BI-Γ-IDEAL **DALAM** ***Γ-SEMIRING***

SKRIPSI

oleh:
NIRMA WIKA ANGLILA
0710940043-94

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

BI-Γ-IDEAL DALAM *Γ-SEMIRING*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
NIRMA WIKA ANGLILA
0710940043-94

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

BI-Γ-IDEAL DALAM _Γ-SEMIRING_

oleh :
NIRMA WIKA ANGLILA
0710940043-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 2 Februari 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Drs. Bambang Sugandi, MSi**
NIP. 196105161987012001	**NIP. 195905151992031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP.196709071992031001

BI-Γ-IDEAL DALAM *Γ-SEMIRING*

ABSTRAK

Sebuah *Γ-semiring* dibangun oleh 2 himpunan semigrup komutatif terhadap operasi penjumlahan yang dilengkapi dengan satu operasi *ternary* yang memenuhi sifat-sifat tertentu. Dalam skripsi ini dibahas *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*, sifat-sifat dan teorema yang terkait. Selain itu juga dibahas *bi-simple Γ-semiring* dan *minimal bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring* $\mathcal{T}$. Misalkan $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*, *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring* $\mathcal{T}$ dapat dibangun oleh *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$, misalkan $\mathcal{A}$, yang memenuhi $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, dengan definisi bahwa $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} = \{a\gamma t\gamma a | a \in \mathcal{A}, \gamma \in \Gamma \text{ dan } t \in \mathcal{T}\}$. Kemudian, $\mathcal{T}$ disebut *bi-simple Γ-semiring* jika $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$ atau dapat dinyatakan $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring* jika dan hanya jika $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m,\ \forall m \in \mathcal{T}$. Misal B adalah *bi-Γ-ideal* dalam $\mathcal{T}$, B disebut *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika B adalah *bi-simple Γ-semiring*. Dengan kata lain, B disebut *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika B merupakan *bi-Γ-ideal* tunggal dari B.

Kata Kunci: *bi-Γ-ideal, Γ-semiring, bi-simple Γ-semiring, minimal bi-Γ-ideal*.

BI-Γ-IDEAL IN Γ-SEMIRING

ABSTRACT

Γ-semiring is built by two sets of additive commutative semigroup with ternary operation that satisfies some certain properties. In this script will be discussed about bi-Γ-ideal in Γ-semiring, properties and its theorem. Also, will be discussed about bi-simple Γ-semiring and minimal bi-Γ-ideal in Γ-semiring $\mathcal{T}$. Let $\mathcal{T}$ is a Γ-semiring, bi-Γ-ideal in Γ-semiring can be built by $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ is a sub Γ-semiring of $\mathcal{T}$, that satisfies $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. The definition of $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A}$ is $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} = \{a\gamma t\gamma a | a \in \mathcal{A}, \gamma \in \Gamma$ dan $t \in \mathcal{T}\}$. Then, $\mathcal{T}$ is called a bi-simple Γ-semiring if $\mathcal{T}$ is the unique bi-Γ-ideal of $\mathcal{T}$ or can be said that $\mathcal{T}$ is called a bi-simple Γ-semiring if only if $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m$, $\forall m \in \mathcal{T}$. A bi-Γ-ideal B of $\mathcal{T}$ is called minimal bi-Γ-ideal of $\mathcal{T}$ if only if B is a bi-simple Γ-semiring. This means a bi-Γ-ideal B of $\mathcal{T}$ is called minimal bi-Γ-ideal of $\mathcal{T}$ if only if B is the unique bi-Γ-ideal of B.

Keywords: bi-Γ-ideal, Γ-semiring, bi-simple Γ-semiring, minimal bi-Γ-ideal.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, segala puji hanya bagi Allah, Rabb seluruh alam. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada teladan kita Rasulullah Muhammad saw, keluarga, para sahabat dan pengikut mereka yang setia sampai hari kiamat.

Atas izin Allah SWT dan atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul **"*Bi-Γ-Ideal* dalam *Γ-Semiring*".** Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik atas dukungan dari berbagai pihak. Atas terselesaikannya skripsi ini, penulis mengucapkan rasa hormat dan ungkapan terimakasih yang tulus kepada:

1. Dra. Ari Andari, MS dan Drs. Bambang Sugandi, MSi selaku Dosen pembimbing I dan dosen pembimbing II atas kesabaran dan arahan yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dr. Sobri Abusini, MT selaku Ketua Program Studi Matematika sekaligus dosen penasihat akademik yang sudah memberikan banyak nasehat, dukungan dan saran selama penulis menempuh studi dan proses penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Al-Ghofari, MSc selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen penguji yang telah banyak memberi masukan, saran dan kritik untuk skripsi ini.
4. Dr. Agus Suryanto, MSc dan Drs. M. Muslikh, MSi selaku dosen penguji yang telah banyak memberi masukan, saran dan kritik untuk skripsi ini.
5. Segenap dosen Jurusan Matematika FMIPA UNIBRAW atas transfer ilmu yang diberikan dan staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.
6. Mama, bapak, kakak, adek, dan eyang tersayang yang senantiasa berdoa kepada-Nya untuk kesuksesan penulis.

7. Sahabat-sahabat penulis yang selalu menghibur, memotivasi dan memberikan dukungan serta do’a pada penulis, Alvin Eko, Maya Rayung, Gandes Novia, Resthi Nia, Irma Fristiyanti, Miranda Eliyan, Nina Widyanti, Rani Kurnia, Ari Kartika, semua teman-teman kos dan semua teman-teman di jurusan Matematika, khususnya angkatan 2007 dan 2008.
8. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih belum sempurna mengingat keterbatasan kemampuan penulis, untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharap kritik dan saran yang membangun dari semua pihak guna melengkapi penyusunan skripsi ini menjadi lebih baik. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca umumnya.

Malang, 2 Februari 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{C}$	Himpunan bilangan kompleks
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
I	Ideal
$\in$	Elemen (anggota)
$\notin$	Bukan elemen (bukan anggota)
$\subseteq$	Himpunan bagian (subset)
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\neq$	Tidak sama dengan
$f: A \to B$	Pemetaan dari A ke B
$A \Rightarrow B$	Implikasi jika A maka B
$*$	Sebarang operasi biner
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\bullet$	Operasi pergandaan biasa
$(M,*)$	Semigrup
$(P,*)$	Subsemigrup dari $(M,*)$
$(G,*)$	Grup
$(H,*)$	Subgrup dari $(G,*)$
$(T,+,\cdot)$	Semiring
$(E,+,\cdot)$	Subsemiring dari $(T,+,\cdot)$
$(Z,+,\cdot)$	Semiring ternari
$(X,+,\cdot)$	Subsemiring ternari dari $(Z,+,\cdot)$
$(R,+,\cdot)$	Ring
$(U,+,\cdot)$	Subring dari $(R,+,\cdot)$
$\mathcal{T}$	Γ-semiring
$\mathcal{A}$	Sub Γ-semiring dari $\mathcal{T}$
$\exists$	Terdapat
$\exists!$	Terdapat tepat satu
$\cap$	Irisan

$\forall$	Untuk setiap
$A \times B$	Hasil kali kartesius A dan B
$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$	Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan bulat
$\blacksquare$	Akhir dari sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu bidang Matematika yang mengalami perkembangan pesat. Dalam aljabar, dibahas bermacam-macam struktur aljabar yang masing-masing memiliki sifat yang berbeda. Struktur aljabar didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu operasi biner atau lebih. Perbedaan yang mendasar dari setiap struktur aljabar adalah banyaknya operasi pada struktur aljabar tersebut. Salah satu struktur aljabar yang dilengkapi dengan sebuah operasi biner adalah semigrup, sedangkan struktur aljabar yang dilengkapi dengan dua buah operasi biner di antaranya adalah semiring. Kedua struktur aljabar tersebut mempunyai beberapa syarat tertentu.

Di dalam semiring, diperkenalkan beberapa struktur baru yang merupakan generalisasi dari semiring seperti *Γ-semiring*. Konsep *Γ-semiring* diperkenalkan oleh Murali Krishna Rao pada tahun 1995. Karena adanya *bi-ideal* dalam semiring, maka dikembangkan *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada bagian sebelumnya, maka pokok permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana membangun *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*?
2. Bagaimana sifat-sifat, proposisi serta teorema-teorema yang terkait dengan *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk

1. Membangun *bi- Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.
2. Membuktikan sifat-sifat, proposisi serta teorema-teorema yang terkait dengan *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa definisi dan contohnya, serta beberapa teorema dan bukti-buktinya sebagai acuan dalam membahas permasalahan yang akan disampaikan.

2.1 Relasi, Pemetaan dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, elemen-elemen suatu himpunan yang tidak kosong dapat dikaitkan dengan operasi penjumlahan, pergandaan atau beberapa operasi biner lainnya. Berikut ini akan diberikan definisi tentang relasi, pemetaan dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Hasil kali kartesius)

Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut (x, y), dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali kartesius dari A dan B, dinyatakan

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.2 (Relasi)

Misalkan A dan B merupakan himpunan tak kosong, dan misalkan R adalah himpunan bagian *(subset)* dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.3 (Pemetaan)

Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Suatu relasi f dari A ke B disebut suatu pemetaan jika untuk setiap elemen x di A mempunyai kawan tepat satu elemen y di B (y disebut *image* x di bawah relasi f). f adalah pemetaan dari A ke B, dinyatakan dengan

$$f: A \longrightarrow B.$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.4 (Operasi biner)

Suatu pemetaan $*: S \times S \longrightarrow S$

$$(a, b) \longmapsto *\,(a, b) = a * b$$

disebut operasi biner pada himpunan S.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.5 (Sifat operasi biner)

Operasi biner $*: S \times S \longrightarrow S$ pada himpunan S dikatakan

i) Komutatif jika $x * y = y * x, \forall x, y \in S$.

ii) Assosiatif jika $x * (y * z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in S$.
Jika $\circ$ adalah operasi biner yang lain pada S maka operasi biner $*$ dikatakan

iii) Distributif kiri atas $\circ$ jika
$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in S$.

iv) Distributif kanan atas $\circ$ jika
$(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x), \forall x, y, z \in S$.
Jika operasi $*$ adalah distributif kanan dan kiri atas operasi $\circ$ maka operasi $*$ dikatakan sebagai distributif atas $\circ$.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.1.6 (Operasi *n-ary*)

Untuk suatu bilangan bulat positif n, pemetaan $*: S^n \rightarrow S$, dengan $S^n = S \times S \times S \times \ldots \times S$ (n faktor) disebut operasi n-*ary* pada S. Ketika $n = 1$ maka pemetaan $*: S \rightarrow S$ disebut operasi *unary* dan ketika $n = 3$ maka pemetaan $*: S \times S \times S \rightarrow S$ disebut operasi *ternary*.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

2.2 Semigrup

Semigrup merupakan suatu struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tidak kosong M bersama dengan operasi biner assosiatif. Sebuah semigrup berbeda dengan grup. Tidak setiap elemen dari semigrup memiliki invers atau bahkan memiliki elemen identitas.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)

Misalkan M himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi $*$. $(M,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika:

1. $(M,*)$ tertutup : $a * b \in M$, untuk setiap $a, b \in M$.
2. $(M,*)$ assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in M$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.2

Misal $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli, maka $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.

Bukti:

1) $(\mathbb{N}, +)$ tertutup yaitu $a + b \in \mathbb{N}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a + b \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{N}, +)$ berlaku sifat tertutup.
2) $(\mathbb{N}, +)$ assosiatif yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$.
   Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. $(\mathbb{N}, +)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{N}, +)$ memenuhi sifat tertutup dan assosiatif, $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup. ■

Contoh 2.2.3

$(\mathbb{N}, \bullet)$ adalah semigrup. $\mathbb{N}$ adalah himpunan semua bilangan asli.

Bukti:

1) $(\mathbb{N}, \bullet)$ tertutup. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka $a \bullet b = c \in \mathbb{N}$. Jadi $(\mathbb{N}, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.
2) $(\mathbb{N}, \bullet)$ assosiatif. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. Jadi $(\mathbb{N}, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{N}, \bullet)$ memenuhi sifat tertutup dan assosiatif, $(\mathbb{N}, \bullet)$ adalah semigrup. ■

Contoh 2.2.4

Misal $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, maka $(\mathbb{Z},\bullet)$ adalah semigrup.

Bukti:

Akan dibuktikan himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1) $(\mathbb{Z},\bullet)$ tertutup yaitu $a \bullet b \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a \bullet b \in \mathbb{Z}$. Jadi $a \bullet b$ tertutup terhadap bilangan bulat $\mathbb{Z}$.
2) $(\mathbb{Z},\bullet)$ assosiatif yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
   Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$, maka $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$. Jadi untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

Karena $(\mathbb{Z},\bullet)$ memenuhi 1) dan 2), $(\mathbb{Z},\bullet)$ adalah semigrup. ■

Contoh 2.2.5

Misal $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ dan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in A\right\}$. Maka $(M, +)$ adalah semigrup.

Bukti:

Ambil sebarang matriks $P = \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$ dan $R = \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$. $(M, +)$ merupakan semigrup jika memenuhi:

1) Tertutup

   $$P + Q = \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2n + 2n & 2n + 2n \\ 2n + 2n & 2n + 2n \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 2(n + n) & 2(n + n) \\ 2(n + n) & 2(n + n) \end{pmatrix}$$

   Karena $n + n \in \mathbb{N}$ maka $2(n + n) \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, sehingga $P + Q \in M$. Sifat tertutup berlaku pada M.
2) Bersifat assosiatif

   $$(P + Q) + R = \left[\begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2n + 2n & 2n + 2n \\ 2n + 2n & 2n + 2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (2n + 2n) + 2n & (2n + 2n) + 2n \\ (2n + 2n) + 2n & (2n + 2n) + 2n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2n + (2n + 2n) & 2n + (2n + 2n) \\ 2n + (2n + 2n) & 2n + (2n + 2n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2n & 2n \\ 2n & 2n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2n + 2n & 2n + 2n \\ 2n + 2n & 2n + 2n \end{pmatrix} = P + (Q + R)$$

Terbukti bahwa untuk sebarang P, Q, $R \in M$ berlaku $(P + Q) + R = P + (Q + R)$. Jadi, sifat assosiatif berlaku pada M.

Karena $(M, +)$ memenuhi 1) dan 2), maka $(M, +)$ adalah semigrup. ■

Definisi 2.2.6 (Semigrup komutatif)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup. Maka $(M,*)$ disebut semigrup komutatif jika $a * b = b * a, \forall a, b \in M$.

(Golan, 1999)

Contoh 2.2.7

$(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup komutatif.

Bukti:

Dari Contoh 2.2.2 telah diketahui $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan $+b = b + a,\ \forall a, b \in \mathbb{N}$. Karena $\mathbb{N}$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan jadi

$a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

$(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup dan memenuhi sifat komutatif, terbukti bahwa $(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup komutatif. ■

Langkah-langkah pembuktian di atas juga berlaku untuk himpunan $2\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan. Sehingga $(2\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup komutatif.

Contoh 2.2.8

Misal $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. $(\mathbb{Z}, +)$ adalah semigrup komutatif.

Bukti:
Akan dibuktikan himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan memenuhi tertutup, assosiatif dan komutatif.

1) Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}, +)$ tertutup yaitu $a + b \in \mathbb{Z}$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b \in \mathbb{Z}$. Jadi $a + b$ tertutup terhadap bilangan bulat $\mathbb{Z}$.
2) Akan dibuktikan $(\mathbb{Z}, +)$ assosiatif yaitu $(a + b) + c = a + (b + c)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
   Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3) Akan dibuktikan $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$.
   Karena $\mathbb{Z}$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan jadi
   $a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{Z}$.

Karena memenuhi tertutup, komutatif dan assosiatif terbukti bahwa $(\mathbb{Z}, +)$ semigrup komutatif. ■

Definisi 2.2.9 (Semigrup dengan elemen identitas)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan mempunyai elemen identitas e sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in M$. Maka $(M,*)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau $(M,*)$ disebut monoid.

(El-Madhoun, 2007)

Definisi 2.2.10 (Subsemigrup)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan P adalah himpunan bagian dari M. Jika $(P,*)$ merupakan semigrup, maka $(P,*)$ disebut subsemigrup dari $(M,*)$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.11

$(\mathbb{N},\bullet)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{Z},\bullet)$.

Bukti:
Pada Contoh 2.2.3 dan 2.2.4 telah dibuktikan bahwa $(\mathbb{N},\bullet)$ dan $(\mathbb{Z},\bullet)$ adalah semigrup. Karena $\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$. Maka $(\mathbb{N},\bullet)$ adalah subsemigrup dari $(\mathbb{Z},\bullet)$. ■

Contoh 2.2.12

$(2\mathbb{N},\bullet)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{N},\bullet)$.

Bukti:
Telah diketahui $(\mathbb{N},\bullet)$ adalah semigrup. $2\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{N}$. Berdasarkan Definisi 2.2.10, harus dibuktikan bahwa $(2\mathbb{N},\bullet)$ adalah semigrup. $(2\mathbb{N},\bullet)$ merupakan semigrup jika memenuhi tertutup dan assosiatif. Ambil sebarang $2n \in 2\mathbb{N}$, maka

1) $2n \bullet 2n = 4n = 2(2n)$. $(2\mathbb{N},\bullet)$ tertutup terhadap operasi pergandaan.
2) $(2n \bullet 2n) \bullet 2n = 4n \bullet 2n = 8n = 4(2n)$ dan $2n \bullet (2n \bullet 2n) = 2n \bullet 4n = 8n = 4(2n)$. Jadi $(2n \bullet 2n) \bullet 2n = 2n \bullet (2n \bullet 2n)$ untuk setiap $2n \in 2\mathbb{N}$. $(2\mathbb{N},\bullet)$ assosiatif.

Karena $(2\mathbb{N},\bullet)$ tertutup dan assosiatif, terbukti bahwa $(2\mathbb{N},\bullet)$ adalah semigrup. $2\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{N}$ maka $(2\mathbb{N},\bullet)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{N},\bullet)$. ■

Definisi 2.2.13

Misal $(M,\bullet)$ adalah semigrup. A dan B adalah himpunan bagian tak kosong dari M. $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$.

(El-Madhoun, 2007)

Definisi 2.2.14 (Ideal kiri dan kanan dalam semigrup)

Misal $(M,\bullet)$ adalah semigrup. A adalah himpunan bagian tak kosong dari M. A disebut ideal kiri (kanan) dari M jika $MA \subseteq A(AM \subseteq A)$.

Jika A adalah ideal kiri dan ideal kanan, maka A disebut ideal atau ideal dua sisi dari M.

(El-Madhoun, 2007)

Definisi 2.2.15 (Bi-ideal dalam semigrup)

Misal M adalah semigrup. W adalah himpunan bagian tak kosong dari $(M,\bullet)$. W disebut bi-ideal dari M jika dan hanya jika W adalah subsemigrup dari $(M,\bullet)$ dan memenuhi $WMW \subseteq W$.

(El-Madhoun, 2007)

Contoh 2.2.16

$(2\mathbb{N},\bullet)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{N},\bullet)$. Maka $2\mathbb{N}$ adalah bi-ideal dalam semigrup $\mathbb{N}$.

Bukti:
Akan dibuktikan $W = 2\mathbb{N}$ adalah bi-ideal dalam semigrup $M = \mathbb{N}$. Maka harus ditunjukkan bahwa $WMW \subseteq W$ untuk setiap $w \in 2\mathbb{N}$ dan setiap $m \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}$, misal $2n \in 2\mathbb{N}$ dan $2n-1, 2n \in \mathbb{N}$, operasi pergandaan pada WMW akan diberikan pada tabel berikut:

Tabel 2.1 Operasi pergandaan pada WMW

w	m	w	wmw
$2n$	$2n-1$	$2n$	$4n \bullet (2n-1) = 2\big(2n \bullet (2n-1)\big) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$
$2n$	$2n$	$2n$	$8n = 2(4n) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

Diperoleh $WMW \subseteq 2\mathbb{N}$. Diketahui $W = 2\mathbb{N}$ maka $WMW \subseteq W$ untuk setiap $w \in 2\mathbb{N}$ dan setiap $m \in \mathbb{N}$. Karena $WMW \subseteq W$ maka terbukti $W = 2\mathbb{N}$ adalah bi-ideal dalam semigrup $M = \mathbb{N}$. ■

2.3 Grup

Seperti halnya dengan semigrup, grup adalah struktur aljabar yang merupakan himpunan beserta satu operasi biner yang harus memenuhi beberapa aksioma.

Definisi 2.3.1 (Grup)

Misalkan G adalah suatu himpunan tidak kosong dengan sebuah operasi biner $*$. Maka G disebut grup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Tertutup
   Untuk semua $a, b \in G$, maka $a * b$ juga di dalam G.
2. Bersifat assosiatif
   Untuk sebarang $a, b, c \in G$, berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Memiliki elemen identitas
   Terdapat suatu elemen e di G sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$.
4. Memiliki invers
   Untuk setiap $a \in G$ terdapat suatu elemen a^{-1} sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.3.2

Bilangan bulat $\mathbb{Z}$, bilangan rasional $\mathbb{Q}$, bilangan riil $\mathbb{R}$ dan bilangan kompleks $\mathbb{C}$, merupakan grup terhadap operasi penjumlahan, sehingga dapat dinyatakan berturut-turut sebagai $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$. Elemen identitas grup tersebut adalah 0 dan invers dari a adalah $-a$.

Contoh 2.3.3

Misal $G = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$. $(G, +)$ adalah grup.

Bukti:
$(G, +)$ merupakan grup jika memenuhi:

1) Tertutup
   Ambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka
   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$, karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ maka $2a, 2b, 2c, 2d \in \mathbb{Z}$. Jelas $(G, +)$ tertutup.

2) Bersifat assosiatif

Ambil sebarang $e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{Z}$, maka

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$

Terbukti bahwa untuk sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$. Jadi $(G, +)$ assosiatif.

3) Memiliki elemen identitas

Elemen identitas untuk penjumlahan adalah $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka $e + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, sedangkan di pihak lain $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. G memiliki elemen identitas $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Memiliki invers

Setiap elemen di G memiliki invers, misal $(-A) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$, maka $(-A) + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$ dan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (-A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$. G memiliki invers terhadap penjumlahan, yaitu $(-A) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$.

Karena G memenuhi 1), 2), 3) dan 4), maka $(G, +)$ adalah grup. ■

Definisi 2.3.4 (Grup komutatif)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $(G,*)$ disebut sebagai grup komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Definisi 2.3.5 (Subgrup)

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G. $(H,*)$ disebut subgrup dari $(G,*)$ jika $(H,*)$ juga merupakan suatu grup.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Contoh 2.3.6

Misal $H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$. Pada Contoh 2.3.3 telah dibuktikan bahwa $(G, +)$ adalah grup dan $H \subseteq G$. $(H, +)$ adalah subgrup dari $(G, +)$.

Bukti:

Akan dibuktikan $(H, +)$ adalah subgrup dari $(G, +)$. Berdasarkan Definisi 2.3.5, harus dibuktikan bahwa $(H, +)$ merupakan suatu grup.

$(H, +)$ merupakan grup jika memenuhi:

1) Tertutup

   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, maka

   $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Karena $2a, 2b \in \mathbb{Z}$ maka H tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2) Bersifat assosiatif

   Ambil sebarang $e, f, i, j \in \mathbb{Z}$, maka

   $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $= \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$. H assosiatif terhadap operasi penjumlahan.

3) Memiliki elemen identitas

Elemen identitas untuk penjumlahan adalah $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka $e + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, sedangkan di pihak lain $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Jelas H memiliki elemen identitas $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4) Memiliki invers

Setiap elemen di H memiliki invers, misal $(-A) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, maka $(-A) + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$, dan $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-A) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e$. H memiliki invers terhadap penjumlahan, yaitu $(-A) = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Karena memenuhi 1), 2), 3) dan 4) maka $(H, +)$ adalah grup. Telah diketahui bahwa $H \subseteq G$ dan $(G, +)$ adalah grup, maka H adalah subgrup dari G. ■

2.4 Ring

Definisi 2.4.1 (Ring)

Misalkan R adalah himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan, atau dinotasikan dengan $(R, +, \bullet)$. $(R, +, \bullet)$ disebut sebagai ring jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut :

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.
2. $(R, \bullet)$ merupakan semigrup.
3. $(R, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku: $a \bullet (b + c) = (a \bullet b) + (a \bullet c)$ dan $(b + c) \bullet a = (b \bullet a) + (c \bullet a)$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Contoh 2.4.2

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan ring.

Bukti:
Akan dibuktikan himpunan $\mathbb{Z}$ bersama dengan operasi penjumlahan dan pergandaan memenuhi aksioma-aksioma berikut:
(i) $(\mathbb{Z}, +)$ harus memenuhi

- Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$ sehingga $a + b = c \in \mathbb{Z}$.
  Jadi $\mathbb{Z}$ tertutup.
- $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$.
- Elemen identitas adalah 0.
- Memiliki invers yaitu $-x$ yang juga merupakan bilangan bulat.
- Komutatif, yaitu $a + b = b + a$.

(ii) $(\mathbb{Z}, \bullet)$ merupakan semigrup

- Tertutup
- Assosiatif, yaitu $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$

(iii) Distributif, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ berlaku
$a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$

Jadi, $\mathbb{Z}$ merupakan ring. ■

Contoh 2.4.3

Misal $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$, maka $\mathbb{Z}_6$ adalah ring.

Bukti:
$\mathbb{Z}_6$ adalah ring jika memenuhi:
1) $(\mathbb{Z}_6, +)$ grup komutatif.
Himpunan bilangan bulat modulo 6 terhadap operasi penjumlahan didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan pada Z_6

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

i) Jelas $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, sebab untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_6$.

ii) Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $\mathbb{Z}_6$. Misal diambil $a = \bar{1}$, $b = \bar{2}$ dan $c = \bar{3}$ maka $(\bar{1} + \bar{2}) + \bar{3} = \bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$, sedangkan di pihak lain $\bar{1} + (\bar{2} + \bar{3}) = \bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$.
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ akan diperoleh $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi pada $(\mathbb{Z}_6, +)$ berlaku sifat assosiatif.

iii) Elemen identitas $\mathbb{Z}_6$ untuk penjumlahan adalah $\bar{0}$, karena $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_6$.

iv) Berdasarkan Tabel 2.1, diperoleh bahwa $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{1} + \bar{5} = \bar{0}$, $\bar{2} + \bar{4} = \bar{0}$, $\bar{3} + \bar{3} = \bar{0}$, $\bar{4} + \bar{2} = \bar{0}$, $\bar{5} + \bar{1} = \bar{0}$ berarti $(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$, $(\bar{1})^{-1} = \bar{5}$, $(\bar{2})^{-1} = \bar{4}$, $(\bar{3})^{-1} = \bar{3}$, $(\bar{4})^{-1} = \bar{2}, \left(\bar{5}\right)^{-1} = \bar{1}$. Jadi setiap elemen di $\mathbb{Z}_6$ mempunyai invers.

v) Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_6$. Misal diambil $a = \bar{1}$ dan $b = \bar{3}$ maka $\bar{1} + \bar{3} = \bar{4}$, sedangkan di pihak lain $\bar{3} + \bar{1} = \bar{4}$.
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b \in Z_6$ akan diperoleh $a + b = b + a$. Jadi pada $\mathbb{Z}_6$ berlaku sifat komutatif.

2) $(\mathbb{Z}_6, \bullet)$ semigrup.

Himpunan bilangan bulat modulo 6 terhadap operasi pergandaan didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.3 Operasi pergandaan pada Z_6

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

i) Berlaku $a \bullet b \in \mathbb{Z}_6$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_6$. $\mathbb{Z}_6$ tertutup terhadap operasi pergandaan.

ii) Berlaku sifat assosiatif pada $\mathbb{Z}_6$. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ akan diperoleh $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

3) $\mathbb{Z}_6$ memenuhi hukum distributif kiri dan kanan.

Akan ditunjukkan berlaku sifat distributif pada $\mathbb{Z}_6$. Misal diambil $a = \bar{1}, b = \bar{2}$ dan $c = \bar{0}$ maka

i) $a \bullet (b + c) = \bar{1} \bullet (\bar{2} + \bar{0}) = \bar{1} \bullet \bar{2} = \bar{2}$, sedangkan di pihak lain $a \bullet b + a \bullet c = \bar{1} \bullet \bar{2} + \bar{1} \bullet \bar{0} = \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$.

ii) $(b + c) \bullet a = (\bar{2} + \bar{0}) \bullet \bar{1} = \bar{2} \bullet \bar{1} = \bar{2}$, sedangkan di pihak lain $b \bullet a + c \bullet a = \bar{2} \bullet \bar{1} + \bar{0} \bullet \bar{1} = \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$.

Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_6$ akan diperoleh $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$.

Karena $\mathbb{Z}_6$ memenuhi 1), 2) dan 3) maka $\mathbb{Z}_6$ adalah ring. ■

Definisi 2.4.4 (Ring komutatif)

Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring. $(R, +, \bullet)$ disebut ring komutatif jika berlaku sifat $a \bullet b = b \bullet a$ untuk setiap $a, b \in R$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Definisi 2.4.5 (Ring komutatif dengan elemen Identitas)

Misalkan $(R,+,\bullet)$ adalah ring komutatif. $(R,+,\bullet)$ dikatakan mempunyai elemen identitas jika terdapat $e \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $e \bullet a = a \bullet e = a$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Definisi 2.4.6 (Subring)

Misalkan $(R,+,\bullet)$ adalah suatu ring, dan U himpunan bagian tidak kosong dari R. U disebut subring dari R jika $(U,+,\bullet)$ merupakan suatu ring.

(Bhattacharya, dkk., 1994)

Definisi 2.4.7 (Ideal)

Himpunan bagian tak kosong I pada ring R disebut ideal kanan (kiri) pada R jika :

i) $\forall a, b \in I \Rightarrow a - b \in I$

ii) $\forall a \in I, \forall r \in R \Rightarrow ar \in I (ra \in I)$

Jika I ideal kiri dan ideal kanan pada R ($ar \in I$ dan $ra \in I$) maka I disebut *two-sided ideal*.

(Bhattacharya, 1994)

Contoh 2.4.8

Misal $\mathbb{Z}$ adalah himpunan semua bilangan bulat dan $(\mathbb{Z},+,\bullet)$ adalah ring. Misal $M = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$, maka jelas bahwa $M \subseteq \mathbb{Z}$. M adalah ideal dari $\mathbb{Z}$.

Bukti:

Misal $a = 2p, b = 2q$ dengan $a, b \in M, p, q \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$

1) $a - b = 2p - 2q = 2(p - q)$
   Karena $p, q \in \mathbb{Z}$ maka $p - q \in \mathbb{Z}$, sehingga diperoleh $2(p - q) \in M$. Jadi, untuk setiap $a, b \in M$ berlaku $a - b \in M$.

2) $ar = (2p)r = 2(pr)$, sedangkan di pihak lain $ra = r(2p) = (r2p) = (2rp) = (2pr) = 2(pr)$.

Karena $p \in \mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ maka $pr \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh $2(pr) \in M$. Jadi, untuk setiap $a \in M$ dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku $ar \in M$ dan $ra \in M$.

Karena memenuhi 1) dan 2), maka M adalah ideal dari ring $\mathbb{Z}$. ■

Teorema 2.4.9

Jika $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ adalah keluarga ideal kanan (kiri) dari ring R maka $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ juga merupakan ideal kanan (kiri).

(Bhattacharya, 1994)

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ dan $r \in R$. Akan dibuktikan $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ ideal kanan (kiri) dalam ring R. Untuk membuktikan bahwa $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ merupakan ideal kanan (kiri) maka harus ditunjukkan

$a - b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ dan $ar \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ atau $ra \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$.

1) Untuk sebarang $a, b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ maka $a, b \in I_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Karena I_i adalah ideal untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ maka $a - b \in I_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Akibatnya $a - b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$. Jadi, terbukti $a - b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$.
2) Untuk sebarang $a \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ dan $r \in R$. $a \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ maka $a \in I_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Karena I_i adalah ideal kanan (kiri) akibatnya $ar \in I_i$ atau $ra \in I_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Sehingga $ar \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ atau $ra \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$.

Karena $a - b \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ dan $ar \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ atau $ra \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ maka terbukti bahwa $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} I_i$ merupakan ideal kanan (kiri) pada ring R. ■

2.5 Semiring

Definisi 2.5.1 (Semiring)

T disebut suatu semiring jika T bukan himpunan kosong dan terdapat dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan sedemikian sehingga

1. $(T, +)$ merupakan suatu semigrup komutatif,
2. $(T, \bullet)$ merupakan suatu semigrup,
3. Berlaku hukum distributif, yaitu $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$ dan $(y + z) \bullet x = y \bullet x + z \bullet x$, untuk setiap $x, y, z \in T$.

(Golan, 1999)

R disebut ring jika memenuhi $(R, +)$ grup komutatif, $(R,\bullet)$ semigrup dan sifat distributif kiri dan kanan. Ketika $(R, +)$ memenuhi grup komutatif (tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas, memiliki invers dan komutatif) maka $(R, +)$ memenuhi semigrup komutatif (tertutup, assosiatif dan komutatif). Jadi, R juga merupakan semiring. Dengan kata lain, tiap ring adalah semiring.

Contoh 2.5.2

Himpunan $T = (\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ merupakan suatu semiring.

Bukti:
Akan dibuktikan bahwa $T = (\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ adalah semiring.
(1) $(\mathbb{Z}^+, +)$ semigrup komutatif. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ maka
 (i) $a + b \in \mathbb{Z}^+$, $(\mathbb{Z}^+, +)$ berlaku sifat tertutup.
 (ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(\mathbb{Z}^+, +)$ berlaku sifat assosiatif.
 (iii) $a + b = b + a$, jadi pada $(\mathbb{Z}^+, +)$ berlaku sifat komutatif.

(2) $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ semigrup. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ maka
 (i) $a \bullet b \in \mathbb{Z}^+$, $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ berlaku sifat tertutup
 (ii) $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$, $(\mathbb{Z}^+, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(3) $\mathbb{Z}^+$ memenuhi hukum distributif, yaitu
 Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, berlaku
 $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$.
Dari (1), (2), dan (3), maka terbukti bahwa $T = (\mathbb{Z}^+, +, \bullet)$ merupakan semiring. ■

Definisi 2.5.3 (Subsemiring)

Misalkan E adalah himpunan bagian tidak kosong dari semiring T.
E dikatakan subsemiring dari T jika $(E, +, \bullet)$ adalah semiring.
(Kandasamy, 2002)

Definisi 2.5.4 (Ideal kiri dan ideal kanan semiring)

Misal $(T, +, \bullet)$ adalah semiring. Himpunan bagian tak kosong A dari T disebut ideal kiri (kanan) dari T jika A adalah subsemigrup dari $(T, +)$ dan memenuhi $TA \subseteq A (AT \subseteq A)$.

Jika A adalah ideal kiri dan ideal kanan, maka A disebut ideal atau ideal dua sisi dari T.

(El-Madhoun, 2007)

Definisi 2.5.5

Misal T adalah semiring. $X, Y \neq \emptyset$ dan $X, Y \subseteq T$ maka $XY = \{xy | x \in X, y \in Y\}$. $\{x\}Y$ dan $\langle\{x\}Y\rangle$ berarti xY dan $\langle xY\rangle$.

(Donges, 1994)

Definisi 2.5.6 (Bi-ideal dalam semiring)

Misal T adalah semiring dan $W \neq \emptyset$ adalah himpunan bagian dari semiring $(T, +, \bullet)$. W disebut bi-ideal dari T jika dan hanya jika W adalah subsemiring dari $(T, +, \bullet)$ yang memenuhi $WTW \subseteq W$.

(Donges, 1994)

Contoh 2.5.7

Misal $\mathbb{Z}_6$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 6. $\mathbb{Z}_6$ adalah semiring. Misal diambil $W = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, himpunan tak kosong dari $\mathbb{Z}_6$. Maka W adalah bi-ideal dari $\mathbb{Z}_6$.

Bukti:

Akan ditunjukkan W adalah subsemiring dari $\mathbb{Z}_6$ yang memenuhi $WTW \subseteq W$.

1) W dikatakan subsemiring dari $\mathbb{Z}_6$ jika W adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_6$ dan W merupakan semiring. W merupakan himpunan tak kosong dari $\mathbb{Z}_6$. Harus dibuktikan W adalah semiring. W adalah semiring jika memenuhi:

   a) $(W, +)$ semigrup komutatif.

   Himpunan W terhadap operasi penjumlahan didefinisikan pada tabel berikut:

   Tabel 2.4 Operasi penjumlahan pada *W*

$+$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

i) Sifat tertutup berlaku pada $(W, +)$, sebab untuk setiap $a, b \in W$ berlaku $a + b \in W$.

ii) Sifat assosiatif berlaku pada W karena jika diambil $a = \bar{0}$, $b = \bar{0}$ dan $c = \bar{3}$ maka $(\bar{0} + \bar{0}) + \bar{3} = \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$, sedangkan di pihak lain $\bar{0} + (\bar{0} + \bar{3}) = \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$.
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in W$ akan diperoleh $(a + b) + c = a + (b + c)$.

iii) Sifat komutatif berlaku pada W karena jika diambil $a = \bar{0}$ dan $b = \bar{3}$ maka $\bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$ dan $\bar{3} + \bar{0} = \bar{3}$.
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b \in W$ akan diperoleh $a + b = b + a$.

b) $(W, \bullet)$ semigrup.

Himpunan W terhadap operasi pergandaan didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 2.5 Operasi pergandaan pada W

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$

i) Berlaku $a \bullet b \in W, \forall a, b \in W$.

ii) Berlaku sifat assosiatif pada W karena untuk setiap $a, b, c \in W$ berlaku $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.

c) W memenuhi hukum distributif kiri dan kanan.

Akan ditunjukkan berlaku sifat distributif pada W. Misal diambil $a = \bar{3}, b = \bar{3}$ dan $c = \bar{0}$ maka

i) $a \bullet (b + c) = \bar{3} \bullet (\bar{3} + \bar{0}) = \bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{3}$, sedangkan di pihak lain $a \bullet b + a \bullet c = \bar{3} \bullet \bar{3} + \bar{3} \bullet \bar{0} = \bar{3} + \bar{0} = \bar{3}$.

ii) $(b + c) \bullet a = (\bar{3} + \bar{0}) \bullet \bar{3} = \bar{3} \bullet \bar{3} = \bar{3}$, sedangkan di pihak lain $b \bullet a + c \bullet a = \bar{3} \bullet \bar{3} + \bar{0} \bullet \bar{3} = \bar{3} + \bar{0} = \bar{3}$.
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in W$ akan diperoleh $a \bullet (b + c) = a \bullet b + a \bullet c$ dan $(b + c) \bullet a = b \bullet a + c \bullet a$.

Karena W memenuhi a), b) dan c) maka W adalah semiring.

Karena W adalah himpunan bagian tak kosong dari $T = \mathbb{Z}_6$ dan W merupakan semiring, jadi terbukti bahwa W adalah subsemiring dari $T = \mathbb{Z}_6$. ■

2) Akan dibuktikan W memenuhi $WTW \subseteq W$. Misal $w \in W$ dan $t \in T$. $WTW = \{wtw | w \in W \text{ dan } t \in T\}$ akan ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 2.6 Operasi pergandaan pada WTW

w	t	w	wtw
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{5}$	$\bar{3}$	$\bar{3}$

Dari Tabel 2.6 diperoleh $WTW = \{\bar{0}, \bar{3}\}$. Karena $W = \{\bar{0}, \bar{3}\}$, terbukti bahwa W memenuhi $WTW \subseteq W$. ∎

Karena W memenuhi 1) dan 2) maka terbukti bahwa W adalah bi-ideal dari $T = \mathbb{Z}_6$. ∎

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi, lemma, teorema, akibat, proposisi dan contoh yang berkaitan dengan *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.

3.1 *Γ-Semiring*

Γ-semiring adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan operasi *ternary*. Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan *Γ-semiring*.

Definisi 3.1.1 (*Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ dan Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. Maka $\mathcal{T}$ disebut *Γ-semiring* jika terdapat pemetaan $\mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (memetakan $(a, \alpha, b) \mapsto (a\alpha b)$) yang memenuhi syarat-syarat berikut:

1) $a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$, (Distributif kiri)
2) $(a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$, (Distributif kanan)
3) $a(\alpha + \beta)b = a\alpha b + a\beta b$, (Distributif kiri dan kanan)
4) $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$, (Assosiatif)

Untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{T}$ dan setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Contoh 3.1.2

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ dan $\Gamma = 2\mathbb{N}$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. Terdapat suatu pemetaan:

$$\bullet: \mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$
$$(a, \alpha, b) \mapsto (a\alpha b)$$

untuk setiap $a, b \in \mathcal{T}$ dan $\alpha \in \Gamma$. Misal $2n - 1, 2n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ dan $2n \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ maka pergandaan $a\alpha b$ didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Operasi pergandaan pada $a\alpha b$

a	α	b	$a\alpha b$
$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$(2n-1)\bullet 2n\bullet(2n-1)=$ $2\big(n\bullet(2n-1)\bullet(2n-1)\big)\in 2\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$
$2n-1$	$2n$	$2n$	$(2n-1)\bullet 4n=$ $2\big(2n\bullet(2n-1)\big)\in 2\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$
$2n$	$2n$	$2n-1$	$4n\bullet(2n-1)=$ $2\big(2n\bullet(2n-1)\big)\in 2\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$
$2n$	$2n$	$2n$	$8n=2(4n)\in 2\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$

Dari Tabel 3.1 diperoleh hasil pergandaan $a\alpha b$ adalah anggota dari $2\mathbb{N}=\mathcal{T}$, berlaku untuk setiap $a,b\in\mathcal{T}$ dan $\alpha\in\Gamma$. Maka $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring*.

Bukti:
Misal diambil sebarang $\alpha=2a,\beta=2b$ maka

1) $a\alpha(b+c)=a\bullet 2a\bullet(b+c)=2a^2(b+c)$
   $a\alpha b+a\alpha c=a\bullet 2a\bullet b+a\bullet 2a\bullet c=2a^2b+2a^2c$
   $=2a^2(b+c)$
   Jadi, untuk setiap $a,b,c\in\mathbb{N}$ dan $\alpha\in 2\mathbb{N}$ berlaku $a\alpha(b+c)=a\alpha b+a\alpha c$.
2) $(a+b)\alpha c=(a+b)\bullet 2a\bullet c=(a+b)2ac=2ac(a+b)$
   $a\alpha c+b\alpha c=a\bullet 2a\bullet c+b\bullet 2a\bullet c=2a^2c+2abc$
   $=2ac(a+b)$
   Jadi, untuk setiap $a,b,c\in\mathbb{N}$ dan $\alpha\in 2\mathbb{N}$ berlaku $(a+b)\alpha c=a\alpha c+b\alpha c$.
3) $a(\alpha+\beta)b=a\bullet(2a+2b)\bullet b=(2a^2+2ab)\bullet b$
   $=2a^2b+2ab^2=2ab(a+b)$
   $a\alpha b+a\beta b=a\bullet 2a\bullet b+a\bullet 2b\bullet b=2a^2b+2ab^2$
   $=2ab(a+b)$
   Jadi, untuk setiap $a,b\in\mathbb{N}$ dan $\alpha,\beta\in 2\mathbb{N}$ berlaku $a(\alpha+\beta)b=a\alpha b+a\beta b$.
4) $a\alpha(b\beta c)=a\bullet 2a\bullet(b\bullet 2b\bullet c)=2a^2\bullet(2b^2c)$
   $=2a^2\bullet 2b^2c=4a^2b^2c$
   $(a\alpha b)\beta c=(a\bullet 2a\bullet b)\bullet 2b\bullet c=(2a^2b)\bullet 2bc=2a^2b\bullet 2bc$
   $=2a^2\bullet 2b^2c=4a^2b^2c$

Jadi, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ dan $\alpha, \beta \in 2\mathbb{N}$ berlaku $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$.

Berdasarkan Definisi 3.1.1, terbukti bahwa $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring*. ■

Contoh 3.1.3

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ dan $\Gamma = \mathbb{N}$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. Terdapat suatu pemetaan:

$$\bullet : \mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$
$$(a, \alpha, b) \mapsto (a\alpha b)$$

untuk setiap $a, b \in \mathcal{T}$ dan $\alpha \in \Gamma$. Misal untuk $-z, 0, z \in \mathbb{Z},\ \forall z \in \mathbb{Z}$ dan $2n - 1, 2n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ maka pergandaan $a\alpha b$ didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 3.2 Operasi pergandaan pada $a\alpha b$

a	α	b	$a\alpha b$
$-z$	$2n-1$	$-z$	z
$-z$	$2n-1$	0	0
$-z$	$2n-1$	z	$-z$
$-z$	$2n$	$-z$	z
$-z$	$2n$	0	0
$-z$	$2n$	z	$-z$
0	$2n-1$	$-z$	0
0	$2n-1$	0	0
0	$2n-1$	z	0
0	$2n$	$-z$	0
0	$2n$	0	0
0	$2n$	z	0
z	$2n-1$	$-z$	$-z$
z	$2n-1$	0	0
z	$2n-1$	z	z
z	$2n$	$-z$	$-z$
z	$2n$	0	0
z	$2n$	z	z

Dari Tabel 3.2 diperoleh hasil pergandaan $a\alpha b$ adalah $-z, 0, z$ dan $-z\,, 0\,, z\ \in \mathbb{Z}$, untuk setiap $a\,,\ b\ \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha \in \mathbb{N}$. Maka $\mathbb{Z}$ adalah Γ-*semiring*.

Bukti:
Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ maka
1) $a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$ (karena dalam $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$ berlaku hukum distributif kiri).
2) $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$ (karena dalam $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$ berlaku hukum distributif kanan).
3) $a(\alpha+\beta)b = (a\alpha + a\beta)b$ (karena dalam $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$ berlaku hukum distributif kiri), selanjutnya $(a\alpha + a\beta)b = a\alpha b + a\beta b$ (karena dalam $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$ berlaku hukum distributif kanan).
4) $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$ (karena dalam $\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{N}$ berlaku assosiatif).

Karena $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ dengan $\Gamma = \mathbb{N}$ memenuhi aksioma 1), 2), 3) dan 4) maka terbukti bahwa $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ adalah Γ-*semiring*. ■

Contoh 3.1.4

Misal $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 4. $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ dan $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dalam $\mathbb{Z}_4$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. $\mathcal{T}$ dan Γ memenuhi pemetaan:

$$\bullet : \mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$
$$(a, \alpha, b) \mapsto (a\alpha b)$$

$\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring*.

Bukti:
Akan dibuktikan $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. Operasi penjumlahan pada $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 3.3 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\mathbb{Z}_4$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan jika memenuhi:

1) $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup. Dari Tabel 3.3 diperoleh $a + b \in \mathbb{Z}_4$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$. $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi penjumlahan.
2) $(\mathbb{Z}_4, +)$ memenuhi sifat assosiatif. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi pada $(\mathbb{Z}_4, +)$ berlaku sifat assosiatif.
3) $(\mathbb{Z}_4, +)$ komutatif. Ambil sebarang $a,\ b \in \mathbb{Z}_4$, maka $a + b = b + a$. Jadi pada $(\mathbb{Z}_4, +)$ berlaku sifat komutatif.

Karena $(\mathbb{Z}_4, +)$ memenuhi 1), 2) dan 3) maka $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah semigrup komutatif.

Akan dibuktikan $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. Operasi penjumlahan pada $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ ditunjukkan pada tabel berikut:

Tabel 3.4 Operasi penjumlahan pada $\boldsymbol{\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}}$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

$\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan jika memenuhi:

1) $(\Gamma, +)$ tertutup. Dari Tabel 3.4 diperoleh $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}, \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$ dan $\bar{2} + \bar{2} = \bar{0}$. Jelas bahwa $(\Gamma, +)$ tertutup.
2) $(\Gamma, +)$ memenuhi sifat assosiatif. Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada Γ. Misal diambil $\alpha = \bar{0}, \beta = \bar{2}$ dan $\gamma = \bar{0}$ maka $(\bar{0} + \bar{2}) + \bar{0} = \bar{2} + \bar{0} = \bar{2}$ dan $\bar{0} + (\bar{2} + \bar{0}) = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$.

Dengan cara yang sama akan diperoleh $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ untuk setiap $\alpha,\beta,\gamma\in\Gamma$. Jadi pada $(\Gamma,+)$ berlaku sifat assosiatif.

3) $(\Gamma,+)$ komutatif. Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $(\Gamma,+)$. Misal diambil $a=\overline{0}$ dan $b=\overline{2}$ maka $\overline{0}+\overline{2}=\overline{2}$, sedangkan di pihak lain $\overline{2}+\overline{0}=\overline{2}$. Dengan cara yang sama, untuk setiap $a,b\in\Gamma$ akan diperoleh $a+b=b+a$. Jadi pada $(\Gamma,+)$ berlaku sifat komutatif.

Karena $(\Gamma,+)$ memenuhi 1), 2) dan 3) maka $(\Gamma,+)$ adalah semigrup komutatif.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\mathcal{T}$ dan Γ memenuhi Pemetaan $\bullet: \mathcal{T}\times\Gamma\times\mathcal{T}\to\mathcal{T}$. $\bullet:\mathbb{Z}_4\times\Gamma\times\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_4$ (memetakan $(a,\alpha,b)\longmapsto a\alpha b$) dengan $a,b\in\mathbb{Z}_4$ dan $\alpha\in\Gamma$. Pergandaan $\overline{0}\in\Gamma$ dan $\forall a,b\in\mathbb{Z}_4$ menghasilkan $\overline{0}$. Sedangkan pergandaan $\overline{2}\in\Gamma$ dan $\forall a,b\in\mathbb{Z}_4$ menghasilkan $\overline{0}$ dan $\overline{2}$. Hal ini dikarenakan pergandaan $\overline{2}\in\Gamma$ dan $\forall a,b\in\mathbb{Z}_4$ menghasilkan bilangan-bilangan genap (bilangan-bilangan kelipatan 2) yang jika dinyatakan dalam bilangan-bilangan bulat modulo 4 ($\mathbb{Z}_4$) adalah $\overline{0}$ dan $\overline{2}$. Jelas bahwa $\mathcal{T}$ dan Γ memenuhi pemetaan $\bullet:\mathbb{Z}_4\times\Gamma\times\mathbb{Z}_4\to\mathbb{Z}_4$ sebab untuk setiap $a,b\in\mathbb{Z}_4$ dan $\alpha\in\Gamma$ berlaku $a\alpha b=\{\overline{0},\overline{2}\}$, $a\alpha b\subseteq\mathbb{Z}_4$.

Terakhir, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{T}=\mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma=\{\overline{0},\overline{2}\}$ adalah Γ-*semiring*. $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring* jika memenuhi:

Misal diambil $a=\overline{0}, b=\overline{1}, c=\overline{2}$ dan $\alpha=\overline{0},\beta=\overline{2}$ maka

1) $a\alpha(b+c)=\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet(\overline{1}+\overline{2})=\overline{0}\bullet\overline{3}=\overline{0}$
   $a\alpha b+a\alpha c=\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet\overline{1}+\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet\overline{2}=\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $a,b,c\in\mathcal{T}$ dan $\alpha\in\Gamma$ akan diperoleh $a\alpha(b+c)=a\alpha b+a\alpha c$.
2) $(a+b)\alpha c=(\overline{0}+\overline{1})\bullet\overline{0}\bullet\overline{2}=\overline{1}\bullet\overline{0}=\overline{0}$
   $a\alpha c+b\alpha c=\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet\overline{2}+\overline{1}\bullet\overline{0}\bullet\overline{2}=\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $a,b,c\in\mathcal{T}$ dan $\alpha\in\Gamma$ akan diperoleh $(a+b)\alpha c=a\alpha c+b\alpha c$.
3) $a(\alpha+\beta)b=\overline{0}\bullet(\overline{0}+\overline{2})\bullet\overline{1}=\overline{0}\bullet(\overline{2})\bullet\overline{1}=\overline{0}\bullet\overline{2}\bullet\overline{1}=\overline{0}$
   $a\alpha b+a\beta b=\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet\overline{1}+\overline{0}\bullet\overline{2}\bullet\overline{1}=\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$
   Dengan cara yang sama, untuk setiap $a,b\in\mathcal{T}$ dan $\alpha,\beta\in\Gamma$ akan diperoleh $a(\alpha+\beta)b=a\alpha b+a\beta b$.
4) $a\alpha(b\beta c)=\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet(\overline{1}\bullet\overline{2}\bullet\overline{2})=\overline{0}\bullet(\overline{0})=\overline{0}\bullet\overline{0}=\overline{0}$
   $(a\alpha b)\beta c=(\overline{0}\bullet\overline{0}\bullet\overline{1})\bullet\overline{2}\bullet\overline{2}=(\overline{0})\bullet\overline{0}=\overline{0}\bullet\overline{0}=\overline{0}$

Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{T}$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$ akan diperoleh $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$.

Karena $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ memenuhi aksioma-aksioma 1), 2), 3) dan 4) maka $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah *Γ-semiring*. ■

3.2 *Sub Γ-Semiring*

Definisi 3.2.1 (*Sub Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. Himpunan tak kosong $\mathcal{A}$ dari $\mathcal{T}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ jika $(\mathcal{A}, +)$ adalah subsemigrup dari $(\mathcal{T}, +)$ yang memenuhi $a\gamma b \in \mathcal{A}, \forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$.

Contoh 3.2.2

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ dengan $\Gamma = 2\mathbb{N}$ adalah *Γ-semiring*. Jika $\mathcal{A} = 2\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ dan $(\mathcal{A}, +)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathcal{T}, +)$. Maka $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

Bukti:

Harus dibuktikan bahwa $\mathcal{A}$ memenuhi $a\gamma b \in \mathcal{A}, \forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$. Diperoleh $a\gamma b = 2n \bullet 2n \bullet 2n = 8n = 2(4n) \in 2\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dengan operasi pergandaan biasa. Dalam hal ini, dimisalkan $2n \in 2\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{A} = 2\mathbb{N}$ maka $a\gamma b \in \mathcal{A}$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$. Karena $(\mathcal{A}, +)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathcal{T}, +)$ dan memenuhi $a\gamma b \in \mathcal{A}, \forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$ maka terbukti $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. ■

Contoh 3.2.3

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ $(\Gamma = 2\mathbb{N})$ adalah *Γ-semiring*. $\mathcal{A} = 4\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ dan $(\mathcal{A}, +)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathcal{T}, +)$. Maka $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

Bukti:
Harus dibuktikan $\mathcal{A}$ memenuhi $a\gamma b \in \mathcal{A}, \forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$. Misal $2n \in 2\mathbb{N}$ dan $4n \in 4\mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ maka $4n \bullet 2n \bullet 4n = 32n = 4(8n) \in 4\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{A} = 4\mathbb{N}$ maka $a\gamma b \in \mathcal{A}, \forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$. Terbukti bahwa $a\gamma b \in \mathcal{A}$, $\forall a, b \in \mathcal{A}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$, jadi $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. ■

3.3 Ideal dalam *Γ-Semiring*

Definisi 3.3.1 (Ideal dalam *Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. $(I, +)$ adalah subsemigrup dari $\mathcal{T}$. I disebut ideal dalam $\mathcal{T}$ jika memenuhi $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$. Definisi dari $I\Gamma\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}\Gamma I$ adalah $I\Gamma\mathcal{T} = \{x\gamma r | x \in I, \gamma \in \Gamma, r \in \mathcal{T}\}$ sedangkan $\mathcal{T}\Gamma I = \{r\gamma x | r \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, x \in I\}$.

Contoh 3.3.2

$I = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah ideal dari *Γ-semiring* $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2$ $(\Gamma = \mathbb{N})$.

Bukti:

Tabel 3.5 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_2$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

Tabel 3.6 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_2$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2$ adalah Γ-*semiring*. $\mathbb{Z}_2$ merupakan Γ-*semiring* jika memenuhi:

1) $(\mathbb{Z}_2, +)$ semigrup komutatif.
   i) Dari Tabel 3.5 jelas $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi penjumlahan, sebab untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}_2$.
   ii) Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $\mathbb{Z}_2$. Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi sifat assosiatif berlaku pada $(\mathbb{Z}_2, +)$.
   iii) Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $\mathbb{Z}_2$. Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_2$ maka $a + b = b + a$. Jadi sifat komutatif berlaku pada $(\mathbb{Z}_2, +)$.

Karena $(\mathbb{Z}_2, +)$ memenuhi sifat tertutup, assosiatif dan komutatif maka $\mathbb{Z}_2$ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan.

2) $\mathbb{Z}_2$ memenuhi pemetaan $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ dan beberapa aksioma.
   Pemetaan dengan operasi pergandaan $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ $(a, \gamma, b) \longmapsto (a\gamma b)$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$ dan setiap $\gamma \in \Gamma$ diberikan pada tabel berikut:

   Tabel 3.7 Operasi pergandaan pada $a\gamma b$

a	γ	b	$a\gamma b$
$\bar{0}$	$2n-1$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$2n-1$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$2n$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$2n$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$2n-1$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$2n-1$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$2n$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$2n$	$\bar{1}$	$\bar{0}$

   Jadi $2n - 1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ (bilangan ganjil dalam $\mathbb{N}$) dan $2n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$ (bilangan genap dalam $\mathbb{N}$) diperoleh hasil pemetaan $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, yakni $\{\bar{0}, \bar{1}\} \subseteq \mathbb{Z}_2$, maka $\mathbb{Z}_2$ memenuhi pemetaan.

Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}_2$ adalah *Γ-semiring* karena terdapat pemetaan $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

Misal diambil $a = \bar{0}, b = \bar{0}, c = \bar{1}$ dan $\alpha = 1, \beta = 2$ maka

i) $a\alpha(b+c) = \bar{0} \bullet 1 \bullet (\bar{0} + \bar{1}) = \bar{0} \bullet \bar{1} = \bar{0}$
$a\alpha b + a\alpha c = \bar{0} \bullet 1 \bullet \bar{0} + \bar{0} \bullet 1 \bullet \bar{1} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ dan $\alpha \in \mathbb{N}$ akan diperoleh $a\alpha(b+c) = a\alpha b + a\alpha c$.

ii) $(a+b)\alpha c = (\bar{0} + \bar{0}) \bullet 1 \bullet \bar{1} = (\bar{0} + \bar{0}) \bullet \bar{1} = \bar{0} \bullet \bar{1} = \bar{0}$
$a\alpha c + b\alpha c = \bar{0} \bullet 1 \bullet \bar{1} + \bar{0} \bullet 1 \bullet \bar{1} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ dan $\alpha \in \mathbb{N}$ akan diperoleh $(a+b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$.

iii) $a(\alpha+\beta)b = \bar{0} \bullet (1+2) \bullet \bar{0} = \bar{0} \bullet 3 \bullet \bar{0} = \bar{0}$
$a\alpha b + a\beta b = \bar{0} \bullet 1 \bullet \bar{0} + \bar{0} \bullet 2 \bullet \bar{0} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ akan diperoleh $a(\alpha+\beta)b = a\alpha b + a\beta b$.

iv) $a\alpha(b\beta c) = \bar{0} \bullet 1 \bullet (\bar{0} \bullet 2 \bullet \bar{1}) = \bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0}$
$(a\alpha b)\beta c = (\bar{0} \bullet 1 \bullet \bar{0}) \bullet 2 \bullet \bar{1} = \bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_2$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ akan diperoleh $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$.

Karena $\mathbb{Z}_2$ dengan $\Gamma = \mathbb{N}$ memenuhi 1) dan 2) maka $\mathbb{Z}_2$ adalah *Γ-semiring*.

$I = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ merupakan subsemigrup terhadap operasi penjumlahan dari $\mathbb{Z}_2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $I = \{\bar{0}, \bar{1}\} = \mathbb{Z}_2$ memenuhi $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$. Misal $x \in I, 2n-1, 2n \in \Gamma$ dan $t \in \mathcal{T}$, maka operasi pergandaan pada $I\Gamma\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}\Gamma I$ diberikan pada tabel berikut:

Tabel 3.8 Operasi pergandaan pada $I\Gamma\mathcal{T}$ dan $\mathcal{T}\Gamma I$

x	γ	t	$x\gamma t$	$t\gamma x$
$\bar{0}$	$2n-1$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$2n$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$2n-1$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$2n$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$2n-1$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

x	γ	t	$x\gamma t$	$t\gamma x$
$\bar{1}$	$2n$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$2n-1$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$2n$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 3.8 diperoleh bahwa $x\gamma t \in I$ dan $t\gamma x \in I$, untuk setiap $x \in I, \gamma \in \Gamma$ dan setiap $t \in \mathcal{T}$. Jadi $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$. Karena I merupakan subsemigrup dari $\mathcal{T}$ yang memenuhi $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$ maka terbukti bahwa $I = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah ideal dari $\mathcal{T}$. ■

Contoh 3.3.3

$I = \{\bar{0}\}$ adalah ideal dalam *Γ-semiring* $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2$ $(\Gamma = \mathbb{N})$.

Bukti:
$(I, +)$ adalah semigrup komutatif jika memenuhi:

a. $(I, +)$ tertutup. Jelas bahwa I tertutup sebab anggota I adalah $\bar{0}$ dan $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}$.
b. $(I, +)$ assosiatif. Jelas bahwa I assosiatif sebab anggota I adalah $\bar{0}$ dan $(\bar{0} + \bar{0}) + \bar{0} = \bar{0} = \bar{0} + (\bar{0} + \bar{0})$.
c. $(I, +)$ komutatif.

Karena memenuhi a, b dan c maka terbukti $(I, +)$ adalah semigrup komutatif. Karena I adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_2$ maka $I = \{\bar{0}\}$ adalah subsemigrup dari $\mathbb{Z}_2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $I = \{\bar{0}\}$ memenuhi $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$. Karena $\bar{0} \in I, 2n-1, 2n \in \Gamma$ dan $\bar{0}, \bar{1} \in \mathcal{T}$, maka berlaku $x\gamma t = \bar{0}$ dan $t\gamma x = \bar{0}$. Karena $I = \{\bar{0}\}$ maka $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$. Karena I merupakan subsemigrup dari $\mathcal{T}$ yang memenuhi $I\Gamma\mathcal{T} \subseteq I$ dan $\mathcal{T}\Gamma I \subseteq I$ maka terbukti bahwa $I = \{\bar{0}\}$ adalah ideal dari $\mathcal{T}$. ■

3.4 *Γ-Ideal* Kiri (Kanan) *Γ-Semiring*

Definisi 3.4.1 (*Γ-ideal* kiri dan *Γ-ideal* kanan *Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. L dan Q adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. L disebut *Γ-ideal* kiri dari $\mathcal{T}$ jika $\mathcal{T}\Gamma L \subseteq L$. Q disebut *Γ-ideal* kanan dari $\mathcal{T}$ jika $Q\Gamma\mathcal{T} \subseteq Q$. $\mathcal{T}\Gamma L = \{t\gamma l | t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, l \in L\}$ dan $Q\Gamma\mathcal{T} = \{q\gamma t | q \in Q, \gamma \in \Gamma, t \in \mathcal{T}\}$.

Contoh 3.4.2

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ dengan $\Gamma = 2\mathbb{N}$ adalah *Γ-semiring*. Jika $\mathcal{A} = 2\mathbb{N}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$, maka $\mathcal{A}$ adalah *Γ-ideal* kiri dan *Γ-ideal* kanan dalam *Γ-semiring*.

Bukti:
Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{A}$ adalah *Γ-ideal* kiri dan *Γ-ideal* kanan dari $\mathcal{T}$. Maka harus ditunjukkan bahwa $\mathcal{A}$ memenuhi $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$. Misal diambil $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$, akan ditunjukkan $t\gamma a \in \mathcal{A}$ dan $a\gamma t \in \mathcal{A}$ untuk setiap $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$ pada tabel berikut:

Tabel 3.9 Operasi pergandaan pada $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}$

t	γ	a	$t\gamma a$	$a\gamma t$
$2n$	$2n$	$2n$	$8n = 2(4n) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$	$8n \in 2\mathbb{N}$
$2n-1$	$2n$	$2n$	$4n \bullet (2n-1) = 2\big(2n \bullet (2n-1)\big) \in 2\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$	$4n \bullet (2n-1) \in 2\mathbb{N}$

Dari Tabel 3.9, jelas bahwa $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$, sebab untuk setiap $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$ diperoleh $t\gamma a \in 2\mathbb{N}$ dan $a\gamma t \in 2\mathbb{N}$.

Karena $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ yang memenuhi $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ dan $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T} \subseteq \mathcal{A}$ maka terbukti $\mathcal{A}$ adalah *Γ-ideal* kiri dan *Γ-ideal* kanan dari $\mathcal{T}$. ■

3.5 *Bi-Γ-Ideal* dalam *Γ-Semiring*

Definisi 3.5.1 (*Bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$, maka $\mathcal{A}$ disebut *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} = \{a\gamma t\gamma a | a \in \mathcal{A}, \gamma \in \Gamma \text{ dan } t \in \mathcal{T}\}$.

Contoh 3.5.2

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ $(\Gamma = 2\mathbb{N})$ adalah *Γ-semiring* dan $\mathcal{A} = 2\mathbb{N}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. Maka $\mathcal{A}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.

Bukti:
Harus dibuktikan bahwa $\mathcal{A}$ memenuhi $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. Misal diambil $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$, akan ditunjukkan $a\gamma t\gamma a \in \mathcal{A}$ untuk setiap $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$. Operasi pergandaan $a\gamma t\gamma a$ akan diberikan pada tabel berikut:

Tabel 3.10 Operasi pergandaan pada $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A}$

a	γ	t	γ	a	$a\gamma t\gamma a$
$2n$	$2n$	$2n-1$	$2n$	$2n$	$16n \bullet (2n-1) = 2\big(8n \bullet (2n-1)\big) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$
$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$32n = 2(16n) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

Jelas bahwa $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$, sebab untuk setiap $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$ diperoleh $a\gamma t\gamma a \in 2\mathbb{N}$. Jadi $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.
Karena $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ yang memenuhi $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ maka terbukti bahwa $\mathcal{A}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. ■

Contoh 3.5.3

Misalkan $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ $(\Gamma = 2\mathbb{N})$ adalah *Γ-semiring* dan $\mathcal{A} = 4\mathbb{N}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. Maka $\mathcal{A}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.

Bukti:
Berdasarkan Definisi 3.5.1, harus ditunjukkan $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. Misal diambil $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$ maka operasi pergandaan $a\gamma t\gamma a$ akan didefinisikan pada tabel berikut:

Tabel 3.11 Operasi pergandaan pada $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A}$

a	γ	t	γ	a	$a\gamma t\gamma a$
$4n$	$2n$	$2n-1$	$2n$	$4n$	$64n \bullet (2n-1) = 4\big(16n \bullet (2n-1)\big) \in 4\mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
$4n$	$2n$	$2n$	$2n$	$4n$	$128n = 4(32n) \in 4\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

Dari Tabel 3.11, diperoleh $a\gamma t\gamma a \in 4\mathbb{N}$. $\mathcal{A} = 4\mathbb{N}$ maka $a\gamma t\gamma a \in \mathcal{A}$ untuk setiap $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$. Dengan kata lain, $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. Karena $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ yang terbukti memenuhi $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$ maka $\mathcal{A}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring* $\mathcal{T}$. ■

Proposisi 3.5.4

Irisan *bi-Γ-ideal* B dari *Γ-semiring* $\mathcal{T}$ dan sebuah *sub Γ-semiring* $\mathcal{A}$ dari $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari *Γ-semiring* $\mathcal{T}$.

Bukti:.
Diketahui B adalah *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring* $\mathcal{T}$ dan $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. Misal $C = B \cap \mathcal{A}$, akan dibuktikan C adalah *bi-Γ-ideal* dari *Γ-semiring* $\mathcal{T}$. Harus ditunjukkan bahwa C adalah *sub-Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ dan memenuhi $C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq C$. Dari $C = B \cap \mathcal{A}$ maka $C \subseteq \mathcal{A}$. Karena $\mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ maka $C\Gamma C \subseteq \mathcal{A}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. Jadi $C\Gamma C \subseteq \mathcal{A}$ dan karena $C \subseteq \mathcal{A}$ maka $C\Gamma C \subseteq C$. $C = B \cap \mathcal{A}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

Kemudian, dari $C = B \cap \mathcal{A}$ maka $C \subseteq B$. Karena B adalah *bi-Γ-ideal* dalam $\mathcal{T}$ maka berlaku $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$. Selanjutnya, $C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$. $C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq B$ dan $C \subseteq B$ maka $C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq C$. Karena $C = B \cap \mathcal{A}$ terbukti adalah *sub-Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ dan memenuhi $C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq C$, terbukti bahwa $C = B \cap \mathcal{A}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari *Γ-semiring* $\mathcal{T}$. ■

Lemma 3.5.5

Misal $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring* dan B_i adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$, $\forall i \in J$, dengan $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$. Jika $\bigcap_{i\in J} B_i \neq \emptyset$, maka $\bigcap_{i\in J} B_i$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.

Bukti:
Akan dibuktikan $\bigcap_{i\in J} B_i$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Maka harus ditunjukkan $\bigcap_{i\in J} B_i$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ dan memenuhi $\bigcap_{i\in J} B_i \,\Gamma\mathcal{T}\Gamma \bigcap_{i\in J} B_i \subseteq \bigcap_{i\in J} B_i$.

Misal $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring* dan B_i adalah *bi-Γ-ideal* di $\mathcal{T}$, $\forall i \in J$. Diasumsikan bahwa $\bigcap_{i\in J} B_i \neq \emptyset$. Misal $a, b \in \bigcap_{i\in J} B_i$ maka $a, b \in B_i$, $\forall i \in J$. Ambil $m \in \mathcal{T}$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Karena B_i adalah *bi-Γ-ideal* dari maka pastilah B_i memenuhi *sub Γ-semiring*, sehingga berlaku $a\gamma b \in B_i, \forall i \in J$ dan $a\gamma m\mu b \in B_i\Gamma\mathcal{T}\Gamma B_i \subseteq B_i, \forall i \in J$. Karena $a\gamma b \in B_i, \forall i \in J$ maka $a\gamma b \in \bigcap_{i\in J} B_i$. $\bigcap_{i\in J} B_i$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. Selanjutnya, karena $a\gamma m\mu b \in B_i\Gamma M\Gamma B_i \subseteq B_i, \forall i \in J$ maka $a\gamma m\mu b \in \bigcap_{i\in J} B_i$, untuk setiap $a, b \in \bigcap_{i\in J} B_i$, $m \in \mathcal{T}$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Dengan kata lain, $\bigcap_{i\in J} B_i \,\Gamma\mathcal{T}\Gamma \bigcap_{i\in J} B_i \subseteq \bigcap_{i\in J} B_i$.

Karena $\bigcap_{i\in J} B_i$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ dan memenuhi $\bigcap_{i\in J} B_i \,\Gamma\mathcal{T}\Gamma \bigcap_{i\in J} B_i \subseteq \bigcap_{i\in J} B_i$ maka terbukti bahwa $\bigcap_{i\in J} B_i$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. ■

Contoh 3.5.6

Misal $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ $(\Gamma = 2\mathbb{N})$ adalah Γ-*semiring*. Telah dibuktikan pada Contoh 3.5.2 dan 3.5.3 bahwa $\mathcal{A}_1 = 2\mathbb{N}$ dan $\mathcal{A}_2 = 4\mathbb{N}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam Γ-*semiring* $\mathcal{T}$. Maka $\bigcap_{i\in J} \mathcal{A}_i$ dengan $J = \{1,2\}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam Γ-*semiring*.

Bukti:
Akan dibuktikan $\bigcap_{i\in J} \mathcal{A}_i$ dengan $J = \{1,2\}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam Γ-*semiring*. $\bigcap_{i\in J} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = 2\mathbb{N} \cap 4\mathbb{N} = \{2,4, \dots\} \cap \{4,8, \dots\}$ $= \{4,8,12,16,20, \dots\} = 4\mathbb{N}$. Telah dibuktikan $4\mathbb{N}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam Γ-*semiring*. Jadi, terbukti bahwa $\bigcap_{i\in J} \mathcal{A}_i$ dengan $J = \{1,2\}$ adalah *bi-Γ-ideal* dalam Γ-*semiring*.

Misal A adalah himpunan bagian tak kosong dari Γ-*semiring* $\mathcal{T}$. Misal $\mathcal{J} = \{B | B \text{ adalah } bi - \Gamma - ideal$ dari $\mathcal{T}$ yang memuat A $\}$. Misal $(A)_b = \bigcap_{B \in \mathcal{J}} B$. Jelas bahwa $A \subseteq (A)_b$. Dengan Lemma 3.5.5, $(A)_b$ adalah *bi-Γ-ideal* terkecil dari $\mathcal{T}$ yang memuat A. $(A)_b$ disebut *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ yang dibangun oleh A.

Teorema 3.5.7

Misal A adalah himpunan bagian tak kosong dari Γ-*semiring* $\mathcal{T}$ maka $(A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$.

Bukti:
Misal A adalah himpunan bagian tak kosong dari Γ-*semiring* $\mathcal{T}$ dan $B = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$, jelas bahwa $A \subseteq B$.
$B\Gamma B = (A \cup A\Gamma A) \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma(A \cup A\Gamma A) \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)$. Karena A adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T}$ maka $A \subseteq \mathcal{T}$.

$$
\begin{aligned}
B\Gamma B &= (A \cup A\Gamma A) \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma(A \cup A\Gamma A) \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\\
&= A\Gamma A \cup (A\Gamma A)\Gamma(A\Gamma A) \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma(A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\\
&\subseteq A\Gamma A \cup (A\Gamma\mathcal{T})\Gamma(\mathcal{T}\Gamma A) \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma(A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\\
&= A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma(A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\\
&= A\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A \cup (A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma(A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\\
&\subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&= A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&= A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&= A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&= A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \subseteq B
\end{aligned}
$$

sedemikian sehingga diperoleh $B\Gamma B \subseteq B$. Maka B adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

$$
\begin{aligned}
B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B &= (A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\ \Gamma(A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A)\\
&= A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\ \Gamma)A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\ \Gamma)A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&= A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\ \Gamma)A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\Gamma)A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\\
&\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\Gamma)A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A
\end{aligned}
$$

$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\Gamma)A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A(\Gamma\mathcal{T}\ \Gamma)A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$= A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$= A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$= A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$
$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma A = A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma A$
$\subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A = A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$

$B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \subseteq B$. Karena pada B yang merupakan *sub Γ-semiring* berlaku $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$ maka B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.

Misal C adalah *bi-Γ-ideal* lain dalam $\mathcal{T}$ yang memuat himpunan A. Pastilah C merupakan *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ dan $A \subseteq C$ maka $A\Gamma A \subseteq C\Gamma C \subseteq C$, jadi $A\Gamma A \subseteq C$. Karena C adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ dan $A \subseteq C$ maka $A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \subseteq C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq C$, jadi $A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \subseteq C$. Oleh karena itu $B = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A \subseteq C$. Karena telah terbukti bahwa jika terdapat *bi-Γ-ideal* lain yang memuat himpunan A maka *bi-Γ-ideal* tersebut memuat B, sehingga B adalah *bi-Γ-ideal* terkecil dari $\mathcal{T}$ yang memuat A. Jadi telah terbukti bahwa $(A)_b = B = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$. ■

Contoh 3.5.8

Misal $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ dalam $\mathbb{Z}_4$ adalah *Γ-semiring*. Diambil himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T}$, $A = \{\bar{2}\}$, maka *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ yang dibangun oleh A adalah $(A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$. Misal $t \in \mathcal{T}, \gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$, maka diperoleh $a\gamma a = \bar{0}$ dan $a\gamma t\gamma a = \bar{0}$ untuk setiap $t \in \mathcal{T}$, $\gamma \in \Gamma, a \in \mathcal{A}$. Maka *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ yang dibangun oleh A adalah $(A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A = \{\bar{2}\} \cup \{\bar{0}\} \cup \{\bar{0}\} = \{\bar{2}\} \cup \{\bar{0}\}$.

Teorema 3.5.9

Misalkan $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. Misal B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ dan A adalah himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T}$ maka berlaku pernyataan berikut:

(i) $B\Gamma A$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.

(ii) $A\Gamma B$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.

Bukti:

i) $B\Gamma A$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika memenuhi:

a) $B\Gamma A$ merupakan *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.
$(B\Gamma A)\Gamma(B\Gamma A) = (B\Gamma A\Gamma B)\Gamma A$. Karena B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ dan $A \subseteq \mathcal{T}$, maka
$(B\Gamma A)\Gamma(B\Gamma A) = (B\Gamma A\Gamma B)\Gamma A \subseteq (B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B)\Gamma A \subseteq B\Gamma A$
sehingga diperoleh $(B\Gamma A)\Gamma(B\Gamma A) \subseteq B\Gamma A$. Jadi $B\Gamma A$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

b) $B\Gamma A$ memenuhi $(B\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(B\Gamma A) \subseteq B\Gamma A$.
$(B\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(B\Gamma A) = (B\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma B)\Gamma A$
$(B\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(B\Gamma A) = (B\Gamma A\Gamma\mathcal{T}\Gamma B)\Gamma A \subseteq (B\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma B)\Gamma A$
$\subseteq (B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B)\Gamma A$. Karena B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ maka
$(B\Gamma A)\,\Gamma\mathcal{T}\Gamma\,(B\Gamma A) \subseteq (B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B)\,\Gamma A \subseteq B\Gamma A$ sehingga diperoleh $(B\Gamma A)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(B\Gamma A) \subseteq B\Gamma A$.

Terbukti bahwa $B\Gamma A$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. ■

ii) $A\Gamma B$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika memenuhi:

a) $A\Gamma B$ merupakan *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.
$(A\Gamma B)\Gamma(A\Gamma B) = A\Gamma(B\Gamma A\Gamma B)$. Karena B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ dan $A \subseteq \mathcal{T}$, maka
$(A\Gamma B)\Gamma(A\Gamma B) = A\Gamma(B\Gamma A\Gamma B) \subseteq A\Gamma(B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B) \subseteq A\Gamma B$
sehingga diperoleh $(A\Gamma B)\Gamma(A\Gamma B) \subseteq A\Gamma B$. Jadi $A\Gamma B$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

b) $A\Gamma B$ memenuhi $(A\Gamma B)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(A\Gamma B) \subseteq A\Gamma B$.
$(A\Gamma B)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(A\Gamma B) = A\Gamma(B\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma B)$
$(A\Gamma B)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(A\Gamma B) = A\Gamma(B\Gamma\mathcal{T}\Gamma A\Gamma B) \subseteq A\Gamma(B\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma B)$
$= A\Gamma\,(B\Gamma(\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T})\Gamma B) \subseteq A\Gamma\,(B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B) \subseteq A\Gamma B$ sehingga diperoleh $(A\Gamma B)\Gamma\mathcal{T}\Gamma(A\Gamma B) \subseteq A\Gamma B$.

Terbukti bahwa $A\Gamma B$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. ■

Contoh 3.5.10

Selidiki apakah $A = A\Gamma B$? Misal $\mathcal{T} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2\right\}$ dengan $\Gamma = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ \overline{0} & \overline{0} \end{pmatrix} | a, b, \in \mathbb{Z}_2\right\}$ adalah *Γ-semiring*. Kemudian diambil himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T}$, $A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{1} \end{pmatrix}$.

Bukti:

Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa $\mathcal{T}$ dan Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. $(\mathcal{T}, +)$ adalah semigrup komutatif jika memenuhi:

1) $(\mathcal{T}, +)$ tertutup. Ambil sebarang $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_2$, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$. Dari Tabel 3.5, dapat dilihat bahwa $\overline{0} + \overline{0} = \overline{0}, \overline{0} + \overline{1} = \overline{1}, \overline{1} + \overline{0} = \overline{1}, \overline{1} + \overline{1} = \overline{1}$. Maka $\begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} \in \mathcal{T}$, karena untuk setiap $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_2$. Jadi $(\mathcal{T}, +)$ tertutup.
2) $(\mathcal{T}, +)$ assosiatif. Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $(\mathcal{T}, +)$. Ambil sebarang $a, b, c, d\ e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_2$, maka
$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right]$$
Terbukti bahwa untuk sebarang $a,\ b,\ c \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $(a+b)+c = a+(b+c)$. Jadi $(\mathcal{T}, +)$ assosiatif .
3) $(\mathcal{T}, +)$ komutatif. Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $(\mathcal{T}, +)$. Ambil sebarang $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{Z}_2$, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$, sedangkan di pihak lain $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e+a & f+b \\ g+c & h+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix}$,

karena berlaku sifat komutatif untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$. Jadi $(\mathcal{T}, +)$ komutatif.

Karena memenuhi 1), 2) dan 3) maka terbukti bahwa $(\mathcal{T}, +)$ adalah semigrup komutatif. ■

$(\Gamma, +)$ adalah semigrup komutatif jika memenuhi:

1) $(\Gamma, +)$ tertutup. Ambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Dari Tabel 3.5, dapat dilihat bahwa $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0}, \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}, \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}, \bar{1} + \bar{1} = \bar{1}$. $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in \Gamma$, terbukti untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$. Jadi Γ tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2) $(\Gamma, +)$ assosiatif. Akan ditunjukkan berlaku sifat assosiatif pada $(\Gamma, +)$. Ambil sebarang $a, b, e, f, i, j \in \mathbb{Z}_2$, maka

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+e+i & b+f+j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\right].$$

Terbukti bahwa $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}\right]$. Jadi Γ assosiatif terhadap operasi penjumlahan.

3) $(\Gamma, +)$ komutatif. Akan ditunjukkan berlaku sifat komutatif pada $(\Gamma, +)$. Ambil sebarang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$, sedangkan di pihak lain $\begin{pmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c+a & d+b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$, karena berlaku $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Jadi Γ komutatif terhadap operasi penjumlahan.

Karena memenuhi 1), 2) dan 3) maka terbukti bahwa $(\Gamma, +)$ adalah semigrup komutatif. ■

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. Harus ditunjukkan $\mathcal{T}$ memenuhi pemetaan $\mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}\ \big((A,\gamma,B) \mapsto (A\gamma B)\big)$ untuk setiap $A, B \in \mathcal{T}$ dan $\gamma \in \Gamma$. Ambil sebarang $a, b, c, d, e, f, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_2$, maka $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+\bar{0} & af+\bar{0} \\ ce+\bar{0} & cf+\bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aei+afk & aej+afl \\ cei+cfk & cej+cfl \end{pmatrix}$. Karena dari Tabel 3.5 dan 3.6 diperoleh $\bar{0}+\bar{0} = \bar{0}, \bar{0}+\bar{1} = \bar{1}, \bar{1}+\bar{0} = \bar{1}$, $\bar{1}+\bar{1} = \bar{1}$ dan $\bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0}, \bar{0} \bullet \bar{1} = \bar{1}, \bar{1} \bullet \bar{0} = \bar{1}, \bar{1} \bullet \bar{1} = \bar{1}$. $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan sehingga, $\begin{pmatrix} aei+afk & aej+afl \\ cei+cfk & cej+cfl \end{pmatrix} \in \mathcal{T}$. Jadi untuk setiap $A, B \in \mathcal{T}$ dan $\gamma \in \Gamma$ berlaku $\mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}\ \big((A,\gamma,B) \mapsto (A\gamma B)\big)$. Terbukti $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. ■

Misal diambil himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T}$, yakni $B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} | a, b, \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. Akan dibuktikan bahwa B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Terlebih dahulu harus ditunjukkan B merupakan *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. B harus memenuhi $A\gamma C \in B, \forall A, C \in B$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$. Ambil sebarang $a, b, e, f, i, j \in \mathbb{Z}_2$, maka

$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae & af \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$.
$= \begin{pmatrix} aei+\bar{0} & aej+\bar{0} \\ \bar{0}+\bar{0} & \bar{0}+\bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aei & aej \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$. Karena $\mathbb{Z}_2$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan sehingga $\begin{pmatrix} aei & aej \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in B$. Jadi untuk setiap $A, C \in B$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$ berlaku $A\gamma C \in B$. Terbukti B adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$.

Akan dibuktikan B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Harus ditunjukkan $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$. Misal $a, b, e, f, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_2$, $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \mathcal{T} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$, maka

$\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} ae & af \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} aei + afk & aej + afl \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ae^2i + aefk & aefi + af^2l \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2e^2i + a^2efk & abe^2i + abefk \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} a^2e^2i + a^2efk & abe^2i + abefk \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \in B$. Jadi untuk setiap $B = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \Gamma = \begin{pmatrix} e & f \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}, \mathcal{T} = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$, dengan $a, b, e, f, i, j, k, l \in \mathbb{Z}_2$ berlaku $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$. Terbukti B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.

Kemudian diambil himpunan bagian tak kosong dari $\mathcal{T}$, $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$ maka

$$B\Gamma A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 + ab & a^2 + ab \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$A\Gamma B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ a^2 & ab \end{pmatrix}$$

Jadi $B\Gamma A \neq A\Gamma B$.

Contoh 3.5.11

Misal $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ dengan $\Gamma = 2\mathbb{N}$ adalah *Γ-semiring*. Maka $B = \mathbb{N}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Selidiki apakah $B\Gamma A = A\Gamma B$, jika diambil $A = \{2n\}, \forall n \in \mathbb{N}$?

Bukti:
Akan dibuktikan bahwa $B = \mathbb{N}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Maka harus ditunjukkan $B = \mathbb{N}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ yang memenuhi $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$. $B = \mathbb{N}$ jelas merupakan *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$. Misal $b \in B, \gamma \in \Gamma$ dan $t \in \mathcal{T}$, maka operasi pergandaan pada $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B$ diberikan pada tabel berikut:

Tabel 3.12 Operasi pergandaan pada $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B$

b	γ	t	γ	b	$b\gamma t\gamma b$
$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$2n$
$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$2n$	$2n$	$2n$
$2n-1$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n-1$	$2n$
$2n-1$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$
$2n$	$2n$	$2n-1$	$2n$	$2n-1$	$2n$
$2n$	$2n$	$2n-1$	$2n$	$2n$	$2n$
$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n-1$	$2n$
$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$	$2n$

Dari Tabel 3.12 diperoleh $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq 2\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$. Jadi $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$. Karena $B = \mathbb{N}$ adalah *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$ yang memenuhi $B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B$, terbukti B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. ■

Selanjutnya, misal $b \in B$, $\gamma \in \Gamma$ dan $a \in A$. Operasi pergandaan pada $B\Gamma A$ dan $A\Gamma B$ akan didefinisikan pada tabel-tabel berikut:

Tabel 3.13 Operasi pergandaan pada $B\Gamma A$

b	γ	a	$b\gamma a$
$2n-1$	$2n$	$2n$	$(2n-1) \bullet 4n =$ $2\big(2n \bullet (2n-1)\big) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$
$2n$	$2n$	$2n$	$8n =$ $2(4n) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

Tabel 3.14 Operasi pergandaan pada $A\Gamma B$

a	γ	b	$a\gamma b$
$2n$	$2n$	$2n-1$	$4n \bullet (2n-1) =$ $2\big(2n \bullet (2n-1)\big) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$
$2n$	$2n$	$2n$	$8n =$ $2(4n) \in 2\mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$

Diperoleh $B\Gamma A = A\Gamma B$.

Dari contoh 3.5.10 dan 3.5.11 dapat diambil kesimpulan bahwa $B\Gamma A = A\Gamma B$ jika Γ-*semiring* $\mathcal{T}$ berlaku komutatif terhadap pergandaan.

Akibat 3.5.12

Misal $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring*. Untuk bilangan bulat positif n, misal $B_1, B_{2,} \dots, B_n$ adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$. Maka $B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_n$ adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$.

Bukti:
Akibat akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika. Dengan Teorema 3.5.9, maka $B_1\Gamma B_2$ adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$. Selanjutnya, diketahui n adalah bilangan bulat positif dan $k < n$. Diasumsikan $B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_k$ adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$.

Karena $B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_k\Gamma B_{k+1} = (B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_k)\Gamma B_{k+1}$, maka $B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_k\Gamma B_{k+1}$ menurut Teorema 3.5.9 adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$. Dengan induksi matematika dapat dibuktikan $B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_k\Gamma B_{k+1}$ adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$, maka terbukti bahwa $B_1\Gamma B_2\Gamma \dots \Gamma B_n$ adalah *bi-*Γ*-ideal* dari $\mathcal{T}$. ■

3.6 *Bi-Simple Γ-Semiring*

Definisi 3.6.1 (Nol dari *Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring*. Jika terdapat $0 \in \mathcal{T}$ sedemikian sehingga $0 + x = x + 0 = 0$ dan $0\alpha x = x\alpha 0 = 0, \forall x \in \mathcal{T}, \forall \alpha \in \Gamma$ maka 0 disebut elemen nol dari Γ-*semiring* $\mathcal{T}$. Dalam kasus ini dikatakan bahwa $\mathcal{T}$ adalah Γ-*semiring* dengan nol.

Contoh 3.6.2

Misal $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 2. $\mathbb{Z}_2$ adalah Γ-*semiring* dengan nol ($\Gamma = \mathbb{N}$).

Bukti:
Pada Contoh 3.3.2, telah dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah *Γ-semiring*. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah *Γ-semiring* dengan nol. Harus ditunjukkan $\mathbb{Z}_2$ mempunyai elemen nol. Dari Tabel 3.5 dan 3.6 dapat dilihat bahwa terdapat $\bar{0} \in \mathbb{Z}_2$ memenuhi $\bar{0} + x = x + \bar{0} = \bar{0}$ dan $\bar{0} \bullet \alpha \bullet x = x \bullet \alpha \bullet \bar{0} = \bar{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_2, \forall \alpha \in \Gamma$. Maka $\mathbb{Z}_2$ mempunyai elemen nol. Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_2$ adalah *Γ-semiring* dengan nol. ■

Definisi 3.6.3 (0-*Simple Γ-semiring*)

Sebuah *Γ-semiring* $\mathcal{T}$ dengan nol disebut 0-*simple* jika $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T} \neq \{0\}$ dan $\mathcal{T}$ tidak mempunyai ideal lain selain 0 dan $\mathcal{T}$.

Contoh 3.6.4

Misal $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah himpunan bilangan bulat modulo 2. Telah dibuktikan pada Contoh 3.6.2 bahwa $\mathbb{Z}_2$ adalah *Γ-semiring* dengan nol. Maka $\mathbb{Z}_2$ adalah 0-*simple Γ-semiring*.

Bukti:
Akan dibuktikan $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ adalah 0-*simple Γ-semiring*. Harus dibuktikan bahwa $\mathcal{T} = \mathbb{Z}_2$ memenuhi $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T} \neq \{0\}$ dan $\mathcal{T}$ tidak mempunyai ideal lain selain 0 dan $\mathcal{T}$. Pada Contoh 3.3.2 telah ditunjukkan bahwa $\mathcal{T}$ memenuhi pemetaan $\mathbb{Z}_2 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ dengan operasi pergandaan untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_2$ dan untuk setiap $2n - 1, 2n \in \mathbb{N}$, maka dari Tabel 3.7 diperoleh $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T} = \{\bar{0}, \bar{1}\} \neq \{0\}$.

Selanjutnya, ideal dari $\mathbb{Z}_2$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\{\bar{0}, \bar{1}\}$**.** Dengan kata lain, ideal dari $\mathbb{Z}_2$ adalah elemen identitas dalam hal ini $\bar{0}$ dan $\mathbb{Z}_2$ itu sendiri.

Karena, telah terbukti bahwa $\mathbb{Z}_2$ adalah *Γ-semiring* dengan nol, $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T} \neq \{0\}$ dan $\mathbb{Z}_2$ tidak mempunyai ideal lain selain $\bar{0}$ dan dirinya sendiri, maka $\mathbb{Z}_2$ adalah 0-*simple Γ-semiring*. ■

Definisi 3.6.5 (*Bi-simple Γ-semiring*)

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. $\mathcal{T}$ disebut *bi-simple Γ-semiring* jika $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$.

Contoh 3.6.6

Misal diambil $\mathcal{T} = \{1\}$ dan $\Gamma = \{1\}$. $\mathcal{T}$ dan Γ merupakan semigrup komutatif terhadap penjumlahan yang didefinisikan sebagai $\mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ $((a, b) \longmapsto \left(\frac{a+b}{2}\right), \forall a, b \in \mathcal{T}$ dan $\Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ $((\alpha, \beta) \longmapsto \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \forall \alpha, \beta \in \Gamma$. Terdapat pemetaan $\mathcal{T} \times \Gamma \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ $((a, \gamma, b) \longmapsto (a\gamma b))$ untuk setiap $a, b \in \mathcal{T}$ dan setiap $\gamma \in \Gamma$. Maka $\mathcal{T} = \{1\}$ adalah *Γ-semiring* sekaligus *bi-simple Γ-semiring*.

Bukti:
Akan dibuktikan $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring*. Maka harus ditunjukkan bahwa $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$. Dengan operasi pergandaan, akan ditunjukkan terlebih dahulu $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal*, maka harus memenuhi $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$. $1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \bullet 1 \subseteq 1$. $\mathcal{T}$ memenuhi $\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$. Jadi $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal*. $\mathcal{T}$ merupakan *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ sendiri karena $\mathcal{T}$ hanya memiliki satu anggota saja,yakni 1. Jelas adalah *bi-Γ-ideal* satu-satunya dari $\mathcal{T}$. Maka, terbukti bahwa $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring*. ■

Teorema 3.6.7

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*. $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring* jika dan hanya jika $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m$, $\forall m \in \mathcal{T}$.

Bukti:
Misalkan $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*.
⇒) Diasumsikan bahwa $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring*. misal $m \in \mathcal{T}$, dengan Teorema 3.5.9 dan Akibat 3.5.12, $m\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Dengan demikian $m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m, \forall m \in \mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Karena $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring*, sesuai Definisi 3.6.5 maka $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m$. ■
⇐) Diasumsikan bahwa $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m, \forall m \in \mathcal{T}$. Akan dibuktikan $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring* atau $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$. Misal B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. Jelas bahwa $B \subseteq \mathcal{T}$. Misalkan $b \in B$ maka $b \in \mathcal{T}$ sehingga sesuai dengan asumsi, maka $\mathcal{T} = b\Gamma\mathcal{T}\Gamma b$.

$$\mathcal{T} = b\Gamma\mathcal{T}\Gamma b \subseteq B\Gamma\mathcal{T}\Gamma B \subseteq B \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq B$$

Karena $B \subseteq \mathcal{T}$ dan $\mathcal{T} \subseteq B$ maka $B = \mathcal{T}$. Dengan kata lain $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$. Jadi terbukti $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring*. ■

Contoh 3.6.8

Misalkan $\mathcal{T} = \{1\}(\Gamma = \{1\})$ adalah *bi-simple Γ-semiring*, maka memenuhi $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m,\ \forall m \in \mathcal{T}$.

Bukti:
Karena $1 \in \mathcal{T}$, maka dengan operasi pergandaan biasa $1 \bullet 1 \bullet \{1\} \bullet 1 \bullet 1 = \{1\}$ dan $\{1\} = \mathcal{T}$. Jadi $\mathcal{T}$ memenuhi $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m,\ \forall m \in \mathcal{T}$. ■

Teorema 3.6.9

Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring* dan B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. B adalah *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika B adalah *bi-simple Γ-semiring*.

Bukti:
Misal $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring* dan B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.
⇒) Diasumsikan bahwa B adalah *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$, akan dibuktikan B adalah *bi-simple Γ-semiring*.
Misal C adalah *bi-Γ-ideal* dari B, maka $C \subseteq B$ dan $C\Gamma B\Gamma C \subseteq C$. Karena B adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$, menurut Teorema 3.5.9, $C\Gamma B\Gamma C$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. $C\Gamma B\Gamma C$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ yang termuat dalam B. Sedangkan B adalah *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ dan $C\Gamma B\Gamma C \subseteq B$ maka haruslah $C\Gamma B\Gamma C = B$. Oleh karena itu $B = C\Gamma B\Gamma C \subseteq C$, sehingga $B \subseteq C$.

Karena $C \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $B = C$. Maka B adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari B. Dengan kata lain, B adalah satu-satunya *bi-Γ-ideal* dari B. Menurut Definisi 3.6.5, maka B adalah *bi-simple Γ-semiring*. ■
⇐) Diasumsikan bahwa B adalah *bi-simple Γ-semiring*, akan dibuktikan B adalah *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.
Misal C adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ sedemikian sehingga $C \subseteq B$. Karena $C \subseteq B$ dan $B \subseteq \mathcal{T}$ maka $C\Gamma B\Gamma C \subseteq C\Gamma\mathcal{T}\Gamma C \subseteq C$ sehingga diperoleh $C\Gamma B\Gamma C \subseteq C$. Oleh karena itu, C adalah *bi-Γ-*

ideal dari B. Sedangkan, menurut Definisi 3.6.5, B haruslah satu-satunya *bi-Γ-ideal* dari B. Dengan kata lain, B tidak memuat *bi-Γ-ideal* lain selain B itu sendiri. Maka haruslah $C = B$. Jadi B adalah *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$. ∎

Contoh 3.6.10

Misal $\mathcal{T} = \{1\}(\Gamma = \{1\})$ adalah *bi-simple Γ-semiring*, maka $\mathcal{T}$ adalah *minimal bi-Γ-ideal*.

Bukti:
$\mathcal{T} = \{1\}$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ $(\Gamma = \{1\})$ itu sendiri. $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal karena dalam $\mathcal{T}$ yang merupakan *Γ-semiring*, tidak terdapat *bi-Γ-ideal* lain selain $\mathcal{T}$. Karena $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dan tidak memuat *bi-Γ-ideal* lain selain dirinya sendiri maka $\mathcal{T}$ dapat disebut *minimal bi-Γ-ideal*. ∎

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. *Bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring* $\mathcal{T}$ dapat dibangun oleh *sub Γ-semiring* dari $\mathcal{T}$, misalkan $\mathcal{A}$, yang memenuhi $\mathcal{A}\Gamma\mathcal{T}\Gamma\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.
2. Misalkan $\mathcal{T}$ adalah *Γ-semiring*, B adalah *bi-Γ-ideal* dan A adalah himpunan bagian tak kosong dari *Γ-semiring* $\mathcal{T}$.
   i. *Bi-Γ-ideal* yang dibangun oleh A adalah $(A)_b = A \cup A\Gamma A \cup A\Gamma\mathcal{T}\Gamma A$.
   ii. $B\Gamma A$ dan $A\Gamma B$ adalah *bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$.
   iii. $\mathcal{T}$ adalah *bi-simple Γ-semiring* jika $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$. $\mathcal{T}$ adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari $\mathcal{T}$ dapat dinyatakan dengan $\mathcal{T} = m\Gamma\mathcal{T}\Gamma m,\ \forall m \in \mathcal{T}$.
   iv. B disebut *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika dan hanya jika B adalah *bi-simple Γ-semiring*. Dengan kata lain, B disebut *minimal bi-Γ-ideal* dari $\mathcal{T}$ jika dan hanya B adalah *bi-Γ-ideal* tunggal dari B.

4.2 Saran

Pada pembahasan lebih lanjut disarankan untuk membahas *bi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring* jika dibangun dari *quasi-Γ-ideal* dalam *Γ-semiring*.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P.B, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Bhattacharya, P.B, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Chinram, R dan C. Jirojkul. 2007. On bi-Γ-ideals in Γ-semigroups. *Songklanakarin Journal Sciences Technology*. Vol. 29, hal 231-234.

Donges, C. 1994. On Quasi-Ideals Of Semirings. *International Journal Mathematics and Mathematical Sciences*. Vol. 17, hal 47-58.

Dummit, D. S. dan R. M. Foote. 2002. *Abstract Algebra*, 2^{nd} *Ed*. John Wiley and Sons Incorporation. New York.

Dutta, T. K dan S. K. Sardar. 2002. On the Operator of a Γ-Semiring. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*. Vol 26, hal. 203-213.

El-Madhoun, N.R. 2007. *Quasi-ideal and Bi-ideals on Semigroups and Semirings*. MSc. Thesis, The Islamic University of Gaza. Palestine.

Golan, J.S. 1999. *Semirings and Their Applications*. Kluwer Academic Publisher. London.

Hedayati, H dan K.P. Shum. 2011. An Introduction to Γ-Semirings. *International Journal of Algebra*. Vol. 5, hal. 709-726.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Near-Rings*. American Research Press. Rehoboth.

Kaushik, J. P. dan M. Khan. 2008. On Bi-Γ-Ideal in Γ-Semirings. *International Journal Contemporary Mathematical Sciences*. Vol. 3, hal. 1255-1260.

Kaushik, J. P. dan M. A. Ansari. 2009. On bi-Γ-Ideals and Minimal Quasi-Γ-Ideals in Γ-Semirings. *International Mathematical Forum*. Vol. 4, hal. 865-871.

Monico, C. J. 2002. *Semirings and Semigroups Actions in Public-Key Cryptography*. Phd. Thesis, The University of Notre Dame. Indiana.

Rao, M. M. K. 1995. Γ-SEMIRINGS-I. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*. Vol. 19, hal. 49-54.

Whitelaw, T. A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall Press. Florida.