BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada pembahasan berikut akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ pada *cycle* dengan satu *chord* dan graf *Dumbbell*.

3.1 Pelabelan *edge-graceful* pada *cycle* dengan satu *chord*.

Teorema berikut akan menunjukkan bahwa *cycle* dengan satu *chord* untuk *p* ganjil dapat dilabeli dengan pelabelan *edge-graceful*.

Teorema 3.1
Jika *G* adalah graf *cycle* dengan satu *chord* untuk *p* ganjil, maka *G* adalah *edge-graceful*.

Bukti :

Graf $C_p(r)$ dengan *p* ganjil, mempunyai jumlah titik ganjil dan jumlah garis genap. Himpunan titik-titik pada graf $C_p(r)$ adalah $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ dan himpunan nilai titik-titiknya $P = \{0,1,2, \dots, p\}$ sedangkan himpunan garis-garis pada graf $C_p(r)$ adalah $E = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{p-1}, v_p), (v_1, v_p), (v_1, v_r)\}$ dan himpunan label garis-garisnya $Q = \{0,1,2, \dots, p+1\}$.

Garis (v_1, v_r) dilabeli dengan 0, sedangkan pada garis-garis yang lain dilabeli dengan {1,2,...,*p*} searah jarum jam. Setelah semua garis pada $C_p(r)$ dilabeli, maka sesuai definisi didapatkan pelabelan pada titik-titiknya yaitu {1,3,...,0,2,4,...,*p*-1}, seperti terlihat pada tabel 3.1.

Setelah titik-titik dan garis-garisnya terlabeli terlihat bahwa setiap himpunan di *V* mempunyai kawan tepat satu di *P* dan semua anggota dari himpunan *P* mempunyai kawan di *V*. Begitu juga pada himpunan *E*, setiap himpunan di *E* mempunyai kawan tepat satu di *Q* dan semua anggota dari himpunan *Q* mempunyai kawan di *E*. Oleh karena pasangan fungsi (f, f^*) satu-satu dan onto, maka kedua fungsi tersebut bijektif. Pada pelabelan di atas juga terlihat bahwa fungsi $f^*(u) \equiv \left(\sum_{(u,v)\in E(G)} f(u,v)\right)(mod\ p)$ sesuai dengan definisi pada *edge-graceful*. Maka graf $C_p(r)$ merupakan graf *edge-graceful*. ■

Tabel 3.1 Pelabelan *Edge-graceful* jika *p* ganjil

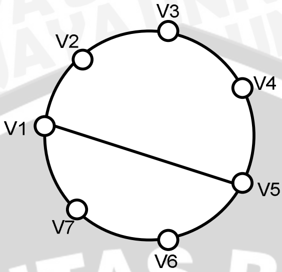
Q	***P***	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
{0,1,2,3,...,p}	{0,1,2,3,...,p-1}	$f(v_1, v_2) = 1$ $f(v_2, v_3) = 2$ $f(v_3, v_4) = 3$ . . . $f(v_1, v_p) = p$ $f(v_1, v_r) = 0$	$f^*(v_1) = 1$ $f^*(v_2) = 3$ . . . $f^*(v_t) = 0$ . . . $f^*(v_p) = p - 1$

Langkah-langkah pelabelan *edge-graceful* pada *cycle* dengan satu *chord* untuk *p* ganjil adalah sebagai berikut :

1. Mengkonstruksi graf *cycle* dengan satu *chord*
2. Menentukan jumlah titik-titik dan jumlah garis-garis pada graf *cycle* dengan satu *chord*
3. Menentukan titik v_1 sampai v_p searah jarum jam
4. Menentukan himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garis sesuai definisi
5. Melabeli garis-garis pada graf *cycle* dengan satu *chord* dengan fungsi $f: E \rightarrow Q$ bijektif dan searah jarum jam
6. Melabeli titik-titik pada graf *cycle* dengan satu *chord* dengan fungsi $f^*: V \rightarrow P$ bijektif
7. Graf *cycle* dengan satu *chord* memenuhi pelabelan *edge-graceful.*

Contoh 3.1:
Pelabelan *edge-graceful* pada $C_7(5)$

1. Mengkonstruksi graf $C_7(5)$
2. Graf $C_7(5)$ mempunyai jumlah titik 7 dan jumlah garisnya 8. Himpunan titik-titik dan garis-garisnya adalah $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ dan $E = \{(v_1, v_2), \ldots, (v_6, v_7), (v_1, v_7), (v_1, v_5)\}$
3. Menentukan titik $\{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$ searah jarum jam. Seperti terlihat pada Gambar 3.1



Gambar 3.1 Graf $C_7(5)$

4. Himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya adalah Q ={0,1,2,3,4,5,6,7} dan P ={0,1,2,3,4,5,6}
5. Garis (v_1, v_5) dilabeli dengan 0 dan garis-garis yang lain dilabeli dengan {1,2,3,4,5,6,7} searah jarum jam, dari pelabelan tersebut terlihat bahwa setiap anggota dari himpunan E memiliki tepat satu label pada himpunan Q, jadi fungsi $f: E \rightarrow Q$ merupakan fungsi satu-satu dan *onto*. Dengan kata lain, fungsi f adalah fungsi bijektif.
6. Titik-titik pada graf $C_7(5)$ dilabeli dengan uraian sebagai berikut :

$f^*(v_1) = \big((v_1, v_2) + (v_1, v_5) + (v_1, v_7)\big)(mod\ 7) = (1 + 0 + 7)(mod\ 7) = 1$

$f^*(v_2) = \big((v_1, v_2) + (v_2, v_3)\big)(mod\ 7) = (1 + 2)(mod\ 7) = 3$

$f^*(v_3) = \big((v_2, v_3) + (v_3, v_4)\big)(mod\ 7) = (2 + 3)(mod\ 7) = 5$

$f^*(v_4) = \big((v_3, v_4) + (v_4, v_5)\big)(mod\ 7) = (3 + 4)(mod\ 7) = 0$

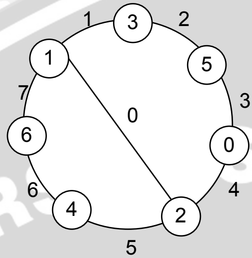
$f^*(v_5) = \big((v_4, v_5) + (v_1, v_5) + (v_5, v_6)\big)(mod\ 7) = (4 + 0 + 5)(mod\ 7) = 2$

$f^*(v_6) = \big((v_5, v_6) + (v_6, v_7)\big)(mod\ 7) = (5 + 6)(mod\ 7) = 4$

$f^*(v_7) = \big((v_6, v_7) + (v_1, v_7)\big)(mod\ 7) = (6 + 7)(mod\ 7) = 6$

karena f^* satu-satu dan onto, jadi fungsi f^* tersebut bijektif.

7. Oleh karena kedua fungsi (f, f^*) bijektif, sehingga graf $C_7(5)$ dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *edge-graceful* sebagaimana terlihat pada Gambar 3.2



Gambar 3.2 pelabelan *edge-graceful* untuk $C_7(5)$

Pelabelan *egde-graceful* pada graf $C_7(5)$ seperti yang telah dijabarkan di atas terlihat pada tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Pelabelan *Edge-graceful* pada graf $C_7(5)$

Q	***P***	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
{0,1,2,3,4,5,6,7}	{0,1,2,3,4,5,6}	$f(v_1, v_2) = 1$ $f(v_2, v_3) = 2$ $f(v_3, v_4) = 3$ $f(v_4, v_5) = 4$ $f(v_5, v_6) = 5$ $f(v_6, v_7) = 6$ $f(v_1, v_7) = 7$ $f(v_1, v_5) = 0$	$f^*(v_1) = 1$ $f^*(v_2) = 3$ $f^*(v_3) = 5$ $f^*(v_4) = 0$ $f^*(v_5) = 2$ $f^*(v_6) = 4$ $f^*(v_7) = 6$

Berikut ini adalah contoh yang menunjukkan bahwa ada *cycle* dengan satu *chord* untuk p ganjil yang juga merupakan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG yaitu $p = 5$ dan $r = 3$.

Contoh 3.2:
Graf $C_5(3)$ adalah *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG untuk
1. $a = 1$ dan $b \leq 3$
2. $a = 2$ dan $b \leq 1$

Pada graf $C_5(3)$ dengan p ganjil, himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya sebagai berikut :
$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_1, v_5), (v_1, v_3)\}$

Pada graf $C_5(3)$ mempunyai jumlah titik yang ganjil dan jumlah garis yang genap. Menurut definisi, jika jumlah titiknya ganjil dan jumlah garisnya genap, maka himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya berturut-turut sebagai berikut :

$Q(a)$ = $\{\pm a, \pm(a+1), \pm(a+2)\}$ dan
$P(b)$ = $\{0\} \cup \{\pm b, \pm(b+1)\}$

Selanjutnya menentukan titik-titik $v_1, \ldots, v_5$ searah jarum jam, kemudian menentukan garis *chord*, karena $r = 3$ maka *chord* merupakan garis yang menghubungkan antara titik v_1 dengan titik v_3. Pada kasus :

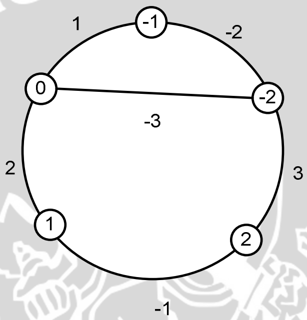
1. a. Untuk $a = 1$ dan $b = 1$ pelabelan garis dan pelabelan titiknya yaitu :
Himpunan pelabelan garisnya $Q(1) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ dengan uraian sebagai berikut :
$f(v_1, v_2) = 1$
$f(v_2, v_3) = -2$
$f(v_3, v_4) = 3$
$f(v_4, v_5) = -1$
$f(v_1, v_5) = 2$
$f(v_1, v_3) = -3$

Setiap anggota dari himpunan garis-garisnya memiliki tepat satu label pada himpunan label garis-garisnya. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa fungsi $f: E \rightarrow Q$ adalah fungsi satu-satu dan *onto*. Karena $f: E \rightarrow Q$ adalah satu-satu dan *onto* maka terlihat bahwa $f: E \rightarrow Q$ bijektif.

Setelah semua garis terlabeli, langkah selanjutnya melabeli titik-titik pada graf $C_5(3)$ dimana fungsi $f^*: V \rightarrow P$ yang didefinisikan dengan $f^*(u) = \sum_{(u,v) \in E(G)} f(u, v)$ diuraikan sebagai berikut :
$f^*(v_1)$ =$(v_1, v_2) +\ (v_1, v_5) + (v_1, v_3)$ =1+2+(-3)=0
$f^*(v_2)$ =$(v_1, v_2) +\ (v_2, v_3) = 1 + (-2) = -1$

$f^*(v_3) = (v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_1, v_3) = -2 + 3 + (-3) = -2$
$f^*(v_4) = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) = 3 + (-1) = 2$
$f^*(v_5) = (v_4, v_5) + (v_1, v_5) = -1 + 2 = 1$
karena f^* satu-satu dan *onto*, maka f^* bijektif.

Kedua fungsi f dan f^* sama-sama bijektif sehingga graf $C_5(3)$ untuk *a*=1 dan *b*=1 dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3 pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ untuk $C_5(3)$ dengan *a*,*b* = 1

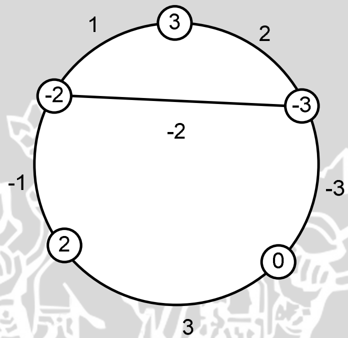
b. Untuk $b = 2$, himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(2) = \{-3, -2, 0, 2, 3\}$, didapatkan pelabelan garis-garisnya sebagai berikut :
$f(v_1, v_2) = 1$
$f(v_2, v_3) = 2$
$f(v_3, v_4) = -3$
$f(v_4, v_5) = 3$
$f(v_1, v_5) = -1$
$f(v_1, v_3) = -2$

Fungsi $f: E \to Q$ adalah bijektif, karena setiap anggota dari himpunan garis-garisnya memiliki tepat satu label pada himpunan label garis-garisnya.

Pelabelan titik-titik pada graf $C_5(3)$ diuraikan sebagai berikut :

$f^*(v_1)$ =$(v_1,v_2) +\ (v_1,v_5) + (v_1,v_3)$ =1+(-1)+(-2) = -2
$f^*(v_2)$ =$(v_1,v_2) +\ (v_2,v_3) = 1 + 2 = 3$
$f^*(v_3)$ =$(v_2,v_3) +\ (v_3,v_4) + (v_1,v_3) = 2 + (-3) +$
$(-2) = -3$
$f^*(v_4)$ =$(v_3,v_4) +\ (v_4,v_5) = (-3) + (3) = 0$
$f^*(v_5)$ =$(v_4,v_5) +\ (v_1,v_5) = 3 + (-1) = 2$
karena f^* satu-satu dan *onto*, maka f^* bijektif.

Oleh karena kedua fungsi (f, f^*) bijektif, sehingga graf $C_5(3)$ dapat dilabeli dengan aturan pelabelan $Q(1)P(2)$-SEG Seperti terlihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ untuk $C_5(3)$ dengan $a = 1$ dan $b = 2$

c. Untuk $b = 3$, himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(3) = \{-4, -3, 0, 3, 4\}$, didapatkan pelabelan garis-garisnya sebagai berikut :
$f(v_1, v_2) = 1$
$f(v_2, v_3) = 3$
$f(v_3, v_4) = -2$
$f(v_4, v_5) = -1$
$f(v_1, v_5) = -3$
$f(v_1, v_3) = 2$

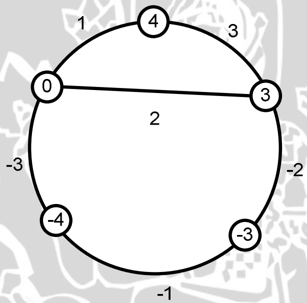
Setiap anggota dari himpunan E memiliki tepat satu label pada himpunan Q. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa fungsi $f: E \rightarrow Q$ adalah bijektif.

Sesuai dengan definisi fungsi $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u,v)$ didapatkan pelabelan titik-titik sebagai berikut :

$f^*(v_1) =(v_1, v_2) + (v_1, v_5) + (v_1, v_3) =1+(-3)+2=0$
$f^*(v_2) =(v_1, v_2) + (v_2, v_3) = 1 + 3 = 4$
$f^*(v_3) =(v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_1, v_3) = 3 + (-2) + 2 = 3$
$f^*(v_4) =(v_3, v_4) + (v_4, v_5) = -2 + (-1) = -3$
$f^*(v_5) =(v_4, v_5) + (v_1, v_5) = -1 + (-3) = -4$

karena f^* satu-satu dan *onto*, maka f^* bijektif.

Graf $C_5(3)$ untuk $a = 1$ dan $b = 3$ dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ karena fungsi (f, f^*) bijektif, sebagaimana terlihat pada Gambar 3.5.



Gambar 3.5 Graf $C_5(3)$ untuk $a = 1, b = 3$

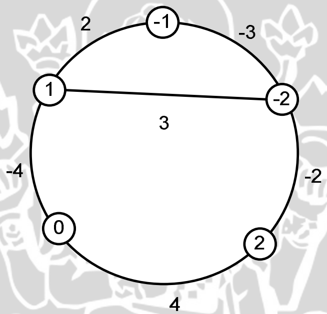
2. Untuk $a = 2$ dan $b = 1$ didapatkan $Q(2) = \{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$ dan $P(1) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Pelabelan garis-garis dan pelabelan titik-titiknya diuraikan sebagai berikut:

Pelabelan garis $f(v_1, v_2) = 2$
$f(v_2, v_3) = -3$
$f(v_3, v_4) = -2$
$f(v_4, v_5) = 4$
$f(v_1, v_5) = -4$
$f(v_1, v_3) = 3$

Pelabelan titik $f^*(v_1) = (v_1, v_2) + (v_1, v_5) + (v_1, v_3) = 2 + (-4) + 3 = 1$

$f^*(v_2) = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) = 2 + (-3) = -1$
$f^*(v_3) = (v_2, v_3) + (v_3, v_4) + (v_1, v_3) = -3 + (-2) + 3 = -2$
$f^*(v_4) = (v_3, v_4) + (v_4, v_5) = -2 + 4 = 2$
$f^*(v_5) = (v_4, v_5) + (v_1, v_5) = 4 + (-4) = 0$

Setiap anggota dari E memiliki tepat satu label pada Q dan setiap anggota dari V memiliki tepat satu label pada P. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa fungsi $f: E \to Q$ dan fungsi $f^*: V \to P$ adalah fungsi satu-satu dan *onto*. Karena fungsi f dan f^* bijektif, sehingga Graf $C_5(3)$ dapat dilabeli dengan aturan *super edge-graceful* $Q(2)P(1)$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG pada graf $C_5(3)$ untuk $a = 2$ dan $b = 1$

Berdasarkan penjelasan di atas, terbukti bahwa graf $C_5(3)$ untuk $a = 1, b \leq 3$ dan $a = 2, b \leq 1$ adalah *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$.

Berikut adalah tabel yang berisi penjabaran dari pelabelan-pelabelan pada titik-titik dan garis-garis yang dihasilkan di atas, untuk nilai a dan b tertentu sehingga dihasilkan himpunan label garis-garis $Q(a)$ dan himpunan nilai titik-titik $P(b)$.

Tabel 3.3 Pelabelan pada graf $C_5(3)$

a	***b***	***Q(a)***	***P(b)***	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	1	{-3, -2, -1, 1, 2, 3}	{ -2, -1, 0, 1, 2}	$f(v_1, v_2) = 1$ $f(v_2, v_3) = -2$ $f(v_3, v_4) = 3$ $f(v_4, v_5) = -1$ $f(v_1, v_5) = 2$ $f(v_1, v_3) = -3$	$f^*(v_1) = 0$ $f^*(v_2) = -1$ $f^*(v_3) = -2$ $f^*(v_4) = 2$ $f^*(v_5) = 1$
	2		{-3, -2, 0, 2, 3}	$f(v_1, v_2) = 1$ $f(v_2, v_3) = 2$ $f(v_3, v_4) = -3$ $f(v_4, v_5) = 3$ $f(v_1, v_5) = -1$ $f(v_1, v_3) = -2$	$f^*(v_1) = -2$ $f^*(v_2) = 3$ $f^*(v_3) = -3$ $f^*(v_4) = 0$ $f^*(v_5) = 2$
	3		{-4, -3, 0, 3, 4}	$f(v_1, v_2) = 1$ $f(v_2, v_3) = 3$ $f(v_3, v_4) = -2$ $f(v_4, v_5) = -1$ $f(v_1, v_5) = -3$ $f(v_1, v_3) = 2$	$f^*(v_1) = 0$ $f^*(v_2) = 4$ $f^*(v_3) = 3$ $f^*(v_4) = -3$ $f^*(v_5) = -4$
2	1	{-4, -3, -2, 2, 3, 4}	{-2, -1, 0, 1, 2}	$f(v_1, v_2) = 2$ $f(v_2, v_3) = -3$ $f(v_3, v_4) = -2$ $f(v_4, v_5) = 4$ $f(v_1, v_5) = -4$ $f(v_1, v_3) = 3$	$f^*(v_1) = 1$ $f^*(v_2) = -1$ $f^*(v_3) = -2$ $f^*(v_4) = 2$ $f^*(v_5) = 0$

3.2 Pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ pada *cycle* dengan satu *chord*.

Teorema di bawah ini membuktikan bahwa *cycle* dengan satu *chord* untuk $p = 2n$ dan $r = n + 1$ dapat dilabeli dengan pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG.

Teorema 3.2

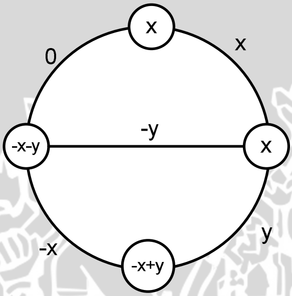
C_{2n} (n+1) adalah *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG untuk $n \geq 3$.

Bukti :

Misal *n*=2, maka terdapat graf $C_4(3)$ yang merupakan graf *cycle* dengan p genap. Graf $C_4(3)$ mempunyai jumlah titik genap dan jumlah garis yang ganjil, himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya sebagai berikut :

$Q(a) = \{-(a+1), -a, 0, a, (a+1)\}$
$P(b) = \{-(b+1), -b, b, (b+1)\}$

Diketahui $r = 3$ maka *chord* menghubungkan titik v_1 dan v_3. Misal label garis (v_1, v_3) tidak 0 dan *a*=x dan *a*+1=y, maka terdapat dua titik yang mempunyai nilai sama, seperti pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7 Graf $C_4(3)$

Gambar di atas menunjukkan bahwa $Q(a) = \{-y, -x, 0, x, y\}$ dan $P(b) = \{x, x, (-x+y), (-x-y)\}$ sehingga terlihat jelas bahwa pemetaan fungsi $f: V \to P$ tidak bijektif. Jadi, graf $C_4(3)$ bukan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG. ■

Pelabelan garis dan titik pada graf $C_4(3)$ seperti yang telah dijabarkan di atas, disajikan dalam tabel 3.4 di bawah ini.

Tabel 3.4 Pelabelan pada graf $C_4(3)$ untuk $a, b \geq 1$

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
x	x	{-y, -x, 0, x, y}	{ -y, -x, x, y}	$f(v_1, v_2) = 0$ $f(v_2, v_3) = x$ $f(v_3, v_4) = y$ $f(v_1, v_4) = -x$ $f(v_1, v_3) = -y$	$f^*(v_1) = -x - y$ $f^*(v_2) = x$ $f^*(v_3) = x$ $f^*(v_4) = -x + y$

Oleh karena itu, terjadi kontradiksi dengan pernyataan pada teorema 3.2 di atas, sehingga terbukti bahwa pernyataan C_{2n} (n+1) adalah *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG untuk $n \geq 3$ adalah benar.

Langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$ pada *cycle* dengan satu *chord* adalah sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi *cycle* dengan satu *chord*
   a. Mengkonstruksi *cycle* $C_p(r)$ secara melingkar
   b. Mengkonstruksi titik-titik $v_1, \dots, v_p$ searah jarum jam
   c. Mengkonstruksi garis-garis yang incident dengan titik $v_1, \dots, v_p$
   d. Mengkonstruksi garis *chord* yang menghubungkan titik v_1 dengan v_r
2. Menentukan jumlah garis-garis dan jumlah titik-titik pada *cycle* dengan satu *chord*
3. Menentukan himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titik.

   $Q(a)$ = $\{\pm a, \pm(a+1), \dots, \pm(a+\frac{q-2}{2})\}$ jika q genap

   $Q(a)$ = $\{0\} \cup \{\pm a, \pm(a+1), \dots, \pm(a+\frac{q-3}{2})\}$ jika q ganjil

   P(b) = $\{\pm b, \pm(b+1), \dots, \pm(b+\frac{p-2}{2})\}$ jika p genap

   P(b) = $\{0\} \cup \{\pm b, \pm(b+1), \dots, \pm(b+\frac{p-3}{2})\}$ jika p ganjil.

4. Melabeli garis-garis pada *cycle* dengan satu *chord* dengan fungsi $f\colon E \to Q$ bijektif.
5. Melabeli titik-titik pada *cycle* dengan satu *chord* dengan fungsi $f^*\colon V \to P$ bijektif.
6. *Cycle* dengan satu *chord* memenuhi pelabelan *super edge-graceful* $Q(a)P(b)$.

Contoh 3.3:
Pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG pada graf $C_4(3)$ untuk *a*=2 dan *b*=1

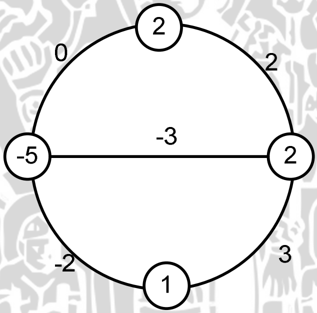
Graf $C_4(3)$ mempunyai jumlah titik 4 dan jumlah garis 5, jadi himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya adalah $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan

$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_1, v_3)\}$ karena jumlah titiknya genap dan jumlah garisnya ganjil untuk *a*=2 dan *b*=1 maka himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya adalah sebagai berikut :

Q(2)= $\{-3, -2,0,2,3\}$ dan *P*(1)= $\{-2, -1,1,2\}$

Garis-garis $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1), (v_1, v_3)$ dilabeli dengan {0,2,3,-2,-3}. Karena setiap garis pada graf $C_4(3)$ mempunyai kawan tepat satu di *Q*(2) dan *Q*(2) habis berkawan di *E*, maka jelas bahwa fungsi $f: E \to Q$ adalah bijektif.

Melabeli titik-titik pada graf $C_4(3)$ dengan definisi fungsi pelabelan titik sebagai berikut $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u, v)$, pada pelabelan titik-titiknya terdapat $f^*(v_1) = -5$ dimana $-5 \notin P(1)$ dan terdapat dua titik yang memiliki label sama sehingga pemetaan pada fungsi f^* bukan bijektif. Jadi, graf $C_4(3)$ tidak dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG seperti terlihat pada Gambar 3.8 berikut.



Gambar 3.8 Pelabelan pada graf $C_4(3)$ untuk *a*=2 dan *b*=1

Pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG pada graf $C_4(3)$ seperti yang telah dijabarkan di atas disajikan pada tabel 3.5.

Tabel 3.5 Pelabelan pada graf $C_4(3)$ untuk $a = 2$ dan $b = 1$

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
2	1	{-3, -2, 0, 2, 3}	{ -2, -1, 1, 2}	$f(v_1, v_2) = 0$ $f(v_2, v_3) = 2$ $f(v_3, v_4) = 3$ $f(v_1, v_4) = -2$ $f(v_1, v_3) = -3$	$f^*(v_1) = -5$ $f^*(v_2) = 2$ $f^*(v_3) = 2$ $f^*(v_4) = 1$

Contoh 3.4:
Pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG pada graf $C_{10}(6)$, misalkan $a = 1$ dan $b = 3$.

Dapat diketahui jumlah titik pada graf $C_{10}(6)$ adalah 10 dan jumlah garisnya adalah 11. Himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya adalah sebagai berikut :

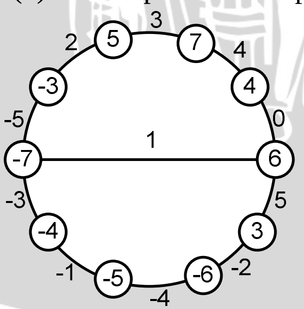
$V = \{v_1, v_2, \dots, v_{10}\}$
$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_9, v_{10}), (v_1, v_{10}), (v_1, v_6)\}$

Karena jumlah titiknya genap dan jumlah garisnya ganjil, maka himpunan nilai titik-titiknya dan himpunan label garis-garisnya adalah sebagai berikut:

$Q(1)$={-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5}
$P(3)=\{-7,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,7\}$

Sebelum melabeli garis dan titik terlebih dahulu menentukan titik v_1 dan titik-titik yang lain searah jarum jam. Kemudian melabeli garis-garis dan melabeli titik-titiknya. Pelabelan garis-garis dan titik-titiknya akan diuraikan sebai berikut :
Garis $(v_1, v_2) = 1$, $(v_2, v_3) = -5$, $(v_3, v_4) = 4$, $(v_4, v_5) = -3$, $(v_5, v_6) = 5$, $(v_6, v_7) = -2$, $(v_7, v_8) = -1$, $(v_8, v_9) = -4$, $(v_9, v_{10}) = 2$, $(v_1, v_{10}) = 3$, $(v_1, v_6) = 0$ dan titik $v_1 = 4, v_2 = -4, v_3 = -1, v_4 = 1, v_5 = 2, v_6 = 3, v_7 = -3, v_8 = -5, v_9 = -2, v_{10} = 5$.

Terlihat bahwa pelabelan garis-garis dan titik-titiknya satu-satu dan *onto*. Dengan kata lain, fungsi (f, f^*) adalah bijektif. Oleh karena keduanya bijektif, sehingga $C_{10}(6)$ dapat dilabeli dengan aturan pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG seperti terlihat pada Gambar 3.9



Gambar 3.9 pelabelan $Q(1)P(3)$-SEG pada graf $C_{10}(6)$

Berikut ini adalah tabel yang menjabarkan pelabelan titik-titik dan garis-garis pada graf $C_{10}(6)$.

Tabel 3.6 Pelabelan pada graf $C_{10}(6)$ untuk *a*=1 dan *b*=3

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Plabelan Titik**
1	3	{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}	{-7, -6, -5,-4, -3, 3, 4, 5, 6, 7}	$f(v_1,v_2)=1$ $f(v_2,v_3)=-5$ $f(v_3,v_4)=4$ $f(v_4,v_5)=-3$ $f(v_5,v_6)=5$ $f(v_6,v_7)=-2$ $f(v_7,v_8)=-1$ $f(v_8,v_9)=-4$ $f(v_9,v_{10})=2$ $f(v_1,v_{10})=3$ $f(v_1,v_6)=0$	$f^*(v_1)=4$ $f^*(v_2)=-4$ $f^*(v_3)=-1$ $f^*(v_4)=1$ $f^*(v_5)=2$ $f^*(v_6)=3$ $f^*(v_7)=-3$ $f^*(v_8)=-5$ $f^*(v_9)=-2$ $f^*(v_{10})=5$

Berikut adalah teorema yang menyatakan bahwa *cycle* dengan satu *chord* untuk *p*=2*n* dan *n*=4*k* hanya merupakan *Q*(1)*P*(1)-SEG.

Teorema 3.3
$C_{2n}(r)$ adalah *Q*(1)*P*(1)-SEG untuk $n=4k$

Bukti :

Cycle $C_{2n}(r)$ merupakan *cycle* dengan satu *chord* untuk *p* genap, maka himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya sebagai berikut :
$V=\{v_1,v_2,v_3,\dots,v_{2n}\}$ dan
$E=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),\dots,(v_{2n-1},v_{2n}),(v_1,v_{2n}),(v_1,v_r)\}$

Cycle dengan satu *chord* untuk *p*=2*n* mempunyai jumlah titik yang genap dan jumlah garis yang ganjil. Menurut definisi, jika *a*,*b*=1, jumlah titik genap dan jumlah garisnya ganjil maka himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya berturut-turut sebagai berikut:

$$Q(1) = \{-\left(1+\frac{2n-2}{2}\right), \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (1+\frac{2n-2}{2})\}$$

$$P(1) = \{-\left(1+\frac{2n-2}{2}\right), \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, (1+\frac{2n-2}{2})\}$$

Selanjutnya menentukan titik $v_1, v_2, \dots, v_{2n}$ searah jarum jam, kemudian menentukan r dan membuat garis *chord* yang menghubungkan titik v_1 dan v_r. Tiap-tiap garis pada *cycle* dengan satu *chord* dilabeli dengan himpunan label garis-garisnya dimana fungsinya adalah $f: E \to Q$ dan *f* bijektif.

a. Garis $(v_{8k}, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{2k-1}, v_{2k})$ dilabeli dengan 4k, -1,4k-1, -2, 4k-2,-3, ..., 4k-i+1, -i, ..., 3k+1, -k.
b. Garis $(v_{2k}, v_{2k+1}), (v_{2k+1}, v_{2k+2}), \dots, (v_{4k-1}, v_{4k})$ dilabeli dengan -3k, k+1, -3k+1, k+2, -3k+2, k+3, ..., -3k+i, k+i+1, ..., -2k-1, 2k.
c. Garis $(v_{4k}, v_{4k+1}), (v_{k+1}, v_{4k+2}), \dots, (v_{6k-1}, v_{6k})$ dilabeli dengan -4k, 1, -4k+1, 2, -4k+2, 3, -4k+3, ..., -4k+i-1, i, ..., -3k-1, k.
d. Garis $(v_{6k}, v_{6k+1}), (v_{6k+1}, v_{6k+2}), (v_{6k+2}, v_{6k+3}), \dots,$ (v_{8k-1}, v_{8k}) dilabeli dengan 3k, -k -1, 3k-1, -k-2, 3k-2, -k-3, ..., 3k-i, -k-i-1, ..., 2k+1, -2k.
e. Garis (v_1, v_r) dilabeli dengan 0.
$f(v_1, v_r) \to 0$
Fungsi *f* satu-satu dan onto, jadi *f* adalah bijektif.

Langkah selanjutnya melabeli titik-titiknya dengan himpunan nilai titik-titiknya dimana fungsi $f^*: V \to P$ yang didefinisikan $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u,v)$.

a. Titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k-1}$ dilabeli dengan 4k-1, 4k-2, 4k-3, ..., 2k+1.
b. Titik $v_{2k+1}, v_{2k+2}, v_{2k+3}, \dots, v_{4k-1}$ dilabeli dengan-2k+1, -2k+2, -2k+3, ..., -1.
c. Titik $v_{4k+2}, v_{4k+3}, v_{4k+4}, \dots, v_{6k-1}$ dilabeli dengan -4k+1, -4k+2, -4k+3,..., -2k-1.
d. Titik $v_{6k+1}, v_{6k+2}, v_{6k+3}, \dots, v_{8k-1}$ dilabeli dengan 2k-1, 2k-2, 2k-3, ..., 1.
e. Titik $v_{2k}, v_{4k}, v_{6k}, v_{8k}$ dilabeli dengan -4k, -2k, 4k, 2k.

Untuk mengetahui bahwa fungsi $f^*: V \to P$ bijektif, maka akan dibuktikan sebagai berikut :

1. f^* fungsi injektif
   Ambil sembarang $u, v \in V$ dengan $f^*(u) = f^*(v)$
   Akan dibuktikan bahwa $u = v$
   $f^*(u) = \sum_{(uv) \in E(G)} f(uv)$
   $f^*(v) = \sum_{(uv) \in E(G)} f(uv)$
   Karena $f^*(u) = f^*(v)$, maka $u = v$. Jadi, f^* injektif.
2. f^* fungsi surjektif
   Himpunan nilai titik-titiknya mempunyai kawan tepat satu dihimpunan titik-titiknya, jadi f^* surjektif.
   Karena f^* fungsi injektif dan surjektif maka f^* fungsi bijektif.

   Dengan demikian, karena pasangan pemetaan (f, f^*) pada graf $C_{2n}(r)$ untuk $a, b = 1$ keduanya sama-sama bijektif, maka f disebut pelabelan $Q(1)P(1)$-SEG. ■

Langkah-langkah pelabelan *super edge-graceful* $Q(1)P(1)$ pada $C_{2n}(r)$ untuk *p*=2*n* dan *n*=4k adalah sebagai berikut :

1. Mengkonstruksi *cycle* dengan satu *chord*
   a. Mengkonstruksi *cycle* $C_p(r)$ atau $C_{2n}(r)$ secara melingkar
   b. Mengkonstruksi titik-titik $v_1, \dots, v_{2n}$ searah jarum jam
   c. Mengkonstruksi garis-garis yang incident dengan titik $v_1, \dots, v_{2n}$
   d. Menentukan nilai r dan mengkonstruksi garis *chord* yang menghubungkan titik v_1 dengan v_r
2. Menentukan himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya. Jika p genap dan *a*,*b*=1 maka himpunannya sebagai berikut :

   $Q(1) = \{0\} \cup \{\pm 1, \pm(2), \dots, \pm(1 + \frac{2n-2}{2})\}$

   $P(1) = \{\pm 1, \pm(2), \dots, \pm(1 + \frac{2n-2}{2})\}$

3. Melabeli garis-garis pada $C_{2n}(r)$ dengan fungsi $f: E \to Q$ bijektif.
   a. Garis $(v_{8k}, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{2k-1}, v_{2k})$ dilabeli dengan 4k, -1,4k-1, -2, 4k-2,-3, ..., 4k-i+1, -i, ..., 3k+1, -k.
   b. Garis $(v_{2k}, v_{2k+1}), (v_{2k+1}, v_{2k+2}), \dots,$

(v_{4k-1}, v_{4k}) dilabeli dengan -3k, k+1, -3k+1, k+2, -3k+2, k+3, ..., -3k+i, k+i+1, ..., -2k-1, 2k.

c. Garis $(v_{4k}, v_{4k+1}), (v_{k+1}, v_{4k+2}), \dots, (v_{6k-1}, v_{6k})$ dilabeli dengan -4k, 1, -4k+1, 2, -4k+2, 3, -4k+3, ..., -4k+i-1, i, ..., -3k-1, k.

d. Garis $(v_{6k}, v_{6k+1}), (v_{6k+1}, v_{6k+2}),$ $(v_{6k+2}, v_{6k+3}), \dots, (v_{8k-1}, v_{8k})$ dilabeli dengan 3k, -k -1, 3k-1, -k-2, 3k-2, -k-3, ..., 3k-i, -k-i-1, ..., 2k+1, -2k.

e. Garis (v_1, v_r) dilabeli dengan 0.

4. Melabeli titik-titik pada $C_{2n}(r)$ dengan fungsi $f^*: V \to P$ bijektif.
   a. Titik $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{2k-1}$ dilabeli dengan 4k-1, 4k-2, 4k-3, ..., 2k+1.
   b. Titik $v_{2k+1}, v_{2k+2}, v_{2k+3}, \dots, v_{4k-1}$ dilabeli dengan-2k+1, -2k+2, -2k+3, ..., -1.
   c. Titik $v_{4k+2}, v_{4k+3}, v_{4k+4}, \dots, v_{6k-1}$ dilabeli dengan -4k+1, -4k+2, -4k+3, ..., -2k-1.
   d. Titik $v_{6k+1}, v_{6k+2}, v_{6k+3}, \dots, v_{8k-1}$ dilabeli dengan 2k-1, 2k-2, 2k-3, ..., 1.
   e. Titik $v_{2k}, v_{4k}, v_{6k}, v_{8k}$ dilabeli dengan -4k, -2k, 4k, 2k.
5. *Cycle* $C_{2n}(r)$ memenuhi pelabelan *super edge-graceful* $Q(1)P(1)$.

Contoh 3.5:

Pelabelan *Q*(1)*P*(1)-SEG pada $C_8(5)$

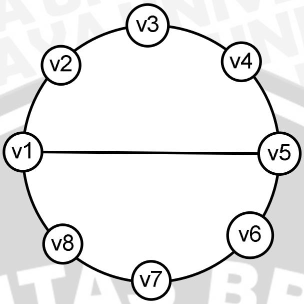
1. Mengkonstruksi graf $C_8(5)$

   Dapat diketahui $p = 8 = 2(4)$, jadi $n = 4$ dan $k = 1$ sehingga dapat diketahui jumlah titik pada $C_8(5)$ adalah 8 dan jumlah garisnya 9, sedangkan nilai $r = 5$. maka himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya sebagai berikut :

   $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_8\}$

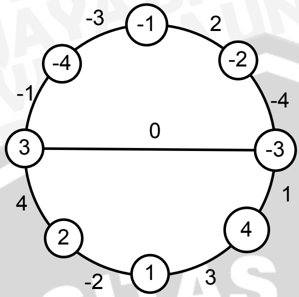
   $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_7, v_8), (v_1, v_8), (v_1, v_5)\}$

   kemudian menentukan titik $v_1, \dots, v_8$ searah jarum jam, seperti terlihat pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 $C_8(5)$

2. Karena jumlah titiknya 8 dan jumlah garisnya 9 maka himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya berturut-turut sebagai berikut :
   $Q(1)$= {-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4}
   $P(1)$= {-4,-3,-2,-1,1,2,3,4}
3. Melabeli garis-garis pada $C_8(5)$.
   a. Garis $(v_8, v_1), (v_1, v_2)$ dilabeli dengan 4, -1.
   b. Garis $(v_2, v_3), (v_3, v_4)$ dilabeli dengan -3, 2.
   c. Garis $(v_4, v_5), (v_5, v_6)$ dilabeli dengan -4, 1.
   d. Garis $(v_6, v_7), (v_7, v_8)$ dilabeli dengan 3,-2.
   e. Garis (v_1, v_5) dilabeli dengan 0.
      karena f satu-satu dan *onto* maka f bijektif.
4. Melabeli titik-titik pada $C_8(5)$.
   a. Titik v_1 dilabeli dengan 3.
   b. Titik v_3 dilabeli dengan -1.
   c. Titik v_5 dilabeli dengan -3.
   d. Titik v_7 dilabeli dengan 1.
   e. Titik v_2, v_4, v_6, v_8 dilabeli dengan -4, -2, 4, 2.
      karena f^* satu-satu dan *onto* maka f^* bijektif.
5. Sehingga $C_8(5)$ dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *super edge-graceful* $Q(1)P(1)$ sebagaimana terlihat pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 pelabelan *super edge-graceful* $Q(1)P(1)$untuk $C_8(5)$

Pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG pada graf $C_8(5)$ yang telah dijabarkan diatas terlihat pada tabel 3.7.

Tabel 3.7 Pelabelan pada graf $C_8(5)$ untuk $a, b = 1$

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	2	{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}	{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}	$f(v_1, v_2) = -1$ $f(v_2, v_3) = -3$ $f(v_3, v_4) = 2$ $f(v_4, v_5) = -4$ $f(v_5, v_6) = 1$ $f(v_6, v_7) = 3$ $f(v_7, v_8) = -2$ $f(v_1, v_5) = 0$ $f(v_1, v_8) = 4$	$f^*(v_1) = 3$ $f^*(v_2) = -4$ $f^*(v_3) = -1$ $f^*(v_4) = -2$ $f^*(v_5) = -3$ $f^*(v_6) = 4$ $f^*(v_7) = 1$ $f^*(v_8) = 2$

Langkah-langkah pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG pada graf C_{2n} (*n*+1) adalah sebagai berikut :

1. Mengkonstrusi graf C_{2n} (*n*+1)
   a. Menentukan jumlah titik-titik dan jumlah garis-garis pada graf C_{2n} (*n*+1)
   b. Menentukan titik $v_1, \dots, v_{2n}$ searah jarum jam
   c. Menentukan garis *chord*
2. Menentukan himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garis sesuai definisi

3. Melabeli garis-garis pada graf C_{2n} (*n*+1) dengan fungsi $f: E \rightarrow Q$ bijektif
4. Melabeli titik-titik pada graf C_{2n} (*n*+1) dengan fungsi $f^*: V \rightarrow P$ bijektif
5. Graf C_{2n} (*n*+1) memenuhi pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG

3.3 Pelabelan *super edge-graceful* $\boldsymbol{Q(a)P(b)}$ pada Graf *Dumbbell*

Pada pembahasan berikut akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan *super edge-graceful* *Q*(*a*)*P*(*b*) pada Graf *Dumbbell*.

Teorema 3.4

Graf *Dumbbell* D(3,3) adalah *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG untuk

1. $a = 1$ dan $b = 1,2,3$
2. $a = 2,3$ dan $b = 1$
3. $a \geq 4$ dan $b = 2a + 1$
4. $a \geq 4$ bukan *Q*(*a*)*P*(1)-SEG.

Bukti :

Pada graf D(3,3) terdapat 6 titik dan 7 garis, himpunan titik-titik dan himpunan garis-garisnya sebagai berikut :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3\}$$

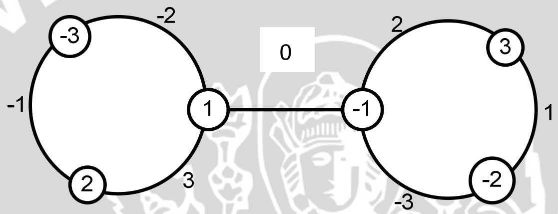
$$E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_1, u_1), (u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_2, u_3)\}$$

Himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya berturut-turut sebagai berikut :

$$Q(a) = \{0, \pm a, \pm(a+1), \pm(a+2)\}$$
$$P(b) = \{\pm b, \pm(b+1), \pm(b+2)\}$$

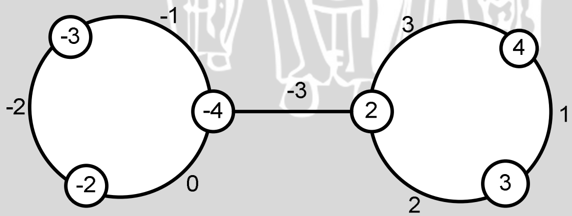
Selanjutnya menentukan titik-titik dan garis-garisnya, titik v_1, v_2, v_3 dan garis $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)$ searah jarum jam, pada titik u_1, u_2, u_3 dan garis $(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_2, u_3)$ berlawanan arah jarum jam, sedangkan garis (v_1, u_1) merupakan garis yang menghubungkan dua *cycle* tersebut, kemudian melabeli titik-titik dan garis-garisnya. Pada kasus :

1. a. Untuk *a*=1 dan *b*=1 didapatkan himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya sebagai berikut :
$Q(1) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
$P(1) = \{-3,-2,-1,1,2,3\}$
Melabeli garis (v_1, u_1) dengan 0, (v_1, v_2) dengan 2, (v_2, v_3) dengan 1, (v_1, v_3) dengan -3, (u_1, u_2) dengan -2, (u_2, u_3) dengan -1, (u_1, u_3) dengan 3. Definisi fungsi dari pelabelan titik adalah $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u,v)$ sehingga didapatkan pelabelan titik $v_1 = -1,\ v_2 = 3,\ v_3 = -2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -3, u_3 = 2$. Seperti pada Gambar 3.12 ■



Gambar 3.12 *Q*(1)*P*(1)-SEG pada D(3,3)

b. Untuk *b*=2 didapatkan himpunan nilai titik-titiknya yaitu $P(2) = \{-4,-3,-2,2,3,4\}$.
Garis (v_1, u_1) dilabeli dengan -3, (v_1, v_2) dengan 3, (v_2, v_3) dengan 1, (v_1, v_3) dengan 2, (u_1, u_2) dengan -1, (u_2, u_3) dengan -2, (u_1, u_3) dengan 0. Karena fungsi $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u,v)$ jadi, didapatkan pelabelan titik $v_1 = 2,\ v_2 = 4,\ v_3 = 3,\ u_1 = -4,\ u_2 = -3,\ u_3 = -2.$ Seperti terlihat pada Gambar 3.13 ■



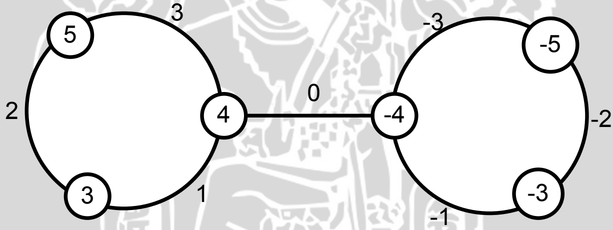
Gambar 3.13 *Q*(1)*P*(2)-SEG pada D(3,3)

c. Untuk b=3 didapatkan himpunan nilai titik-titiknya sebagai berikut : $P(3) = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\}$

Melabeli garis $f(v_1, u_1)$ dengan 0
$f(v_1, v_2)$ dengan -3
$f(v_2, v_3)$ dengan -2
$f(v_1, v_3)$ dengan -1
$f(u_1, u_2)$ dengan 3
$f(u_2, u_3)$ dengan 2
$f(u_1, u_3)$ dengan 1

Melabeli titik $f^*(v_1) = -4$
$f^*(v_2) = -5$
$f^*(v_3) = -3$
$f^*(u_1) = 4$
$f^*(u_2) = 5$
$f^*(u_3) = 3$

Seperti pada Gambar 3.14 di bawah ini ■

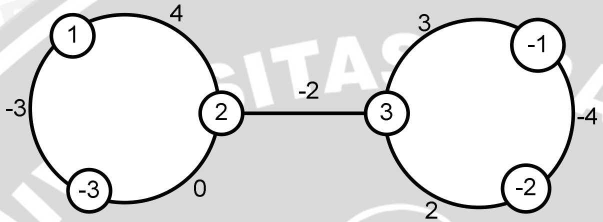


Gambar 3.14 $Q(1)P(3)$-SEG pada D(3,3)

2. a. Untuk a=2 dan b=1 didapatkan himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya sebagai berikut :
$Q(2) = \{-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4\}$
$P(1) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

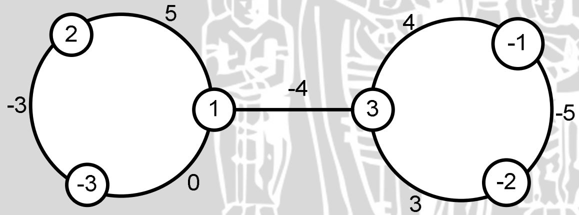
Kemudian melabeli garis-garisnya seperti uraian berikut : garis $(v_1, u_1) = -2$, $(v_1, v_2) = 3$, $(v_2, v_3) = -4$, $(v_1, v_3) = 2$, $(u_1, u_2) = 4$, $(u_2, u_3) = -3$, $(u_1, u_3) = 0$. Karena fungsi $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u, v)$, jadi pelabelan titik-titiknya seperti uraian berikut :
$v_1 = (v_1, u_1) + (v_1, v_2) + (v_1, v_3) = -2 + 3 + 2 = 3$

$v_2 = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) = 3 - 4 = -1$
$v_3 = (v_2, v_3) + (v_1, v_3) = -4 + 2 = -2$
$u_1 = (v_1, u_1) + (u_1, u_2) + (u_1, u_3) = -2 + 4 + 0 = 2$
$u_2 = (u_1, u_2) + (u_2, u_3) = 4 - 3 = 1$
$u_3 = (u_2, u_3) + (u_1, u_3) = -3 + 0 = -3$
Seperti terlihat pada Gambar 3.15 ■



Gambar 3.15 $Q(2)P(1)$-SEG pada D(3,3)

b. Untuk a=3 didapatkan himpunan label garis-garisnya yaitu $Q(3) = \{-5, -4, -3, 0, 3, 4, 5\}$.
Melabeli garis (v_1, u_1) dengan -4, (v_1, v_2) dengan 4, (v_2, v_3) dengan -5, (v_1, v_3) dengan 3, (u_1, u_2) dengan 5, (u_2, u_3) dengan -3, (u_1, u_3) dengan 0. Definisi fungsi dari pelabelan titik adalah $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u, v)$ sehingga didapatkan pelabelan titik $v_1 = 3$, $v_2 = -1$, $v_3 = -2$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = -3$. Seperti pada Gambar 3.16 ■



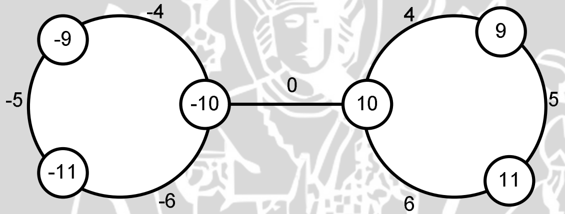
Gambar 3.16 $Q(3)P(1)$-SEG pada D(3,3)

3. Untuk $a \geq 4$ dan b=2a+1. Untuk $a = 4$ didapatkan himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya sebagai berikut :
$Q(4) = \{-6, -5, -4, 0, 4, 5, 6\}$
$P(2a + 1) = P(9) = \{-11, -10, -9, 9, 10, 11\}$

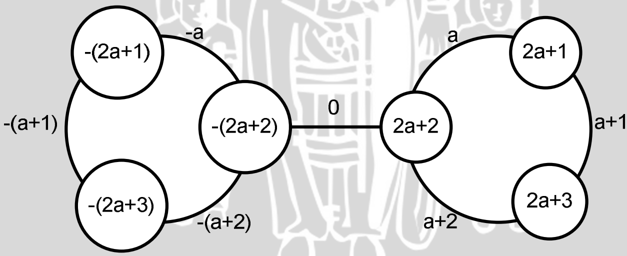
pelabelan garisnya yaitu $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_1, u_1)$, $(u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_2, u_3)$ dilabeli dengan 4,6,5,0,-4,-6,-5. Pelabelan titiknya sebagai berikut :

$v_1 = (v_1, u_1) + (v_1, v_2) + (v_1, v_3) = 0 + 4 + 6 = 10$
$v_2 = (v_1, v_2) + (v_2, v_3) = 4 + 5 = 9$
$v_3 = (v_2, v_3) + (v_1, v_3) = 5 + 6 = 11$
$u_1 = (v_1, u_1) + (u_1, u_2) + (u_1, u_3) = 0 - 4 - 6 = -11$
$u_2 = (u_1, u_2) + (u_2, u_3) = -4 - 5 = -9$
$u_3 = (u_2, u_3) + (u_1, u_3) = -5 - 6 = -11$

Begitu juga untuk $a > 4$, maka pelabelan garisnya adalah $(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_1, u_1), (u_1, u_2), (u_1, u_3), (u_2, u_3)$ dilabeli dengan *a*, *a*+1, *a*+2, 0, -*a*, -(*a*+1), -(*a*+2) dan pelabelan titiknya adalah $v_1, v_2, v_3, u_1, u_2, u_3$ dilabeli dengan -(2*a*+3), -(2*a*+2), -(2*a*+1), (2*a*+1), (2*a*+2), (2*a*+3). Seperti terlihat pada Gambar 3.17 ■



Gambar 3.17 *Q*(4)*P*(9)-SEG pada D(3,3)



Gambar 3.18 pelabelan *Q*(*a*)*P*(2*a*+1)-SEG pada D(3,3)

4. Untuk $a \geq 4$, misalkan $a = 4$ dan $b = 1$ didapatkan himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya sebagai berikut :

$Q(4) = \{-6, -5, -4, 0, 4, 5, 6\}$

$P(1) = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$

Pelabelan titik merupakan penjumlahan dari label garis-garis yang incident dengan titik tersebut, jika $a \geq 4$ seharusnya $b = 2a + 1$. Karena pada kasus 4 diatas b=1, maka himpunan nilai titik-titiknya tidak memenuhi syarat pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG. Sehingga D(3,3) untuk $a \geq 4$ dan b=1 bukan merupakan pelabelan *Q*(*a*)*P*(1)-SEG.

Pada pembuktian di atas terlihat bahwa pada kasus 1,2,3 setiap himpunan garis-garisnya memiliki kawan tepat satu pada himpunan label garis-garisnya, begitu juga pada himpunan titik-titiknya memiliki kawan tepat satu pada himpunan nilai titik-titiknya, sehingga pemetaan fungsi f dan fungsi f^* bijektif. Oleh karena itu kasus di atas dapat dilabeli dengan pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG kecuali kasus 4. ■

Pelabelan pada kasus-kasus di atas akan dijabarkan kembali pada tabel 3.8 berikut.

Tabel 3.8 Pelabelan pada graf D(3,3)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	1	{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}	{-3, -2, -1, 1, 2, 3}	$f(v_1, u_1) = 0$ $f(v_1, v_2) = 2$ $f(v_2, v_3) = 1$ $f(v_1, v_3) = -3$ $f(u_1, u_2) = -2$ $f(u_2, u_3) = -1$ $f(u_1, u_3) = 3$	$f^*(v_1) = -1$ $f^*(v_2) = 3$ $f^*(v_3) = -2$ $f^*(u_1) = 1$ $f^*(u_2) = -3$ $f^*(u_3) = 2$
	2		{-4, -3, -2, 2, 3, 4}	$f(v_1, u_1) = -3$ $f(v_1, v_2) = 3$ $f(v_2, v_3) = 1$ $f(v_1, v_3) = 2$ $f(u_1, u_2) = -1$ $f(u_2, u_3) = -2$ $f(u_1, u_3) = 0$	$f^*(v_1) = 2$ $f^*(v_2) = 4$ $f^*(v_3) = 3$ $f^*(u_1) = -4$ $f^*(u_2) = -3$ $f^*(u_3) = -2$

Lanjutan tabel 3.8 Pelabelan pada graf D(3,3)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	3	{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}	{-5, -4, -3, 3, 4, 5}	$f(v_1,u_1) = 0$ $f(v_1,v_2) = -3$ $f(v_2,v_3) = -2$ $f(v_1,v_3) = -1$ $f(u_1,u_2) = 3$ $f(u_2,u_3) = 2$ $f(u_1,u_3) = 1$	$f^*(v_1) = -4$ $f^*(v_2) = -5$ $f^*(v_3) = -3$ $f^*(u_1) = 4$ $f^*(u_2) = 5$ $f^*(u_3) = 3$
2	1	{-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4}	{-3, -2, -1, 1, 2, 3}	$f(v_1,u_1) = -2$ $f(v_1,v_2) = 3$ $f(v_2,v_3) = -4$ $f(v_1,v_3) = 2$ $f(u_1,u_2) = 4$ $f(u_2,u_3) = -3$ $f(u_1,u_3) = 0$	$f^*(v_1) = 3$ $f^*(v_2) = -1$ $f^*(v_3) = -2$ $f^*(u_1) = 2$ $f^*(u_2) = 1$ $f^*(u_3) = -3$
3		{-5, -4, -3, 0, 3, 4, 5}		$f(v_1,u_1) = -4$ $f(v_1,v_2) = 4$ $f(v_2,v_3) = -5$ $f(v_1,v_3) = 3$ $f(u_1,u_2) = 1$ $f(u_2,u_3) = 2$ $f(u_1,u_3) = -3$	$f^*(v_1) = 3$ $f^*(v_2) = -1$ $f^*(v_3) = -2$ $f^*(u_1) = 1$ $f^*(u_2) = 2$ $f^*(u_3) = -3$
4	9	{-6, -5, -4, 0, 4, 5, 6}	{-11, -10, -9, 9, 10, 11}	$f(v_1,u_1) = 0$ $f(v_1,v_2) = 4$ $f(v_2,v_3) = 5$ $f(v_1,v_3) = 6$ $f(u_1,u_2) = -4$ $f(u_2,u_3) = -5$ $f(u_1,u_3) = -6$	$f^*(v_1) = 10$ $f^*(v_2) = 9$ $f^*(v_3) = 11$ $f^*(u_1) = -10$ $f^*(u_2) = -9$ $f^*(u_3) = -11$
	1		{-3, -2, -1, 1, 2, 3}	-	-

Teorema berikut akan menunjukkan bahwa graf D(4,4) adalah pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG.

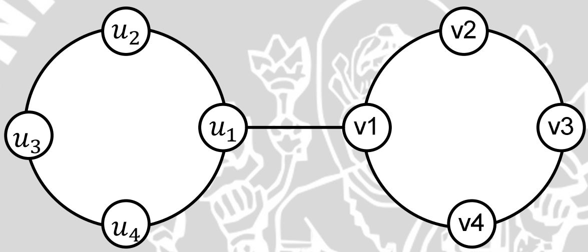
Teorema 3.5

Graf D(4,4) adalah $Q(a)P(b)$-SEG untuk

1. $a = 1$ dan $b = 1,2,3$
2. $a = 2,3,4$ dan $b = 1$

Bukti :

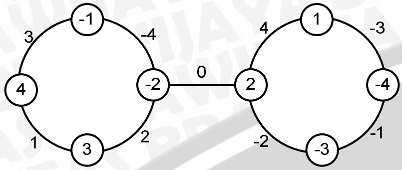
Graf D(4,4) adalah graf (8,9), mempunyai titik 8 dan garis 9. Titik v_1, v_2, v_3, v_4 searah jarum jam dan titik u_1, u_2, u_3, u_4 berlawanan arah jarum jam. Seperti Gambar 3.19 berikut.



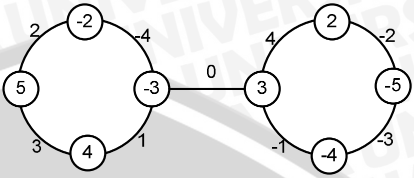
Gambar 3.19 Graf D(4,4)

Himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya adalah $Q(a) = \{0, \pm a, \pm(a+1), \pm(a+2), \pm(a+3)\}$ dan $P(b) = \{\pm b, \pm(b+1), \pm(b+2), \pm(b+3)\}$. Pada kasus :

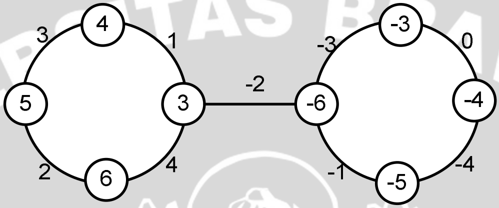
1. Untuk $a = 1$ dan $b = 1$ didapatkan himpunan label garis-garis $Q(1) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ dan himpunan nilai titik-titik $P(1) = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$.
   Untuk $b = 2$ didapatkan himpunan nilai titik-titik $P(2) = \{-5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5\}$.
   Untuk $b = 3$ didapatkan himpunan nilai titik-titik $P(3) = \{-6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6\}$.
   Pelabelan D(4,4) terlihat pada Gambar 3.20 di bawah ini ■



$Q(1)P(1)$-SEG pada D(4,4)



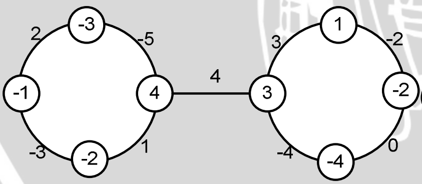
$Q(1)P(2)$-SEG pada D(4,4)



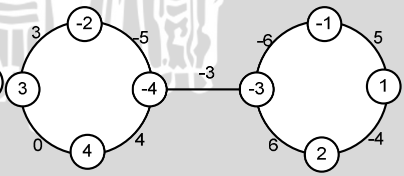
$Q(1)P(3)$-SEG pada D(4,4)

Gambar 3.20 Pelabelan pada D(4,4) untuk $a = 1$ dan $b = 1,2,3$

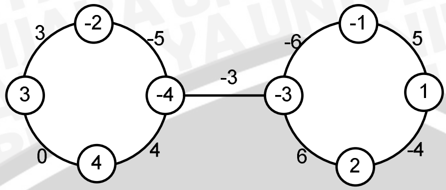
2. Untuk $a = 2$ dan $b = 1$ didapatkan himpunan label garis-garis $Q(2) = \{-5,-4,-3,-2,0,2,3,4,5\}$ dan himpunan nilai titik-titik $P(1) = \{-4,-3,-2,-1,1,2,3,4\}$.
   Untuk $a = 3$ didapatkan himpunan label garis-garisnya yaitu $Q(3) = \{-6,-5,-4,-3,0,3,4,5,6\}$.
   Untuk $a = 4$ didapatkan himpunan label garis-garisnya yaitu $Q(4) = \{-7,-6,-5,-4,0,4,5,6,7\}$. Pelabelannya terlihat pada Gambar 3.21 berikut. ■



$Q(2)P(1)$-SEG pada D(4,4)



$Q(3)P(1)$-SEG pada D(4,4)



$Q(4)P(1)$-SEG pada D(4,4)

Gambar 3.21 Pelabelan pada D(4,4) untuk $a = 2{,}3{,}4$ dan $b = 1$

Pada Gambar di atas terlihat jelas bahwa fungsi pelabelan garis $f: E \to Q$ bijektif dan fungsi pelabelan titik $f^*: V \to P$ juga bijektif. Oleh karena itu f merupakan pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG. ■

Tabel 3.9 berikut memuat pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG sesuai dengan kasus-kasus pada graf D(4,4) seperti yang telah dijabarkan di atas.

Tabel 3.9 Pelabelan pada graf D(4,4)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	1	{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}	{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}	$f(v_1,u_1) = 0$ $f(v_1,v_2) = 4$ $f(v_2,v_3) = -3$ $f(v_3,v_4) = -1$ $f(v_1,v_4) = -2$ $f(u_1,u_2) = -4$ $f(u_2,u_3) = 3$ $f(u_3,u_4) = 1$ $f(u_1,u_4) = 2$	$f^*(v_1) = 2$ $f^*(v_2) = 1$ $f^*(v_3) = -4$ $f^*(v_4) = -3$ $f^*(u_1) = -2$ $f^*(u_2) = -1$ $f^*(u_3) = 4$ $f^*(u_4) = 3$
	2		{-5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5}	$f(v_1,u_1) = 0$ $f(v_1,v_2) = 4$ $f(v_2,v_3) = -2$ $f(v_3,v_4) = -3$ $f(v_1,v_4) = -1$ $f(u_1,u_2) = -4$ $f(u_2,u_3) = 2$ $f(u_3,u_4) = 3$ $f(u_1,u_4) = 1$	$f^*(v_1) = 3$ $f^*(v_2) = 2$ $f^*(v_3) = -5$ $f^*(v_4) = -4$ $f^*(u_1) = -3$ $f^*(u_2) = -2$ $f^*(u_3) = 5$ $f^*(u_4) = 4$

Lanjutan tabel 3.9 Pelabelan pada graf D(4,4)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	3	{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}	{-6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6}	$f(v_1,u_1)=-2$ $f(v_1,v_2)=-3$ $f(v_2,v_3)=0$ $f(v_3,v_4)=-4$ $f(v_1,v_4)=-1$ $f(u_1,u_2)=1$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=2$ $f(u_1,u_4)=4$	$f^*(v_1)=-6$ $f^*(v_2)=-3$ $f^*(v_3)=-4$ $f^*(v_4)=-5$ $f^*(u_1)=3$ $f^*(u_2)=4$ $f^*(u_3)=5$ $f^*(u_4)=6$
2	1	{-5, -4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 5}	{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4}	$f(v_1,u_1)=4$ $f(v_1,v_2)=3$ $f(v_2,v_3)=-2$ $f(v_3,v_4)=0$ $f(v_1,v_4)=-4$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=2$ $f(u_3,u_4)=-3$ $f(u_1,u_4)=1$	$f^*(v_1)=3$ $f^*(v_2)=1$ $f^*(v_3)=-2$ $f^*(v_4)=-4$ $f^*(u_1)=4$ $f^*(u_2)=-3$ $f^*(u_3)=-1$ $f^*(u_4)=-2$
3		{-6, -5, -4, -3, 0, 3, 4, 5, 6}		$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=-6$ $f(v_2,v_3)=5$ $f(v_3,v_4)=-4$ $f(v_1,v_4)=6$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=0$ $f(u_1,u_4)=4$	$f^*(v_1)=-3$ $f^*(v_2)=-1$ $f^*(v_3)=1$ $f^*(v_4)=2$ $f^*(u_1)=-4$ $f^*(u_2)=-2$ $f^*(u_3)=3$ $f^*(u_4)=4$
4		{-7, -6, -5, -4, 0, 4, 5, 6, 7}		$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=-6$ $f(v_2,v_3)=5$ $f(v_3,v_4)=-4$ $f(v_1,v_4)=6$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=0$ $f(u_1,u_4)=4$	$f^*(v_1)=-3$ $f^*(v_2)=-1$ $f^*(v_3)=1$ $f^*(v_4)=2$ $f^*(u_1)=-4$ $f^*(u_2)=-2$ $f^*(u_3)=3$ $f^*(u_4)=4$

Teorema berikut akan menunjukkan bahwa D(5,5) merupakan graf $Q(a)P(b)$-SEG.

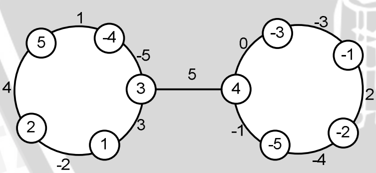
Teorema 3.6
Graf D(5,5) adalah Q(a)P(b)-SEG untuk

1. $a = 1$ dan $b = 1,2,3,4$
2. $a = 2$ dan $b = 1,2,3,4,5,6$
3. $a = 3,4,5$ dan $b = 1$

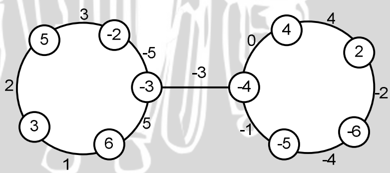
Bukti :

Graf D(5,5) adalah graf dengan p genap, mempunyai himpunan titik-titik $v_1, v_2, v_3, v_4, u_1, u_2, u_3, u_4$. Titik v_1, v_2, v_3, v_4 searah jarum jam dan titik u_1, u_2, u_3, u_4 berlawanan arah jarum jam, atau sebaliknya. Pada kasus :

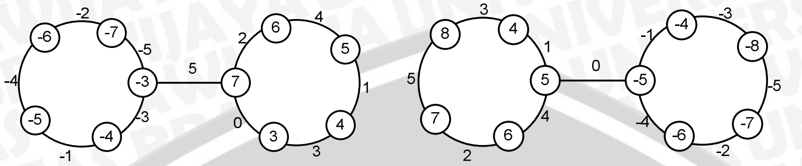
1. Untuk $a = 1$ dan $b = 1$ mempunyai himpunan label garis-garis $Q(1) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ dan himpunan nilai titik-titik $P(1) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
   Untuk $b = 2$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(2) = \{-6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6\}$
   Untuk $b = 3$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(3) = \{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   Untuk $b = 4$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(4) = \{-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   Pelabelannya terlihat pada Gambar 3.22 ■



$Q(1)P(1)$-SEG pada graf D(5,5)



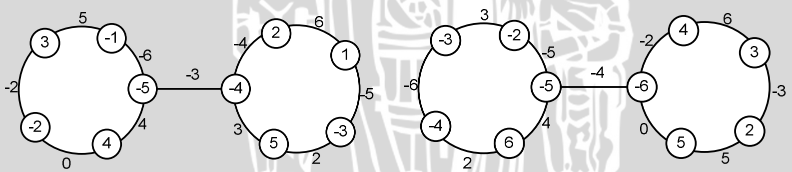
$Q(1)P(2)$-SEG pada graf D(5,5)



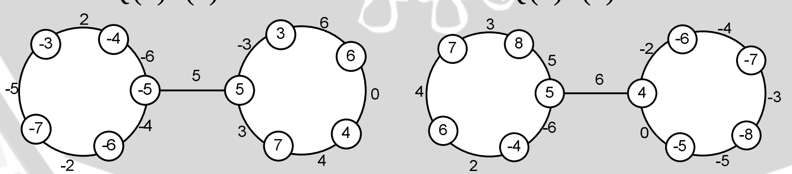
$Q(1)P(3)$-SEG pada graf D(5,5) $Q(1)P(4)$-SEG pada graf D(5,5)

Gambar 3.22 Pelabelan pada graf D(5,5) untuk $a = 1$ dan $b = 1,2,3,4$

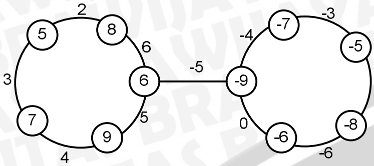
2. Untuk $a = 2$ dan $b = 1$ mempunyai himpunan label garis-garis $Q(2) = \{-6,-5,-4,-3,-2,0,2,3,4,5,6\}$ dan himpunan nilai titik-titik $P(1) = \{-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5\}$
Untuk $b = 2$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(2) = \{-6,-5,-4,-3,-2,2,3,4,5,6\}$
Untuk $b = 3$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(3) = \{-7,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,7\}$
Untuk $b = 4$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(4) = \{-8,-7,-6,-5,-4,4,5,6,7,8\}$
Untuk $b = 5$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(5) = \{-9,-8,-7,-6,-5,5,6,7,8,9\}$
Untuk $b = 6$ mempunyai himpunan nilai titik-titik $P(6) = \{-10,-9,-8,-7,-6,6,7,8,9,10\}$
Pelabelannya terlihat pada Gambar 3.23 ■



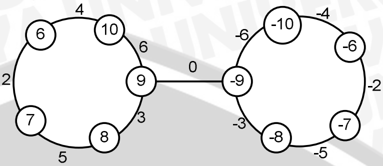
$Q(2)P(1)$-SEG $Q(2)P(2)$-SEG



$Q(2)P(3)$-SEG $Q(2)P(4)$-SEG



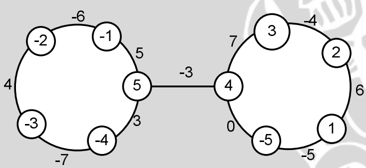
$Q(2)P(5)$-SEG



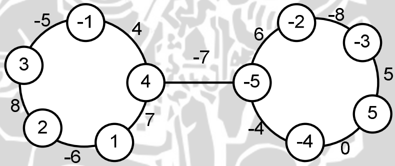
$Q(2)P(6)$-SEG

Gambar 3.23 Pelabelan pada graf D(5,5) untuk $a = 2$ dan $b = 1,2,3,4,5,6$

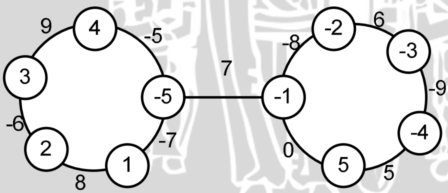
3. Untuk $a = 3$ dan $b = 1$ mempunyai himpunan label $Q(3) = \{-7, -6, -5, -4, -3, 0, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan himpunan label $P(1) = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
Untuk $a = 4$ mempunyai himpunan label garis-garis $Q(4) = \{-8, -7, -6, -5, -4, 0, 4, 5, 6, 7, 8\}$
Untuk $a = 5$ mempunyai himpunan label garis-garis $Q(5) = \{-9, -8, -7, -6, -5, 0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ■
Pelabelannya terlihat pada Gambar 3.24



$Q(3)P(1)$-SEG



$Q(4)P(1)$-SEG



$Q(5)P(1)$-SEG

Gambar 3.24 Pelabelan pada graf D(5,5) untuk $a = 3,4,5$ dan $b = 1$

Terlihat jelas bahwa pada gambar-gambar di atas pelabelan garis-garis dan titik-titiknya adalah bijektif. Jadi D(5,5) adalah graf $Q(a)P(b)$-SEG. ■

Pelabelan pada graf D(5,5) pada kasus tertentu yang telah dijabarkan di atas disajikan kembali dalam tabel di bawah ini.

Tabel 3.10 Pelabelan pada graf D(5,5)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan garis**	**Pelabelan titik**
1	1	{-5,-4,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}	{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5}	$f(v_1,u_1)=5$ $f(v_1,v_2)=0$ $f(v_2,v_3)=-3$ $f(v_3,v_4)=2$ $f(v_4,v_5)=-4$ $f(v_1,v_5)=-1$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=1$ $f(u_3,u_4)=4$ $f(u_4,u_5)=-2$ $f(u_1,u_5)=3$	$f^*(v_1)=4$ $f^*(v_2)=-3$ $f^*(v_3)=-1$ $f^*(v_4)=-2$ $f^*(v_5)=-5$ $f^*(u_1)=3$ $f^*(u_2)=-4$ $f^*(u_3)=5$ $f^*(u_4)=2$ $f^*(u_5)=1$
	2		{-6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6}	$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=0$ $f(v_2,v_3)=4$ $f(v_3,v_4)=-2$ $f(v_4,v_5)=-4$ $f(v_1,v_5)=-1$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=2$ $f(u_4,u_5)=1$ $f(u_1,u_5)=5$	$f^*(v_1)=-4$ $f^*(v_2)=4$ $f^*(v_3)=2$ $f^*(v_4)=-6$ $f^*(v_5)=-5$ $f^*(u_1)=-3$ $f^*(u_2)=-2$ $f^*(u_3)=5$ $f^*(u_4)=3$ $f^*(u_5)=6$

Lanjutan Tabel 3.10 Pelabelan pada graf D(5,5)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan garis**	**Pelabelan titik**
1	3	{-5,-4,-3, -2,-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5}	{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7}	$f(v_1,u_1)=5$ $f(v_1,v_2)=2$ $f(v_2,v_3)=4$ $f(v_3,v_4)=1$ $f(v_4,v_5)=3$ $f(v_1,v_5)=0$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=-2$ $f(u_3,u_4)=-4$ $f(u_4,u_5)=-1$ $f(u_1,u_5)=-3$	$f^*(v_1)=7$ $f^*(v_2)=6$ $f^*(v_3)=5$ $f^*(v_4)=4$ $f^*(v_5)=3$ $f^*(u_1)=-3$ $f^*(u_2)=-7$ $f^*(u_3)=-6$ $f^*(u_4)=-5$ $f^*(u_5)=-4$
	4		{-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8}	$f(v_1,u_1)=0$ $f(v_1,v_2)=-1$ $f(v_2,v_3)=-3$ $f(v_3,v_4)=-5$ $f(v_4,v_5)=-2$ $f(v_1,v_5)=-4$ $f(u_1,u_2)=1$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=5$ $f(u_4,u_5)=2$ $f(u_1,u_5)=4$	$f^*(v_1)=-5$ $f^*(v_2)=-4$ $f^*(v_3)=-8$ $f^*(v_4)=-7$ $f^*(v_5)=-6$ $f^*(u_1)=5$ $f^*(u_2)=4$ $f^*(u_3)=8$ $f^*(u_4)=7$ $f^*(u_5)=6$
2	1	{-6,-5,-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 5, 6}	{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5}	$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=-4$ $f(v_2,v_3)=6$ $f(v_3,v_4)=-5$ $f(v_4,v_5)=2$ $f(v_1,v_5)=3$ $f(u_1,u_2)=-6$ $f(u_2,u_3)=5$ $f(u_3,u_4)=-2$ $f(u_4,u_5)=0$ $f(u_1,u_5)=4$	$f^*(v_1)=-4$ $f^*(v_2)=2$ $f^*(v_3)=1$ $f^*(v_4)=-3$ $f^*(v_5)=5$ $f^*(u_1)=-5$ $f^*(u_2)=-1$ $f^*(u_3)=3$ $f^*(u_4)=-2$ $f^*(u_5)=4$

Lanjutan Tabel 3.10 Pelabelan pada graf D(5,5)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan garis**	**Pelabelan titik**
2	2	{-6,-5,-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 5, 6}	{-6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6}	$f(v_1,u_1)=-4$ $f(v_1,v_2)=-2$ $f(v_2,v_3)=6$ $f(v_3,v_4)=-3$ $f(v_4,v_5)=5$ $f(v_1,v_5)=0$ $f(u_1,u_2)=-5$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=-6$ $f(u_4,u_5)=2$ $f(u_1,u_5)=4$	$f^*(v_1)=-6$ $f^*(v_2)=4$ $f^*(v_3)=3$ $f^*(v_4)=2$ $f^*(v_5)=5$ $f^*(u_1)=-5$ $f^*(u_2)=-2$ $f^*(u_3)=-3$ $f^*(u_4)=-4$ $f^*(u_5)=-6$
	3		{-7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7}	$f(v_1,u_1)=5$ $f(v_1,v_2)=-3$ $f(v_2,v_3)=6$ $f(v_3,v_4)=0$ $f(v_4,v_5)=4$ $f(v_1,v_5)=3$ $f(u_1,u_2)=-6$ $f(u_2,u_3)=2$ $f(u_3,u_4)=-5$ $f(u_4,u_5)=-2$ $f(u_1,u_5)=-4$	$f^*(v_1)=5$ $f^*(v_2)=3$ $f^*(v_3)=6$ $f^*(v_4)=4$ $f^*(v_5)=7$ $f^*(u_1)=-5$ $f^*(u_2)=-4$ $f^*(u_3)=-3$ $f^*(u_4)=-7$ $f^*(u_5)=-6$
	4		{-8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8}	$f(v_1,u_1)=6$ $f(v_1,v_2)=-2$ $f(v_2,v_3)=-4$ $f(v_3,v_4)=-3$ $f(v_4,v_5)=-5$ $f(v_1,v_5)=0$ $f(u_1,u_2)=5$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=4$ $f(u_4,u_5)=2$ $f(u_1,u_5)=-6$	$f^*(v_1)=4$ $f^*(v_2)=-6$ $f^*(v_3)=-7$ $f^*(v_4)=-8$ $f^*(v_5)=-5$ $f^*(u_1)=5$ $f^*(u_2)=8$ $f^*(u_3)=7$ $f^*(u_4)=6$ $f^*(u_5)=-4$

Lanjutan Tabel 3.10 Pelabelan pada graf D(5,5)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan garis**	**Pelabelan titik**
2	5	{-6,-5,-4, -3, -2, 0, 2, 3, 4, 5, 6}	{-9, -8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9}	$f(v_1,u_1) = -5$ $f(v_1,v_2) = -4$ $f(v_2,v_3) = -3$ $f(v_3,v_4) = -2$ $f(v_4,v_5) = -6$ $f(v_1,v_5) = 0$ $f(u_1,u_2) = 6$ $f(u_2,u_3) = 2$ $f(u_3,u_4) = 3$ $f(u_4,u_5) = 4$ $f(u_1,u_5) = 5$	$f^*(v_1) = -9$ $f^*(v_2) = -7$ $f^*(v_3) = -5$ $f^*(v_4) = -8$ $f^*(v_5) = -6$ $f^*(u_1) = 6$ $f^*(u_2) = 8$ $f^*(u_3) = 5$ $f^*(u_4) = 7$ $f^*(u_5) = 9$
	6		{-10, -9, -8, -7, -6, 6, 7, 8, 9, 10}	$f(v_1,u_1) = 0$ $f(v_1,v_2) = -6$ $f(v_2,v_3) = -4$ $f(v_3,v_4) = -2$ $f(v_4,v_5) = -5$ $f(v_1,v_5) = -3$ $f(u_1,u_2) = 6$ $f(u_2,u_3) = 4$ $f(u_3,u_4) = 2$ $f(u_4,u_5) = 5$ $f(u_1,u_5) = 3$	$f^*(v_1) = -9$ $f^*(v_2) = -10$ $f^*(v_3) = -6$ $f^*(v_4) = -7$ $f^*(v_5) = -8$ $f^*(u_1) = 9$ $f^*(u_2) = 10$ $f^*(u_3) = 6$ $f^*(u_4) = 7$ $f^*(u_5) = 8$
3	1	{-7, -6, -5, -4, -3, 0, 3, 4, 5, 6, 7}	{-5, -4, -3, -2 -1, 1, 2, 3, 4, 5}	$f(v_1,u_1) = -3$ $f(v_1,v_2) = 7$ $f(v_2,v_3) = -4$ $f(v_3,v_4) = 6$ $f(v_4,v_5) = -5$ $f(v_1,v_5) = 0$ $f(u_1,u_2) = 5$ $f(u_2,u_3) = -6$ $f(u_3,u_4) = 4$ $f(u_4,u_5) = -7$ $f(u_1,u_5) = 3$	$f^*(v_1) = 4$ $f^*(v_2) = 3$ $f^*(v_3) = 2$ $f^*(v_4) = 1$ $f^*(v_5) = -5$ $f^*(u_1) = 5$ $f^*(u_2) = -1$ $f^*(u_3) = -2$ $f^*(u_4) = -3$ $f^*(u_5) = -4$

Lanjutan Tabel 3.10 Pelabelan pada graf D(5,5)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan garis**	**Pelabelan titik**
4	1	{-8, -7, -6, -5, -4, 0, 4, 5, 6, 7, 8}	{-5, -4, -3, -2 -1, 1, 2, 3, 4, 5}	$f(v_1, u_1) = -7$ $f(v_1, v_2) = 6$ $f(v_2, v_3) = -8$ $f(v_3, v_4) = 5$ $f(v_4, v_5) = 0$ $f(v_1, v_5) = -4$ $f(u_1, u_2) = 4$ $f(u_2, u_3) = -5$ $f(u_3, u_4) = 8$ $f(u_4, u_5) = -6$ $f(u_1, u_5) = 7$	$f^*(v_1) = -5$ $f^*(v_2) = -2$ $f^*(v_3) = -3$ $f^*(v_4) = 5$ $f^*(v_5) = -4$ $f^*(u_1) = 4$ $f^*(u_2) = -1$ $f^*(u_3) = 3$ $f^*(u_4) = 2$ $f^*(u_5) = 1$
5		{-9, -8, -7, -6, -5, 0, 5, 6, 7, 8, 9}		$f(v_1, u_1) = 7$ $f(v_1, v_2) = -8$ $f(v_2, v_3) = 6$ $f(v_3, v_4) = -9$ $f(v_4, v_5) = 5$ $f(v_1, v_5) = 0$ $f(u_1, u_2) = -5$ $f(u_2, u_3) = 9$ $f(u_3, u_4) = -6$ $f(u_4, u_5) = 8$ $f(u_1, u_5) = -7$	$f^*(v_1) = -1$ $f^*(v_2) = -2$ $f^*(v_3) = -3$ $f^*(v_4) = -4$ $f^*(v_5) = 5$ $f^*(u_1) = -5$ $f^*(u_2) = 4$ $f^*(u_3) = 3$ $f^*(u_4) = 2$ $f^*(u_5) = 1$

Berikut adalah teorema yang menyatakan bahwa D(6,6) merupakan pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG.

Teorema 3.7
Graf D(6,6) adalah *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG untuk

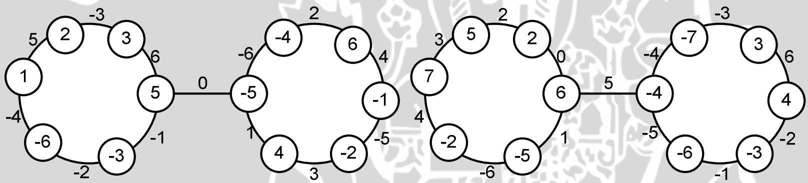
1. $a = 1$ dan $b = 1,2,3,4$
2. $a = 2$ dan $b = 1,2,3,4,5,6$

Bukti :

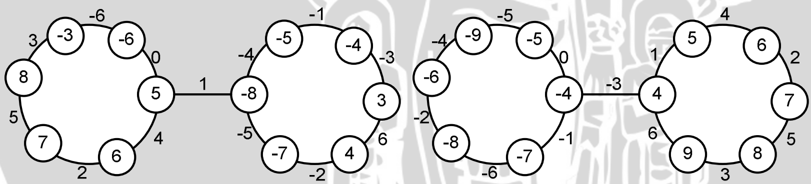
Langkah-langkah untuk melabeli D(6,6) sama seperti pembuktian-pembuktian sebelumnya. Bedanya terletak pada jumlah

p dan nilai pada a dan b yang menyebabkan himpunan labelnya berbeda.

1. Jika $a = 1$ dan $b = 1$, maka himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya adalah $Q(1) = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1,0,1,2,3,4,5,6\}$ dan $P(1) = \{-,6, -5, -4, -3, -2, -1,1,2,3,4,5,6\}$, jika $b = 2$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(2) = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2,2,3,4,5,6,7\}$, jika $b = 3$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(3) = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3,3,4,5,6,7,8\}$, jika $b = 4$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(4) = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4,4,5,6,7,8,9\}$. Pelabelan titik-titik dan garis-garisnya seperti pada Gambar 3.25 berikut. ■



$Q(1)P(1)$- SEG $Q(1)P(2)$-SEG

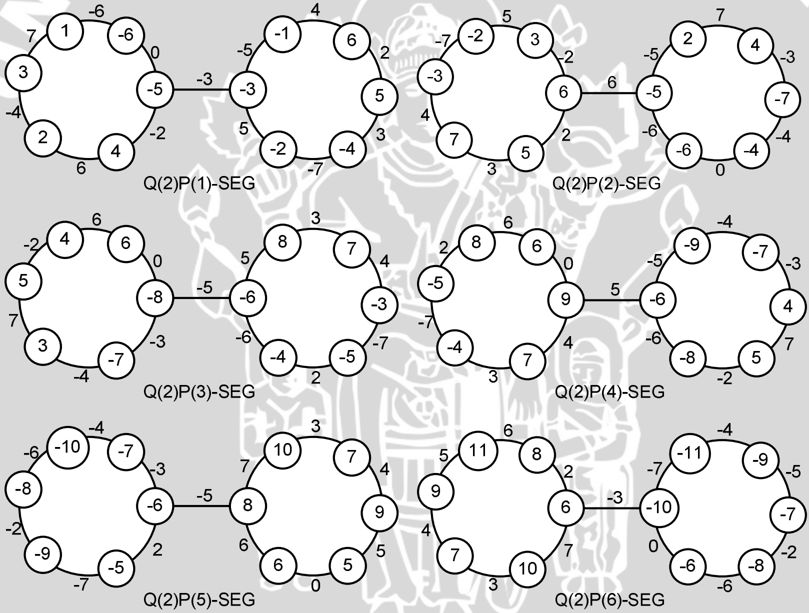


$Q(1)P(3)$-SEG $Q(1)P(4)$-SEG

Gambar 3.25 Pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG pada D(6,6) untuk a=1 dan b=1,2,3,4

2. Jika $a = 2$ dan $b = 1$, maka himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya adalah $Q(2) = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2,0,2,3,4,5,6,7\}$ dan $P(1) = \{-,6, -5, -4, -3, -2, -1,1,2,3,4,5,6\}$,

jika $b = 2$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(2) = \{-7, -6, -5, -4, -3, -2, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
jika $b = 3$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(3) = \{-8, -7, -6, -5, -4, -3, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$,
jika $b = 4$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(4) = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
jika $b = 5$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(5) = \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, dan
jika $b = 6$, maka himpunan nilai titik-titiknya adalah $P(6) = \{-11, -10, -9, -8, -7, -6, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Pelabelan titik-titik dan garis-garisnya seperti pada Gambar 3.26 berikut.■



Gambar 3.26 Pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG pada D(6,6) untuk *a*=2 dan *b*=1,2,3,4,5,6

Penjabaran tentang pelabelan pada graf D(6,6) pada pembuktian di atas tertera pada tabel 3.11 berikut.

Tabel 3.11 Pelabelan pada graf D(6.6)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	1	{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6}	{-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6}	$f(v_1,u_1)=0$ $f(v_1,v_2)=-6$ $f(v_2,v_3)=2$ $f(v_3,v_4)=4$ $f(v_4,v_5)=-5$ $f(v_5,v_6)=3$ $f(v_1,v_6)=1$ $f(u_1,u_2)=6$ $f(u_2,u_3)=-3$ $f(u_3,u_4)=5$ $f(u_4,u_5)=-4$ $f(u_5,u_6)=-2$ $f(u_1,u_6)=-1$	$f^*(v_1)=-5$ $f^*(v_2)=-4$ $f^*(v_3)=6$ $f^*(v_4)=-1$ $f^*(v_5)=-2$ $f^*(v_6)=4$ $f^*(u_1)=5$ $f^*(u_2)=3$ $f^*(u_3)=2$ $f^*(u_4)=1$ $f^*(u_5)=-6$ $f^*(u_6)=-3$
	2		{-7,-6,-5,-4,-3,-2,2,3,4,5,6,7}	$f(v_1,u_1)=5$ $f(v_1,v_2)=-4$ $f(v_2,v_3)=-3$ $f(v_3,v_4)=6$ $f(v_4,v_5)=-2$ $f(v_5,v_6)=-1$ $f(v_1,v_6)=-5$ $f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=2$ $f(u_3,u_4)=3$ $f(u_4,u_5)=4$ $f(u_5,u_6)=-6$ $f(u_1,u_6)=1$	$f^*(v_1)=-4$ $f^*(v_2)=-7$ $f^*(v_3)=3$ $f^*(v_4)=4$ $f^*(v_5)=-3$ $f^*(v_6)=-6$ $f^*(u_1)=6$ $f^*(u_2)=2$ $f^*(u_3)=5$ $f^*(u_4)=7$ $f^*(u_5)=-2$ $f^*(u_6)=-5$
	3		{-8,-7,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,7,8}	$f(v_1,u_1)=1$ $f(v_1,v_2)=-4$ $f(v_2,v_3)=-1$ $f(v_3,v_4)=-3$ $f(v_4,v_5)=6$ $f(v_5,v_6)=-2$ $f(v_1,v_6)=-5$ $f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=-6$ $f(u_3,u_4)=3$ $f(u_4,u_5)=5$ $f(u_5,u_6)=2$ $f(u_1,u_6)=4$	$f^*(v_1)=-8$ $f^*(v_2)=-5$ $f^*(v_3)=-4$ $f^*(v_4)=3$ $f^*(v_5)=4$ $f^*(v_6)=-7$ $f^*(u_1)=5$ $f^*(u_2)=-6$ $f^*(u_3)=-3$ $f^*(u_4)=8$ $f^*(u_5)=7$ $f^*(u_6)=6$

Lanjutan Tabel 3.11 Pelabelan pada graf D(6.6)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	4	{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}	{-9,-8,-7,-6,-5,-4,4,5,6,7,8,9}	$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=1$ $f(v_2,v_3)=4$ $f(v_3,v_4)=2$ $f(v_4,v_5)=5$ $f(v_5,v_6)=3$ $f(v_1,v_6)=6$ $f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=-5$ $f(u_3,u_4)=-4$ $f(u_4,u_5)=-2$ $f(u_5,u_6)=-6$ $f(u_1,u_6)=-1$	$f^*(v_1)=4$ $f^*(v_2)=5$ $f^*(v_3)=6$ $f^*(v_4)=7$ $f^*(v_5)=8$ $f^*(v_6)=9$ $f^*(u_1)=-4$ $f^*(u_2)=-5$ $f^*(u_3)=-9$ $f^*(u_4)=-6$ $f^*(u_5)=-8$ $f^*(u_6)=-7$
2	1	{-7,-6,-5,-4,-3,-2,0,2,3,4,5,6,7}	{-6,-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5,6}	$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=-5$ $f(v_2,v_3)=4$ $f(v_3,v_4)=2$ $f(v_4,v_5)=3$ $f(v_5,v_6)=-7$ $f(v_1,v_6)=5$ $f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=-6$ $f(u_3,u_4)=7$ $f(u_4,u_5)=-4$ $f(u_5,u_6)=6$ $f(u_1,u_6)=-2$	$f^*(v_1)=-3$ $f^*(v_2)=-1$ $f^*(v_3)=6$ $f^*(v_4)=5$ $f^*(v_5)=-4$ $f^*(v_6)=-2$ $f^*(u_1)=-5$ $f^*(u_2)=-6$ $f^*(u_3)=1$ $f^*(u_4)=3$ $f^*(u_5)=2$ $f^*(u_6)=4$
	2		{-7,-6,-5,-4,-3,-2,2,3,4,5,6,7}	$f(v_1,u_1)=6$ $f(v_1,v_2)=-5$ $f(v_2,v_3)=7$ $f(v_3,v_4)=-3$ $f(v_4,v_5)=-4$ $f(v_5,v_6)=0$ $f(v_1,v_6)=-6$ $f(u_1,u_2)=6$ $f(u_2,u_3)=3$ $f(u_3,u_4)=-2$ $f(u_4,u_5)=-3$ $f(u_5,u_6)=7$ $f(u_1,u_6)=5$	$f^*(v_1)=-5$ $f^*(v_2)=2$ $f^*(v_3)=4$ $f^*(v_4)=-7$ $f^*(v_5)=-4$ $f^*(v_6)=-6$ $f^*(u_1)=6$ $f^*(u_2)=3$ $f^*(u_3)=-2$ $f^*(u_4)=-3$ $f^*(u_5)=7$ $f^*(u_6)=-5$

Lanjutan Tabel 3.11 Pelabelan pada graf D(6.6)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
2	3	{-7,-6,-5,-4,-3,-2,0,2,3,4,5,6,7}	{-8,-7,-6,-5,-4,-3,3,4,5,6,7,8}	$f(v_1,u_1)=-5$ $f(v_1,v_2)=5$ $f(v_2,v_3)=3$ $f(v_3,v_4)=4$ $f(v_4,v_5)=-7$ $f(v_5,v_6)=2$ $f(v_1,v_6)=-6$ $f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=6$ $f(u_3,u_4)=-2$ $f(u_4,u_5)=7$ $f(u_5,u_6)=-4$ $f(u_1,u_6)=-3$	$f^*(v_1)=-6$ $f^*(v_2)=8$ $f^*(v_3)=7$ $f^*(v_4)=-3$ $f^*(v_5)=-5$ $f^*(v_6)=-4$ $f^*(u_1)=-8$ $f^*(u_2)=6$ $f^*(u_3)=4$ $f^*(u_4)=5$ $f^*(u_5)=3$ $f^*(u_6)=-7$
	4		{-9,-8,-7,-6,-5,-4,4,5,6,7,8,9}	$f(v_1,u_1)=5$ $f(v_1,v_2)=-5$ $f(v_2,v_3)=-4$ $f(v_3,v_4)=-3$ $f(v_4,v_5)=7$ $f(v_5,v_6)=-2$ $f(v_1,v_6)=-6$ $f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=6$ $f(u_3,u_4)=2$ $f(u_4,u_5)=-7$ $f(u_5,u_6)=3$ $f(u_1,u_6)=4$	$f^*(v_1)=-6$ $f^*(v_2)=-9$ $f^*(v_3)=-7$ $f^*(v_4)=4$ $f^*(v_5)=5$ $f^*(v_6)=-8$ $f^*(u_1)=9$ $f^*(u_2)=6$ $f^*(u_3)=8$ $f^*(u_4)=-5$ $f^*(u_5)=-4$ $f^*(u_6)=7$
	5		{-10,-9,-8,-7,-6,-5,5,6,7,8,910}	$f(v_1,u_1)=-5$ $f(v_1,v_2)=7$ $f(v_2,v_3)=3$ $f(v_3,v_4)=4$ $f(v_4,v_5)=5$ $f(v_5,v_6)=0$ $f(v_1,v_6)=6$ $f(u_1,u_2)=-3$ $f(u_2,u_3)=-4$ $f(u_3,u_4)=-6$ $f(u_4,u_5)=-2$ $f(u_5,u_6)=-7$ $f(u_1,u_6)=2$	$f^*(v_1)=8$ $f^*(v_2)=10$ $f^*(v_3)=7$ $f^*(v_4)=9$ $f^*(v_5)=5$ $f^*(v_6)=6$ $f^*(u_1)=-6$ $f^*(u_2)=-7$ $f^*(u_3)=-10$ $f^*(u_4)=-8$ $f^*(u_5)=-9$ $f^*(u_6)=-5$

Lanjutan Tabel 3.11 Pelabelan pada graf D(6.6)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
2	6	{-7,-6,-5,-4,-3,-2,0,2,3,4,5,6,7}	{-11,-10,-9,-8,-7,-6,6,7,8,9,10,11}	$f(v_1,u_1)=-3$ $f(v_1,v_2)=-7$ $f(v_2,v_3)=-4$ $f(v_3,v_4)=-5$ $f(v_4,v_5)=-2$ $f(v_5,v_6)=-6$ $f(v_1,v_6)=0$ $f(u_1,u_2)=2$ $f(u_2,u_3)=6$ $f(u_3,u_4)=5$ $f(u_4,u_5)=4$ $f(u_5,u_6)=3$ $f(u_1,u_6)=7$	$f^*(v_1)=-10$ $f^*(v_2)=-11$ $f^*(v_3)=-9$ $f^*(v_4)=-7$ $f^*(v_5)=-8$ $f^*(v_6)=-6$ $f^*(u_1)=6$ $f^*(u_2)=8$ $f^*(u_3)=11$ $f^*(u_4)=9$ $f^*(u_5)=7$ $f^*(u_6)=10$

Teorema berikut akan menunjukkan bahwa graf D(n,n) adalah $Q(1)P(1)$-SEG untuk $n \geq 3$.

Teorema 3.8
Untuk setiap $n \geq 3$, graf D(n,n) adalah $Q(1)P(1)$-SEG.

Bukti :

Graf D(n,n) adalah graf yang dibangun oleh dua *cycle* C_n dan C_n untuk $n \geq 3$, jika n=2 maka C_n bukan merupakan graf *cycle* karena graf *cycle* adalah graf G yang berorde $n \geq 3$. Kedua *cycle* C_n dan C_n terdiri dari titik $u_1, u_2, \dots, u_n$ dan $v_1, v_2, \dots, v_n$. Jika titik $u_1, u_2, \dots, u_n$ diletakkan searah jarum jam, maka titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ diletakkan berlawanan arah jarum jam, atau sebaliknya. Kemudian menentukan himpunan label garis-garisnya dan himpunan nilai titik-titiknya. jika $n \geq 3$, maka p adalah genap sehingga didapatkan himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya adalah
$Q(a) = \{0\} \cup \{\pm a, \pm(a+1), \dots, \pm(a+\frac{q-3}{2})\}$ dan
$P(b) = \{\pm b, \pm(b+1), \dots, \pm(b+\frac{p-2}{2})\}$.

Untuk $n \geq 3$ terdapat dua kasus, yaitu :

$$n \geq 3 = \begin{cases} n \ \ ganjil \\ n \ genap \end{cases}$$

1. Jika n ganjil. Diasumsikan $n = 2k - 1, k \geq 2$. Terdapat garis-garis $(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{2k-3}, u_{2k-2}), (u_{2k-1}, u_1)$ dilabeli dengan 0, -1, -2, ..., -(k-1). Garis-garis $(u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots, (u_{2k-4}, u_{2k-3}), (u_{2k-2}, u_{2k-1})$ dilabeli dengan 2k-1, 2k-2,...,k+1. Garis-garis $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2k-3}, v_{2k-2}), (v_{2k-1}, v_1)$ dilabeli dengan –(2k-1), -(2k-2), ..., -k. Garis-garis $(v_2, v_3), (v_4, v_5), \dots, (v_{2k-4}, v_{2k-3}), (v_{2k-2}, v_{2k-1})$ dilabeli dengan 1, 2, 3, ..., (k-1), dan garis (u_1, v_1) di labeli dengan k. Sedangkan titik-titik $u_1, u_2, \dots, u_{2k-1}$ dilabeli dengan 1, (2k-1), (2k-2), ..., 3,2, dan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}$ dilabeli dengan –(2k-1), -(2k-2), ..., -3, -2, -1.
2. Jika n genap. Diasumsikan $n = 2k, k \geq 2$. Untuk garis-garis $(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{2k-3}, u_{2k-2}), (u_{2k-1}, u_{2k})$ dilabeli dengan 0, -1, -2, ..., -(k-1). Garis-garis $(u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots, (u_{2k-2}, u_{2k-1}), (u_{2k}, u_1)$ dilabeli dengan 2k, 2k-1, 2k-2, ..., k+1. Garis-garis $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2k-3}, v_{2k-2}), (v_{2k-1}, v_{2k})$ dilabeli dengan -2k, -(2k-1), ..., -(k+1). Garis-garis $(v_2, v_3), (v_4, v_5), \dots, (v_{2k-2}, v_{2k-1}), (v_{2k}, v_1)$ dilabeli dengan 1, 2, 3, ..., k, dan garis (u_1, v_1) dilabeli dengan –k, dari pelabelan tersebut diperoleh pelabelan titik-titik $u_1, u_2, \dots, u_{2k}$ yang dilabeli dengan 1, 2k, (2k-1), ...,3, 2. Titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ yang dilabeli dengan –(2k-1), -(2k-2), ..., -3, -2, -1.

Berdasarkan dua uraian di atas masing-masing garis memiliki kawan tepat satu di himpunan label garis-garisnya, sehingga tidak ada garis yang berlabel sama, begitu juga pada titik-titiknya. Dengan kata lain fungsi (f, f^*) bijektif. Terbukti bahwa graf D(n,n) untuk $n \geq 3$ dapat dilabeli dengan pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG, khususnya dengan $a, b = 1$. Jadi, graf D(n,n) adalah *Q*(1)*P*(1)-SEG. ■

Langkah-langkah menentukan bahwa graf D(n,n) adalah $Q(a)P(b)$-SEG.

1. Mengkonstruksi graf D(n,n)
2. Menentukan titik-titik $u_1, u_2, \dots, u_n$ pada C_n searah jarum jam dan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ pada C_n berlawanan dengan arah jarum jam, atau sebaliknya.
3. Menentukan himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya sesuai definisi.
4. Melabeli garis-garis pada graf D(n,n) dengan fungsi $f: E \to Q$ bijektif. Pada $n \geq 3$, terdapat dua kasus yaitu :
   1. untuk n genap didapatkan pelabelan garis sebagai berikut:
      a. $(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{2k-3}, u_{2k-2}), (u_{2k-1}, u_{2k})$ dilabeli dengan 0, -1, -2, ..., -(k-1)
      b. $(u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots, (u_{2k-2}, u_{2k-1}), (u_{2k}, u_1)$ dilabeli dengan 2k, 2k-1, 2k-2, ..., k+1
      c. $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2k-3}, v_{2k-2}), (v_{2k-1}, v_{2k})$ dilabeli dengan -2k, -(2k-1), ..., -(k+1)
      d. $(v_2, v_3), (v_4, v_5), \dots, (v_{2k-2}, v_{2k-1}), (v_{2k}, v_1)$ dilabeli dengan 1, 2, 3, ..., k
      e. (u_1, v_1) dilabeli dengan –k.
   2. Untuk n ganjil pelabelan garisnya sebagai berikut :
      a. $(u_1, u_2), (u_3, u_4), \dots, (u_{2k-3}, u_{2k-2}), (u_{2k-1}, u_1)$ dilabeli dengan 0, -1, -2, ..., -(k-1)
      b. $(u_2, u_3), (u_4, u_5), \dots, (u_{2k-4}, u_{2k-3}), (u_{2k-2}, u_{2k-1})$ dilabeli dengan 2k-1, 2k-2,...,k+1
      c. $(v_1, v_2), (v_3, v_4), \dots, (v_{2k-3}, v_{2k-2}), (v_{2k-1}, v_1)$ dilabeli dengan –(2k-1), -(2k-2), ..., -k
      d. $(v_2, v_3), (v_4, v_5), \dots, (v_{2k-4}, v_{2k-3}), (v_{2k-2}, v_{2k-1})$ dilabeli dengan 1, 2, 3, ..., (k-1)
      e. (u_1, v_1) di labeli dengan k
   3. Melabeli titik-titik pada graf D(n,n) dengan fungsi $f^*: V \to P$ bijektif, dengan definisi fungsi $f^*(u) = \sum_{(u,v) \in E(G)} f(u, v)$.
      a. Pada n genap didapatkan pelabelan titik $u_1, u_2, \dots, u_{2k}$ yang dilabeli dengan 1, 2k, (2k-1), ...,3, 2. Titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$ yang dilabeli dengan –(2k-1), -(2k-2), ..., -3, -2, -1.

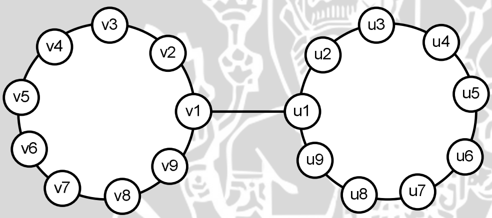
b. Pada n ganjil didapatkan pelabelan titik $u_1, u_2, \dots, u_{2k-1}$ dilabeli dengan 1, (2k-1), (2k-2), ..., 3,2, dan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_{2k-1}$ dilabeli dengan –(2k-1), -(2k-2), ..., -3, -2, -1.

4. Graf D(n,n) memenuhi pelabelan $Q(a)P(b)$-SEG khususnya $Q(1)P(1)$-SEG untuk $n \geq 3$.

Contoh 3.6:

Graf D(9,9) adalah $Q(1)P(1)$-SEG

1. Mengkonstruksi graf D(9,9)
   dengan $n = 9 = 2(5) - 1 \rightarrow k = 5$
2. Menentukan titik-titik $u_1, u_2, \dots, u_9$ pada C_9 searah jarum jam dan titik-titik $v_1, v_2, \dots, v_9$ pada C_9 berlawanan dengan arah jarum jam, atau sebaliknya, seperti Gambar 3.27.



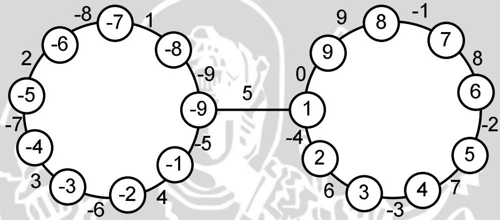
Gambar 3.27 Graf D(9,9)

3. Graf D(9,9) adalah graf (18,19), jadi himpunan nilai titik-titik dan himpunan label garis-garisnya adalah :
   Q(a) = $\{0\} \cup \{\pm a, \pm(a+1), \dots, \pm(a+8)\}$
   P(b) = $\{\pm b, \pm(b+1), \dots, \pm(b+8)\}$

4. Melabeli garis-garis pada graf D(9,9) dengan fungsi $f: E \rightarrow Q$ bijektif. Untuk $n = 9$ menurut kasus 1 diatas didapatkan pelabelan garis-garisnya sebagai berikut :
   $(u_1, u_2) = 0$ $\quad$ $(u_2, u_3) = 9$
   $(u_3, u_4) = -1$ $\quad$ $(u_4, u_5) = 8$
   $(u_5, u_6) = -2$ $\quad$ $(u_6, u_7) = 7$
   $(u_7, u_8) = -3$ $\quad$ $(u_8, u_9) = 6$
   $(u_9, u_1) = -4$

$(v_1, v_2) = -9$ $\quad$ $(v_2, v_3) = 1$
$(v_3, v_4) = -8$ $\quad$ $(v_4, v_5) = 2$
$(v_5, v_6) = -7$ $\quad$ $(v_6, v_7) = 3$
$(v_7, v_8) = -6$ $\quad$ $(v_8, v_9) = 4$
$(v_9, v_1) = -5$ $\quad$ $(u_1, v_1) = 5$

5. Melabeli titik-titik pada graf D(9,9) dengan fungsi $f^*: V \rightarrow P$ bijektif, dengan definisi fungsi $f^*(u) = \sum_{(u,v)\in E(G)} f(u,v)$. Karena n ganjil sehingga didapatkan pelabelan titik $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8, u_9$ dilabeli dengan 1, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 dan titik-titik $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9$ dilabeli dengan –9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1. Seperti Gambar 3.28 berikut.



Gambar 3.28 D(9,9)

6. Terlihat dari pelabelan yang didapatkan di atas bahwa fungsi (f, f^*) adalah bijektif, sehingga graf D(9,9) dapat dilabeli dengan aturan pelabelan *Q*(*a*)*P*(*b*)-SEG khususnya *Q*(1)*P*(1)-SEG, karena himpunan label garis-garis dan himpunan nilai titik-titiknya yang didapatkan adalah :
{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} = Q(1) dan
{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} = P(1).

Berikut adalah tabel yang memuat pelabelan *Q*(1)*P*(1)-SEG pada graf D(9,9) seperti yang telah di jabarkan di atas.

Tabel 3.12 Pelabelan pada graf D(9,9)

a	***b***	***Q*(*a*)**	***P*(*b*)**	**Pelabelan Garis**	**Pelabelan Titik**
1	1	{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}	{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}	$f(u_1,u_2)=0$ $f(u_2,u_3)=9$ $f(u_3,u_4)=-1$ $f(u_4,u_5)=8$ $f(u_5,u_6)=-2$ $f(u_6,u_7)=7$ $f(u_7,u_8)=-3$ $f(u_8,u_9)=6$ $f(u_1,u_9)=-4$ $f(v_1,u_1)=5$ $f(v_1,v_2)=-9$ $f(v_2,v_3)=1$ $f(v_3,v_4)=-8$ $f(v_4,v_5)=2$ $f(v_5,v_6)=-7$ $f(v_6,v_7)=3$ $f(v_7,v_8)=-6$ $f(v_8,v_9)=4$ $f(v_1,v_9)=-5$	$f^*(u_1)=1$ $f^*(u_2)=9$ $f^*(u_3)=8$ $f^*(u_4)=7$ $f^*(u_5)=6$ $f^*(u_6)=5$ $f^*(u_7)=4$ $f^*(u_8)=3$ $f^*(u_9)=2$ $f^*(v_1)=-9$ $f^*(v_2)=-8$ $f^*(v_3)=-7$ $f^*(v_4)=-6$ $f^*(v_5)=-5$ $f^*(v_6)=-4$ $f^*(v_7)=-3$ $f^*(v_8)=-2$ $f^*(v_9)=-1$