIKA SARI**  
**0810940062-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 1 Februari 2013  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

**Dosen Pembimbing I**

**Dosen Pembimbing II**

**Dr. Agus Suryanto., M.Sc.**  
**NIP. 196908071994121001**

**Drs. M. Muslikh., M.Si.**  
**NIP. 195910311989121001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**  
**NIP.196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Resi Kartika Sari  
NIM : 0810940062  
Jurusan : Matematika  
Penulis skripsi berjudul : Analisis Dinamik Persamaan Logistik  
Diskret dengan Waktu Tunda

dengan ini menyatakan bahwa

1. skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 1 Februari 2013

Yang menyatakan,

(Resi Kartika Sari)

NIM. 0810940062

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# ANALISIS DINAMIK PERSAMAAN LOGISTIK DISKRET DENGAN WAKTU TUNDA

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model pertumbuhan logistik diskret dengan waktu tunda. Model tersebut berasal dari model logistik kontinu dengan waktu tunda yang didiskretisasi dengan metode Euler. Berdasarkan hasil analisisnya, model ini mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu  $x^* = 0$  dan  $x^* = K$ . Titik kesetimbangan  $x^* = 0$  bersifat tidak stabil, sedangkan pada titik kesetimbangan  $x^* = K$  terjadi perubahan kestabilan akibat adanya waktu tunda. Dengan kata lain, bifurkasi Neimark-Sakcer terjadi ketika waktu tunda berperan sebagai parameter bifurkasi. Pada bagian akhir dilakukan simulasi numerik untuk menguji hasil analisis yang telah diperoleh.

Kata Kunci : persamaan logistik, waktu tunda, titik kesetimbangan, metode Euler, bifurkasi Neimark-Sacker.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# DYNAMICAL ANALYSIS OF DISCRETE LOGISTIC EQUATION WITH TIME DELAY

## ABSTRACT

This final project discusses a discrete logistic model with time delay. This model is obtained from the Euler discretization of the continuous model. Results of analysis show that the model has two equilibrium points, namely  $x^* = 0$  and  $x^* = K$ . The equilibrium  $x^* = 0$  is stable, and for equilibrium  $x^* = K$  there is stability changing due to time delay. In other words, a Neimark-Sacker bifurcation exists where the time delay plays as the bifurcation parameter. Finally, numerical simulation is carried out to illustrate the analytical result.

**Keywords** : logistic equation, time delay, equilibrium, Euler method, Neimark-Sacker bifurcation.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *Analisis Dinamik Persamaan Logistik Diskret dengan Waktu Tunda* dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku pembimbing I dan Drs. M. Muslikh, M.Si. selaku pembimbing II atas segala bimbingan, motivasi, saran, waktu, serta kesabaran yang telah diberikan selama pembimbingan skripsi ini dan selalu mendorong penulis untuk menyelesaikan skripsi ini,
2. Dr. Wuryansari Muharini K. ,M.Si. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini,
3. Dr. Abdul Rouf A. , M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Sobri Abusini, M.T. selaku Ketua Program Studi Matematika,
4. semua bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya,
5. orang tuaku dan semua anggota keluarga besarku atas segala yang telah diberikan berupa dukungan yang tak pernah habis,
6. Ica, Risna, Lina, Imey, mama Elba, Dinda, Mazi, Nanda, Resti, Rizkyta, dan teman-teman de math bhe 08 atas semua bantuan dan dukungannya selama proses penulisan,
7. semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan barokah-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis [ecie\\_kartika@yahoo.com](mailto:ecie_kartika@yahoo.com). Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 1 Februari 2013

Penulis



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan.....	3
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Sistem Dinamik .....	5
2.2 Sistem Dinamik Diskret .....	5
2.3 Metode Euler .....	8
2.4 Model Pertumbuhan .....	8
2.4.1 Model pertumbuhan logistik.....	8
2.4.2 Model pertumbuhan logistik kontinu dengan waktu tunda .....	10
2.5 Bilangan Kompleks .....	11
2.6 Bifurkasi Neimark-Sacker .....	12
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
3.1 Diskretisasi Persamaan Logistik dengan WaktuTunda .....	15
3.2 Titik Keseimbangan.....	15
3.3 Kestabilan Titik Keseimbangan.....	15
3.3.1 Titik keseimbangan $x^* = 0$ .....	16
3.3.2 Titik keseimbangan $x^* = K$ .....	16
3.4 Simulasi Numerik .....	21

**BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN**

4.1 Kesimpulan..... 25  
4.2 Saran ..... 25

**DAFTAR PUSTAKA** ..... 27

**LAMPIRAN** ..... 29

**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Pertumbuhan Logistik .....	10
Gambar 2.2 Pertumbuhan Logistik Kontinu dengan Waktu Tunda.....	11
Gambar 2.3 Bifurkasi Neimark-Sacker <i>Supercritical</i> .....	13
Gambar 2.4 Bifurkasi Neimark-Sacker <i>Subcritical</i> .....	14
Gambar 3.1 Grafik Solusi untuk $\tau = 1.5 < \tau^*$ .....	22
Gambar 3.2 Grafik Solusi untuk $\tau = 1 < \tau^*$ .....	22
Gambar 3.3 Grafik Solusi untuk $\tau = 1.8 > \tau^*$ .....	23
Gambar 3.4 Grafik Solusi untuk $\tau = 2 > \tau^*$ .....	23





UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1 Perhitungan $u_{n+1} = (1 + rh)u_n$ .....	29
Lampiran 2 Perhitungan $\cos \omega^*$ dan $\tau^*$ .....	31
Lampiran 3 Perhitungan $dh$ .....	33
Lampiran 4 Perhitungan Persamaan (3.21-3.24) .....	35
Lampiran 5 <i>Listing Program</i> .....	39

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Populasi merupakan sekumpulan makhluk hidup atau individu dari suatu spesies yang sama yang menempati suatu tempat tertentu. Laju pertumbuhan populasi dipengaruhi oleh kondisi lingkungan, tingkat kelahiran, tingkat kematian, perburuan (*predations*), persaingan (*competitions*), imigrasi, dan emigrasi.

Laju pertumbuhan populasi dapat dimodelkan dalam suatu persamaan diferensial yang dapat memprediksi pertumbuhan suatu populasi. Salah satu persamaan terkenal yang menjelaskan pertumbuhan populasi adalah persamaan logistik, atau sering disebut model Verhulst. Persamaan logistik pertama kali diperkenalkan oleh Pierre-Francais Verhulst pada tahun 1838 (Murray, 2002). Pada persamaan ini diasumsikan tidak terjadi penundaan waktu pada proses pertumbuhan populasi, dan model ini menghasilkan solusi yang berbentuk fungsi monoton naik atau turun.

Namun dalam kenyataannya, sepanjang waktu pertumbuhan keadaan lingkungan dapat berubah. Perubahan ini menyebabkan pertumbuhan akan mengalami penundaan. Waktu tunda menyebabkan penurunan populasi tetapi kemudian terjadi peningkatan sehingga terjadi osilasi pada pertumbuhan populasi, sehingga solusi yang dihasilkan bukan fungsi yang monoton. Persamaan logistik kontinu dengan waktu tunda ini disebut persamaan Hutchinson (Timuneno, 2008).

Dalam skripsi ini, persamaan logistik kontinu dengan waktu tunda dianalisis secara numerik dengan melakukan diskretisasi. Beberapa metode yang sering digunakan antara lain metode Runge-Kutta, metode Euler, dan lain-lain. Akan tetapi, penulis hanya melakukan diskretisasi menggunakan metode Euler, di mana bentuk diferensialnya didekati dengan beda maju. Diskretisasi ini menghasilkan persamaan logistik diskret dengan waktu tunda.

Analisis dinamik di sekitar titik kesetimbangan persamaan logistik diskret dengan waktu tunda dilakukan untuk mengetahui sifat kestabilan titik tersebut.

Perubahan waktu tunda dapat mengakibatkan perubahan sifat kestabilan dari titik kesetimbangan persamaan logistik diskret dengan waktu tunda. Adanya perubahan kestabilan menunjukkan terjadinya bifurkasi di titik kesetimbangannya. Bifurkasi menjelaskan perubahan struktur orbit dari suatu sistem dinamik diskret seiring dengan perubahan nilai parameternya. Bifurkasi yang berkaitan dengan adanya nilai eigen kompleks murni disebut bifurkasi Hopf (Andronov Hopf) atau dalam sistem dinamik diskret disebut bifurkasi Neimark-Sacker.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana sistem diskret yang dibentuk dari persamaan logistik dengan waktu tunda,
2. bagaimana titik kesetimbangan persamaan,
3. bagaimana kestabilan titik kesetimbangan persamaan,
4. bagaimana membuktikan adanya bifurkasi Neimark-Sacker pada persamaan,
5. bagaimana hasil simulasi numerik persamaan logistik diskret dengan waktu tunda.

## **1.3 Batasan Masalah**

Pembahasan pada skripsi ini dibatasi oleh hal-hal berikut.

1. Populasi bersifat tertutup yang berarti penambahan dan pengurangan jumlah individu pada suatu populasi hanya terjadi melalui kelahiran dan kematian.
2. Daya dukung lingkungan yang terbatas.

#### 1.4 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah

1. menentukan sistem diskret yang dibentuk dari persamaan logistik kontinu dengan waktu tunda,
2. menentukan titik kesetimbangan persamaan,
3. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
4. menunjukkan adanya bifurkasi Neimark-Sacker pada persamaan,
5. melakukan simulasi numerik persamaan logistik diskret dengan waktu tunda.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu ( $t$ ). Jika  $t \in \mathbb{Z}$  atau  $\mathbb{N}$  maka diperoleh sistem dinamik diskret, sedangkan sistem dinamik kontinu diperoleh jika  $t \in \mathbb{R}$ . Sistem dinamik diskret dinyatakan sebagai

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad (2.1)$$

dengan  $t \in \mathbb{Z}$  atau  $\mathbb{N}$ , dan  $x, f \in \mathbb{R}^n$ .

Apabila  $n$  kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

Secara geometri, sistem dinamik diskret dan sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titik-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian yang didefinisikan oleh sistem persamaan diferensialnya (Perko, 1996).

#### 2.2 Sistem Dinamik Diskret

##### 2.1.1 Definisi 2.1

Pada sistem dinamik diskret (2.1),  $f$  disebut fungsi pembangkit sistem. Jika  $f$  bergantung pada parameter  $a$  dan  $t = n$ , maka fungsi pembangkitnya dinyatakan sebagai  $f(a, x_n)$ .

Titik  $x^*$  disebut titik kesetimbangan sistem dinamik diskret (2.1) jika  $x_n = x^*, \forall n$ , sehingga  $f(x^*) = x^*$  (Elaydi, 2005).

Pandang persamaan beda berorde  $k + 1$  berikut

$$x_{n+1} = F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}), n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

yang dapat dinyatakan dalam bentuk vektor sebagai

$$Y_{n+1} = G_{Y_n}, n = 0, 1, \dots \quad (2.3)$$



di mana

$$Y_n = \begin{bmatrix} y_n^0 \\ y_n^1 \\ \vdots \\ y_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-k} \end{bmatrix}$$

dan

$$\begin{aligned} Y_{n+1}^0 &= F(y_n^0, y_n^1, \dots, y_n^k) \\ Y_{n+1}^1 &= y_n^0 \\ Y_{n+1}^2 &= y_n^1 \\ &\vdots \\ Y_{n+1}^k &= y_n^{k-1}, \end{aligned}$$

sehingga

$$G_{Y_n} = \begin{bmatrix} F(y_n^0, y_n^1, \dots, y_n^k) \\ y_n^0 \\ y_n^1 \\ \vdots \\ y_n^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan definisi titik kesetimbangan, suatu titik  $x^*$  disebut titik kesetimbangan jika

$$\begin{aligned} F(y_n^0, y_n^1, \dots, y_n^k) &= F(x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-k}) = x^* \\ y_{n+1}^1 &= y_n^0 = x_n = x^* \\ &\vdots \\ y_{n+1}^{k-1} &= y_n^k = x_{n-k} = x^*. \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan persamaan (2.2) adalah  $x^* \in R$  sehingga  $x^* = F(x^*, x^*, \dots, x^*)$ , sedangkan titik kesetimbangan persamaan (2.3) berupa vektor  $Y^* \in R^{k+1}$  sehingga  $Y^* = G_{Y^*}$ . Jadi dapat disimpulkan bahwa  $x^*$  adalah titik kesetimbangan dari persamaan (2.2) jika dan hanya jika

$$Y^* = \begin{bmatrix} x^* \\ x^* \\ \vdots \\ x^* \end{bmatrix}$$

adalah titik kesetimbangan persamaan (2.3).

Jika persamaan (2.3) adalah persamaan linear berbentuk

$$x_{n+1} = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_k x_{n-k}, n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

maka dengan transformasi di atas, persamaan (2.4) menjadi

$$Y_{n+1} = AY_n, n = 0, 1, \dots, \quad (2.5)$$

di mana  $A$  adalah matriks berukuran  $(k + 1) \times (k + 1)$

$$A = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_{k-1} & b_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

dan persamaan karakteristik matriks  $A$  adalah

$$\lambda^{k+1} + b_0 \lambda^k + \dots + b_k = 0 \quad (2.7)$$

(Kocic dan Ladas, 1993).

### 2.1.2 Kestabilan sistem dinamik diskret

Perhatikan persamaan beda nonlinear berikut

$$Y_{n+1} = AY_n + F(Y_n), n = 0, 1, \dots \quad (2.8)$$

di mana  $A$  adalah matriks  $k + 1 \times k + 1$ ,  $Y_n \in R^{k+1}$  untuk setiap  $n \geq 0$ , dan  $F \in C[R^{k+1}, R^{k+1}]$ . Jika

$$F(0) = 0 \text{ dan } \lim_{\|u\| \rightarrow 0} \frac{F(u)}{\|u\|} = 0, \quad (2.9)$$

maka pernyataan berikut benar.

- Jika seluruh nilai eigen matriks  $A$  berada dalam lingkaran buka  $|\lambda| < 1$ , dan jika persamaan linear

$$Y_{n+1} = AY_n, n = 0, 1, \dots \quad (2.10)$$

adalah stabil asimtotik, maka persamaan (2.8) juga stabil asimtotik.

- Jika terdapat satu nilai eigen  $A$  memiliki nilai absolut yang lebih besar dari satu, maka persamaan (2.8) dikatakan tidak stabil.

- Jika semua nilai eigen  $A$  berada pada lingkaran tertutup  $|\lambda| < 1$  dan terdapat satu nilai eigen yang mempunyai nilai absolut satu, maka kestabilan dari persamaan (2.8) tidak dapat ditentukan dengan kestabilan persamaan (2.10) saja

(Kocic dan Ladas, 1993).

## 2.3 Metode Euler

Pendekatan numerik untuk persamaan diferensial

$$\frac{du}{dt} = f(t, u),$$

di mana fungsi  $f$  dan  $\frac{du}{dt}$  adalah fungsi kontinu dengan kondisi awal

$$u(t_0) = u_0,$$

dilakukan dengan menggunakan metode Euler. Metode ini dinyatakan oleh persamaan

$$u_{n+1} = u_n + f(t_n, u_n)(t_{n+1} - t_n), n = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Jika  $f_n = f(t_n, u_n)$ , maka persamaan (2.11) dapat ditulis kembali sebagai

$$u_{n+1} = u_n + f_n(t_{n+1} - t_n).$$

Jika ukuran langkah antara titik yang satu dengan yang lain memiliki nilai yang sama sebesar  $h$ , dan  $t_{n+1} = t_n + h$  untuk setiap  $n$ , maka diperoleh persamaan Euler dalam bentuk

$$u_{n+1} = u_n + f_n h,$$

(Boyce dan DiPrima, 2005).

## 2.4 Model Pertumbuhan

### 2.4.1 Model pertumbuhan logistik

Model pertumbuhan logistik adalah model pertumbuhan populasi dengan sumber daya lingkungan yang terbatas. Ketika ukuran populasi bertambah, laju pertumbuhan akhirnya melemah dan kemudian berhenti pada ukuran populasi yang secara umum disebut dengan *carrying capacity*, yaitu jumlah individu maksimal yang dapat didukung oleh lingkungannya.

Laju pertumbuhan populasi bergantung pada ukuran populasi, sehingga secara matematis laju pertumbuhan populasi dinyatakan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = f(x).$$

Misalkan  $K$  adalah *carrying capacity*. Jika dalam populasi terdapat  $x$  individu, maka lingkungan masih dapat mendukung  $(K - x)$  individu. Jadi masih terdapat bagian lingkungan yang dapat ditempati, sebesar

$$\frac{(K - x)}{K} \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) sebanding dengan pertumbuhan per kapita. Oleh karena itu, persamaan logistik dinyatakan sebagai

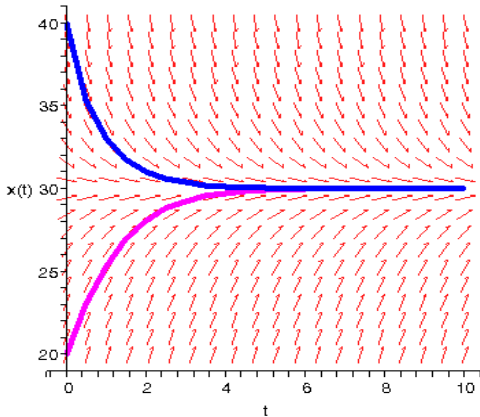
$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = r \frac{(K - x)}{K} \quad (2.13)$$

atau

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right),$$

dengan  $r$  adalah laju pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth rate*), yaitu nilai yang menggambarkan daya tumbuh suatu populasi. Dalam hal ini diasumsikan  $r > 0$ , mengingat setiap populasi memiliki potensi untuk berkembang biak (Boyce dan Dprima, 2005).

Jika jumlah populasi awal  $x(0) < K$ , maka model pertumbuhan logistik meramalkan bahwa ukuran populasi meningkat menuju *carrying capacity*  $K$ . Tetapi jika nilai awal  $x(0) > K$ , maka model logistik meramalkan bahwa jumlah populasi akan berkurang menuju  $K$ . Sebagai contoh, jika populasi awal  $x(0) = 20$ ,  $r = 1$ , dan  $K = 30$ , maka jumlah populasi meningkat dan pada akhirnya saat  $x(t) = K = 30$  laju pertumbuhan populasi berhenti. Sebaliknya jika  $x(0) = 40$ , jumlah populasi berkurang hingga pertumbuhan populasi terhenti pada  $x(t) = K = 30$ . Grafik pertumbuhan logistik diperlihatkan pada gambar 2.1.



**Gambar 2.1.** Pertumbuhan Logistik

#### 2.4.2 Model pertumbuhan logistik dengan waktu tunda

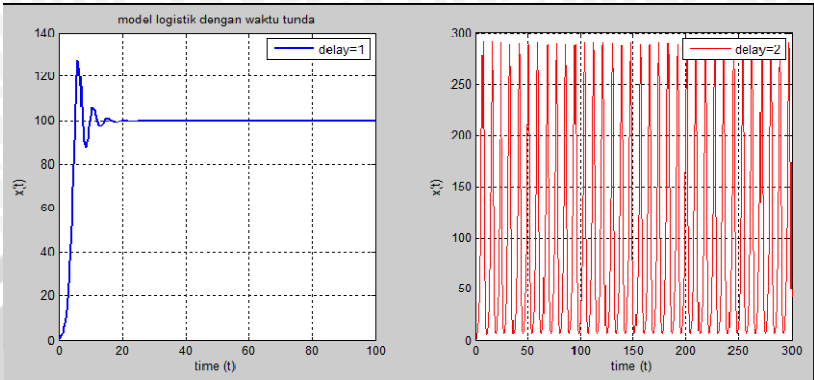
Persamaan logistik kontinu dengan waktu tunda, dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t-\tau)}{K} \right), \quad (2.14)$$

dengan  $x(t)$  adalah jumlah populasi pada waktu  $t$ , dan  $\tau$  adalah waktu tunda.

Persamaan (2.14) mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu  $x(t) = 0$  dan  $x(t) = K$ . Titik kesetimbangan  $x(t) = 0$  tidak stabil, sedangkan untuk  $x(t) = K$  stabil jika  $\tau < \frac{\pi}{2r}$ , tidak stabil jika  $\tau > \frac{\pi}{2r}$ , dan terjadi bifurkasi Hopf pada  $\tau = \frac{\pi}{2r}$ .

Misalkan digunakan nilai parameter  $r = 1$  dan  $K = 100$  dengan  $\tau = 1$  dan  $\tau = 2$ , maka perilaku solusi persamaan (2.14) pada titik kesetimbangan  $x(t) = K$  dapat dilihat pada Gambar 2.2.



**Gambar 2.2.** Grafik Solusi persamaan (2.14) untuk  $\tau = 1$  dan  $\tau = 2$ .

Gambar 2.2 untuk  $\tau = 1$  menunjukkan bahwa pada grafik solusi terjadi osilasi sampai suatu waktu dan akhirnya menuju daya dukung lingkungan, sedangkan untuk  $\tau = 2$  grafik solusi terus beresilasi. Ketika nilai parameter  $\tau > \frac{\pi}{2}$ , kestabilan titik kesetimbangan  $x(t) = K$  berubah, hal ini membuktikan terjadinya bifurkasi Hopf pada  $\tau = \frac{\pi}{2}$  (Julianti, 2012).

## 2.5 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks  $z$  dapat dituliskan dalam bentuk

$$z = a + ib,$$

di mana  $a$  dan  $b$  merupakan bilangan real. Nilai  $a$  merupakan bagian real dari  $z$ , dinotasikan dengan  $a = \text{Re}(z)$  dan nilai  $b$  merupakan bagian imajiner dari  $z$ , dinotasikan dengan  $b = \text{Im}(z)$ .

Akar dari jumlah kuadrat bagian real dan imajiner suatu bilangan kompleks  $z$  disebut modulus bilangan kompleks tersebut dan dinotasikan sebagai berikut:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Bilangan kompleks  $z = a + ib$  juga dapat ditulis dalam bentuk

$$z = re^{i\theta},$$

dengan  $r$  adalah modulus  $z$ ,  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , dan  $\tan \theta = \frac{b}{a}$  (Wuncsh, 2005).

## 2.6 Bifurkasi Neimark-Sacker

### Definisi 2.2 (Bifurkasi Neimark-Sacker)

Menurut Kuznetsov (1998), bifurkasi yang berkaitan dengan munculnya nilai eigen  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$  disebut dengan bifurkasi Neimark-Sacker.

Diberikan suatu sistem dinamik diskret dalam bentuk

$$x \rightarrow f(x, \tau), x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2. \quad (2.15)$$

Berdasarkan persamaan (2.15) dengan  $f(0, \tau) = 0$  untuk semua  $\tau$ , terdapat asumsi sebagai berikut:

1. fungsi  $f$  memiliki matriks Jacobi  $A$  yang memenuhi

$$A(\tau) = D_x f(0, \tau),$$

di mana  $D_u$  merupakan operator turunan untuk  $x$ .  $A(\tau^*)$ , di mana  $\tau^*$  merupakan  $\tau$  kritis, memiliki sepasang nilai eigen kompleks  $\lambda(\tau^*)$  dan  $\bar{\lambda}(\tau^*)$  yang tepat berada pada lingkaran satuan, sementara semua nilai eigen lainnya terletak di dalam lingkaran satuan,

2. nilai eigen  $\lambda$  dan  $\bar{\lambda}$  melintasi lingkaran saat  $\tau = \tau^*$  dengan

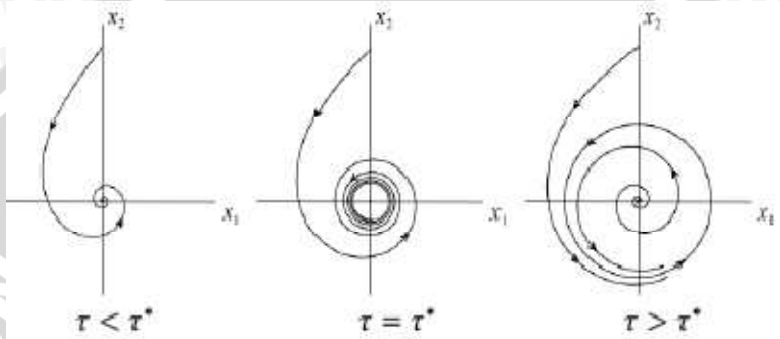
$$\frac{d}{d\tau} |\lambda(\tau)|_{\tau=\tau^*} > 0,$$

3. jika  $\arg(\lambda(\tau)) = \theta(\tau)$  dan  $\theta_0 = \theta(\tau^*)$  maka  $e^{i\theta_0 k} \neq 1$  untuk  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Kondisi dua menyatakan bahwa untuk  $\tau < \tau^*$ ,  $\tau$  cukup dekat dengan  $\tau^*$ , semua nilai eigen  $A(\tau)$  memiliki modulus kurang dari satu. Titik tetap  $x^*$  adalah stabil asimtotik untuk  $\tau$  dalam interval tersebut (Ford dan Wulf, 1998).

Jika terdapat  $\tau = \tau^*$  sehingga muncul suatu *limit cycle* stabil pada sistem tersebut ketika  $\tau$  melewati titik kritis  $\tau^*$  maka sistem (2.15) tersebut mengalami bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*. Parameter  $\tau = \tau^*$  menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai

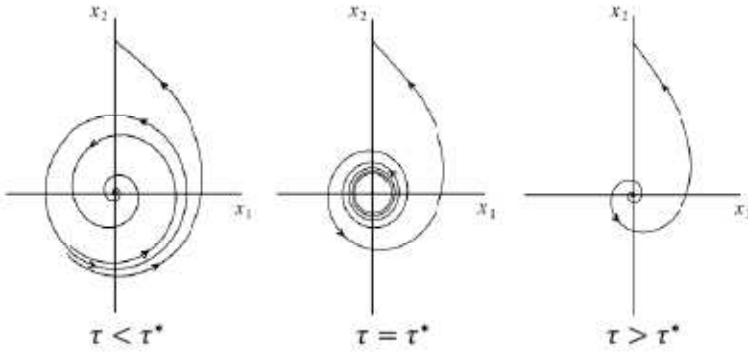
bentuk  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0} > 0$ . Hal ini berakibat pada perubahan struktur orbit dan munculnya *limit cycle* stabil dari sistem seiring dengan perubahan nilai parameter seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.3 (Kuznetsov, 1998).



**Gambar 2.3.** Bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*

Jika terdapat  $\tau = \tau^*$  sehingga *limit cycle* tak stabil yang muncul ketika  $\tau < \tau^*$  tereduksi ketika  $\tau$  melewati  $\tau^*$  maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Neimark-Sacker *subcritical*. Parameter  $\tau = \tau^*$  menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk  $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0} > 0$ . Sama dengan bifurkasi Neimark-Sacker *supercritical*, struktur orbit yang terjadi karena tereduksinya *limit cycle* yang tak stabil dari sistem juga akan berubah seiring perubahan nilai parameter.





**Gambar 2.4.** Bifurkasi Neimark-Sacker *Subcritical*

Struktur orbit di sekitar  $x^*$  yang berubah sebagai akibat perubahan nilai parameter  $\tau$  pun dianalisis lebih lanjut.



## BAB III PEMBAHASAN

### 3.1 Diskretisasi Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda

Persamaan logistik kontinu dengan waktu tunda (2.14) saat  $t = t_n$  dapat ditulis menjadi

$$\left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_n} = rx(t_n) \left( 1 - \frac{x(t_n - \tau)}{K} \right). \quad (3.1)$$

Diskretisasi persamaan (2.14) dengan metode Euler menghasilkan

$$x(t_{n+1}) - x(t_n) = rhx(t_n) \left( 1 - \frac{x(t_n - m)}{K} \right), \quad (3.2)$$

dengan  $m = \frac{\tau}{h}$ .

Jika  $x_n = x(t_n)$  maka persamaan (3.2) menjadi

$$x_{n+1} = x_n + rhx_n \left( 1 - \frac{x_{n-m}}{K} \right). \quad (3.3)$$

Persamaan (3.3) disebut sebagai persamaan logistik diskret dengan waktu tunda.

### 3.2 Titik Kesetimbangan

Persamaan (3.3) dapat dituliskan kembali dengan menggunakan definisi titik kesetimbangan sistem dinamik diskret sebagai

$$x^* = x^* + rhx^* \left( 1 - \frac{x^*}{K} \right). \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.4) diperoleh dua titik kesetimbangan untuk persamaan logistik diskret dengan waktu tunda, yaitu  $x^* = 0$  dan  $x^* = K$ .

### 3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan persamaan logistik diskret dengan waktu tunda dilakukan linearisasi. Linearisasi dilakukan di sekitar titik kesetimbangan dengan perturbasi, dengan parameter perturbationnya adalah  $\varepsilon$ , di mana  $\varepsilon \ll 1$ .

### 3.3.1 Titik Kesetimbangan $x^* = 0$

Jika  $x_n = x^* + \varepsilon u_n$ , dengan  $x^* = 0$  diperoleh

$$\varepsilon u_{n+1} = \varepsilon u_n + rh\varepsilon u_n - \frac{rh\varepsilon^2 u_n u_{n-m}}{K},$$

karena nilai  $\varepsilon$  sangat kecil maka nilai  $\varepsilon^2$  dapat diabaikan, sehingga menghasilkan

$$u_{n+1} = (1 + rh)u_n. \quad (3.5)$$

Persamaan (3.5) mempunyai penyelesaian umum yang berbentuk **(lampiran 1)**

$$u_n = (1 + rh)^n u_0. \quad (3.6)$$

Misalkan  $\lambda = 1 + rh$ , semua solusi konvergen menuju nol (stabil asimtotik) jika dan hanya jika  $|\lambda| < 1$ , maka

$$\begin{aligned} |1 + rh| &< 1 \\ -1 &< 1 + rh < 1 \\ -2 &< rh < 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Titik kesetimbangan  $x^* = 0$  stabil asimtotik jika dan hanya jika memenuhi kondisi (3.7). Akan tetapi, diketahui bahwa  $r$  merupakan laju pertumbuhan intrinsik yang diasumsikan bernilai positif, dan  $h$  merupakan ukuran langkah yang juga bernilai positif sehingga kondisi (3.7) tidak mungkin terpenuhi. Jadi dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan  $x^* = 0$  tidak stabil untuk semua  $\tau > 0$ .

### 3.3.2 Titik Kesetimbangan $x^* = K$

Jika  $x_n = x^* + \varepsilon u_n$ , di mana  $x^* = K$  diperoleh

$$\varepsilon u_{n+1} = \varepsilon u_n - \frac{rhK\varepsilon u_{n-m}}{K} - \frac{rh\varepsilon^2 u_n u_{n-m}}{K},$$

karena nilai  $\varepsilon$  sangat kecil maka nilai  $\varepsilon^2$  dapat diabaikan, sehingga menghasilkan

$$u_{n+1} = u_n - r \frac{\tau}{m} u_{n-m}, \quad (3.8)$$

dengan  $h = \frac{\tau}{m}$ .

Jika  $\vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n^0 \\ x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \\ \vdots \\ u_{n-m} \end{bmatrix}$  maka persamaan (3.8) menghasilkan sistem

$$u_{n+1} = u_n - r \frac{\tau}{m} u_{n-m}.$$

$$x_{n+1}^0 = x_n^0 - r \frac{\tau}{m} x_n^m$$

$$x_{n+1}^1 = x_n^0$$

⋮

$$x_{n+1}^m = x_n^{m-1}$$

untuk  $n = 1, 2, 3, \dots$  dengan  $\vec{x}_n = (x_n^0, x_n^1, \dots, x_n^m)^T$ . Akibatnya persamaan (3.9) dapat ditulis sebagai

$$\vec{x}_{n+1} = A_x \vec{x}_n,$$

atau

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^0 \\ x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -r \frac{\tau}{m} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \begin{pmatrix} x_n^0 \\ x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen matriks  $A$  adalah solusi persamaan karakteristik  $|\lambda I - A_x| = 0$ . Perhatikan bahwa

$$|\lambda I - A_x| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & r \frac{\tau}{m} \\ -1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

dengan ekspansi baris diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^{m+1} - \lambda^m + r \frac{\tau}{m} = 0. \quad (3.10)$$

### Lemma 3.1

Terdapat  $\tau_m > 0$  sehingga untuk  $0 < \tau < \tau_m$  semua akar dari persamaan (3.10) mempunyai modulus kurang dari satu.

### Bukti

Misal  $\tau = 0$ , persamaan (3.10) menjadi

$$(\lambda - 1)\lambda^m = 0,$$

pada saat  $\tau = 0$  persamaan (3.10) mempunyai  $m$ -kelipatan akar yang bernilai 0 dan satu akar yang bernilai 1.

Akar persamaan (3.10) bergantung pada nilai  $\tau$ , sehingga untuk mengetahui perubahannya persamaan diturunkan terhadap  $\tau$ , yaitu

$$(m + 1)\lambda^m \frac{d\lambda}{d\tau} - m\lambda^{m-1} \frac{d\lambda}{d\tau} + \frac{r}{m} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} ((m + 1)\lambda^m - m\lambda^{m-1}) + \frac{r}{m} = 0$$

$$\frac{d\lambda}{d\tau} ((m + 1)\lambda^m - m\lambda^{m-1}) = -\frac{r}{m}.$$

Dari perhitungan di atas diperoleh nilai

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-r}{m^2\lambda^m + m\lambda^m - m^2\lambda^{m-1}}, \quad (3.11)$$

dan nilai konjugatnya

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} = \frac{-r}{m^2\bar{\lambda}^m + m\bar{\lambda}^m - m^2\bar{\lambda}^{m-1}}. \quad (3.12)$$

Pada bilangan kompleks terdapat prinsip operasi yang berbentuk  $|\lambda|^2 = \bar{\lambda}\lambda$ , jika diturunkan terhadap  $\tau$  diperoleh bentuk

$$\frac{d|\lambda|^2}{d\tau} = \lambda \frac{d\bar{\lambda}}{d\tau} + \bar{\lambda} \frac{d\lambda}{d\tau}, \quad (3.13)$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.13) diperoleh

$$\left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=0, \lambda=1} = \left( \frac{-r}{m^2 + m - m^2} \right) + \left( \frac{-r}{m^2 + m - m^2} \right),$$

sehingga

$$\left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=0, \lambda=1} = \frac{-2r}{m} < 0.$$

Laju perubahan  $\lambda$  saat  $\tau = 0$  bernilai negatif, yang berarti saat  $\tau = 0$  akar persamaan (3.10) berada di dalam lingkaran atau  $|\lambda| < 1$  untuk semua  $\tau$  cukup kecil yang bernilai positif. Untuk  $\tau \neq 0$  kestabilan dapat berubah sehingga mengakibatkan akar persamaan keluar lingkaran atau  $|\lambda| > 1$ .

Jadi dapat disimpulkan bahwa, terdapat  $\tau_m > 0$  yang mengakibatkan semua akar dari persamaan (3.10) terletak pada  $|\lambda| < 1$  untuk nilai  $\tau$  yang cukup kecil dengan syarat  $0 < \tau < \tau_m$ , sehingga keberadaan dari  $\tau_m$  terbukti. Jika nilai tundaan  $\tau > \tau_m$  maka terjadi perubahan kestabilan pada akar persamaan.

### Lemma 3.2

Diasumsikan  $rh > 2$ , maka untuk semua  $\tau > 0$  persamaan (3.10) tidak memiliki akar dengan modulus satu.

#### Bukti

Andaikan terdapat  $\lambda$  sehingga  $|\lambda| = 1$  maka  $\lambda = e^{i\omega^*}$ , sehingga persamaan (3.10) menjadi

$$e^{i(m+1)\omega^*} - e^{im\omega^*} = -r \frac{\tau}{m} \quad (3.14)$$

Berdasarkan rumus Euler pada bilangan kompleks, persamaan (3.14) dinyatakan dalam bentuk

$$\cos(m+1)\omega^* + i \sin(m+1)\omega^* - \cos m\omega^* - i \sin m\omega^* = -r \frac{\tau}{m} \quad (3.15)$$

Jika bagian real dan imajinerinya dipisahkan maka diperoleh bentuk

$$\text{Real : } \cos(m+1)\omega^* - \cos m\omega^* = -r \frac{\tau}{m}, \quad (3.16)$$

$$\text{Im : } \sin(m+1)\omega^* - \sin m\omega^* = 0. \quad (3.17)$$

Persamaan (3.16) dan (3.17) masing-masing dikuadratkan dan dijumlahkan (**lampiran 2**), sehingga menghasilkan

$$\cos \omega^* = 1 - \frac{r^2 \tau^2}{2m^2}$$

atau

$$\cos \omega^* = 1 - \frac{(rh)^2}{2}. \quad (3.18)$$

Perhatikan persamaan (3.18), jika nilai  $rh > 2$  maka nilai  $\cos \omega^* < -1$ . Hal tersebut merupakan kontradiksi dari nilai  $-1 < \cos \omega^* < 1$ , sehingga pemisalan salah dan harus diingkar agar pernyataan menjadi benar. Pembuktian Lemma 3.2 terpenuhi.

Jika  $rh < 2$ , maka akar persamaan  $e^{\pm i\omega}$  dari persamaan (3.10) dengan modulus satu memenuhi persamaan (3.18) dan

$$\tau^* = -\frac{m}{r}(\cos(m+1)\omega^* - \cos m\omega^*). \quad (3.19)$$

### Lemma 3.3

Jika  $rh > 0$ , maka

$$d_h = \left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*, \omega=\omega^*} > 0,$$

di mana nilai  $\omega^*$  dan  $\tau^*$  memenuhi persamaan (3.18) dan (3.19).

### Bukti

Substitusi persamaan (3.11) dan (3.12) ke persamaan (3.13) (**lampiran 3**) menghasilkan

$$d_h = \left. \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \right|_{\tau=\tau^*, \omega=\omega^*} = \frac{2mr\{-(m+1)\cos(m+1)\omega^* + m\cos m\omega^*\}}{2m^4(1-\cos\omega^*) + 2m^3(1-\cos\omega^*) + m^2} \quad (3.20)$$

Dari persamaan (3.18) dan (3.20) diperoleh beberapa persamaan (**lampiran 4**), yaitu

$$-2mr(m+1)\cos(m+1)\omega^* = mr^2h(m+1) > 0 \quad (3.21)$$

$$2m^2r\cos m\omega^* = m^2r^2h > 0 \quad (3.22)$$

$$2m^4(1-\cos\omega^*) = m^4r^2h^2 > 0 \quad (3.23)$$

$$2m^3(1-\cos\omega^*) = m^3r^2h^2 > 0. \quad (3.24)$$

Jika persamaan (3.21-3.24) disubstitusikan ke persamaan (3.20) maka diperoleh

$$d_h = \frac{mr^2h(m+1) + m^2r^2h}{m^4r^2h^2 + m^3r^2h^2 + m^2}. \quad (3.25)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$d_h = \frac{d|\lambda|^2}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau^*, \omega=\omega^*} > 0,$$

sebab  $r > 0$ ,  $h > 0$ , dan  $m > 0$ , sehingga Lemma 3.3 terbukti.

Berdasarkan **Lemma 3.1-Lemma 3.3** dapat dianalisis jenis kestabilan dan bifurkasi persamaan (3.3) pada titik kesetimbangan  $x^* = K$  sebagai berikut.

### **Teorema 3.1**

1. Jika  $rh > 2$ , maka titik kesetimbangan  $x^* = K$  persamaan (3.3) tidak stabil untuk semua nilai  $\tau > 0$ .
2. Jika  $rh < 2$ , maka terdapat urutan tak terbatas dari parameter waktu tunda  $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$ , sehingga titik kesetimbangan  $x^* = K$  persamaan (3.3) stabil asimtotik ketika  $\tau \in (0, \tau_0)$  dan tidak stabil ketika  $\tau > \tau_0$ . Persamaan (3.3) mengalami bifurkasi Neimark-Sacker pada titik  $x^* = K$  ketika  $\tau = \tau_j$ ,  $j=0,1,2,3,\dots$  di mana  $\tau_j$  memenuhi oleh persamaan (3.19).

### **Bukti**

1. Jika  $rh > 2$ , dari Lemma 3.2-Lemma 3.3 dapat diketahui bahwa persamaan (3.10) untuk semua  $\tau > 0$  tidak memiliki modulus akar sama dengan satu tetapi modulus akarnya lebih dari satu.
2. Jika  $rh < 2$ , dengan menerapkan Lemma 3.3, diketahui bahwa semua akar dari persamaan (3.10) mempunyai modulus kurang dari satu ketika  $\tau \in (0, \tau_0)$ , dan persamaan (3.10) memiliki sedikitnya sepasang akar dengan modulus yang lebih besar dari satu ketika  $\tau > \tau_0$ . Oleh karena itu kesimpulan (2) telah terbukti.

### **3.4 Simulasi Numerik**

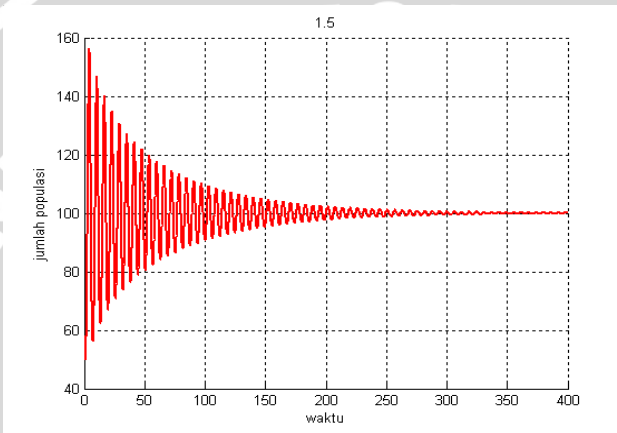
Simulasi numerik digunakan untuk memverifikasi hasil analisis yang telah diperoleh pada sub bab sebelumnya. Untuk mensimulasikan analisis dinamik persamaan logistik diskret dengan waktu tunda, digunakan metode Euler pada *software* Matlab (**lampiran 5**).



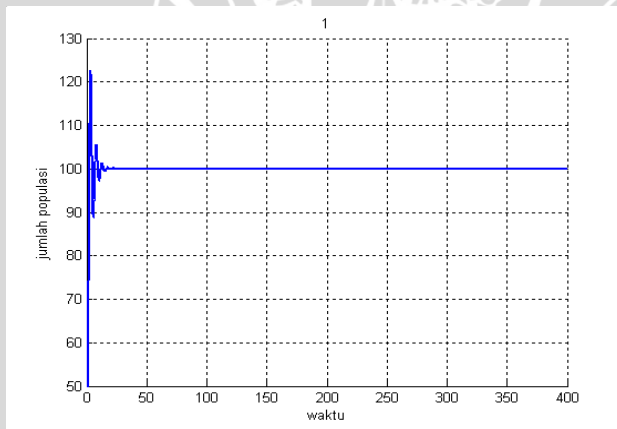
Pada simulasi ini dipilih nilai  $r = 1$ ,  $h = 0.05$ , dan  $K = 100$ . Terlihat bahwa parameter bifurkasi terpenuhi karena

$$rh = 0.05 < 2.$$

Untuk menentukan kestabilan titik kesetimbangan perlu dihitung nilai  $\tau$  kritis ( $\tau^*$ ) yang memenuhi persamaan (3.19), yaitu  $\tau^* = 1.545632673$ . Titik kesetimbangan  $x^* = K$  stabil asimtotik jika diambil nilai  $\tau$  yang lebih kecil dari  $\tau^*$  seperti ditunjukkan Gambar 3.1.



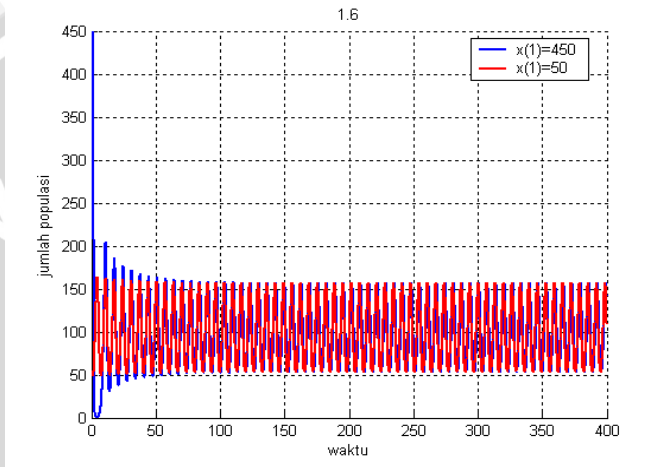
(a)



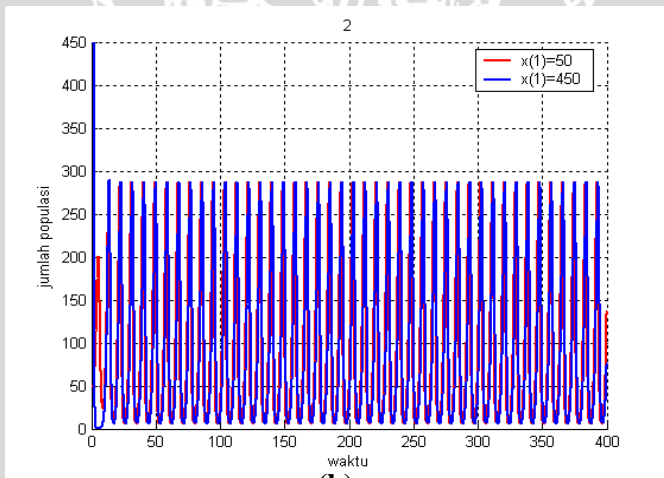
(b)

**Gambar 3.1.** Grafik Solusi untuk (a)  $\tau = 1.5 < \tau^*$  dan (b)  $\tau = 1 < \tau^*$

Dari Gambar 3.1 (a) dan Gambar 3.1 (b) terlihat bahwa grafik solusi dengan nilai awal  $x(t) = 50$  konvergen menuju ke titik kesetimbangan  $x^*$  dengan nilai  $\tau$  masing-masing sebesar  $\tau = 1.5$  dan  $\tau = 1$ . Jika nilai  $\tau$  yang dipilih lebih besar dari  $\tau^*$  maka grafik solusi akan beresolasi seperti pada Gambar 3.2.



(a)



(b)

**Gambar 3.2.** Grafik Solusi untuk (a)  $\tau = 1.6 > \tau^*$  dan (b)  $\tau = 2 > \tau^*$

Semakin bertambahnya waktu, grafik pada Gambar 3.2 (a) dan Gambar 3.2 (b) dengan nilai awal  $x(t) = 50$  dan  $x(t) = 450$  terus berosilasi. Semakin besar nilai dari  $\tau$  yang diambil, maka semakin besar juga simpangan osilasinya dan semakin menjauhi titik kesetimbangannya. Waktu tunda yang semakin besar menyebabkan osilasi yang terjadi juga semakin besar sehingga mempengaruhi kestabilan titik kesetimbangan yang pada hal ini adalah  $K$  (*carrying capacity*).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang telah diuraikan pada Bab I dan hasil dari pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan berikut.

1. Dengan menggunakan metode Euler, diperoleh bentuk diskret untuk persamaan logistik dengan waktu tunda. Dari model diskret tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu  $x^* = 0$  dan  $x^* = K$ .
2. Titik kesetimbangan  $x^* = 0$  tidak stabil, sedangkan titik  $x^* = K$  stabil jika memenuhi beberapa syarat.
3. Pada titik  $x^* = K$  terjadi perubahan kestabilan yang menyebabkan terjadinya bifurkasi. Jika  $rh > 2$  maka titik kesetimbangan tersebut tidak stabil untuk semua nilai  $\tau > 0$ , dan jika  $rh < 2$ , maka terdapat urutan tak terbatas dari parameter waktu tunda  $\tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n < \dots$  sehingga titik tetap stabil asimtotik ketika  $\tau \in (0, \tau_0)$  dan tidak stabil ketika  $\tau > \tau_0$ .
4. Simulasi numerik yang dilakukan menunjukkan hasil yang sama dengan hasil analisis.

### 4.2 Saran

Berdasarkan sifat kestabilan titik kesetimbangan persamaan logistik kontinu dengan waktu tunda (Julianti, 2012), metode Euler menghasilkan kesimpulan yang salah untuk Teorema 3.1 pada  $rh > 2$ , sehingga kriteria kestabilannya tidak konsisten dengan model kontinunya. Agar konsisten, maka nilai  $h$  harus dibatasi. Untuk itu, diharapkan pada skripsi selanjutnya digunakan metode lain yang dapat mendekati kesimpulan pada model kontinunya.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D.K. dan C.M Place. 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. United State of America.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. Ninth Edition*, John Wiley & Sons, Inc. United State of America.
- Chasnov, J. R. 2009. *Mathematical Biology*. University of Science and Technology. Hongkong.
- Ding, X. dan W. Li. 2006. Stability And Bifurcation Of Numerical Discretization Nicholson Blowflies Equation With Delay. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Volume 2006, Article 19413, hal. 1-12.
- Elyadi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third edition, Springer. New York.
- Julianti, P.M. 2012. Analisis Dinamik Persamaan Logistik dengan Waktu Tunda. *Skripsi*. Universitas Brawijaya. Malang.
- Kocic, V.L. dan G. Ladas. 1993. *Global Behaviour of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Applications*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Kuang, Y. 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc. London.
- Kuznetsov, Y.A. 1998. *Elements of Applied Bifurcations Theory, Second Edition*. Springer-Verlag, Inc. New York.
- Murray, J.D. 2002. *Mathematical Biology: 1, An Introduction*. Springer-Verlag, Inc. New York.

Perko, L. 1996. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition, Springer-Verlag, Inc. New York.

Takenouchi, Y. dan O . Yasushi. 2009. Effect of the Time Delay on the Stability and Instability of the Logistic Map. *Dynamical System*. Arxiv: 0908.3970v1, hal. 1-9.

Timuneno, H. M., H. S. Utomo, dan R. Widowati. 2008. Model Pertumbuhan Populasi dengan Waktu Tunda. *Jurnal Matematika*, Vol(11), 43-51, Universitas Negeri Semarang.

Zhang, C., Y. Zu, dan B. Zheng. 2005. Stability and Bifurcation of a Discrete Red Blood Cell Survival Model, *Chaos, Solutions, and Fractals* 28, doi:10.1016/j.chaos. Volume 2005.05.042, hal. 386-394.



## LAMPIRAN

**Lampiran 1.** Bentuk umum persamaan  $u_{n+1} = (1 + rh)u_n$ .

Misalkan  $\lambda = 1 + rh$ , maka persamaan  $u_{n+1} = (1 + rh)u_n$  dapat ditulis kembali menjadi

$$u_{n+1} = \lambda u_n.$$

1. Jika  $n = 0$ , maka diperoleh bentuk

$$u_{n+1} = \lambda u_n$$

$$u_1 = \lambda u_0.$$

2. Jika  $n = 1$ , maka

$$u_{n+1} = \lambda u_n$$

$$u_2 = \lambda u_1$$

$$u_2 = \lambda \lambda u_0$$

$$u_2 = \lambda^2 u_0.$$

3. Jika  $n = 2$ , maka

$$u_{n+1} = \lambda u_n$$

$$u_3 = \lambda u_2$$

$$u_3 = \lambda \lambda^2 u_0$$

$$u_3 = \lambda^3 u_0.$$

⋮

4. Jika  $n = p$ , maka

$$u_{n+1} = \lambda u_n$$

$$u_{p+1} = \lambda \lambda^p u_0$$

$$u_{p+1} = \lambda^{p+1} u_0.$$

Berdasarkan hasil substitusi di atas, dapat disimpulkan bahwa

$$u_{n+1} = \lambda u_n,$$

mempunyai penyelesaian umum yang berbentuk

$$u_{n+1} = \lambda^{n+1} u_0.$$



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## Lampiran 2. Perhitungan Persamaan (3.18) dan (3.19)

Untuk menemukan nilai dari  $\cos \omega^*$  dan  $\tau^*$  adalah masing-masing persamaan (3.18) dan (3.19) dikuadratkan dan dijumlahkan seperti berikut.

$$\text{Real : } \cos(m+1)\omega^* - \cos m\omega^* = -r \frac{\tau}{m}, \quad (3.16)$$

$$\text{Im : } \sin(m+1)\omega^* - \sin m\omega^* = 0. \quad (3.17)$$

menjadi

$$\begin{aligned} \cos^2(m+1)\omega^* - 2\cos(m+1)\omega^* \cos m\omega^* + \cos^2 m\omega^* &= \frac{r^2 \tau^2}{m^2} \\ \sin^2(m+1)\omega^* - 2\sin(m+1)\omega^* \sin m\omega^* + \sin^2 m\omega^* &= 0 \end{aligned} +$$

$$\begin{aligned} &1 - 2(\cos(m+1)\omega^* \cos m\omega^* + \sin(m+1)\omega^* \sin m\omega^*) + 1 \\ &= \frac{r^2 \tau^2}{m^2} \end{aligned}$$

$$2 - 2(\cos(m+1)\omega^* \cos m\omega^* + \sin(m+1)\omega^* \sin m\omega^*) = \frac{r^2 \tau^2}{m^2}$$

dari  $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$ , maka

$$2 - 2 \cos((m+1 - m)\omega^*) = \frac{r^2 \tau^2}{m^2}$$

$$2 - 2 \cos \omega^* = \frac{r^2 \tau^2}{m^2}$$

$$\cos \omega^* = 1 - \frac{r^2 \tau^2}{2m^2},$$

dan dari persamaan (3.18)

$$\cos(m+1)\omega^* - \cos m\omega^* = -r \frac{\tau^*}{m}$$

$$-r\tau^* = m(\cos(m+1)\omega^* - \cos m\omega^*)$$

$$\tau^* = \frac{-m(\cos(m+1)\omega^* - \cos m\omega^*)}{r}.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



### Lampiran 3. Perhitungan Persamaan (3.20)

$$dh = \frac{d|\lambda|^2}{d\tau}$$

$$= \frac{-\lambda r(m^2\lambda^m + m\lambda^m - m^2\lambda^{m-1}) - \bar{\lambda} r(m^2\bar{\lambda}^m + m\bar{\lambda}^m - m^2\bar{\lambda}^{m-1})}{(m^2\lambda^m + m\lambda^m - m^2\lambda^{m-1})(m^2\bar{\lambda}^m + m\bar{\lambda}^m - m^2\bar{\lambda}^{m-1})}$$

a. Perhitungan pada Pembilang

$$-\lambda r(m^2\lambda^m + m\lambda^m - m^2\lambda^{m-1}) - \bar{\lambda} r(m^2\bar{\lambda}^{m+1} + m\bar{\lambda}^{m+1} - m^2\bar{\lambda}^{m-1})$$

$$= -m^2r\lambda^{m+1} - mr\lambda^{m+1} + m^2r\lambda^m - m^2r\bar{\lambda}^{m+1} - mr\bar{\lambda}^{m+1} + m^2r\bar{\lambda}^m$$

$$= -m^2r(\lambda^{m+1} + \bar{\lambda}^{m+1}) - mr(\lambda^{m+1} + \bar{\lambda}^{m+1}) + m^2r(\lambda^m + \bar{\lambda}^m)$$

$$= (-m^2r - mr)(\lambda^{m+1} + \bar{\lambda}^{m+1}) + m^2r(\lambda^m + \bar{\lambda}^m)$$

$$= (-m^2r - mr)(2 \cos(m+1)\omega) + m^2r(2 \cos m\omega)$$

$$= 2(-m^2r - mr) \cos(m+1)\omega + 2m^2r \cos m\omega$$

$$= 2mr\{(-m-1) \cos(m+1)\omega + m \cos m\omega\}$$

b. Perhitungan pada Penyebut

$$(m^2\lambda^m + m\lambda^m - m^2\lambda^{m-1})(m^2\bar{\lambda}^m + m\bar{\lambda}^m - m^2\bar{\lambda}^{m-1})$$

$$= m^4\lambda^m\bar{\lambda}^m + m^3\lambda^m\bar{\lambda}^m - m^4\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m + m^3\lambda^m\bar{\lambda}^m + m^2\lambda^m\bar{\lambda}^m -$$

$$m^3\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m - m^4\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1} - m^3\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1} + m^4\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^{m-1}$$

$$= m^4 + m^3 - m^4\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m + m^3 + m^2 - m^3\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m - m^4\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1} -$$

$$m^3\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1} + m^4$$

$$= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - m^4\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m - m^4\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1} - m^3\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m -$$

$$m^3\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1}$$

$$= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - m^4(\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m + \lambda^m\bar{\lambda}^{m-1}) - m^3(\lambda^{m-1}\bar{\lambda}^m +$$

$$\lambda^m\bar{\lambda}^{m-1})$$

$$\begin{aligned}
&= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - m^4\lambda^m\bar{\lambda}^m(\lambda^{-1}+\bar{\lambda}^{-1}) - m^3\lambda^m\bar{\lambda}^m(\lambda^{-1}+\bar{\lambda}^{-1}) \\
&= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - m^4(\lambda^{-1}+\bar{\lambda}^{-1}) - m^3(\lambda^{-1}+\bar{\lambda}^{-1}) \\
&= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - m^4(\lambda + \bar{\lambda}) - m^3(\lambda + \bar{\lambda}) \\
&= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - m^4(2 \cos \omega) - m^3(2 \cos \omega) \\
&= 2m^4 + 2m^3 + m^2 - 2m^4 \cos \omega - 2m^3 \cos \omega \\
&= 2m^4(1 - \cos \omega) + 2m^3(1 - \cos \omega) + m^2,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh bentuk

$$dh = \frac{2mr\{-(m+1)\cos(m+1)\omega + m\cos m\omega\}}{2m^4(1 - \cos \omega) + 2m^3(1 - \cos \omega) + m^2}.$$



#### Lampiran 4. Perhitungan Persamaan (3.21-3.24)

$$\text{Real : } \cos(m + 1) \omega - \cos m \omega = -r \frac{\tau}{m}, \quad (3.16)$$

$$\text{Im : } \sin(m + 1) \omega - \sin m \omega = 0. \quad (3.17)$$

Dari dua persamaan di atas, diperoleh

$$\cos(m + 1) \omega - \cos m \omega = -r \frac{\tau}{m} \quad \times \cos m \omega$$

$$\sin(m + 1) \omega - \sin m \omega = 0 \quad \times \sin m \omega +$$

$$\cos(m + 1) \omega \cos m \omega - \cos^2 m \omega = -r \frac{\tau}{m} \cos m \omega$$

$$\sin(m + 1) \omega \sin m \omega - \sin^2 m \omega = 0 \quad +$$

$$\cos(m + 1) \omega \cos m \omega + \sin(m + 1) \omega \sin m \omega - 1 = -r \frac{\tau}{m} \cos m \omega$$

$$\cos((m + 1 - m)\omega) - 1 = -r \frac{\tau}{m} \cos m \omega$$

$$\cos \omega - 1 = -r \frac{\tau}{m} \cos m \omega$$

$$1 - \frac{r^2 \tau^2}{2m^2} - 1 = -r \frac{\tau}{m} \cos m \omega$$

$$-\frac{r^2 \tau^2}{2m^2} = -r \frac{\tau}{m} \cos m \omega$$

$$\cos m \omega = \frac{r\tau}{2m} = \frac{rh}{2}.$$

Dari bagian Real diperoleh

$$\cos(m + 1) \omega - \cos m \omega = -r \frac{\tau}{m}$$

$$\cos(m + 1) \omega = \cos m \omega - r \frac{\tau}{m}$$

$$\cos(m + 1) \omega = \frac{r\tau}{2m} - r \frac{\tau}{m}$$

$$= -\frac{r\tau}{2m} = -\frac{rh}{2},$$

berdasarkan persamaan (3.20), didapatkan

$$\begin{aligned} -2mr(m+1)\cos(m+1)\omega &= -2mr(m+1)\left(-\frac{r\tau}{2m}\right) \\ &= (2m^2r+2mr)\frac{r\tau}{2m} \\ &= (2m^2r+2mr)\frac{rh}{2} \\ &= 2mr(m+1)\frac{rh}{2} \end{aligned}$$

$$= mr^2h(m+1) > 0$$

$$2m^2r\cos m\omega = 2m^2r\left(\frac{r\tau}{2m}\right)$$

$$= 2m^2r\frac{rh}{2}$$

$$= m^2r^2h > 0$$

$$2m^4(1-\cos\omega) = 2m^4\left(1-\left(1-\frac{(rh)^2}{2}\right)\right)$$

$$= 2m^4\left(\frac{r^2h^2}{2}\right)$$

$$= m^4r^2h^2 > 0$$

$$2m^3(1-\cos\omega) = 2m^3\left(1-\left(1-\frac{(rh)^2}{2}\right)\right)$$

$$= 2m^3\left(\frac{r^2h^2}{2}\right)$$

$$= m^3r^2h^2 > 0,$$

sehingga

$$dh = \frac{2mr\{-(m+1)\cos(m+1)\omega + m\cos m\omega\}}{2m^4(1-\cos\omega) + 2m^3(1-\cos\omega) + m^2}$$

$$dh = \frac{m r^2 h(m+1) + m^2 r^2 h}{m^4 r^2 h^2 + m^3 r^2 h^2 + m^2} > 0.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## Lampiran 5. Source Code Program dengan Matlab

No.	Listing Program
1.	clear all;
2.	clc;
3.	tau=1.5;
4.	K=100;
5.	h=0.05;
6.	m=tau/h;
7.	r=1;
8.	t=0:h:400;
9.	P=length(t);
10.	x=zeros(1,P);
11.	x(1:m+1)=50;
12.	for n=m+1:P-1
13.	$x(n+1)=x(n)+(r*h*x(n)*(1-(x(n-m)/K)))$ ;
14.	end;
15.	figure(1);
16.	hold on; plot(t,x,'r','linewidth',1.5);
17.	title(tau);
18.	xlabel('waktu');
19.	ylabel('jumlah populasi');
20.	grid on;

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

