

**PEMODELAN DATA YANG MENGANDUNG  
AUTOKORELASI SPASIAL DENGAN MENGGUNAKAN  
*SPATIAL DURBIN MODEL (SDM)***

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang statistika

oleh :

**NUR INDRAYATI**

**0810950057-95**



**PROGRAM STUDI STATISTIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2012**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**PEMODELAN DATA YANG MENGANDUNG  
AUTOKORELASI SPASIAL DENGAN MENGGUNAKAN  
*SPATIAL DURBIN MODEL (SDM)***

oleh :

**NUR INDRAYATI**

**0810950057-95**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 9 Februari 2012  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang statistika**

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**

**Prof.Dr.Ir.H.Henny Pramoedyo, MS.**  
**NIP. 19570705 198103 1 009**

**Dr. Rahma Fitriani, SSi., MSc.**  
**NIP. 19760328 199903 2 001**

**Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc.**  
**NIP. 19670907 199203 1 001**

## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Nur Indrayati  
NIM : 0810950057  
Jurusan : Matematika  
Penulis Skripsi Berjudul : Pemodelan Data yang  
Mengandung Autokorelasi Spasial dengan  
Menggunakan *Spatial Durbin Model* (SDM)

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka Skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila dikemudian hari diketahui bahwa isi Skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 9 Februari 2012  
Yang menyatakan,

(Nur Indrayati)  
NIM. 0810950057

# PEMODELAN DATA YANG MENGANDUNG AUTOKORELASI SPASIAL DENGAN MENGGUNAKAN *SPATIAL DURBIN MODEL (SDM)*

## ABSTRAK

*Spatial Durbin Model (SDM)* merupakan kasus khusus dari model *spatial autoregressive (SAR)*, yaitu pemodelan dengan adanya pengaruh spasial lag pada variabel dependen dan independen. Dengan menggunakan data kepadatan vegetasi di kota Surabaya pada tahun 2009, tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis pengaruh kepadatan urban (pemukiman dan kegiatan perkotaan), kepadatan tanah gundul, serta kepadatan kawasan industri, sebagai variabel independen terhadap kepadatan vegetasi, sebagai variabel dependen melalui pemodelan spasial SDM. Untuk menggambarkan hubungan spasial digunakan matrik pembobot pada variabel dependen maupun independen berdasarkan *distance band* dengan menggunakan jarak euclid. Uji autokorelasi spasial yang digunakan adalah uji Geary dan metode pendugaan parameter model adalah *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*. Berdasarkan hasil pemodelan diketahui bahwa lag variabel dependen maupun independen berperan penting pada pemodelan dan faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap kepadatan vegetasi di suatu kecamatan di kota Surabaya adalah kepadatan vegetasi dari kecamatan tetangga, kepadatan kawasan industri dari kecamatan itu sendiri, kepadatan urban dari kecamatan tetangga, serta kepadatan tanah gundul dari kecamatan tetangga. Ditinjau dari peta prediksi yang terbentuk melalui pemodelan SDM dapat diketahui bahwa penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya rendah dan dapat dikatakan bahwa vegetasi di kota Surabaya sudah hampir habis.

Kata kunci: *Spatial Durbin Model*, *distance band*, Uji autokorelasi Geary, Kepadatan vegetasi

# **MODELING DATA CONTAINING SPATIAL AUTOCORRELATION BY USING SPATIAL DURBIN MODEL (SDM)**

## **ABSTRACT**

Spatial Durbin model (SDM) is a special case of spatial autoregressive model (SAR), to accommodate the spatial lag effect on the dependent and independent variables. Based on the vegetation density data in Surabaya at 2009, the objective of this study is to analyze the influence of urban density, barren area density, and density industrial area, as the independent variables on the vegetation density, as the dependent variable using spatial modeling SDM. To define the spatial relationship, weighted matrix used for the dependent and independent variables based on distance bands by using Euclidean distance. Spatial autocorrelation test used in this study is the Geary test and method of parameters estimation is the Maximum Likelihood Estimation (MLE). The results of the study are the lag dependent and independent variables have an important role in modeling, factors that significantly influence vegetation density in a sub district in Surabaya are vegetation density of nearby sub districts, density industrial area of sub district itself, urban density of nearby sub districts, and barren area density of nearby sub districts, and the prediction map shows that most of the area in Surabaya have low vegetation density.

**Keywords:** Spatial Durbin Model, distance band, Geary autocorrelation test, vegetation density

## KATA PENGANTAR

*Alhamdulillah Robbil 'alamin*, puji syukur penulis ucapkan ke hadirat Allah SWT atas segala karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “**PEMODELAN DATA YANG MENGANDUNG AUTOKORELASI SPASIAL DENGAN MENGGUNAKAN SPATIAL DURBIN MODEL (SDM)**”. Sholawat serta salam semoga tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW.

Dengan terselesaikannya penyusunan skripsi ini, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. Ir. H. Henny Pramoedyo, MS., selaku dosen Pembimbing I yang telah memberikan motivasi, nasehat, dan bimbingan hingga skripsi ini terselesaikan dengan baik.
2. Ibu Dr. Rahma Fitriani, SSi., MSc, selaku Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, masukan, dan pengarahan hingga skripsi ini terselesaikan dengan baik.
3. Ibu Eni Sumarminingsih, SSi., MM selaku Ketua Penguji yang telah memberikan saran dan masukan hingga skripsi ini terselesaikan dengan baik.
4. Bapak Dr. Abdul Rouf A, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang.
5. Bapak Abdul Wahid Hasyim, M.T yang bersedia membagi ilmu dan telah mengizinkan dalam penggunaan data penelitian beliau.
6. Staf pengajar Statistika dan administrasi Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang atas ilmu pengetahuan, semangat dan bantuan yang diberikan.
7. Bapak, Ibu, Kakak dan keluarga tercinta atas kasih sayang, doa, nasehat, dan dukungan dalam seluruh kehidupan penulis.
8. Teman-teman Program Studi Statistika berbagai angkatan dan teman-teman berbagai jurusan FMIPA Universitas Brawijaya atas dukungan, semangat dan bantuan yang diberikan.
9. Keluarga ‘Kertorejo 3’ atas dukungan, bantuan, dan semangat kekeluargaan selama tinggal di Malang
10. Semua pihak yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsinya.

Penulis menyadari bahwa dalam penyusunan skripsi ini masih banyak kekurangan, oleh karena itu saran dan kritik yang membangun demi kesempurnaan penulisan selanjutnya sangat penulis harapkan. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak yang membutuhkan.

Malang, 9 Februari 2012

Penulis



## DAFTAR ISI

	Hal.
HALAMAN JUDUL .....	i
HALAMAN PENGESAHAN .....	ii
HALAMAN PERNYATAAN .....	iii
ABSTRAK .....	iv
ABSTRACT .....	v
KATA PENGANTAR .....	vi
DAFTAR ISI .....	viii
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR TABEL .....	xi
DAFTAR LAMPIRAN .....	xii
<b>BAB I PENDAHULUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Masalah .....	4
1.3 Batasan Masalah .....	4
1.4 Tujuan Penelitian .....	5
1.5 Manfaat Penelitian .....	5
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA .....</b>	<b>7</b>
2.1 Data Spasial .....	8
2.2 Pemodelan Spasial .....	9
2.2.1 <i>Spatial Autoregressive Model (SAR)</i> ....	10
2.2.2 <i>Spatial Durbin Model (SDM)</i> .....	12
2.3 Matriks Pembobot Spasial .....	13
2.4 Jarak Euclid .....	15
2.5 Autokorelasi Spasial dan Uji Geary .....	16
2.6 <i>Maximum Likelihood Estimation</i> .....	18
2.7 Pendugaan parameter SDM .....	20
2.7.1 Pendugaan Parameter $\beta$ .....	21
2.7.2 Pendugaan Parameter $\sigma^2$ .....	22
2.7.3 Pendugaan Parameter $\rho$ .....	23
2.7.4 Pengujian Hipotesis Signifikansi Pendugaan Parameter Menggunakan <i>Wald Test</i> .....	24
2.8 Perubahan Kota Surabaya .....	26

<b>BAB III METODE PENELITIAN.....</b>	<b>29</b>
3.1 Sumber Data .....	29
3.2 Metode Penelitian .....	29
3.2.1 Persiapan.....	29
3.2.2 Analisis Data.....	31
<b>BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN.....</b>	<b>35</b>
4.1 Peta Hasil Amatan Kepadatan Vegetasi dan Faktor-faktor yang Mempengaruhi di Kota Surabaya .....	35
4.2 Uji Autokorelasi Spasial .....	40
4.3 Pendugaan Parameter.....	41
4.4 Deskripsi dan Interpretasi Model Hasil Analisis .....	44
<b>BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....</b>	<b>49</b>
5.1 Kesimpulan.....	49
5.2 Saran .....	49
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>51</b>
<b>LAMPIRAN .....</b>	<b>55</b>

## DAFTAR GAMBAR

	Hal.
Gambar 2.1 Ilustrasi Daerah Amatan dan Hasil Penghitungan Jarak <i>Euclid</i> Antar Daerah.....	14
Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian .....	33
Gambar 4.1 Peta Hasil Amatan Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya .....	35
Gambar 4.2 Peta Hasil Amatan Kepadatan Urban di Kota Surabaya.....	36
Gambar 4.3 Peta Hasil Amatan Tanah Gundul di Kota Surabaya.....	38
Gambar 4.4 Peta Hasil Amatan Kepadatan Kawasan Industri di Kota Surabaya.....	39
Gambar 4.5 Peta Hasil Prediksi Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya .....	46



## DAFTAR TABEL

		Hal.
Tabel 4.1	Hasil Uji Autokorelasi Geary Data Penyebaran Vegetasi di Kota Surabaya.....	40
Tabel 4.2	Pendugaan Parameter Pemodelan SDM.....	42

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR LAMPIRAN

		Hal.
Lampiran 1	Koordinat Lokasi Kecamatan di Kota Surabaya .....	55
Lampiran 2	Data Penelitian.....	56
Lampiran 3	<i>Source Code Macro</i> Minitab 15 Uji Autokorelasi Spasial Geary Berdasarkan <i>Distance Band</i> dengan Menggunakan Jarak <i>Euclid</i> .....	57
Lampiran 4	Matriks Pembobot Berdasarkan <i>Distance Band</i> .....	59
Lampiran 5	Hasil Uji Autokorelasi Spasial Geary dengan Menggunakan <i>Source Code Macro</i> MINITAB .....	61
Lampiran 6	<i>Syntax</i> SDM dengan MATLAB.....	62
Lampiran 7	Hasil Prediksi Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya .....	72
Lampiran 8	Pengkajian sifat-sifat $\hat{\sigma}^2$ .....	73



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Kota Surabaya merupakan pusat bisnis, perdagangan, industri, dan pendidikan di kawasan Jawa Timur. Permintaan akan pemanfaatan lahan di beberapa wilayah Surabaya yang terus tumbuh dan bersifat akseleratif untuk pembangunan berbagai fasilitas perkotaan, yang meliputi industri dan transportasi membawa konsekuensi negatif pada beberapa aspek, termasuk aspek lingkungan. Dalam tahap awal perkembangan kota, sebagian besar lahan masih merupakan lahan vegetasi. Namun, adanya kebutuhan ruang untuk menampung penduduk dan aktivitasnya, lahan vegetasi tersebut cenderung mengalami konversi menjadi kawasan terbangun. Kepadatan urban (pemukiman dan kegiatan perkotaan), kepadatan tanah gundul, serta kepadatan kawasan industri, merupakan faktor-faktor yang berhubungan dengan kepadatan vegetasi di kota Surabaya.

Untuk mengetahui pengaruh faktor-faktor tersebut di atas terhadap kepadatan vegetasi perlu dilakukan pemodelan spasial karena kepadatan vegetasi di setiap lokasi di Surabaya tidak dapat dipandang sebagai sebuah unit observasi yang berdiri sendiri dan tidak terkait dengan kepadatan vegetasi di lokasi lainnya. Kepadatan vegetasi di lokasi yang saling berdekatan akan cenderung memiliki ketergantungan dan interaksi spasial sehingga pemodelan spasial perlu dilakukan. Pemodelan spasial yang digunakan pada kasus ini adalah *Spatial Durbin Model* (SDM) karena adanya hubungan ketergantungan spasial (autokorelasi spasial) baik pada kepadatan vegetasi sebagai variabel dependen maupun pada kepadatan urban, tanah gundul, dan kepadatan kawasan industri sebagai variabel independen.

Metode spasial merupakan metode untuk mendapatkan informasi pengamatan yang dipengaruhi efek ruang atau lokasi. Model hubungan spasial seringkali menggunakan hubungan ketergantungan ke dalam bentuk struktur *covariance* melalui model *autoregressive* (Wall, 2004). LeSage dan Pace (2009) menyatakan bahwa proses *autoregressive* ditunjukkan melalui

hubungan ketergantungan (autokorelasi) antara sekumpulan pengamatan atau lokasi.

Salah satu model spasial *autoregressive* adalah model spasial *Mixed Regressive - Autoregressive* (Anselin, 1988), yaitu  $\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$  dengan pengaruh spasial lag hanya pada variabel dependen. Model tersebut dinamakan *Mixed Regressive - Autoregressive* karena mengkombinasikan model regresi biasa dengan model regresi spasial lag pada variabel dependen atau disebut juga dengan *Spatial Autoregressive Models* (SAR). Kasus khusus dari SAR adalah adanya penambahan pengaruh lag variabel independen, sehingga model menjadi  $\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \beta_0 + \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{W}_1 \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}$  dengan  $\boldsymbol{\beta}_2$  merupakan parameter spasial lag pada  $\mathbf{W}_1 \mathbf{X}$  yang selanjutnya disebut sebagai *Spatial Durbin Model* (SDM). Model tersebut dikembangkan dengan alasan karena dalam beberapa kasus hubungan dependensi dalam spasial tidak hanya terjadi pada variabel dependen, tetapi juga pada variabel independen. Oleh karena itu perlu ditambahkan spasial lag  $\mathbf{W}_1 \mathbf{X}$  pada model.

Selama ini banyak penelitian di bidang kesehatan, lingkungan, ekonomi, maupun bidang lainnya tidak melibatkan efek spasial sebagai sesuatu yang berpengaruh dalam model sehingga sering kali menyebabkan kesimpulan yang diperoleh kurang tepat. Efek spasial yang ada seharusnya dijelaskan melalui model yang dapat menangkap fenomena-fenomena tersebut. Anselin (1988) membedakan efek spasial menjadi dua bagian yaitu dependensi spasial dan heterogenitas spasial. Dependensi spasial ditunjukkan dengan kemiripan sifat untuk lokasi yang saling berdekatan, sedangkan heterogenitas spasial ditunjukkan oleh perbedaan sifat antara satu lokasi dengan lokasi lainnya. Dependensi spasial terjadi pada daerah yang memiliki kedekatan lokasi sehingga terjadi interaksi spasial pada daerah tersebut.

Analisis data spasial perlu dilakukan dengan memperhatikan keterkaitan antarlokasi (autokorelasi spasial). Keterkaitan secara spasial dapat dilihat dari jarak antarlokasi

sehingga untuk menganalisis keterkaitan spasial seringkali digunakan jarak antarlokasi sebagai pembobot. Pembobot tersebut dinyatakan dalam matriks  $W$  yang digunakan untuk menghitung koefisien autokorelasi. Matriks  $W$  adalah matriks yang entri-entrinya adalah nilai pembobot yang diberikan untuk perbandingan antardaerah tertentu. Pembobotan tersebut didasarkan pada hubungan spasial antardaerah. Dalam beberapa kasus model spasial, pembobotan hanya dikaji pada variabel dependen, sedangkan SDM merupakan salah satu model dengan menggunakan pembobotan spasial pada variabel independen maupun dependen.

Terdapat beberapa penelitian yang menggunakan model spasial SDM di antaranya adalah penelitian yang dilakukan oleh Kissling dan Carl (2007) dan Becti (2011). Kissling dan Carl (2007) mengaplikasikan penelitian mereka di bidang ekologi dan biogeografi yang memodelkan hubungan pengaruh hujan dan hutan terhadap penyebaran suatu organisme di Auckland, New Zealand. Mereka menyatakan bahwa autokorelasi spasial dapat mempengaruhi variabel independen maupun dependen sehingga  $W_1X$  ditambahkan dalam pemodelannya. Sedangkan Becti (2011) mengaplikasikan penelitiannya di bidang epidemiologi yang memodelkan hubungan pengaruh ketersediaan prasarana sanitasi, air bersih, dan fasilitas kesehatan sebagai variabel independen terhadap kejadian diare di Kabupaten Tuban, Jawa Timur sebagai variabel dependen. Pada penelitian tersebut, dinyatakan bahwa lag variabel dependen maupun independen berperan penting pada pemodelan kejadian diare dan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Pada kedua penelitian tersebut, jenis matrik pembobot yang digunakan adalah matriks *contiguity* dan disarankan untuk penelitian selanjutnya menggunakan metode yang lain agar didapatkan pemodelan yang lebih tepat.

Pada penelitian ini akan dilakukan pemodelan spasial dengan SDM untuk menganalisis pengaruh kepadatan urban, tanah gundul, dan kepadatan kawasan industri, sebagai variabel independen terhadap kepadatan vegetasi, sebagai

variabel dependen di setiap kecamatan yang ada di kota Surabaya. Untuk menggambarkan hubungan spasial digunakan matrik pembobot pada variabel dependen maupun independen berdasarkan *distance band* dengan menggunakan jarak euclid. Dengan analisis ini nantinya ingin diperoleh model regresi faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap kepadatan vegetasi untuk seluruh kecamatan di kota Surabaya. Dengan memanfaatkan informasi spasial, model hasil prediksi ini dapat disajikan dalam sebuah peta prediksi untuk mengetahui penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya.

### **1.2 Perumusan Masalah**

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah:

1. Apakah terdapat dependensi spasial lag pada variabel dependen maupun independen?
2. Faktor-faktor apakah yang berpengaruh signifikan terhadap kepadatan vegetasi di kota Surabaya?
3. Bagaimana penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya berdasarkan peta prediksi melalui pemodelan *Spatial Durbin Model (SDM)*?

### **1.3 Batasan Masalah**

Batasan masalah dalam penelitian ini antara lain:

1. Uji autokorelasi spasial yang digunakan adalah uji Geary dengan koefisien autokorelasi Geary ditentukan berdasarkan *distance band* dengan menggunakan jarak euclid.
2. Pemodelan SDM diterapkan pada data yang mengandung autokorelasi spasial.
3. Pendugaan parameter model pada *Spatial Durbin Model (SDM)* menggunakan *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*.
4. Pengujian hipotesis signifikansi parameter model pada *Spatial Durbin Model (SDM)* menggunakan *Wald test*.

#### **1.4 Tujuan Penelitian**

Tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui apakah terdapat dependensi spasial lag pada variabel dependen maupun independen
2. Menduga model regresi untuk mengidentifikasi faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap kepadatan vegetasi di kota Surabaya melalui pemodelan SDM.
3. Membuat peta prediksi kepadatan vegetasi di kota Surabaya melalui pemodelan SDM.

#### **1.5 Manfaat Penelitian**

Dari penelitian ini dapat diambil beberapa manfaat, antara lain:

1. Dapat memahami teori tentang kinerja metode pemodelan *Spatial Durbin Model* (SDM).
2. Dapat mengembangkan dan mengaplikasikan ilmu statistika, khususnya pemodelan spasial dalam perencanaan pembangunan kota Surabaya melalui kajian kepadatan vegetasi dan faktor-faktor yang mempengaruhinya.
3. Dapat memberikan kontribusi terhadap pemerintah kota Surabaya dalam perencanaan pembangunan kota Surabaya yang berkelanjutan agar lebih memperhatikan aspek lingkungan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian ini akan melakukan pemodelan SDM terhadap kepadatan vegetasi di kota Surabaya berdasarkan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Untuk itu pada bab ini akan disajikan kajian teori mengenai pemodelan spasial yang memperhatikan efek dependensi spasial (*spatial autoregressive - SAR*). SDM merupakan kasus khusus dari model SAR dengan menambahkan pengaruh lag pada variabel independen, sehingga pembobotan dilakukan pada variabel independen maupun dependen. Data yang terlibat dalam metode ini adalah data spasial untuk itu pada sub-bab 2.1 akan dibahas mengenai pengertian data spasial dan bagaimana cara memperolehnya. Untuk keperluan pendugaan pada data spasial perlu dilakukan pemodelan spasial di mana pada sub-bab 2.2 akan disajikan secara rinci macam-macam pemodelan spasial, diantaranya adalah SAR dan SDM. Untuk mengetahui hubungan spasial diperlukan adanya matriks pembobot ( $W$ ). Matriks tersebut digunakan untuk menghitung koefisien autokorelasi di mana pada sub-bab 2.3 dan 2.4 akan dijelaskan mengenai salah satu cara untuk menentukan matrik pembobot yaitu berdasarkan *distance band* dengan menggunakan jarak euclid. Salah satu efek pada data spasial adalah lokasi yang saling berdekatan akan cenderung memiliki kemiripan sifat yang disebabkan adanya interaksi spasial pada daerah tersebut, yang disebut dengan autokorelasi spasial dan uji autokorelasi spasial yang digunakan dalam penelitian ini adalah uji Geary. Oleh karena itu, pada sub-bab 2.5 akan dijelaskan mengenai pengertian autokorelasi spasial dan cara pengujiannya. Pada pemodelan SDM diperlukan adanya pendugaan parameter model di mana metode pendugaan yang dapat digunakan adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Pengertian MLE dan sifat-sifat penduga parameter akan dibahas pada sub-bab 2.6. Penjelasan mengenai cara pendugaan parameter SDM dan pengujian hipotesis signifikansi pendugaan parameter menggunakan *Wald*

*Test* akan disajikan secara rinci pada sub-bab 2.7. Tinjauan non statistika mengenai perubahan kota Surabaya akan disajikan pada sub-bab 2.8.

## 2.1 Data Spasial

Data spasial adalah data pengukuran yang memuat informasi lokasi. Data spasial dikumpulkan dari lokasi spasial yang berbeda yang mengindikasikan ketergantungan antara pengukuran data dengan lokasi (Cressie, 1993).

Kata spasial berasal dari kata *space* yang artinya ruang dan spasial berarti bersifat keruangan. Data spasial merupakan data pengukuran yang memuat suatu informasi lokasi. Data spasial memiliki sistem koordinat tertentu sebagai dasar referensinya sehingga mempunyai dua bagian penting yang membuatnya berbeda dengan data lain, informasi lokasi (spasial) dan informasi deskriptif (atribut) yang dijelaskan sebagai berikut (GIS Konsorsium Aceh Nias, 2007) :

1. Informasi lokasi (spasial), berkaitan dengan suatu koordinat baik koordinat geografi (lintang dan bujur) dan koordinat XYZ, termasuk di antaranya informasi datum dan proyeksi.
2. Informasi deskriptif (atribut) atau informasi non-spasial yaitu keterangan yang berkaitan dengan suatu lokasi (spasial), contohnya : jenis vegetasi, populasi, luasan, kode pos, dan sebagainya.

Purwaamijaya (2008) menjelaskan salah satu sumber untuk mendapatkan data spasial adalah dengan peta analog. Peta analog adalah peta dalam bentuk cetak, misalnya peta topografi, peta tanah, dan sebagainya. Pada umumnya peta analog dibuat dengan teknik kartografi yang kemungkinan besar memiliki referensi spasial, seperti koordinat, skala, arah angin, dan sebagainya.

Pemetaan yaitu suatu proses penyajian informasi muka bumi yang sebenarnya, baik bentuk permukaan bumi maupun sumbu alamnya, berdasarkan skala peta, sistem proyeksi peta, serta simbol-simbol dari unsur muka bumi yang disajikan. Kemajuan di bidang teknologi khususnya di bidang komputer membuat suatu peta bukan hanya dalam bentuk nyata (pada selembur kertas, *real map*, atau *hardcopy*), tetapi juga dapat disimpan dalam bentuk digital sehingga dapat disajikan pada layar monitor yang dikenal dengan peta maya (*virtual maps* atau *softcopy*). Pemetaan digital dapat diartikan sebagai

suatu proses pembuatan peta dalam format digital yang dapat disimpan dan dicetak sesuai keinginan pembuatnya.

Sekarang ini data spasial menjadi media penting untuk perencanaan pembangunan dan pengelolaan sumber daya alam yang berkelanjutan pada cakupan wilayah nasional, regional, maupun lokal. Pemanfaatan data spasial semakin meningkat setelah adanya teknologi pemetaan digital dan pemanfaatannya pada Sistem Informasi Geografis (SIG).

## 2.2 Pemodelan Spasial

Hukum pertama tentang geografi dikemukakan oleh Tobler, menyatakan bahwa segala sesuatu saling berhubungan satu dengan yang lainnya, tetapi sesuatu yang dekat lebih mempunyai pengaruh daripada sesuatu yang jauh (Anselin, 1988). Hukum tersebut merupakan dasar pengkajian permasalahan berdasarkan efek lokasi atau metode spasial.

Berdasarkan tipe data, pemodelan spasial dapat dibedakan menjadi pemodelan dengan pendekatan titik dan area. Jenis pendekatan titik di antaranya *Geographically Weighted Regression* (GWR), *Geographically Weighted Poisson Regression* (GWPR), *Space-Time Autoregressive* (STAR), dan *Generalized Space-Time Autoregressive* (GSTAR). Sementara jenis pendekatan area diantaranya *Spatial Autoregressive Model* (SAR), *Spatial Error Model* (SEM), *Spatial Durbin Model* (SDM), *Conditional Autoregressive Model* (CAR), dan *Spatial Autoregressive Moving Average* (SARMA).

*Spatial Autoregressive Models* merupakan model yang mengikuti proses *autoregressive*, yaitu ditunjukkan dengan adanya hubungan ketergantungan antarsekumpulan pengamatan atau lokasi. Hubungan tersebut ditunjukkan dengan lag pada variabel dependen maupun independen. Jenis *Spatial Autoregressive Models* diantaranya SAR, SEM, SDM, dan CAR.

Model SAR merupakan model dengan pengaruh spasial lag pada variabel dependen (Anselin, 1988). SDM merupakan kasus khusus dari model SAR dengan menambahkan pengaruh lag pada variabel independen, sehingga pembobotan dilakukan pada variabel independen maupun dependen.

### 2.2.1 *Spatial Autoregressive Model (SAR)*

*Spatial Autoregressive Model (SAR)* merupakan model yang mengikuti proses *autoregressive*, yaitu proses yang ditunjukkan dengan adanya hubungan ketergantungan antarsekumpulan pengamatan atau lokasi (LeSage dan Pace, 2009). SAR adalah kombinasi dari model regresi biasa dengan model regresi spasial lag pada variabel dependen.

Menurut Anselin (1988) model umum spasial *autoregressive* antara variabel independen ( $X$ ) dengan variabel dependen ( $y$ ) dinyatakan dalam bentuk:

$$y = \rho W_1 y + X\beta + u \quad (2.1)$$

dengan

$$u = \lambda W_2 u + \varepsilon \text{ dan } \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (2.2)$$

di mana

$y$  : vektor variabel dependen, berukuran  $n \times 1$

$X$  : matriks variabel independen, berukuran  $n \times (k + 1)$

$\beta$  : vektor parameter koefisien regresi, berukuran  $(k + 1) \times 1$

$\rho$  : parameter koefisien spasial lag variabel dependen

$\lambda$  : parameter koefisien spasial lag pada *error* ( $u$ )

$u$  : vektor *error* pada persamaan (2.1), berukuran  $n \times 1$

$\varepsilon$  : vektor *error* pada persamaan (2.2), berukuran  $n \times 1$ , yang berdistribusi normal dengan mean nol dan varians  $\sigma^2 I$

$W_1, W_2$ : matriks pembobot, berukuran  $n \times n$

$I$  : matriks identitas, berukuran  $n \times n$

$n$  : jumlah amatan atau lokasi ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ )

$k$  : jumlah variabel independen

$$y = (y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_n)^T \quad u = (u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n)^T$$

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n)^T$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_1 \text{ atau } \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & \dots & W_{1n} \\ W_{21} & W_{22} & \dots & W_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n1} & W_{n2} & \dots & W_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks  $\mathbf{W}_1$  dan  $\mathbf{W}_2$  pada persamaan 2.1 dan 2.2 merupakan pembobot yang menunjukkan hubungan *contiguity* atau fungsi jarak antarlokasi. Diagonalnya bernilai nol atau  $w_{ij} = 0$  untuk  $i = j$  dan  $w_{ij} \neq 0$  untuk  $i \neq j$ , di mana  $i=1,2,\dots,n$  dan  $j=1,2,\dots,n$  yang menunjukkan pengamatan atau lokasi.

Dari persamaan 2.1 ketika  $\mathbf{X} = 0$  dan  $\mathbf{W}_2 = 0$  akan menjadi model spasial *autoregressive* order pertama seperti pada persamaan berikut:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Model tersebut menunjukkan variansi pada  $\mathbf{y}$  sebagai kombinasi linier variansi antarlokasi yang berdekatan dengan tanpa variabel independen.

Ketika  $\mathbf{W}_2 = 0$  atau  $\lambda = 0$  maka akan menjadi model regresi spasial SAR seperti persamaan berikut:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

Model di atas mengasumsikan bahwa proses *autoregressive* hanya pada variabel dependen.

Ketika  $W_1 = 0$  atau  $\rho = 0$  maka akan menjadi model regresi spasial *autoregressive* dalam *error* (SEM) seperti persamaan berikut:

$$y = X\beta + \lambda W_2 u + \varepsilon \quad (2.5)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

$\lambda W_2 u$  menunjukkan spasial struktur  $\lambda W_2$  pada *spatially dependent error* ( $\varepsilon$ ).

Ketika  $W_1, W_2 \neq 0, \lambda \neq 0$  atau  $\rho \neq 0$  maka disebut SARMA dengan persamaan sama seperti pada persamaan 2.1.

Ketika  $\rho = 0$  dan  $\lambda = 0$  maka akan menjadi model regresi linier sederhana yang pendugaan parameternya dapat dilakukan melalui *Ordinary Least Square* (OLS) seperti persamaan berikut:

$$y = X\beta + \varepsilon \quad (2.6)$$

$$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

dalam model tersebut tidak terdapat efek spasial.

### 2.2.2 *Spatial Durbin Model (SDM)*

*Spatial Durbin Model (SDM)* merupakan kasus khusus dari SAR, yaitu model *autoregressive* dengan adanya pengaruh spasial lag pada variabel dependen dan independen. Bentuk model SDM adalah sebagai berikut:

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + \beta_0$$

$$+ (\beta_{11} x_{1i} + \beta_{12} x_{2i} + \dots + \beta_{1k} x_{ki} + \dots + \beta_{1l} x_{li})$$

$$+ \left( \beta_{21} \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{1j} + \beta_{22} \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{2j} + \dots \right.$$

$$\left. + \beta_{2k} \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{kj} + \dots + \beta_{2l} \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{lj} \right) + \varepsilon_i$$

$$y_i = \rho \sum_{j=1}^n w_{ij} y_j + \beta_0 + \sum_{k=1}^l \beta_{1k} x_{ki} + \sum_{k=1}^l \beta_{2k} \sum_{j=1}^n w_{ij} x_{kj} + \varepsilon_i \quad (2.7)$$

di mana k=banyak variabel dan i=banyak amatan.

Model 2.7 dapat dinyatakan dalam matriks pada persamaan 2.8 di mana vektor parameter koefisien spasial lag variabel independen dinyatakan dalam  $\beta_2$ .

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \beta_0 + \mathbf{X} \beta_1 + \mathbf{W}_1 \mathbf{X} \beta_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.8)$$

atau

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\mathbf{y} \sim N((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1)^{-1} \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta}, (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1)^{-1} \sigma^2 \mathbf{I} ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1)^{-1})^T)$$

di mana  $\mathbf{Z} = (\mathbf{I} \quad \mathbf{X} \quad \mathbf{W}_1 \mathbf{X})$  dan  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2)^T$

Model SDM dikembangkan dengan alasan karena dalam beberapa kasus hubungan dependensi dalam spasial tidak hanya terjadi pada variabel dependen, tetapi juga pada variabel independen. Oleh karena itu perlu ditambahkan spasial lag  $\mathbf{W}_1 \mathbf{X}$  pada model (LeSage dan Pace, 2009).

Prinsip dasar *Spatial Durbin Model* hampir sama dengan regresi berbobot (*weighted regression*), dengan variabel yang menjadi pembobot adalah faktor lokasi. Kedekatan dan keterkaitan antarlokasi ini menyebabkan munculnya fenomena autokorelasi spasial. *Spatial Durbin Model* merupakan pengembangan dari model regresi sederhana yang telah mengakomodasikan fenomena-fenomena autokorelasi spasial, baik dalam variabel dependen maupun dalam variabel independennya. Misalnya untuk mengetahui tingkat perkembangan di suatu wilayah selain dipengaruhi variabel independen juga dipengaruhi oleh variabel lain, yaitu hubungan spasial. Representasi faktor lokasi pada *Spatial Durbin Model* dalam bentuk matriks kedekatan yang disebut dengan matrik pembobot (LeSage, 1999).

### 2.3 Matriks Pembobot Spasial

Matriks pembobot dapat digunakan untuk mengetahui kedekatan data spasial atau hubungan spasial. Matriks pembobot digunakan untuk menghitung koefisien autokorelasi. Matriks pembobot yaitu matriks yang entri-entrinya adalah nilai pembobot yang diberikan untuk perbandingan antardaerah tertentu. Pembobotan tersebut didasarkan pada hubungan spasial antardaerah (Ngudiantoro, 2004).

Lee dan Wong (2001) menyatakan bahwa jika ada  $n$  unit daerah dalam pengamatan, maka dapat digunakan matriks pembobot spasial yang berukuran  $n \times n$  untuk menentukan hubungan kedekatan antarunit daerah. Setiap unit daerah digambarkan sebagai baris dan kolom. Setiap nilai dalam matriks menjelaskan hubungan spasial antara ciri-ciri geografis dengan baris dan kolom. Nilai 1 dan 0 digunakan sebagai matriks untuk menggambarkan kedekatan antardaerah.

Paradis (2009) menyatakan bahwa dalam studi pola spasial dan spasial proses, diharapkan observasi-observasi yang dekat lebih berpeluang untuk menjadi serupa daripada observasi-observasi yang terpisah jauh. Hal ini biasanya berhubungan pada bobot untuk masing-masing pasangan  $(x_i, x_j)$ . Dalam bentuk yang paling sederhana, bobot ini diberikan nilai 1 untuk tetangga yang dekat dan diberikan nilai 0 untuk selainnya. Lee dan Wong (2001) menyebutnya dengan *binary matrix* yang dinotasikan dengan  $\mathbf{W}$ . Matriks  $\mathbf{W}$  mempunyai beberapa karakteristik yang menarik. Pertama, semua elemen diagonalnya  $w_{ij}$  adalah 0, karena diasumsikan bahwa suatu unit daerah tidak berdekatan dengan dirinya sendiri. Kedua, matriks  $\mathbf{W}$  adalah matriks simetris di mana  $w_{ij} = w_{ji}$ . Kesimetrisan yang dimiliki oleh matriks  $\mathbf{W}$  pada dasarnya menggambarkan hubungan timbal balik dari hubungan spasial. Ketiga, baris dalam matriks  $\mathbf{W}$  menunjukkan bagaimana suatu daerah berhubungan spasial dengan daerah lain. Oleh karena itu jumlah nilai pada suatu baris ke- $i$  merupakan jumlah tetangga yang dimiliki oleh daerah ke- $i$ . Notasi penjumlahan baris adalah:

$$w_i = \sum_{j=1}^n w_{ij} \quad (2.9)$$

dengan:

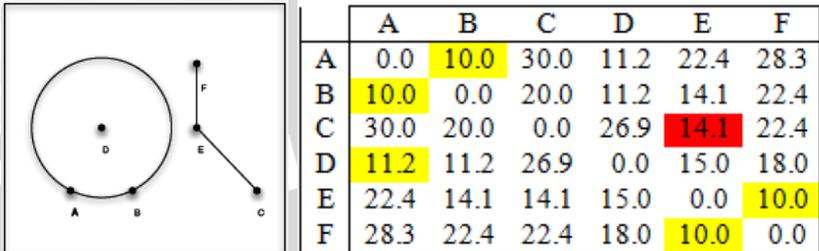
$w_i$  : total nilai baris ke- $i$

$w_{ij}$  : nilai pada baris ke- $i$  kolom ke- $j$

Salah satu cara untuk menentukan matrik pembobot adalah dengan menggunakan *distance band*. Anselin dan Rey (2008) menjelaskan bahwa membangun matrik pembobot yang sederhana adalah berdasarkan pengukuran jarak, ketika  $i$  dan  $j$  dianggap tetangga apabila  $j$  jatuh dalam sebuah jarak kritis yang telah ditentukan (*distance band*) dari  $i$ . *Distance band* dilambangkan dengan  $\delta$  maka elemen-elemen dari matrik  $w_{ij}$  ditetapkan sebagai:

$$w_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } d_{ij} \leq \delta, \text{ dimana } i \neq j \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases} \quad (2.10)$$

Berikut ini adalah ilustrasi perhitungan *distance band* (Anselin dan Rey, 2008):



Gambar 2.1 Ilustrasi daerah amatan dan hasil penghitungan jarak euclid antar daerah

Gambar 2.2 menjelaskan ilustrasi penentuan matrik pembobot dengan menggunakan *distance band* yang terdiri dari dua bagian, pada sisi kiri merupakan ilustrasi dari lokasi nilai observasi yaitu pada lokasi A, B, C, D, E dan F. Kemudian dicari jarak antar lokasi dengan menggunakan jarak euclid yaitu pada tabel di sisi kanan. Setelah diperoleh jarak euclid tiap daerah dengan tetangganya kemudian menentukan tetangga terdekat, yaitu titik/daerah yang memiliki jarak paling kecil dari tetangga-tetangga yang lainnya. Dari hasil di atas diperoleh jarak tetangga terdekat dan tetangga terdekat berturut-turut adalah 10 (A-B), 10 (B-A), 14.1 (C-E), 11.2 (D-A), 11.2 (D-B), 10 (E-F) dan 10 (F-E). Kemudian dipilih nilai terbesar dari jarak tetangga terdekat yaitu 14.1 sebagai *distance band*. Kemudian diperoleh matrik pembobot sebagai berikut:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2.4 Jarak Euclid

Pada model geostatistik, struktur korelasi antara nilai respon yang berdekatan bergantung hanya pada jarak antarlokasi bukan pada lokasi-lokasi dari nilai respon tersebut. Jarak antarlokasi dapat ditentukan menggunakan jarak euclid. Jarak euclid (*euclidean*

*distance*) didefinisikan sebagai garis lurus terpendek antara dua titik. Jarak ini merupakan penjumlahan dari kuadrat jarak dari dua nilai vektor. Misalkan terdapat dua vektor  $\mathbf{P}$  dan  $\mathbf{Q}$ , di mana  $\mathbf{P} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  dan  $\mathbf{Q} = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ , di mana  $m$  adalah banyaknya koordinat, maka jarak euclid antara vektor  $\mathbf{P}$  dan  $\mathbf{Q}$  ditentukan oleh persamaan:

$$d(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2} \quad (2.11)$$

Jarak Euclid merupakan fungsi jarak yang paling banyak dikenal dan digunakan untuk pengukuran jarak. Berdasarkan penelitian yang dilakukan D'Agustino dan Dardanoni (2007), jarak Euclid memberikan hasil yang memiliki kemungkinan yang besar untuk tepat atau sesuai dalam banyak konteks yang membutuhkan pengukuran jarak.

## 2.5 Autokorelasi Spasial dan Uji Geary

Menurut Lembo (2006) autokorelasi spasial adalah korelasi antara variabel dengan dirinya sendiri berdasarkan ruang. Autokorelasi spasial bisa juga diartikan suatu ukuran kemiripan dari objek di dalam suatu ruang (jarak, waktu, dan wilayah). Jika terdapat pola sistematis di dalam penyebaran sebuah variabel, maka terdapat *autokorelasi* spasial. Adanya autokorelasi spasial mengindikasikan bahwa nilai atribut pada daerah tertentu terkait oleh nilai atribut tersebut pada daerah lain yang letaknya berdekatan (bertetangga). Bohling (2005) juga menjelaskan bahwa autokorelasi spasial merujuk pada suatu pola di mana observasi-observasi yang berasal dari lokas-lokasi yang berdekatan cenderung memiliki nilai yang sama.

Pola spasial dapat digambarkan menjadi tiga bagian, yaitu *clustered* (gerombol), *dispersed* (seperti papan catur), dan *random* (acak). Autokorelasi spasial bernilai positif jika di dalam suatu daerah yang saling berdekatan mempunyai nilai yang mirip. Jika digambarkan akan terbentuk penggerombolan. Autokorelasi spasial akan bernilai negatif jika dalam suatu daerah yang saling berdekatan mempunyai nilai yang berbeda atau tidak mirip. Jika digambarkan akan membentuk pola seperti papan catur. Sedangkan jika terdapat bentuk yang acak menunjukkan tidak adanya autokorelasi spasial.

Sawada (2009) menjelaskan pengukuran autokorelasi spasial dapat diberikan oleh suatu statistik (*normalized*) *cross-product* yang

menunjukkan derajat hubungan antara hubungan entri-entri dari dua matriks, satu matriks menentukan hubungan spasial di antara  $n$  lokasi (matriks bobot) dan matriks lain menjelaskan definisi kesamaan antara kumpulan nilai pada suatu variabel pada  $n$  lokasi.

Semua pengukuran autokorelasi spasial memiliki suatu sumber yang sama yaitu matriks *cross-product*. Matriks *cross-product* disebut juga sebagai statistik *general cross-product*, yang dinyatakan oleh persamaan:

$$\Gamma = \sum_i \sum_j w_{ij} c_{ij} \quad (2.12)$$

dengan  $\Gamma$  adalah statistic *general cross-product*,  $w_{ij}$  adalah elemen dari matriks pengukuran kedekatan spasial tempat  $i$  ke tempat-tempat  $j$  yang biasa disebut dengan matriks pembobot spasial, dan  $c_{ij}$  adalah ukuran dari hubungan antara  $i$  dan  $j$  pada beberapa dimensi lain (Getis, 2010). Salah satu uji autokorelasi spasial yang menyertakan *general cross-product* dalam mengukur autokorelasi spasial adalah uji Geary.

Sawada (2009) menjelaskan bahwa koefisien autokorelasi Geary dilambangkan dengan  $C$ , yang mengukur selisih di antara nilai-nilai dari suatu variabel pada lokasi yang berdekatan. Nilai koefisien autokorelasi Geary  $C$  ditentukan oleh persamaan berikut:

$$\hat{C} = \frac{(n-1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (z_i - z_j)^2}{(2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}) \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2} \quad (2.13)$$

dengan

$z_i$  : nilai variabel pada lokasi  $i$

$z_j$  : nilai variabel pada lokasi  $j$

$\bar{z}$  : nilai rata-rata dari variabel

$w_{ij}$  : bobot yang digunakan untuk membandingkan antara lokasi  $i$  dan  $j$ .

$n$  : banyaknya pengamatan (daerah)

Lee dan Wong (2001) menyatakan bahwa nilai koefisien autokorelasi Geary berkisar dari 0 yang menunjukkan autokorelasi spasial positif, hingga 2 yang menunjukkan autokorelasi spasial negatif. Tidak adanya autokorelasi spasial ditunjukkan dengan nilai harapan dari  $C$  ( $E(C)$ ) sebesar 1. Hipotesis yang melandasi uji Geary dapat dituliskan sebagai berikut:

$H_0$  :  $C = 1$  (tidak ada autokorelasi spasial), lawan

$H_1$  :  $C \neq 1$  (ada autokorelasi spasial)

Ragam koefisien autokorelasi Geary C diberikan oleh persamaan:

$$Var(C) = \left( \frac{1}{2(n+1)S_0^2} \left( (2S_1 + S_2)(n-1) - 4S_0^2 \right) \right) \quad (2.14)$$

di mana

$n$  = ukuran sampel

$$S_0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}$$

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_{ij} + w_{ji})^2}{2}$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^n (w_{i.} + w_{.i})^2$$

Jika  $H_0$  benar, pengujian signifikansi koefisien autokorelasi Geary C dengan menggunakan statistik uji Z sebagai berikut:

$$Z(C) = \frac{C - E(C)}{\sqrt{Var(C)}} \quad (2.15)$$

Nilai  $Z(C)$  dibandingkan dengan titik kritis dari distribusi  $N(0,1)$  untuk menguji  $H_0$  yang menyatakan tidak terdapat autokorelasi spasial. Kriteria pengambilan keputusan tolak  $H_0$  jika nilai  $|Z(C)| > Z_{\alpha/2}$  di mana  $Z_{\alpha/2}$  merupakan titik kritis uji Z dengan taraf kesalahan  $\alpha$ . Sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat autokorelasi spasial. Kriteria pengambilan keputusan juga dapat dilakukan dengan membandingkan  $p$ -value dan  $\alpha$ .  $P$ -value dapat diperoleh dari perhitungan berikut:

$$\begin{aligned} p - value &= P(Z(C) \leq Z \leq -Z(C)) \\ &= 2 \times P(Z \geq Z(C)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Jika  $p$ -value  $< \alpha$  maka  $H_0$  ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa terdapat autokorelasi spasial.

## 2.6 Maximum Likelihood Estimation

*Maximum Likelihood Estimation* (MLE) adalah sebuah metode pendugaan klasik yang paling populer digunakan pada proses pendugaan parameter. Mendenhall dkk. (1981) menyatakan bahwa metode ini digunakan untuk menentukan penduga bagi  $\theta$ , di mana nilai duga tersebut adalah nilai yang membuat data pengamatan paling mungkin (*the most likely*) terjadi. Berdasarkan prinsip ini, apabila data teramati lebih mungkin (*more likely*) mempunyai nilai  $\theta = \theta_1$  daripada mempunyai nilai  $\theta = \theta_2$ , maka  $\theta_1$  akan dipilih sebagai dugaan  $\theta$ .

Fungsi *likelihood* adalah fungsi kepekatan gabungan dari  $n$  peubah acak  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , yang dievaluasi pada  $x_1, x_2, \dots, x_n: f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ . Untuk nilai  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tertentu

fungsi *likelihood* adalah fungsi dari  $\theta$  dan dinyatakan sebagai  $L(\theta)$ . Jika  $X_1, X_2, \dots, X_n$  adalah contoh acak yang independen, identik, dan berdistribusi tertentu (iid) dari populasi yang berdistribusi  $f(x|\theta_1, \dots, \theta_k)$  memiliki fungsi *likelihood*:

$$L(\theta|x) = L(\theta_1, \dots, \theta_k|x_1, \dots, x_n) \quad (2.17)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta_1, \dots, \theta_k)$$

Sifat-sifat penduga parameter dapat dilihat dari *unbiased*, konsisten, dan efisien.

1. *Unbiased*

Suatu penduga parameter  $\hat{\theta}$  dikatakan *unbiased* bagi  $\theta$  jika

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.18)$$

2. Konsisten

Konsistensi berhubungan dengan sifat kebaikan suatu penduga pada saat ukuran sampel diperbesar. Penduga yang baik seharusnya semakin dekat pada nilai parameter yang sebenarnya apabila semakin besar ukuran sampelnya. Penduga  $\hat{\theta}_n$  dikatakan sebagai penduga yang konsisten bagi  $\theta$ , jika untuk sembarang bilangan positif  $\varepsilon$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1$$

atau secara ekuivalen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0 \quad (2.19)$$

Selain itu juga dapat dikatakan konsisten jika:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta \quad (2.20)$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} Var(\hat{\theta}) = 0 \quad (2.21)$$

3. Efisien

Terdapat kemungkinan bahwa suatu parameter  $\theta$  mempunyai beberapa penduga *unbiased*. Jika diperoleh  $\hat{\theta}_1$  dan  $\hat{\theta}_2$  sebagai penduga-penduga *unbiased* bagi  $\theta$ , akan dipilih penduga dengan ragam yang kecil atau lebih efisien daripada penduga lainnya.  $\hat{\theta}_1$  dikatakan sebagai penduga yang lebih efisien daripada  $\hat{\theta}_2$  jika  $Var(\hat{\theta}_2) > Var(\hat{\theta}_1)$ . Efisiensi relative suatu penduga *unbiased*  $\hat{\theta}_1$  terhadap  $\hat{\theta}_2$  dinyatakan sebagai rasio

$$efisiensi(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{Var(\hat{\theta}_2)}{Var(\hat{\theta}_1)} \quad (2.22)$$

Apabila efisiensi tersebut  $\leq 1$  ( $\leq 100\%$ ), maka dapat dikatakan bahwa  $\hat{\theta}_2$  lebih efisien (memiliki ragam lebih kecil) daripada  $\hat{\theta}_1$ , dan sebaliknya.

Berdasarkan hal tersebut, maka dapat dikatakan bahwa suatu penduga dikatakan efisien jika memenuhi *Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator* (UMVUE) yaitu:

- $\hat{\theta}$  adalah penduga yang *unbiased*
- Untuk semua penduga *unbiased*  $\hat{\theta}$  lainnya,  $Var(\hat{\theta}_2) \leq Var(\hat{\theta}_1)$

Suatu penduga *unbiased* bagi  $\theta$  juga dapat dikatakan UMVUE ketika  $Var(\hat{\theta})$  mencapai CRLB (*Cramer Rao Lower Bond*) seperti pada persamaan berikut:

$$Var(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-nE\left(\frac{\partial^2(L)}{\partial\hat{\theta}\partial\hat{\theta}^T}\right)} \quad (2.23)$$

Efisiensi dari penduga  $\hat{\theta}$  dapat dilihat melalui rasio CRLB dan  $Var(\hat{\theta})$ . Penduga  $\hat{\theta}$  dikatakan efisien jika

$$\frac{CRLB}{Var(\hat{\theta})} = 1 \quad (2.24)$$

## 2.7 Pendugaan parameter SDM

Anselin (1988) telah menuliskan pendugaan parameter model SDM menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dan juga menuliskan beberapa pengujian hipotesis dan statistik uji berdasarkan MLE seperti berikut:

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \rho\mathbf{W}_1\mathbf{y} + \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{y} - \rho\mathbf{W}_1\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}_1)\mathbf{y} - \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Differensial persamaan (2.25) terhadap  $\mathbf{y}$  akan membentuk fungsi *Jacobian* seperti berikut  $\mathbf{J} = \left| \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}{\partial\mathbf{y}} \right| = |\mathbf{I} - \rho\mathbf{W}_1|$

$$L(\sigma^2; \boldsymbol{\varepsilon}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})\right) \quad (2.26)$$

$$L(\rho, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{n/2} (\mathbf{J}) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})\right) \quad (2.27)$$

Substitusi persamaan (2.26) dan fungsi *Jacobian* pada persamaan (2.35) menghasilkan persamaan (2.28)

$$L(\rho, \beta, \sigma^2 | y) = \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{n/2} |I - \rho W_1| \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ ((I - \rho W_1)y - Z\beta)^T ((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right] \right\} \quad (2.28)$$

Operasi *logaritma natural likelihood* pada persamaan (2.29)

$$\begin{aligned} \ln(L) &= \frac{n}{2} \ln \left( \frac{1}{2\pi\sigma^2} \right) + \ln |I - \rho W_1| \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[ ((I - \rho W_1)y - Z\beta)^T ((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right] \\ \ln(L) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) + \ln |I - \rho W_1| \\ &\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \left[ ((I - \rho W_1)y - Z\beta)^T ((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.7.1 Pendugaan Parameter $\beta$

Pendugaan parameter  $\beta$  diperoleh dengan memaksimumkan fungsi Ln likelihood di persamaan (2.29) yaitu dengan mendifferensialkan persamaan tersebut terhadap  $\beta$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial \ln(L)}{\partial \beta} &= \frac{\partial \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ ((I - \rho W_1)y - Z\beta)^T ((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right] \right\}}{\partial \beta} \\ 0 &= \frac{\partial \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[ ((I - \rho W_1)y - Z\beta)^T ((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right] \right\}}{\partial \beta} \\ 0 &= \{Z^T (I - \rho W_1)y - Z^T Z\beta\} \\ \beta &= (Z^T Z)^{-1} Z^T (I - \rho W_1)y \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sehingga pendugaan parameter  $\beta$  adalah persamaan (2.31)

$$\hat{\beta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T (I - \rho W_1)y$$

$$\hat{\beta} = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y} - \rho (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_1 \mathbf{y} = \hat{\delta}_0 - \rho \hat{\delta}_d \quad (2.31)$$

Estimator  $\hat{\delta}_0$  dan  $\hat{\delta}_d$  diperoleh dari model  $\mathbf{y} = \mathbf{Z}\delta_0 + \mathbf{e}_0$  dan  $\mathbf{W}_1 \mathbf{y} = \mathbf{Z}\delta_d + \mathbf{e}_d$  melalui model OLS yang akan dijelaskan pada subbab 2.7.3. apabila telah didapatkan pendugaan  $\rho$  dari persamaan (2.44), maka pendugaan parameter  $\beta$  menjadi  $\hat{\beta} = \hat{\delta}_0 - \hat{\rho}\hat{\delta}_d$ . Setelah diperoleh estimator  $\hat{\beta}$  maka dilakukan pengkajian sifat-sifat pendugaan tersebut.

- *Unbiased*

$$E(\hat{\beta}) = E\left\{(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T (\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y}\right\} = \beta \quad (2.32)$$

Maka  $\hat{\beta}$  adalah estimator *unbiased* untuk  $\beta$ .

- Konsisten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Var(\hat{\beta})| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \sigma^2 \mathbf{I}| \approx 0 \quad (2.33)$$

Maka  $\hat{\beta}$  adalah estimator yang konsisten untuk  $\beta$ .

- Efisien

$$Var(\hat{\beta}) \geq \frac{1}{-nE\left(\frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \beta \partial \beta^T}\right)}$$

$$Var(\hat{\beta}) \geq \frac{\sigma^2 (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1}}{n} \quad (2.34)$$

$Var(\hat{\beta})$  telah memenuhi CRLB sehingga  $\hat{\beta}$  efisien.

### 2.7.2 Pendugaan Parameter $\sigma^2$

Pendugaan parameter  $\sigma^2$  diperoleh dengan memaksimalkan fungsi Ln likelihood di persamaan (2.29) yaitu dengan mendifferensialkan persamaan tersebut terhadap  $\sigma^2$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} \\ &+ \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \left[ ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta)^T ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta) \right] \\ 0 &= -n + \frac{1}{\sigma^2} \left[ ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta)^T ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta) \right] \\ \sigma^2 &= \frac{[(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta]^T ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta)}{n} \quad (2.35) \end{aligned}$$

Sehingga pendugaan parameter  $\sigma^2$  adalah

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[(\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta]^T ((\mathbf{I} - \rho \mathbf{W}_1) \mathbf{y} - \mathbf{Z}\beta)}{n} \quad (2.36)$$

Setelah diperoleh estimator  $\hat{\sigma}^2$  maka dilakukan pengkajian sifat-sifat pendugaan sebagai berikut, untuk lebih lengkapnya dapat dilihat di Lampiran 8:

- *Unbiased*

$$E(\hat{\sigma}^2) = E \frac{[(I - \rho W_1)y - Z\beta]^T (I - \rho W_1)y - Z\beta}{n} \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{n} E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})$$

Karena tidak terbukti bahwa  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$  maka *biased*.

Estimator *unbiased* bagi  $\sigma^2$  adalah

$$\left( \frac{SSE}{(n - 2 \operatorname{tr}(s) + \operatorname{tr}(s^T s))} \right)$$

- Konsisten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Var} I - \rho W_1 y - Z\beta^T I - \rho W_1 y - Z\beta n \approx 0 \quad (2.38)$$

Sehingga  $\hat{\sigma}^2$  adalah estimator yang konsisten dan *unbiased* secara asimtotik bagi  $\sigma^2$

- Efisien

$$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{1}{-nE \left( \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial (\hat{\sigma}^2)^2} \right)}$$

$$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{2\sigma^4}{n^2} \quad (2.39)$$

$\operatorname{Var}(\hat{\sigma}^2)$  telah memenuhi CRLB sehingga  $\hat{\sigma}^2$  efisien.

### 2.7.3 Pendugaan Parameter $\rho$

Pendugaan parameter  $\beta$  dapat diketahui apabila telah didapatkan  $\hat{\rho}$ . Langkah awal adalah melakukan pendugaan  $\delta_0$  dan  $\delta_d$  pada persamaan (2.40) melalui metode *Ordinary Least Square* (OLS)

$$\mathbf{y} = \mathbf{Z}\delta_0 + \mathbf{e}_0 \quad \text{dan} \quad \mathbf{W}_1 \mathbf{y} = \mathbf{Z}\delta_d + \mathbf{e}_d \quad (2.40)$$

Hasil pendugaan parameter persamaan (2.40) adalah:

$$\hat{\delta}_0 = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{y} \quad \text{dan} \quad \hat{\delta}_d = (\mathbf{Z}^T \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{W}_1 \mathbf{y} \quad (2.41)$$

Dari persamaan (2.41) akan didapatkan residual  $e_0$  dan  $e_d$  yang akan disubstitusi pada parameter  $\sigma^2$  sehingga  $\sigma^2$  menjadi seperti persamaan (2.43)

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\delta}_0 \quad \text{dan} \quad \mathbf{e}_d = \mathbf{W}_1 \mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\delta}_d \quad (2.42)$$

$$\sigma^2 = \frac{\{(e_0 - \rho e_d)^T (e_0 - \rho e_d)\}}{n} \quad (2.43)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (2.43) pada persamaan (2.29) didapatkan fungsi logaritma natural untuk menduga  $\rho$ .

$$\begin{aligned} \ln(L(\rho)) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \left( \frac{(e_0 - \rho e_d)^T (e_0 - \rho e_d)}{n} \right) \\ &\quad + \ln |I - \rho W_1| - \frac{n}{2} \\ \ln(L(\rho)) &= -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \{(e_0 - \rho e_d)^T (e_0 - \rho e_d)\} \\ &\quad - \frac{n}{2} \ln(n) + \ln |I - \rho W_1| - \frac{n}{2} \\ f(\rho) &= c - \frac{n}{2} \ln \{(e_0 - \rho e_d)^T (e_0 - \rho e_d)\} + \ln |I - \rho W_1| \end{aligned} \quad (2.44)$$

dengan  $c = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(n) - \frac{n}{2}$

Pace dan Barry dalam Lesage dan Pace (2009) menyarankan untuk mendapatkan  $\hat{\rho}$  dilakukan melalui evaluasi  $\rho$  pada interval  $[\rho_{min}, \rho_{max}]$  dimana  $\rho_{min} = -1$  dan  $\rho_{max} = 1$

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} f(\rho_1) \\ f(\rho_2) \\ \vdots \\ f(\rho_r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c - \frac{n}{2} \ln \{(e_0 - \rho_1 e_d)^T (e_0 - \rho_1 e_d)\} + \ln |I - \rho_1 W_1| \\ c - \frac{n}{2} \ln \{(e_0 - \rho_2 e_d)^T (e_0 - \rho_2 e_d)\} + \ln |I - \rho_2 W_1| \\ \vdots \\ c - \frac{n}{2} \ln \{(e_0 - \rho_r e_d)^T (e_0 - \rho_r e_d)\} + \ln |I - \rho_r W_1| \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Dan dipilih nilai  $\rho$  yang menghasilkan nilai fungsi (2.44) yang paling maksimum.

### 2.7.4 Pengujian Hipotesis Signifikansi Pendugaan Parameter Menggunakan Wald Test

Pengujian terhadap parameter model dilakukan untuk mengetahui peranan peubah bebas dalam model. Uji Wald digunakan

untuk menguji parameter  $\theta_p$ . Rumus untuk uji Wald berdasarkan hipotesis:

$H_0 : \theta_p = 0$ , lawan

$H_1 : \theta_p \neq 0, (p = 0,1,2, \dots, p)$

Statistik uji pada uji Wald adalah:

$$Wald(W) = \frac{\hat{\theta}_p^2}{Var(\hat{\theta}_p)} \quad (2.46)$$

dengan

$\hat{\theta}_p$  : penduga parameter ke- $p$

$Var(\hat{\theta}_p)$  : varian dari penduga parameter ke- $p$

Dijelaskan oleh Hosmer dan Lemeshow (1989) bahwa statistik uji Wald tersebut mengikuti sebaran  $\chi_1^2$  sehingga  $H_0$  akan ditolak jika nilai  $W > \chi_{\alpha,1}^2$ . Jika  $H_0$  ditolak berarti  $\hat{\theta}_p$  signifikan. Kriteria pengambilan keputusan juga dapat dilakukan dengan membandingkan  $p$ -value dan  $\alpha$ .  $P$ -value dapat diperoleh dari perhitungan berikut:

$$p - value = P(\chi_1^2 \geq W) \quad (2.47)$$

Jika  $p$ -value  $< \alpha$  maka  $H_0$  ditolak, sehingga dapat disimpulkan bahwa peubah bebas ( $x_p$ ) berpengaruh terhadap peubah tak bebas ( $y$ ).

Hipotesis untuk pengujian signifikansi pendugaan parameter SDM menggunakan *Wald test* adalah:

- $H_0 : \rho = 0$  tidak ada dependensi lag pada variabel dependen  
 $H_1 : \rho \neq 0$  ada dependensi lag pada variabel dependen
- $H_0 : \beta_1 = 0$  koefisien regresi tidak berpengaruh  
 $H_1 : \beta_1 \neq 0$  koefisien regresi berpengaruh
- $H_0 : \beta_2 = 0$  tidak ada dependensi lag pada variabel independen  
 $H_1 : \beta_2 \neq 0$  ada dependensi lag pada variabel independen

Menurut LeSage (1999) nilai matriks *varian-covarian* untuk mendapatkan  $Var(\hat{\theta}_p)$  dapat dilakukan melalui invers matriks informasi (matriks Hessian) yaitu matriks yang setiap elemennya dibentuk dari turunan parsial kedua dari fungsi *logaritma natural likelihood* pada persamaan (2.29)

$$-E \left( \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \theta \partial \theta^T} \right)^{-1} = -E \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \rho^2} & \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \rho \partial \beta^T} & \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \rho \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \beta \partial \rho} & \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \beta \partial \beta^T} & \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \beta \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \sigma^2 \partial \rho} & \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial \sigma^2 \partial \beta^T} & \frac{\partial^2 \ln(L)}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.48)$$

## 2.8 Perubahan Kota Surabaya

Kota Surabaya adalah ibu kota Propinsi Jawa timur, Kota Surabaya merupakan kota metropolitan dan terbesar kedua di Indonesia yang terletak 07° 21' Lintang Selatan dan 112° 36' - 112° 54' Bujur Timur dengan luas wilayah 33.306,30 Ha memiliki kegiatan kota sangat beragam dengan jumlah penduduk 2.885.862 jiwa (Hasyim, 2011). Kondisi tersebut juga memungkinkan Kota Surabaya menjadi pusat bisnis, perdagangan, industri, dan pendidikan di kawasan Jawa Timur. Banyaknya jumlah penduduk serta aktifitasnya menyebabkan terjadi perubahan struktur tata kota.

Menurut Hasyim (2011), perubahan tata kota disebabkan oleh dua kawasan, yaitu kawasan terbangun dan kawasan tidak terbangun. Kawasan terbangun umumnya diwujudkan secara fisik sebagai bangunan yang sifatnya tidak dapat meneruskan air ke dalam tanah, sedangkan kawasan tidak terbangun memiliki kemampuan meneruskan air ke dalam tanah. Contoh kawasan terbangun adalah permukiman, perindustrian, fasilitas umum, dan jalan. Sedangkan contoh kawasan tidak terbangun adalah lapangan dan pemakaman.

Berdasar pola, struktur kota, dan karakteristik kota, maka terdapat 5 faktor yang dapat berpengaruh terhadap perkembangan kota (Sujarto, 1982) :

- a. Faktor Fisik Dasar, misalnya topografi, iklim, kondisi tanah (meliputi daya dukung dan drainase alam).
- b. Faktor Fisik Geografi, misalnya geografis yang strategis.
- c. Faktor Sarana dan Prasarana, misalnya jaringan jalan, utilitas umum (meliputi jaringan air minum, jaringan drainase, sanitasi lingkungan, sumber air alam), jaringan telekomunikasi, jaringan listrik, jaringan gas.

- d. Faktor Fasilitas Kebutuhan, misalnya pasar/pertokoan, pendidikan, peribadatan, kesehatan, hiburan, pemerintahan, bank, restoran, SPBU, penginapan, stasiun, terminal, bandara, dll.
- e. Faktor Lingkungan, misalnya pencemaran, kebisingan, kenyamanan lingkungan, kebersihan lingkungan, kepadatan lingkungan dan penduduk, faktor kritis bencana alam.

Perkembangan perkotaan membawa pada konsekuensi negatif pada beberapa aspek, termasuk aspek lingkungan. Dalam tahap awal perkembangan kota, sebagian besar lahan merupakan lahan vegetasi. Namun, adanya kebutuhan ruang untuk menampung penduduk dan aktivitasnya, lahan vegetasi tersebut cenderung mengalami konversi guna lahan menjadi kawasan terbangun. Sebagian besar permukaannya, terutama di pusat kota, tertutup oleh jalan, bangunan dan lain-lain dengan karakter yang sangat kompleks dan berbeda dengan karakter lahan vegetasi.

Vegetasi merupakan bagian hidup yang tersusun dari tetumbuhan yang menempati suatu ekosistem. Beraneka tipe hutan, kebun, padang rumput, dan tundra merupakan contoh-contoh vegetasi. Seiring dengan meningkatnya jumlah populasi manusia di kota Surabaya, pembangunan untuk memenuhi kebutuhan masyarakat terus ditingkatkan, yang tidak jarang dengan memakai lahan vegetasi. Menurunnya kuantitas dan kualitas lahan vegetasi yang ada di perkotaan, telah mengakibatkan menurunnya kualitas lingkungan perkotaan seperti seringnya terjadi banjir di perkotaan, tingginya polusi udara, dan meningkatnya kerawanan sosial (kriminalitas dan krisis sosial). Dalam hal ini, diperlukan pemikiran jauh ke depan, yang tidak hanya berorientasi pada pemenuhan tujuan berjangka pendek, tetapi reorientasi pada visi pembangunan kota yang lebih mempertimbangkan faktor-faktor lingkungan dan keberlanjutan pembangunan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

#### **3.1 Sumber Data**

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya pada tahun 2009. Data ini bersumber pada penelitian Hasyim (2011) dalam Disertasi yang berjudul *Pengembangan Model Pertumbuhan Pixel yang Berbasiskan Data Citra Satelit Multitemporal dan Teknologi SIG sebagai Dasar Pendugaan Pertumbuhan Kota*. Data terdiri dari 31 amatan yang merupakan banyaknya kecamatan yang ada di kota Surabaya dengan batasan kecataman bersumber pada Badan Pertanahan Nasional Kota Surabaya. Data lengkap dapat dilihat pada Lampiran 2 dan koordinat lokasi ibu kota kecamatan pada Lampiran1.

#### **3.2 Metode Penelitian**

Pada penelitian ini dilakukan uji autokorelasi spasial menggunakan uji Geary. Data spasial yang secara signifikan terdapat autokorelasi spasial dilakukan pemodelan menggunakan *Spatial Durbin Model* (SDM). Pada penelitian ini diperlukan dua tahap pengerjaan, yaitu tahap persiapan dan tahap analisis data. Berikut penjelasan lengkap pada metode penelitian:

##### **3.2.1. Persiapan**

Pada tahap ini, disiapkan peta yang telah didigitasi dan dilakukan input data atribut ke dalam peta. Data atribut yang digunakan adalah data variabel-variabel yang digunakan dalam penelitian ini. Variabel yang digunakan dalam penelitian ini terdiri dari satu variabel dependen (Y) dan tiga variabel independen (X). variabel dependen dalam penelitian ini adalah kepadatan vegetasi tiap kecamatan di kota Surabaya pada tahun 2009. Sedangkan tiga variabel independennya adalah faktor-faktor yang berhubungan dengan kepadatan vegetasi, yaitu kepadatan urban, kepadatan tanah gundul, dan kepadatan kawasan industri di kota Surabaya pada tahun 2009.

Menurut Hasyim (2011) variabel-variabel tersebut memiliki karakter sebaran yang acak sehingga perlu dilakukan penyetaraan terlebih dahulu dengan merubahnya menjadi bentuk rasio

$$\text{rasio kepadatan variabel wilayah } A = \frac{\text{luas variabel wilayah } h A}{\text{total luas wilayah } h A}$$

Nilai rasio inilah yang akan dilakukan pengujian autokorelasi spasial dan pemodelan SDM. Sedangkan untuk pemetaan, nilai rasio dari tiap variabel dirubah ke dalam nilai kategori. Penilaian terhadap variabel- variabel dinyatakan pada kondisi variabel tiap kecamatan di kota Surabaya dari istimewa sampai dengan buruk, yaitu:

- Kategori 5 = Istimewa
- Kategori 4 = Baik Sekali
- Kategori 3 = Baik
- Kategori 2 = Cukup
- Kategori 1 = Buruk

di mana aturan pengelompokan tiap variabel adalah sebagai berikut:

1. Kepadatan Vegetasi

- Kategori 1 = rasio 0.012623 – 0.181951
- Kategori 2 = rasio 0.181951 – 0.351279
- Kategori 3 = rasio 0.351279 – 0.520607
- Kategori 4 = rasio 0.520607 – 0.689935
- Kategori 5 = rasio 0.689935 – 0.859263

2. Kepadatan Urban

- Kategori 5 = rasio 0.013623 – 0.165009
- Kategori 4 = rasio 0.165009 – 0.316394
- Kategori 3 = rasio 0.316394 – 0.467780
- Kategori 2 = rasio 0.467780 – 0.619165
- Kategori 1 = rasio 0.619165 – 0.770551

3. Kepadatan Tanah Gundul

- Kategori 5 = rasio 0.001060 – 0.049867
- Kategori 4 = rasio 0.049867 – 0.098674
- Kategori 3 = rasio 0.098674 – 0.147482
- Kategori 2 = rasio 0.147482 – 0.196289
- Kategori 1 = rasio 0.196289 – 0.245096

4. Kepadatan Kawasan Industri

- Kategori 5 = rasio 0.000405 – 0.032724
- Kategori 4 = rasio 0.032724 – 0.065043

- Kategori 3 = rasio 0.065043 – 0.097361
- Kategori 2 = rasio 0.097361 – 0.129680
- Kategori 1 = rasio 0.129680 – 0.161999

### 3.2.2. Analisis Data

Pada tahap analisis data, dilakukan dua tahap analisis, yaitu pengujian autokorelasi spasial dan pemodelan data Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya pada tahun 2009 menggunakan *Spatial Durbin Model (SDM)*.

#### a) Uji autokorelasi spasial

- Menentukan kedekatan titik spasial dengan menggunakan matrik jarak, sesuai dengan persamaan (2.11). Ukuran matrik jarak berdasarkan banyaknya titik.
- Menentukan jarak tetangga terdekat tiap titik yang dilihat dari matrik jarak yang telah terbentuk, setiap titik memiliki satu tetangga terdekat.
- Menentukan *distance band* yaitu nilai terbesar dari jarak tetangga terdekat.
- Menghitung matrik pembobot spasialnya berdasarkan persamaan (2.10).
- Menentukan nilai koefisien autokorelasi Geary berdasarkan persamaan (2.13) dan ragamnya berdasarkan persamaan (2.14). kemudian dilakukan pengujian signifikansi berdasarkan persamaan (2.15)

#### b) Pemodelan data Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya pada tahun 2009 menggunakan *Spatial Durbin Model (SDM)*.

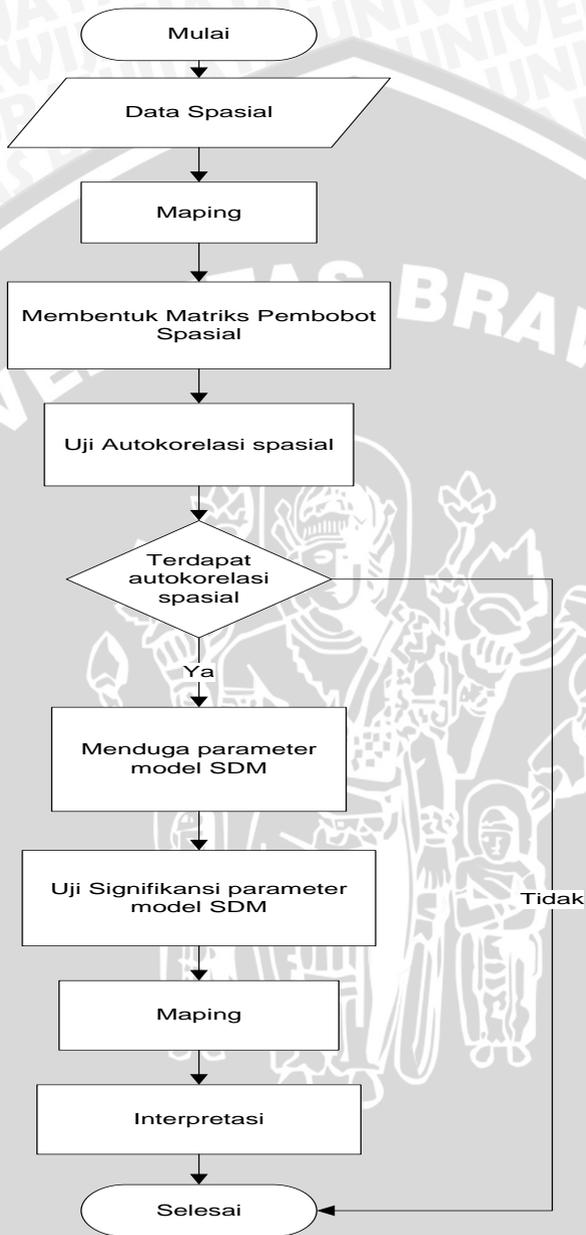
Pemodelan SDM diterapkan pada data yang secara signifikan terdapat autokorelasi spasial. Berikut tahapan pemodelan menggunakan SDM

- Melakukan pendugaan parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*
- Pengujian hipotesis signifikansi parameter model menggunakan *Wald test*
- Memasukkan nilai variabel dependen dari data dan nilai variabel dependen dari hasil pendugaan model SDM ke dalam atribut dari peta

- Melakukan pemetaan (*mapping*) nilai variabel dependen dari data dan nilai variabel dependen dari hasil prediksi model SDM
- Menginterpretasikan hasil dari penelitian yang berupa model regresi dan peta prediksi penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya.

Uji autokorelasi spasial Geary menggunakan bantuan *macro* MINITAB 15. *Source code macro* MINITAB dapat dilihat pada Lampiran 3. Pendugaan parameter model SDM menggunakan *software* MATLAB R2009a dan *syntax* MATLAB dapat dilihat pada Lampiran 6. Pemetaan nilai variabel menggunakan *software* ArcGIS 9.3. Diagram alir analisis pada penelitian ini dapat dilihat pada Gambar 3.1.





Gambar 3.1 Diagram Alir Metode Penelitian

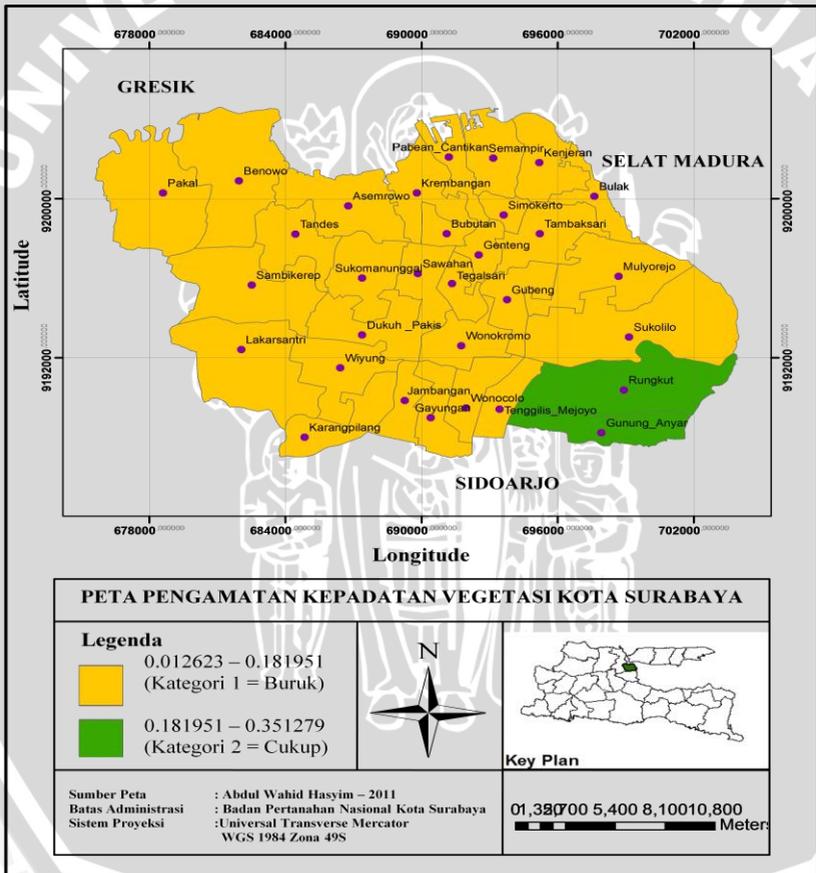
UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

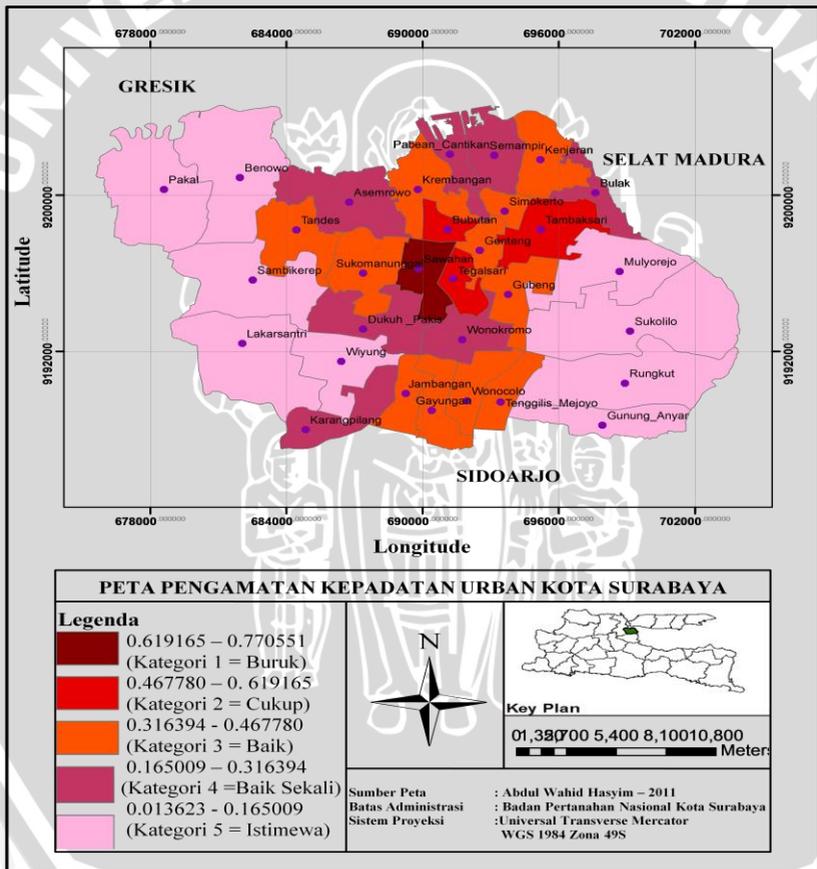
### 4.1 Peta Hasil Amatan Kepadatan Vegetasi dan Faktor-faktor yang Mempengaruhi di Kota Surabaya

Penelitian ini menggunakan data kepadatan vegetasi sebagai variabel dependen dan data kepadatan urban, kepadatan tanah gundul, serta kepadatan kawasan industri sebagai variabel independen di tiap kecamatan kota Surabaya.



Gambar 4.1 Peta Hasil Amatan Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya

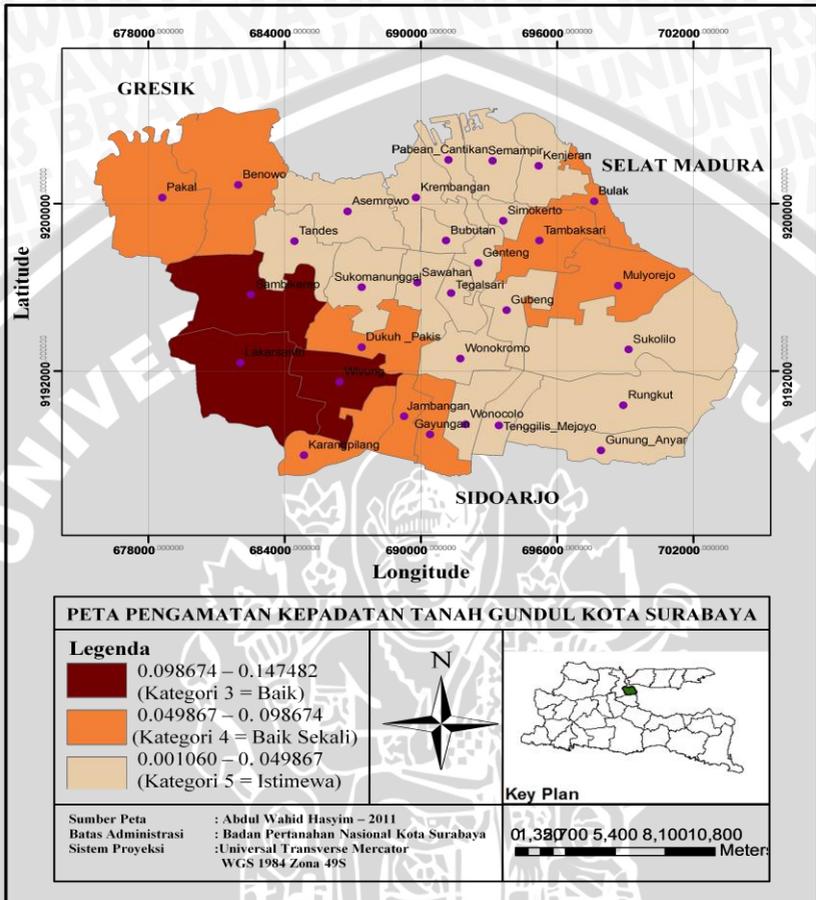
Gambar 4.1 menjelaskan persebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya. Dari gambar tersebut dapat diketahui bahwa hanya ada dua kategori kepadatan vegetasi di kota Surabaya yaitu kategori 1 yang berarti buruk atau kepadatan vegetasi sangat rendah dan kategori 2 yang berarti cukup atau kepadatan vegetasi rendah. Kecamatan yang berada di kategori kepadatan vegetasi rendah (kategori 2) adalah kecamatan Rungkut dan Gunung Anyar sedangkan kecamatan lainnya berada di kategori kepadatan vegetasi sangat rendah (kategori 1). Hal ini mengindikasikan bahwa vegetasi di kota Surabaya sudah hampir habis.



Gambar 4.2 Peta Hasil Amatan Kepadatan Urban di Kota Surabaya

Gambar 4.2 memperlihatkan bahwa ada lima kategori kepadatan urban di kota Surabaya yaitu kategori 1 yang berarti buruk atau kepadatan urban sangat tinggi, kategori 2 yang berarti cukup atau kepadatan urban tinggi, kategori 3 yang berarti baik atau kepadatan urban sedang, kategori 4 yang berarti baik sekali atau kepadatan urban rendah, dan kategori 5 yang berarti istimewa atau kepadatan urban sangat rendah. Kecamatan yang berada di kategori kepadatan urban sangat tinggi (kategori 1) adalah kecamatan Sawahan. Kecamatan yang berada di kategori kepadatan urban tinggi (kategori 2) adalah kecamatan Tegalsari, Bubutan, dan Tambaksari. Kecamatan yang berada di kategori kepadatan urban sedang (kategori 3) adalah kecamatan Gayungan, Genteng, Gubeng, Jambangan, Kenjeran, Krembangan, Simokerto, Sukomanunggal, Tandes, Tenggilis-Mejoyo, dan Wonocolo. Kecamatan yang berada di kategori kepadatan urban rendah (kategori 4) adalah kecamatan Asemrowo, Bulak, Dukuh-Pakis, Karangpilang, Pabean-Cantikan, Semampir, dan Wonokromo. Sedangkan kecamatan sisanya berada di kategori kepadatan urban yang sangat rendah (kategori 5). Dapat dilihat pada Gambar 4.2 bahwa semakin dekat suatu wilayah dengan pusat kota maka kepadatan urbannya akan semakin tinggi.

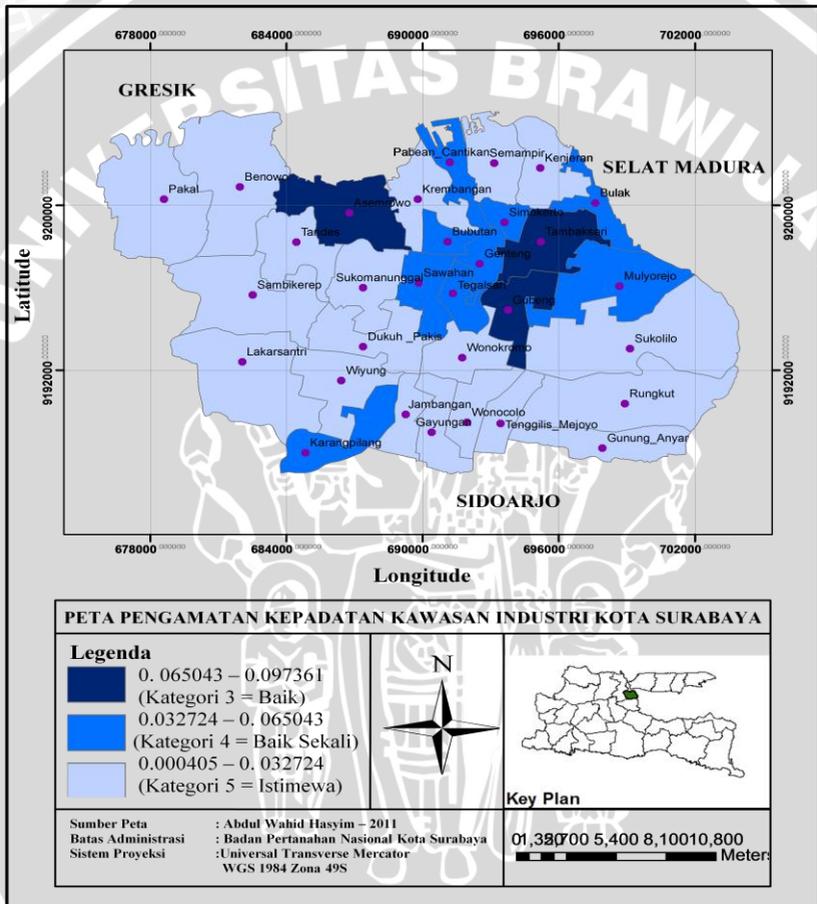




Gambar 4.3 Peta Hasil Amatan Tanah Gundul di Kota Surabaya

Dari Gambar 4.3 dapat diketahui bahwa ada tiga kategori kepadatan tanah gundul di kota Surabaya yaitu kategori 3 yang berarti baik atau kepadatan tanah gundul sedang, kategori 4 yang berarti baik sekali atau kepadatan tanah gundul rendah, dan kategori 5 yang berarti istimewa atau kepadatan tanah gundul sangat rendah. Kecamatan yang termasuk dalam kategori kepadatan tanah gundul sedang (kategori 3) adalah kecamatan Sambikerep, Lakarsanti dan Wiyung. Kecamatan yang termasuk dalam kategori kepadatan tanah gundul rendah (kategori 4) adalah kecamatan Pakal, Benowo, Bulak,

Tambaksari, Mulyorejo, Dukuh Pakis, Jambangan, Gayungan, dan Karang Pilang. Sedangkan kecamatan lainnya termasuk dalam kategori kepadatan tanah gundul yang sangat rendah (kategori 5). Dari Gambar 4.3 dapat dilihat bahwa tanah gundul kebanyakan terjadi di pinggir kota.



Gambar 4.4 Peta Hasil Amatan Kepadatan Kawasan Industri di Kota Surabaya

Dapat dilihat dari Gambar 4.4 bahwa ada tiga kategori kepadatan kawasan industri di kota Surabaya yaitu kategori 3 yang berarti baik atau kepadatan kawasan industri sedang,

kategori 4 yang berarti baik sekali atau kepadatan kawasan industri rendah, dan kategori 5 yang berarti istimewa atau kepadatan kawasan industri sangat rendah. Kecamatan yang termasuk dalam kategori kepadatan kawasan industri sedang (kategori 3) adalah kecamatan Asemrowo, Tambaksari, dan Gubeng. Kecamatan yang termasuk dalam kategori kepadatan kawasan industri rendah (kategori 4) adalah kecamatan Karang Pilang, Mulyorejo, Genteng, Simokerto, Bubutan, Sawahan, Bulak, Pabean Cantikan, dan Tegalsari. Sedangkan kecamatan lainnya termasuk dalam kategori kepadatan kawasan industri yang sangat rendah (kategori 5). Dari Gambar 4.4 dapat dilihat bahwa semakin jauh suatu wilayah dengan pusat kota maka akan memiliki kepadatan kawasan industri yang semakin rendah.

#### 4.2 Uji Autokorelasi Spasial

Hasil uji autokorelasi spasial Geary data Penyebaran Vegetasi di Kota Surabaya secara ringkas dapat dilihat pada Tabel 4.1 berikut

Tabel 4.1 Hasil Uji Autokorelasi Geary Data Penyebaran Vegetasi di Kota Surabaya

No	Variabel	Uji Geary			Kesimpulan Hasil Uji ( $\alpha = 5\%$ )
		Nilai Koefisien Geary (C)	Nilai Statistik Uji	<i>p-value</i>	
1.	Kepadatan Vegetasi (Y)	0.280933	-4.13274	<0.0001	Terdapat Autokorelasi Spasial
2.	Kepadatan Urban (X <sub>1</sub> )	0.527115	-2.71784	0.0066	Terdapat Autokorelasi Spasial
3.	Kepadatan Tanah Gundul (X <sub>2</sub> )	0.461933	-3.09247	0.0020	Terdapat Autokorelasi Spasial
4.	Kepadatan Kawasan Industri (X <sub>3</sub> )	0.621602	-2.17479	0.0296	Terdapat Autokorelasi Spasial

Tabel 4.1, yaitu hasil uji autokorelasi spasial Geary pada data spasial Penyebaran Vegetasi di Kota Surabaya menunjukkan bahwa secara signifikan terdapat autokorelasi spasial pada semua variabel baik variabel dependen maupun variabel independen. Hal ini dapat dilihat dari nilai mutlak statistik uji Geary semua variabel tersebut lebih besar dari nilai kritisnya, yaitu  $Z_{0,025}$  (1.96). Nilai mutlak dari statistik uji Geary untuk variabel Kepadatan Vegetasi, Kepadatan Urban, Kepadatan Tanah Gundul, dan Kepadatan Kawasan Industri berturut-turut adalah 4.13274, 2.71784, 3.09247, dan 2.17479.

Dari hasil analisis di Tabel 4.1, *p-value* untuk semua variabel kurang dari  $\alpha$  (0.05). Hal ini juga menunjukkan bahwa secara signifikan terdapat autokorelasi spasial pada semua variabel baik variabel dependen maupun variabel independen. *P-value* untuk variabel Kepadatan Vegetasi, Kepadatan Urban, Kepadatan Tanah Gundul, dan Kepadatan Kawasan Industri secara berturut-turut adalah <0.0001, 0.0066, 0.0020, dan 0.0296.

Autokorelasi spasial yang terdapat pada semua variabel merupakan autokorelasi spasial positif, yaitu dilihat dari nilai koefisien Geary secara berturut-turut bernilai 0.280933, 0.454891, 0.461933, dan 0.621602 yang nilainya berada di kisaran 0 sampai 1. Hal ini menunjukkan, dengan resiko berbuat salah sebesar 5%, maka semua variabel terdapat autokorelasi spasial positif atau pola data mengelompok, yaitu semakin dekat daerah maka akan semakin memiliki kemiripan sifat atau nilai variabel-variabelnya akan semakin mirip (relatif sama).

### 4.3 Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter pada pemodelan SDM disajikan pada Tabel 4.2. Ada tiga jenis pemodelan yang dilakukan, yaitu pemodelan dengan adanya lag pada variabel dependen dan independen ( $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \rho \neq 0$ ), pemodelan tanpa lag variabel dependen ( $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \rho = 0$ ), dan pemodelan tanpa lag variabel independen ( $\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \rho \neq 0$ ).

Tabel 4.2 Pendugaan Parameter Pemodelan SDM

Parameter	Variabel	Pemodelan 1 $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \rho \neq 0$			Pemodelan 2 $\beta_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0, \rho = 0$			Pemodelan 3 $\beta_1 \neq 0, \beta_2 = 0, \rho \neq 0$		
		Estimasi	Wald	P-value	Estimasi	Wald	P-value	Estimasi	Wald	P-value
$\beta_0$	Intersep	0.1060	18.9405*	<0.0001	0.1805	28.6299*	<0.0001	0.1391	21.4204*	<0.0001
$\beta_{11}$	Kepadatan Urban	0.0318	0.2138	0.6438	-0.0018	0.0004	0.9840	-0.1024	1.7707	0.1833
$\beta_{12}$	Kepadatan Tanah Gundul	0.1377	0.3030	0.5820	-0.3184	0.9213	0.3371	-0.2478	0.7446	0.3882
$\beta_{13}$	Kepadatan Kawasan Industri	-1.2626	7.5293*	0.0061	-1.1778	3.7390	0.0532	-1.0088	3.4515	0.0632
$\beta_{21}$	Kepadatan Urban Tetangga	-0.0616	5.8603*	0.0155	-0.0194	0.3121	0.5764	-	-	-
$\beta_{22}$	Kepadatan Tanah Gundul Tetangga	-0.3602	10.1396*	0.0015	-0.0865	0.3240	0.5692	-	-	-
$\beta_{23}$	Kepadatan Kawasan Industri Tetangga	0.3352	2.3400	0.1261	-0.0279	0.0089	0.9248	-	-	-
$\rho$	Kepadatan Vegetasi Tetangga	0.3367	270.6927*	<0.0001	-	-	-	0.1082	5.4969*	0.0191
$R^2$		0.5714			0.3406			0.3215		
AIC		-36.9220			-28.7045			-25.2508		

Ket : \*) signifikan pada  $\alpha=5\%$  ( $\chi_{\alpha,1}^2 = \chi_{5\%,1}^2 = 3.841$ )

Pada pemodelan pertama terdapat dependensi lag pada variabel dependen maupun independen. Hal tersebut ditunjukkan oleh parameter  $\rho$ , yaitu lag variabel dependen yang signifikan berpengaruh pada taraf nyata ( $\alpha$ )5%. Kemudian  $\beta_2$ , yaitu lag variabel independen yang juga signifikan berpengaruh pada taraf nyata ( $\alpha$ )5%. Signifikansi pada lag variabel independen ditunjukkan oleh variabel kepadatan urban dan kepadatan tanah gundul dengan pembobot yang berpengaruh signifikan. Sedangkan ketika tanpa pembobot hanya variabel kepadatan kawasan industri yang berpengaruh signifikan. Nilai  $R^2$  sebesar 57.14% menunjukkan besarnya variansi dari kepadatan vegetasi yang dapat dijelaskan oleh model.

Koefisien variabel kepadatan urban terboboti bernilai negatif, menunjukkan bahwa kecamatan yang berdekatan dengan kecamatan lain dengan kepadatan urban tinggi maka akan cenderung memiliki kepadatan vegetasi rendah. Begitu juga sebaliknya, kecamatan yang berdekatan dengan kecamatan lain dengan kepadatan urban rendah maka akan cenderung memiliki kepadatan vegetasi tinggi. Keadaan ini sama halnya dengan variabel kepadatan tanah gundul terboboti yang juga memiliki nilai koefisien negatif. Variabel kepadatan kawasan industri tanpa pembobot memiliki nilai koefisien negatif yang menunjukkan bahwa kecamatan yang memiliki kepadatan kawasan industri tinggi maka akan cenderung memiliki kepadatan vegetasi rendah, dan sebaliknya.

Pada pemodelan kedua yaitu ketika tanpa adanya lag variabel dependen, tidak terdapat dependensi lag pada variabel independen. Variabel independen tanpa pembobot juga tidak ada yang berpengaruh signifikan. Nilai  $R^2$  sebesar 34.06% menunjukkan besarnya variansi dari kepadatan vegetasi yang dapat dijelaskan oleh model.

Pada pemodelan ketiga, yaitu ketika tanpa adanya lag variabel independen, tidak terdapat variabel independen tanpa pembobot yang berpengaruh signifikan. Sedangkan lag variabel dependen masih berpengaruh signifikan. Nilai  $R^2$  sebesar 32.15% menunjukkan besarnya variansi dari kepadatan vegetasi yang dapat dijelaskan oleh model.

Berdasarkan analisis pada ketiga model, dapat disimpulkan bahwa lag variabel dependen maupun independen berperan

penting pada pemodelan. Hal tersebut dapat diketahui dari lag variabel dependen pada pemodelan pertama yang berpengaruh signifikan yang menunjukkan bahwa terdapat pengaruh dependensi spasial pada kepadatan vegetasi dengan adanya pengaruh dari variabel independen dan lag variabel independen. Nilai  $R^2$  yang lebih besar dan nilai AIC yang lebih kecil dibandingkan pemodelan kedua dan pemodelan ketiga menunjukkan bahwa pemodelan SDM pertama lebih baik.

#### 4.4 Deskripsi dan Interpretasi Model Hasil Analisis

Model yang terbaik untuk data kepadatan vegetasi di kota Surabaya adalah pemodelan SDM pertama, yaitu pemodelan dengan adanya lag pada variabel dependen maupun independen. Persamaan model SDM yang dihasilkan adalah:

$$y = 0.3367W_1y^* + 0.1060 + X_10.0318 + X_20.1377 - X_31.2626 - W_1X_10.0616 - W_1X_20.3602 + W_1X_30.3352 + \varepsilon$$

di mana:

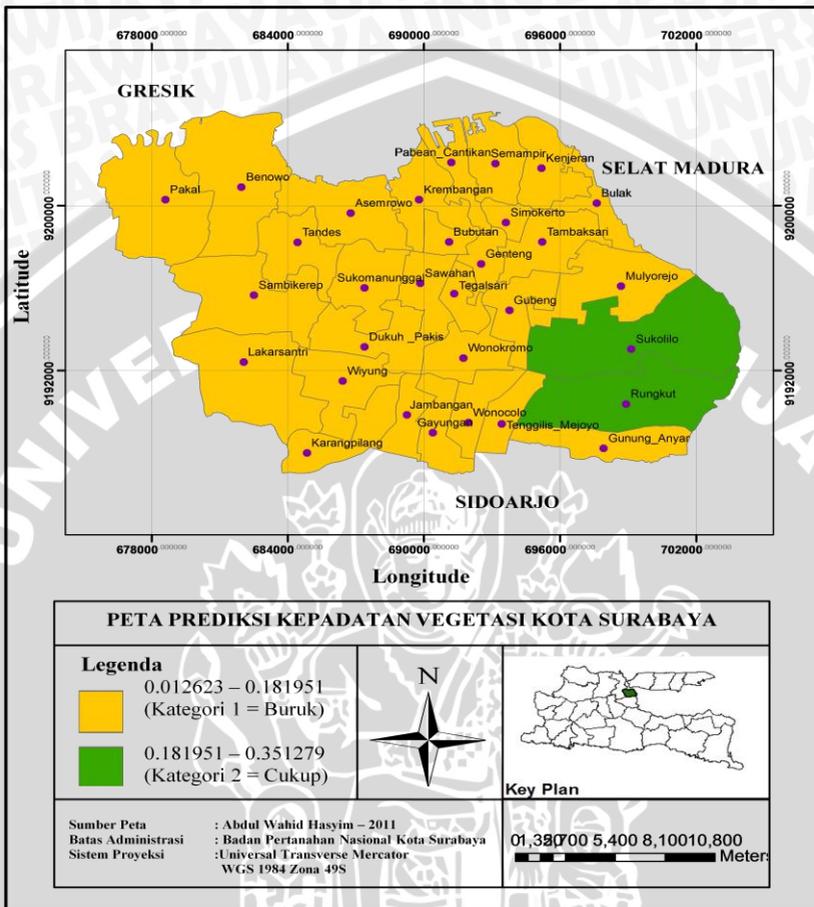
- $y$  : vektor variabel kepadatan vegetasi yang akan diprediksi, berukuran  $31 \times 1$
- $y^*$  : vektor variabel kepadatan vegetasi dari data amatan, berukuran  $31 \times 1$
- $X_1$  : vektor variabel kepadatan urban, berukuran  $31 \times 1$
- $X_2$  : vektor variabel kepadatan tanah gundul, berukuran  $31 \times 1$
- $X_3$  : vektor variabel kepadatan kawasan industri, berukuran  $31 \times 1$
- $W_1$  : matriks pembobot, berukuran  $31 \times 31$  yang dapat dilihat di Lampiran 4
- $\varepsilon$  : vektor *error*, berukuran  $31 \times 1$

Dari model yang diperoleh dapat diinterpretasikan:

- a. Apabila faktor lain dianggap konstan, kepadatan vegetasi di suatu kecamatan akan mengalami kenaikan sebesar 0.3367 jika kepadatan vegetasi dari kecamatan tetangga naik 1 satuan
- b. Intersep 0.1060 artinya apabila tidak terdapat faktor-faktor yang mempengaruhi kepadatan vegetasi seperti kepadatan urban, tanah gundul, dan kawasan industri (urban = tanah gundul =

- kawasan industri = 0) maka diperkirakan kepadatan vegetasi sebesar 0.1060 yang berarti kepadatan vegetasi di kota Surabaya sangat rendah atau buruk
- c. Apabila faktor lain dianggap konstan, jika kepadatan urban di suatu kecamatan naik 1 satuan, maka bisa menaikkan kepadatan vegetasi di kecamatan tersebut sebesar 0.0318
  - d. Apabila faktor lain dianggap konstan, jika kepadatan tanah gundul di suatu kecamatan naik 1 satuan, maka bisa menaikkan kepadatan vegetasi di kecamatan tersebut sebesar 0.1377
  - e. Apabila faktor lain dianggap konstan, jika kepadatan kawasan industri di suatu kecamatan naik 1 satuan, maka bisa menurunkan kepadatan vegetasi di kecamatan tersebut sebesar 1.2626
  - f. Apabila faktor lain dianggap konstan, kepadatan vegetasi di suatu kecamatan akan mengalami penurunan sebesar 0.0616 jika kepadatan urban dari kecamatan tetangga naik 1 satuan
  - g. Apabila faktor lain dianggap konstan, kepadatan vegetasi di suatu kecamatan akan mengalami penurunan sebesar 0.3602 jika kepadatan tanah gundul dari kecamatan tetangga naik 1 satuan
  - h. Apabila faktor lain dianggap konstan, kepadatan vegetasi di suatu kecamatan akan mengalami kenaikan sebesar 0.3352 jika kepadatan kawasan industri dari kecamatan tetangga naik 1 satuan.

Dari model yang terbentuk, dapat diperoleh nilai prediksi untuk variabel dependen (kepadatan vegetasi). Hasil prediksi dari variabel kepadatan vegetasi yang diperoleh dalam penelitian ini secara lengkap dapat dilihat pada lampiran 7. Dari hasil yang diperoleh maka dapat dilakukan proses pemetaan nilai prediksi variabel kepadatan vegetasi di kota Surabaya.



Gambar 4.5 Peta Hasil Prediksi Kepadatan Vegetasi di Kota Surabaya

Hasil pemetaan dari nilai prediksi variabel kepadatan vegetasi di kota Surabaya dapat dilihat pada Gambar 4.5 sedangkan hasil pemetaan dari nilai amatan variabel kepadatan vegetasi di kota Surabaya dapat dilihat pada Gambar 4.1. Hasil pemetaan antara data hasil amatan dengan data hasil prediksi dapat dibandingkan dengan melihat warna, semakin mirip warna dari suatu wilayah maka semakin erat korelasi antara nilai amatan dengan nilai prediksi. Jika terdapat perbedaan warna antara suatu wilayah pada peta amatan dengan peta prediksi, hal itu menunjukkan variasi yang tidak dapat dijelaskan oleh model. Ditinjau dari hasil pemetaan yang dapat

dilihat pada Gambar 4.5 dan Gambar 4.1, dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang cukup erat antara nilai kepadatan vegetasi amatan dengan nilai kepadatan vegetasi prediksi, hal ini dapat dilihat dari sebagian besar wilayah amatan dengan prediksi memiliki warna yang sama. Hanya kecamatan Sukolilo dan kecamatan Gunung Anyar yang memiliki warna peta amatan dan prediksi yang berbeda. Pada peta amatan, kecamatan Sukolilo termasuk dalam kategori kepadatan vegetasi buruk sedangkan pada peta prediksi termasuk dalam kategori kepadatan vegetasi cukup. Sedangkan kecamatan Gunung Anyar terjadi sebaliknya, pada peta amatan termasuk dalam kategori cukup sedangkan pada peta prediksi termasuk dalam kategori kepadatan vegetasi buruk. Hal ini kemungkinan disebabkan oleh variabel lain di luar model.

Dari Gambar 4.5 juga dapat dilihat bahwa hanya ada dua prediksi kategori kepadatan vegetasi di kota Surabaya yaitu cukup (kategori 2) dan buruk (kategori 1). Kecamatan yang termasuk dalam prediksi kategori cukup adalah kecamatan Rungkut dan Sukolilo sedangkan kecamatan lainnya termasuk dalam prediksi kategori buruk. Hal ini mengindikasikan bahwa penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya rendah.

Berdasarkan analisis yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa terdapat dependensi spasial lag pada variabel dependen maupun independen pada pemodelan SDM kepadatan vegetasi dan faktor-faktor yang mempengaruhinya. Hal tersebut dapat diketahui dari lag variabel dependen maupun independen pada pemodelan pertama yang berpengaruh signifikan. Dari hasil uji signifikansi parameter model yang terbentuk, diketahui bahwa faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap kepadatan vegetasi di suatu kecamatan di kota Surabaya pada taraf nyata ( $\alpha$ )5% adalah kepadatan vegetasi dari kecamatan tetangga, kepadatan kawasan industri dari kecamatan itu sendiri, kepadatan urban dari kecamatan tetangga, dan kepadatan tanah gundul dari kecamatan tetangga. Dan jika dilihat dari peta prediksi yang terbentuk melalui pemodelan SDM dapat diketahui bahwa penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya rendah dan dapat dikatakan bahwa vegetasi di kota Surabaya sudah hampir habis.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## **BAB V**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

#### **5.1 Kesimpulan**

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan didapatkan beberapa kesimpulan sebagai berikut :

1. Hasil pemodelan menunjukkan bahwa lag variabel dependen maupun independen berperan penting pada pemodelan SDM kepadatan vegetasi dan faktor-faktor yang mempengaruhinya.
2. Dari model yang terbaik yaitu pemodelan SDM pertama, faktor-faktor yang berpengaruh signifikan terhadap kepadatan vegetasi di suatu kecamatan di kota Surabaya pada taraf nyata ( $\alpha$ )5% adalah kepadatan vegetasi dari kecamatan tetangga, kepadatan kawasan industri dari kecamatan itu sendiri, kepadatan urban dari kecamatan tetangga, dan kepadatan tanah gundul dari kecamatan tetangga.
3. Ditinjau dari peta prediksi yang terbentuk melalui pemodelan SDM yang dibandingkan dengan peta amatan dapat disimpulkan bahwa terdapat korelasi yang cukup erat antara nilai kepadatan vegetasi amatan dengan nilai kepadatan vegetasi prediksi, hal ini dapat dilihat dari sebagian besar wilayah amatan dengan prediksi memiliki warna yang sama. Dari peta prediksi juga dapat diketahui bahwa hanya kecamatan Rungkut dan Sukolilo yang termasuk dalam prediksi kategori cukup sedangkan kecamatan lainnya termasuk dalam prediksi kategori buruk. Hal ini mengindikasikan bahwa penyebaran kepadatan vegetasi di kota Surabaya rendah dan dapat dikatakan bahwa vegetasi di kota Surabaya sudah hampir habis.

#### **5.2 Saran**

Saran yang dapat diberikan dari hasil penelitian ini adalah menggunakan pemodelan spasial SDM untuk data yang mengandung autokorelasi spasial baik pada variabel dependen maupun independen.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Anselin, L. 1988. *Spatial Econometrics : Methods and Models*. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.
- Anselin, L and S. J. Rey. 2008. *Spatial Econometrics: Foundations*.  
<http://toae.org/serge/pub/wvu08/foundations.pdf>. Diakses tanggal 1 November 2011.
- Bekti, R. D. 2011. *Spatial Durbin Model untuk Mengidentifikasi Faktor-Faktor yang Berpengaruh terhadap Kejadian Diare di Kabupaten Tuban*. ITS. Surabaya.
- Bohling, G. 2005. *Kriging*. <http://people.ku.edu/~gbohling/cpe940/Kriging.pdf>. Diakses tanggal 1 November 2011.
- Cressie, N.A.C. 1993. *Statistics for Spatial Data*. John Willey and Sons, inc. New York.
- D'agustino, M. and V. Dardanoni. 2007. *What's So Special About Euclid Distance? A Characterization with Application to Mobility and Spatial Voting*. <http://www-3.unipv.it/websiep/wp/597.pdf>. Diakses tanggal 6 November 2011.
- Getis, A. 2010. *Perspective on Spatial Data Analysis*. Springer Heidelberg Dordrecht London. New York.
- GIS Konsorsium Aceh Nias. 2007. *Modul Pelatihan ArcGis Tingkat Dasar*.  
<http://mhs.stiki.ac.id/07114058/GIS/Modul-ArcGIS%20Tingkat%20Dasara.pdf>. Diakses tanggal 6 November 2011.

Hasyim, A. W. 2011. *Pengembangan Model Pertumbuhan Pikel yang Berbasis Data Citra Satelit Multitemporal dan Teknologi SIG sebagai Dasar Pendugaan Pertumbuhan Kota*. Program Doktor, Bidang Keahlian Penginderaan Jauh, Program Studi Pascasarjana Teknik Sipil, Fakultas Teknik Sipil, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya. Tidak dipublikasikan.

Hosmer, D. and S. Lemeshow. 1989. *Applied Logistic Regression*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

Kissling, W. D. dan G. Carl. 2007. *Spatial Autocorrelation and the Selection of Simultaneous Autoregressive Models*. [http://www.higrade.ufz.de/data/kissling\\_carl\\_geb3346435.pdf](http://www.higrade.ufz.de/data/kissling_carl_geb3346435.pdf). Diakses tanggal 6 November 2011.

Lee, J. and D. W. S. Wong. 2001, *Statistical Analysis with Arcview GIS*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

Lembo, A. J. 2006. *Spatial Autocorrelation*. <http://faculty.salisbury.edu/~ajlembo/419/lecture15.pdf>. Diakses tanggal 21 Oktober 2011.

LeSage, J.P. 1999, *The Theory and Practice of Spatial Econometrics*. <http://www.econ.utoledo.edu>. Diakses tanggal 21 Oktober 2011.

LeSage, J.P. and R.K. Pace. 2009. *Introduction to Spatial Econometrics*. R Press. Boca Ration.

Mendenhall, W., R. L. Scheaffer, and D. D. Wackerly. 1981. *Mathematical Statistics with Applications*. Duxbury Press. Boston, Massachusetts.

Ngudiantoro. 2004. *Konfigurasi dan Pola spasial Pembangunan Berkelanjutan di Indonesia*.

[www.rudycr.com/PPS702-ipb/09145/ngudiantoro.pdf](http://www.rudycr.com/PPS702-ipb/09145/ngudiantoro.pdf).

Diakses tanggal 20 Oktober 2011.

Paradis, E. 2009. *Moran's Autocorrelation Coefficient in Comparative Methods*. <http://cran.r-project.org/web/packages/ape/vignettes/MoranI.pdf>.  
Diakses Tanggal 20 Oktober 2011.

Purwaamijaya, I. M. 2008. *Teknik Survei dan Pemetaan*. <http://bse.ictcenter-llg.net/files/pemetaan-iskandar.pdf.pdf>.  
Diakses Tanggal 3 November 2011.

Sawada, M. 2009. *Global Spatial Autocorrelation Indices- Moran's I, Geary's C and the General Cross-Product Statistic*.  
<http://www.lpc.uottawa.ca/publications/moransi/moran.htm>.  
Diakses Tanggal 20 Oktober 2011.

Sujarto, D. 1982. *Pengembangan Wilayah dan Masalah Penggunaan Tanah*. Diklat Kuliah. Jurusan Planologi FTSP – ITB. Bandung.

Wall, M. M. 2004. *A Close Look at the Spatial Structure Implied by the CAR and SAR Models*. <http://www.stat.ufl.edu/~mdaniels/spatial/wall.car.sar.pdf>.  
Diakses Tanggal 20 Oktober 2011.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 1. Koordinat Lokasi Kecamatan di Kota Surabaya

<b>Nama Kecamatan</b>	<b>Longitude</b>	<b>Latitude</b>
Asemrowo	686813,42	9199639,18
Benowo	681977,84	9200889,76
Bubutan	691107,09	9198221,85
Bulak	697651,81	9200181,10
Dukuh-Pakis	687438,72	9193136,15
Gayungan	690481,80	9189050,91
Genteng	692524,42	9197138,01
Gubeng	693816,69	9194970,33
Gunung-Anyar	697985,30	9188217,18
Jambangan	689147,85	9189926,32
Karangpilang	684937,55	9188008,75
Kenjeran	695192,33	9201806,86
Krembangan	689856,51	9200306,16
Lakarsantri	682061,21	9192385,80
Mulyorejo	698693,96	9196095,86
Pabean-Cantikan	691232,15	9202056,97
Pakal	678601,26	9200347,84
Rungkut	698944,08	9190343,18
Sambikerep	682519,76	9195595,63
Sawahan	689856,61	9196262,60
Semampir	693274,77	9202056,97
Simokerto	693733,32	9199180,63
Sukolilo	699110,82	9193011,09
Sukomanunggal	687522,09	9196012,49
Tambaksari	695275,70	9198221,85
Tandes	684437,32	9198221,85
Tegalsari	691440,58	9195637,31
Tenggilis-Mejoyo	693441,51	9189342,71
Wiyung	686438,25	9191468,70
Wonocolo	691940,81	9189384,40
Wonokromo	691732,38	9192635,91

## Lampiran 2. Data Penelitian

<b>Nama Kecamatan</b>	<b>Y</b>	<b>X<sub>1</sub></b>	<b>X<sub>2</sub></b>	<b>X<sub>3</sub></b>
Asemrowo	0.079903	0.266696	0.025619	0.067342
Benowo	0.065788	0.072206	0.077423	0.015875
Bubutan	0.018274	0.614844	0.009840	0.059882
Bulak	0.173655	0.196564	0.082430	0.033545
Dukuh-Pakis	0.065476	0.249837	0.064824	0.024054
Gayungan	0.144244	0.328804	0.087950	0.014185
Genteng	0.055520	0.341174	0.008053	0.040051
Gubeng	0.029216	0.441060	0.011957	0.068133
Gunung-Anyar	0.266529	0.145746	0.019415	0.007873
Jambangan	0.152591	0.345654	0.071443	0.008466
Karangpilang	0.049585	0.295437	0.076156	0.043362
Kenjeran	0.120160	0.363882	0.026913	0.028514
Krembangan	0.053447	0.321435	0.019350	0.027710
Lakarsantri	0.048503	0.053088	0.105502	0.003506
Mulyorejo	0.154009	0.143448	0.067396	0.033970
Pabean-Cantikan	0.020141	0.185591	0.013923	0.043525
Pakal	0.102519	0.053826	0.073652	0.004238
Rungkut	0.246169	0.162688	0.038474	0.012018
Sambikerep	0.064883	0.090548	0.131602	0.005907
Sawahan	0.019603	0.717361	0.021781	0.064190
Semampir	0.106561	0.300632	0.028627	0.030053
Simokerto	0.037037	0.439326	0.002710	0.042758
Sukolilo	0.169530	0.092581	0.022858	0.006761
Sukomanunggal	0.105597	0.399393	0.037744	0.035662
Tambaksari	0.066510	0.492142	0.062516	0.093514
Tandes	0.092211	0.338653	0.037356	0.032551
Tegalsari	0.043924	0.606322	0.027094	0.048235
Tenggilis-Mejojo	0.079025	0.347781	0.009574	0.018799
Wiyung	0.097749	0.158004	0.130525	0.007284
Wonocolo	0.094637	0.420594	0.041526	0.016272
Wonokromo	0.061015	0.167847	0.038048	0.030736

Keterangan :

Y = rasio kepadatan vegetasi

X<sub>1</sub> = rasio kepadatan urban

X<sub>2</sub> = rasio kepadatan tanah gundul

X<sub>3</sub> = rasio kepadatan kawasan industri

### Lampiran 3. *Source Code Macro* Minitab 15 Uji Autokorelasi Spasial Geary Berdasarkan *Distance Band* dengan Menggunakan Jarak Euclid

```
macro
euclid x y z w.l-w.n dmin
mcolumn x y z d.l-d.n dmin w.l-w.n
mconstant i j n min max dmax c Ec VARc Zc SUM1 SUM2 SUM3 SUM4
SUM5 DEV RATA K.1-K.n L.1-L.n

let n=count(x)
let min=0
#hitung matrik jarak
do i=1:n
  do j=1:n
    if i=j
      let d.i(j)=0
    else
      let d.i(j)=sqrt(((x[i]-x[j])**2)+((y[i]-y[j])**2))
    endif
  enddo
enddo
#menentukan jarak tetangga terdekat
do i=1:n
  let min=d.i(1)
  if(i=1)
    let min=d.i(2)
  endif
do j=1:n
  if (d.i(j)<min) and (i~j)
    let min=d.i(j)
  endif
enddo
let dmin[i]=min
enddo
#menentukan distance band
let max=0
do i=1:n
  if(dmin[i]>max)
    let max=dmin[i]
  endif
enddo
#menentukan matrik pembobot
do i=1:n
  do j=1:n
    if(d.i(j)<=max) and (i~j)
      let w.i(j)=1
    else
      let w.i(j)=0
    endif
  enddo
enddo
```

### Lampiran 3. Lanjutan

```
# hitung rata-rata
let SUM1=0
do i=1:n
let SUM1=SUM1+z(i)
enddo
let RATA = SUM1/n
do i=1:n
let K.i=0
let L.i=0
enddo
do i=1:n
do j=1:n
let K.i = K.i + (w.i(j))
let L.i = L.i + (w.j(i))
enddo
enddo
#SUM2 = S0
let SUM2=0
let DEV=0
do i=1:n
let DEV = DEV + ((z(i)-RATA)**2)
do j=1:n
let SUM2=SUM2+(w.i(j))
enddo
enddo

# SUM4 = S1
let SUM4 = 0
do i=1:n
do j=1:n
let SUM4 = SUM4 + ((w.j(i)+w.i(j))**2)/2
enddo
enddo
# SUM5 = S2
let SUM5 = 0
do i=1:n
let SUM5 = SUM5 + ((K.i+L.i)**2)
enddo
let SUM3=0
do i=1:n
do j=1:n
let SUM3 = SUM3 + ((w.j(i))*(z(i)- z(j))*(z(i)-z(j)))
enddo
enddo
let c = ((n-1)*SUM3)/(2*SUM2*DEV)
let Ec = 1
let VARc = (1/(2*(n+1)*SUM2*SUM2))*((2*SUM4+SUM5)*(n-1)-4*SUM2*SUM2)
let Zc = (c-Ec)/sqrt(VARc)
print c Ec VARc Zc
endmacro
```

#### Lampiran 4. Matriks Pembobot Berdasarkan *Distance Band*

Kecamatan	No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Asemrowo	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Benowo	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
Bubutan	3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
Bulak	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Dukuh-Pakis	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gayungan	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Genteng	7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Gubeng	8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Gunung-Anyar	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Jambangan	10	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Karangpilang	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Kenjeran	12	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Krembangan	13	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Lakarsantri	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Mulyorejo	15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pabean-Cantikan	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Pakal	17	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rungkut	18	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sambikerep	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Sawahan	20	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Semampir	21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
Simokerto	22	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Sukolilo	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0
Sukomanunggal	24	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Tambaksari	25	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Tandes	26	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
Tegalsari	27	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Tenggiling-Mejoyo	28	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wiyung	29	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wonocolo	30	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wonokromo	31	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

#### Lampiran 4. Lanjutan

Kecamatan	No.	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Asemrowo	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
Benowo	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Bubutan	3	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Bulak	4	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Dukuh-Pakis	5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
Gayungan	6	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
Genteng	7	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0
Gubeng	8	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
Gunung-Anyar	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Jambangan	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
Karangpilang	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
Kenjeran	12	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Krembangan	13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lakarsantri	14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mulyorejo	15	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Pabean-Cantikan	16	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Pakal	17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Rungkut	18	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Sambikerep	19	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Sawahan	20	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
Semampir	21	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Simokerto	22	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
Sukolilo	23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sukomanunggal	24	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tambaksari	25	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tandes	26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Tegalsari	27	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Tenggiling-Mejoyo	28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Wiyung	29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Wonocolo	30	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
Wonokromo	31	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0

Lampiran 5. Hasil Uji Autokorelasi Spasial Geary dengan Menggunakan *Source Code Macro* MINITAB

**Data Display (Variabel Kepadatan Vegetasi)**

c	0.280933
Ec	1.00000
VARc	0.0302734
Zc	-4.13274

**Data Display (Variabel Kepadatan urban)**

c	0.527115
Ec	1.00000
VARc	0.0302734
Zc	-2.71784

**Data Display (Variabel Kepadatan Tanah Gundul)**

c	0.461933
Ec	1.00000
VARc	0.0302734
Zc	-3.09247

**Data Display (Variabel Kepadatan Kawasan Industri)**

c	0.621602
Ec	1.00000
VARc	0.0302734
Zc	-2.17479

## Lampiran 6. *Syntax* SDM dengan MATLAB

### a. Pemodelan 1

#### 1. Program `f_sdm`

```
function llike = f_sdm(rho,y,x,W)

%-----
%Tujuan : mengevaluasi konsentrasi fungsi log likelihood
% yang tergantung pada spasial lag variabel dependen
%-----

[n k] = size(x); rho2 = rho*rho;
spparms('tight');
z = speye(n) - 0.1*W;
p = colamd(z);
z = speye(n) - rho*W;
[1,u] = lu(z(:,p));
detval = sum(log(abs(diag(u))));
dy=W*y; xdx=[ones(n,1) x(:,2:k) W*x(:,2:k)];
xdtxdx=(xdx'*xdx);
xdxy=xdx'*y; xdxdy=xdx'*dy;
bmat=xdtxdx\[xdxy xdxdy];
bols=bmat(:,1);
bolstd=bmat(:,2);
eo=y-xdx*bols;
ed=dy-xdx*bolstd;
e2o=(eo'*eo);
edo=(ed'*eo);
e2d=(ed'*ed);
logsse=log(e2o-2*rho*edo+rho2*e2d);
llike = (n/2)*log(pi)-detval+(n/2)*logsse;
```

#### 2. Program `sdm`

```
function results = sdm(y,x,W,lmin,lmax,convg,maxit)

%-----
%Tujuan : mendapatkan estimasi spasial durbin model (SDM)
%(1-rho*W)y = a + X*B1 + W*X*B2 + e
%y = vektor variabel dependen
%x = vektor variabel independen
%W = matrik pembobot
%rho = estimasi parameter lag variabel dependen
%beta = estimasi parameter variabel independen dan lag
% variabel independen
%var = estimasi parameter varians
%wald = statistik uji Wald
%rsqr = koefisien determinasi
%-----
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
options = zeros(1,18); rflag = 0;
options(1,1) = 0; options(1,2) = 1.e-6; options(14) = 500;
if nargin == 3
    elseif nargin == 5, rflag = 1;
    elseif nargin == 6, options(1,2) = convg;
    elseif nargin == 7
        options(1,2) = convg; options(1,14) = maxit;
    else error('Wrong # of arguments to sdm');
end;

[n nvar] = size(x);
results.meth = 'sdm';
results.y = y;
results.nobs = n;
results.nvar = nvar;

%menentukan rho minimum dan rho maksimum
if rflag == 0, opt.tol = 1e-3; opt.disp = 0;
%lambda = eigs(sparse(W), speye(n), 2, 'BE', opt);
lmin = -1;
lmax = 1;
%end;
%results.lambda=lambda;
results.rmax = lmax;
results.rmin = lmin;

%memaksimumkan konsentrasi fungsi likelihood
[rho, fval, exitflag, output] =
fminbnd('f_sdm', lmin, lmax, options, y, x, W);
if output.iterations == options(14),
    fprintf(1, 'sdm:convergence not obtained in %4d
iterations', options(14));
else results.iter = output.iterations;
end;

%menentukan estimasi beta dan varians
rho2 = rho*rho; dy=W*y;
xdx=[ones(n,1) x(:,2:nvar) W*x(:,2:nvar)];
xdxtxdx=(xdx'*xdx); xxdy=xdx'*y;
xdxdy=xdx'*dy;
bmat=xdxtxdx\[xdxy xxdy];
bols=bmat(:, 1);
bolstd=bmat(:,2);
beta = bols - rho*bolstd;
eo=y-xdx*bols;
ed=dy-xdx*bolstd;
e2o=(eo'*eo);
edo=(ed'*eo);
e2d=(ed'*ed);
epe=(e2o-2*rho*edo+rho2*e2d);
var =epe/n;
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
results.bols=bols;
results.bolsd=bolsd;
results.beta=beta;
results.rho=rho;
results.yhat=xdx*beta+rho*sparse(W)*y;
results.resid=y-results.yhat;
results.var=var;

%menentukan statistik uji wald
B = eye(n) - rho*W;
BI = inv(B); WB = W*BI;
pterm = trace(WB*WB+WB*WB');
p=2*nvar-1;
xpx=zeros(p+2,p+2);
xpx(1:p,1:p) = (1/var)*(xdx'*xdx); %beta,beta
xpx(1:p,p+1) = (1/var)*xdx'*W*BI*xdx*beta; %beta,rho
xpx(p+1,1:p) = xpx(1:p,p+1)'; %beta,rho
xpx(p+1,p+1) =
(1/var)*beta'*xdx'*BI'*W'*W*BI*xdx*beta+pterm; %rho,rho
xpx(p+2,p+2) = n/(2*var*var); %var,var
xpx(p+1,p+2) = (1/var)*trace(WB); %rho,var
xpx(p+2,p+1) = xpx(p+1,p+2); %rho,var
hessi = -inv(xpx);
tmp = diag(abs(hessi(1:p+1,1:p+1)));
bvec=[results.beta; results.rho];
wald=bvec.*bvec./(tmp);
results.bvec=bvec;
results.wald=wald;
results.tmp=tmp;

%menentukan R square, sse, ssr, log likelihood, dan AIC
sse=results.resid'*results.resid;
sstot=(y - mean(y))'*(y - mean(y));
ssreg=(results.yhat-mean(y))'*(results.yhat-mean(y));
rsqr=ssreg/sstot;
results.sse=sse;
results.sstot=sstot;
results.ssreg=ssreg;
results.rsqr=rsqr;
results.like=-f_sdm(rho,y,x,W);
results.aic=-2*results.like+2*(2*nvar);
```

## Lampiran 6. Lanjutan

### 3. Program Utama

```
clc;
y=data(:,1);
n=31;
x1=data(:,2);
x2=data(:,3);
x3=data(:,4);
x=zeros(n,4);
x(:,1)=ones(n,1);
x(:,2)=x1;
x(:,3)=x2;
x(:,4)=x3;
W=pembobot2;
results=sdm(y,x,W)
```

### b. Pemodelan 2

#### 1. Program f\_sdm

```
function llike = f_sdm(rho,y,x,W)
%-----
%Tujuan : mengevaluasi konsentrasi fungsi log likelihood
% yang tergantung pada spasial lag variabel dependen
%-----

[n k] = size(x); rho2 = rho*rho;
spparms('tight');
z = speye(n) - 0.1*W;
p = colamd(z);
z = speye(n) - rho*W;
[1,u] = lu(z(:,p));
detval = sum(log(abs(diag(u)))));
dy=W*y; xdx=[ones(n,1) x(:,2:k) W*x(:,2:k)];
xdtxdx=(xdx'*xdx);
xdxy=xdx'*y; xdxdy=xdx'*dy;
bmat=xdtxdx\[xdxy xdxdy];
bols=bmat(:,1);
bolstd=bmat(:,2);
eo=y-xdx*bols;
ed=dy-xdx*bolstd;
e2o=(eo'*eo);
edo=(ed'*ed);
e2d=(ed'*ed);
logsse=log(e2o-2*rho*edo+rho2*e2d);
llike = (n/2)*log(pi)-detval+(n/2)*logsse;
```

## Lampiran 6. Lanjutan

### 2. Program sdm

```
function results = sdm(y,x,W,lmin,lmax,convg,maxit)

%-----
%Tujuan : mendapatkan estimasi spatial durbin model (SDM)
%(1-rho*W)y = a + X*B1 + W*X*B2 + e
%y = vektor variabel dependen
%x = vektor variabel independen
%W = matrik pembobot
%rho = estimasi parameter lag variabel dependen
%beta = estimasi parameter variabel independen dan lag
        variabel independen
%var = estimasi parameter varians
%wald = statistik uji Wald
%rsqr = koefisien determinasi
%-----

options = zeros(1,18);rflag = 0;
options(1,1) = 0;options(1,2) = 1.e-6; options(14) = 500;
if nargin == 3
    elseif nargin == 5, rflag = 1;
    elseif nargin == 6, options(1,2) = convg;
    elseif nargin == 7
        options(1,2) = convg; options(1,14) = maxit;
    else error('Wrong # of arguments to sdm');
end;

[n nvar] = size(x);
results.meth = 'sdm';
results.y = y;
results.nobs = n;
results.nvar = nvar;

%menentukan rho minimum dan rho maksimum
%if rflag == 0, opt.tol = 1e-3; opt.disp = 0;
%lambda = eigs(sparse(W),speye(n),2,'BE',opt);
lmin = -1;
lmax = 1;
%end;
%results.lambda=lambda;
results.rmax = lmax;
results.rmin = lmin;
    %memaksimumkan konsentrasi fungsi likelihood
[rho,fval,exitflag,output] =
fminbnd('f_sdm',lmin,lmax,options,y,x,W);
if output.iterations == options(14),
fprintf(1,'sdm:convergence not obtained in %4d
iterations',options(14));
else results.iter = output.iterations;
end;
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
%menentukan estimasi beta dan varians
rho=0;
rho2 = rho*rho; dy=W*y;
xdx=[ones(n,1) x(:,2:nvar) W*x(:,2:nvar)];
xdtxdx=(xdx'*xdx); xxdy=xdx'*y;
xdxdy=xdx'*dy;
bmat=xdtxdx\[xdxy xxdy];
bols=bmat(:, 1);
bolsd=bmat(:,2);
beta = bols - rho*bolsd;
eo=y-xdx*bols;
ed=dy-xdx*bolsd;
e2o=(eo'*eo);
edo=(ed'*eo);
e2d=(ed'*ed);
epe=(e2o-2*rho*edo+rho2*e2d);
var =epe/n;
results.bols=bols;
results.bolsd=bolsd;
results.beta=beta;
results.rho=rho;
results.yhat=xdx*beta+rho*sparse(W)*y;
results.resid=y-results.yhat;
results.var=var;

%menentukan statistik uji wald
B = eye(n) - rho*W;
BI = inv(B); WB = W*BI;
pterm = trace(WB*WB+WB*WB');
p=2*nvar-1;
xpx=zeros(p+2,p+2);
xpx(1:p,1:p) = (1/var)*(xdx'*xdx); %beta,beta
xpx(1:p,p+1) = (1/var)*xdx'*W*BI*xdx*beta; %beta,rho
xpx(p+1,1:p) = xpx(1:p,p+1)'; %beta,rho
xpx(p+1,p+1) =
(1/var)*beta'*xdx'*BI'*W'*W*BI*xdx*beta+pterm; %rho,rho
xpx(p+2,p+2) = n/(2*var*var); %var,var
xpx(p+1,p+2) = (1/var)*trace(WB); %rho,var
xpx(p+2,p+1) = xpx(p+1,p+2); %rho,var
hessi = -inv(xpx);
tmp = diag(abs(hessi(1:p+1,1:p+1)));
bvec=[results.beta; results.rho];
wald=bvec.*bvec./(tmp);
results.bvec=bvec;
results.wald=wald;
results.tmp=tmp;

%menentukan R square, sse, SSR, log likelihood, dan AIC
sse=results.resid'*results.resid;
sstot=(y - mean(y))'*(y - mean(y));
ssreg=(results.yhat-mean(y))'*(results.yhat-mean(y));
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
rsqr=ssreg/sstot;
results.sse=sse;
results.sstot=sstot;
results.ssreg=ssreg;
results.rsqr=rsqr;
results.like=-f_sdm(rho,y,x,W);
results.aic=-2*results.like+2*(2*nvar);
```

### 3. Program Utama

```
clc;
y=data(:,1);
n=31;
x1=data(:,2);
x2=data(:,3);
x3=data(:,4);
x=zeros(n,4);
x(:,1)=ones(n,1);
x(:,2)=x1;
x(:,3)=x2;
x(:,4)=x3;
W=pembobot2;
results=sdm(y,x,W)
```

## c. Pemodelan 2

### 1. Program f\_sar

```
function llike = f_sar(rho,y,x,W)

%-----
% Tujuan : Mengevaluasi konsentrasi fungsi log likelihood
%          yang tergantung pada spasial lag variabel dependen
%-----

[n k] = size(x); rho2 = rho*rho;
spparms('tight');
z = speye(n) - 0.1*sparse(W);
p = colamd(z);
z = speye(n) - rho*sparse(W);
[1,u] = lu(z(:,p));
detval = sum(log(abs(diag(u))));
dy=W*y; xdx=[ones(n,1) x(:,2:k)];
xdtxdx=(xdx'*xdx);
xdxy=xdx'*y; xdxdy=xdx'*dy;
bmat=xdtxdx\[xdxy xdxdy];
bols=bmat(:,1);
bolstd=bmat(:,2);
eo=y-xdx*bols;
ed=dy-xdx*bolstd;
e2o=(eo'*eo);
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
edo=(ed'*eo);
e2d=(ed'*ed);
logsse=log(e2o-2*rho*edo+rho2*e2d);
llike = (n/2)*log(pi) -detval + (n/2)*logsse;
```

### 2. Program sar

```
function results = sar(y,x,W,lmin,lmax,convg,maxit)

%-----
% Tujuan : Mendapatkan estimasi Spatial Autoregressive
(SAR)
%  $(I-\rho W)y = a + X*B1 + W*X*B2 + e$ 
% Menggunakan algoritma sparse
% y = vektor variabel dependen
% x = matrik variabel independen
% W = matrik pembobot
% rho = estimasi parameter lag variabel dependen
% beta = estimasi parameter variabel independen
% var = estimasi parameter varians
% wald = statistik uji wald
% rsqr = Koefisien determinansi
%-----

options = zeros(1,18); rflag = 0;
options(1,1) = 0; options(1,2) = 1.e-6; options(14) = 500;
if nargin == 3
elseif nargin == 5, rflag = 1;
elseif nargin == 6, options(1,2) = convg;
elseif nargin == 7
options(1,2) = convg; options(1,14) = maxit;
else, error('Wrong # of arguments to sar!');
end;

[n nvar] = size(x);
results.meth = 'sar';
results.y = y;
results.nobs = n;
results.nvar = nvar;

%Menentukan rho minimum dan rho maksimum
%if rflag == 0, opt.tol = 1e-3; opt.disp = 0;
%lambda = eigs(sparse(W),speye(n),2,'BE',opt);
lmin = -1;
lmax = 1;
%end;
%results.lambda=lambda;
results.rmax = lmax;
results.rmin = lmin;
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
%Menentukan rho yang optimum
[rho, fval, exitflag, output] =
fminbnd('f_sar', lmin, lmax, options, y, x, W);
if output.iterations == options(14),
fprintf(1, 'sar: convergence not obtained in %4d
iterations', options(14));
else, results.iter = output.iterations;
end;

%Menentukan estimasi beta dan varians
rho2 = rho*rho; dy=W*y;
xdx=[ones(n,1) x(:,2:nvar)];
xdtxdx=(xdx'*xdx); xdxy=xdx'*y;
xdxdy=xdx'*dy;
bmat=xdtxdx\[xdxy xdxdy];
bols=bmat(:,1);
bolsd=bmat(:,2);
beta = bols - rho*bolsd;
eo=y-xdx*bols;
ed=dy-xdx*bolsd;
e2o=(eo'*eo);
edo=(ed'*ed);
e2d=(ed'*ed);
epe = (e2o-2*rho*edo+rho2*e2d);
var = epe/n;
results.bols=bols;
results.bolsd=bolsd;
results.beta=beta;
results.rho = rho;
results.yhat = xdx*beta + rho*sparse(W)*y;
results.resid = y - results.yhat;
results.var=var;

%Menentukan Statistik uji wald
B = eye(n) - rho*W;
BI = inv(B); WB = W*BI;
pterm = trace(WB*WB + WB*WB');
p=nvar;
xpx = zeros(p+2,p+2);
xpx(1:p,1:p) = (1/var)*(xdx'*xdx); % beta,beta
xpx(1:p,p+1) = (1/var)*xdx'*W*BI*xdx*beta; % beta,rho
xpx(p+1,1:p) = xpx(1:p,p+1)'; % beta,rho
xpx(p+1,p+1) = (1/var)*beta'*xdx'*BI'*W'*W*BI*xdx*beta +
pterm; %rho,rho
xpx(p+2,p+2) = n/(2*var*var); % var,var
xpx(p+1,p+2) = (1/var)*trace(WB); % rho,var
xpx(p+2,p+1) = xpx(p+1,p+2); % rho,var
hessi = -inv(xpx);
tmp = diag(abs(hessi(1:p+1,1:p+1)));
bvec = [results.beta; results.rho];
wald = bvec.*bvec./(tmp);
```

## Lampiran 6. Lanjutan

```
results.bvec=bvec;
results.wald=wald;
results.tmp=tmp;

% Menentukan R square, sse, ssr, log likelihood, dan AIC
sse=results.resid'*results.resid;
sstot=(y - mean(y))'*(y - mean(y));
ssreg=(results.yhat-mean(y))'*(results.yhat-mean(y));
rsqr=ssreg/sstot;
results.sse=sse;
results.sstot=sstot;
results.ssreg=ssreg;
results.rsqr=rsqr;
results.like=-f_sar(rho,y,x,W);
results.aic=-2*results.like+2*(10);
```

### 3. Program Utama

```
clc;
y=data(:,1);
n=31;
x1=data(:,2);
x2=data(:,3);
x3=data(:,4);
x=zeros(n,4);
x(:,1)=ones(n,1);
x(:,2)=x1;
x(:,3)=x2;
x(:,4)=x3;
W=pembobot2;
results=sdm(y,x,W)
```

Lampiran 7. Hasil Prediksi Kepadatan Vegetasi di Surabaya

<b>Nama Kecamatan</b>	$\hat{y}$
Asemrowo	0.0504
Benowo	0.1126
Bubutan	0.0186
Bulak	0.1000
Dukuh-Pakis	0.0875
Gayungan	0.1223
Genteng	0.0129
Gubeng	0.0353
Gunung-Anyar	0.1664
Jambangan	0.0907
Karangpilang	0.0497
Kenjeran	0.1299
Krembangan	0.0974
Lakarsantri	0.0886
Mulyorejo	0.1223
Pabean-Cantikan	0.0764
Pakal	0.1076
Rungkut	0.2231
Sambikerep	0.1034
Sawahan	0.0368
Semampir	0.1031
Simokerto	0.0952
Sukolilo	0.1967
Sukomanunggal	0.0701
Tambaksari	0.0661
Tandes	0.0706
Tegalsari	0.0451
Tenggilis-Mejojo	0.0992
Wiyung	0.1039
Wonocolo	0.1279
Wonokromo	0.0744

Keterangan :

$\hat{y}$  = prediksi rasio kepadatan vegetasi

Lampiran 8. Pengkajian sifat-sifat  $\hat{\sigma}^2$

- *Unbiased*

$$\begin{aligned} E(\hat{\sigma}^2) &= E \left[ \frac{((I-\rho W_1)y - Z\beta)^T ((I-\rho W_1)y - Z\beta)}{n} \right] \\ &= \frac{1}{n} E \left[ ((I - \rho W_1)y - Z\beta)^T ((I - \rho W_1)y - Z\beta) \right] \\ &= \frac{1}{n} E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \frac{1}{n} E(SSE) \end{aligned}$$

Karena tidak terbukti bahwa  $E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$  maka dapat dikatakan bahwa  $\hat{\sigma}^2$  adalah penaksir yang *biased* untuk  $\sigma^2$ .

Pada model SDM  $\hat{y} = \rho W_1 y + Z\hat{\beta}$ , dengan mensubstitusikan  $\hat{\beta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T (I - \rho W_1) y$  didapatkan persamaan:

$$\hat{y} = \rho W_1 y + Z(Z^T Z)^{-1} Z^T (I - \rho W_1) y$$

Persamaan di atas dapat ditulis menjadi:

$$\hat{y} = S y$$

Perhitungan *error*

$$\hat{\varepsilon} = y - \hat{y}$$

$$= y - S y$$

$$= (I - S) y$$

Dan perhitungan SSE menjadi:

$$\begin{aligned} SSE &= \hat{\varepsilon}^T \hat{\varepsilon} \\ &= (\hat{\varepsilon} - E(\hat{\varepsilon}))^T (\hat{\varepsilon} - E(\hat{\varepsilon})) \\ &= ((I - S)y - E((I - S)y))^T ((I - S)y - E((I - S)y)) \\ &= ((I - S)(y - E(y)))^T ((I - S)(y - E(y))) \\ &= (y - E(y))^T (I - S)^T (I - S)(y - E(y)) \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}^T (I - S)^T (I - S) \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(SSE) &= E(\boldsymbol{\varepsilon}^T (I - S)^T (I - S) \boldsymbol{\varepsilon}) \\ &= \text{tr}((I - S)^T (I - S) \sigma^2) \\ &= \sigma^2 \text{tr}(I^T I - I^T S - S^T I + S^T S) \\ &= \sigma^2 (n - 2\text{tr}(S) + \text{tr}(S^T S)) \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \left( \frac{SSE}{(n - 2 \text{tr}(s) + \text{tr}(s^T s))} \right)$$

Jadi  $\left( \frac{SSE}{(n - 2 \text{tr}(s) + \text{tr}(s^T s))} \right)$  merupakan penaksir *unbiased* untuk  $\sigma^2$ .

- Konsisten

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \left( \text{Var} \left( \frac{[(1-\rho\mathbf{W}_1)\mathbf{y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}]^T [(1-\rho\mathbf{W}_1)\mathbf{y}-\mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}]}{n} \right) \right)$$

$$= \text{Var} \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right)$$

$$= E \left( \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right)^T \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right) \right) - \left( E \left( \frac{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}{n} \right) \right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \left( E \left( (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right) - \left( E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right)^2 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Var}(\hat{\sigma}^2)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left( E \left( (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon})^T (\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right) - \left( E(\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}) \right)^2 \right)$$

Karena  $\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}$  merupakan nilai skalar maka dengan  $n$  yang tak hingga akan menghasilkan  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Var}(\hat{\sigma}^2)) \approx 0$ . Sehingga dapat dikatakan bahwa  $\hat{\sigma}^2$  adalah parameter yang konsisten dan *unbiased* secara asimtotik bagi  $\sigma^2$

- Efisien

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{1}{-nE \left( \frac{\partial^2 \ln \tilde{L}}{\partial (\hat{\sigma}^2)^2} \right)}$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq \frac{1}{-n \left( \frac{n}{2\sigma^4} \right)}$$

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) \geq -\frac{2\sigma^4}{n^2}$$

$\text{Var}(\hat{\sigma}^2)$  telah memenuhi CRLB sehingga  $\hat{\sigma}^2$  efisien.