BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Model cobweb merupakan model ekonomi yang menjelaskan mengapa harga mungkin tergantung pada fluktuasi periodik dalam beberapa jenis pasar. Ini menggambarkan siklus penawaran dan permintaan pada pasar dimana jumlah yang diproduksi harus dipilih sebelum harga diamati.

Model cobweb sederhana biasanya digunakan untuk menyesuaikan suatu harga dinamik pada pasar agrikultur. Hal ini dikarenakan pada sebuah produksi agrikultur hanya memerlukan satu waktu untuk melakukan produksi. Oleh karena itu, model cobweb dapat dikembangkan untuk menentukan kestabilan di bidang lain, sebagai contoh adalah pemasaran pada *real estate*. Pada pemasaran *real esatate* juga terdapat satu waktu untuk melakukan produksi. Pada pemasaran *real estate ini* penawaran rumah adalah saat rumah itu akan dibangun dalam waktu tertentu, sampai dengan waktu rumah sedang dibangun atau diproduksi dan diwaktu rumah itu dipasarkan.

Konstruksi model pemasaran *real estate* yang berdasarkan model cobweb, dimana fungsi permintaan dan fungsi penawaran adalah sebuah persamaan kuadrat. Hal ini telah dijelaskan pada *Complex Dynamic in a nonlinear Cobweb Model for Real Estate Market* (Junhai Ma dan Lingling Mu, 2007) .

Pada skripsi ini dirumuskan bagaimana cara mengkontruksi model pemasaran *real estate* dan menyesuaikan parameter dari harga rumah dan harga tanah pada model. Serta menganalisa kestabilan model dengan berbagai parameter yang sudah ditentukan. Yaitu dengan menganalisa kestabilan asimtotik pada titik keseimbangannya.

1.2 Rumusan Masalah

Pada skripsi ini akan membahas beberapa rumusan masalah, yaitu:

1. Bagaimana mengkonstruksi model pemasaran *real estate* menggunakan model cobweb?
2. Bagaimana analisis kestabilan model pemasaran *real estate*?
3. Bagaimana menyusun simulasi numerik dari model pemasaran *real estate*?

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah yang dalam skripsi ini, adalah:

1. Masalah yang dibahas sampai dengan analisis kestabilan titik kesetimbangan sistem dan mengabaikan keadaan yang membuat sistem menjadi *chaos*, yaitu suatu keadaan yang mengakibatkan sistem yang semula stabil menjadi tidak stabil.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan untuk menuliskan skripsi ini adalah:

1. Mengkonstruksi model *real estate* menggunakan model cobweb.
2. Menganalisis kestabilan model pemasaran *real estate*.
3. Simulasi numerik dari model pemasaran *real estate* dengan menggunakan program Matlab.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Untuk matematikawan, skripsi ini dapat digunakan untuk menambah wawasan tentang terapan dari sistem dinamik.

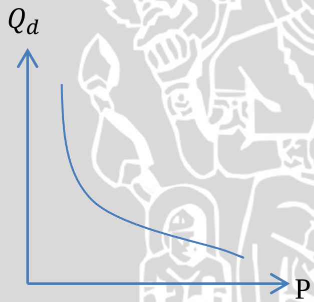
BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penawaran dan permintaan

Hubungan antara jumlah yang mau dibeli dari barang tertentu (Q_d) dan harga barang itu (P) dirumuskan dalam pengertian permintaan *(demand).* Dari pengalaman serta penelitian ternyata jumlah barang yang akan dibeli lebih sedikit kalau harganya tinggi daripada bila harganya rendah (Gilarso, 2003).

Menurut hukum permintaan, jumlah barang yang diminta berbanding terbalik dengan harganya, dengan syarat bahwa faktor-faktor yang lain tidak berubah (*centeris paribus*). Secara matematis, hukum tersebut dapat dinotasikan dengan persamaan berikut :

$$Q_d = f(P)$$



Gambar 2.1 kurva permintaan

Selain harga barang (P_x), juga terdapat beberapa faktor yang mempengaruhi besarnya permintaan terhadap suatu barang, yaitu harga barang yang bersangkutan (P_x), harga barang subtitusi/ kompetitor (P_y), harga barang komplemen (P_c), selera masyarakat/*taste* (T), serta pendapatan masyarakat (Y). Sehingga persamaan dari permintaan menjadi:

$$Q_{dx} = f(P_x, P_y, P_c, T, Y)$$

Hubungan antara permintaan dengan faktor-faktor yang mempengaruhi dapat bersifat linear maupun nonlinear.

1. Fungsi Permintaan Linear
   Model matematisnya adalah sebagai berikut :
   $$Q_{dx} = \beta_0 + \beta_1 P_x + \beta_2 P_y + \beta_3 P_c + \beta_4 T + \beta_5 Y + \varepsilon$$
2. Fungsi Permintaan nonlinear
   Model nonlinear pada fungsi permintaan umumnya adalah model eksponensial.
   Persamaannya adalah :
   $$Q_x^d = \beta_0 P_x^{\beta_1} P_y^{\beta_2} P_c^{\beta_3} T^{\beta_4} Y^{\beta_5} e^{\varepsilon}$$

Pada model ini, koefisien regresi merupakan besaran elastisitas untuk masing-masing variabel.

1. β_1 adalah besarnya elastisitas harga untuk permintaan, yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya harga barang sebesar 1%.
2. β_2 adalah besarnya elastisitas harga barang substitusi untuk permintaan, yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya harga barang substitusi sebesar 1%.
3. β_3 adalah besarnya elastisitas harga barang komplementer untuk permintaan, yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya harga barang komplemen sebesar 1%.
4. β_4 adalah besarnya elastisitas selera masyarakat untuk permintaan, yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya selera masyarakat sebesar 1%.
5. β_5 adalah besarnya elastisitas pendapatan untuk permintaan, yaitu besaran yang menunjukkan persentase perubahan permintaan sebagai akibat berubahnya pendapatan sebesar 1%.
6. ε adalah galat dari persamaan permintaan.

Hubungan antara jumlah suatu barang yang akan dijual selama jangka waktu tertentu (Q_S) dengan harga (P) barang tersebut adalah pengertian dari penawaran *(supply)*. Jika harga suatu barang tinggi, jumlah yang akan dijual banyak, sebaliknya jika harga barang rendah, maka barang akan semakin sedikit.

Fungsi penawaran adalah fungsi yang menunjukan hubungan antara jumlah barang yang ditawarkan dengan harganya (*centeris paribus*). Hukum permintaan berbunyi “jumlah barang yang ditawarkan (Q_s) berbanding terbalik dengan harganya (P) (Setiawan dan Kusrini, 2007).

Interaksi antara permintaan dan penawaran dipasar bebas akan membentuk harga yang disebut harga keseimbangan. Keseimbangan tercapai apabila jumlah yang akan dibeli pada harga tertentu tepat sama dengan jumlah yang akan dijual pada harga itu. Apabila jumlah yang akan dibeli pada harga tertentu lebih besar daripada jumlah yang akan dijual pada harga itu (Q_d > Q_s), maka akan terjadi kekurangan maka harga cenderung naik, begitu juga sebaliknya bila jumlah yang akan dijual pada harga tertentu lebih besar daripada jumlah yang akan dibeli pada harga itu (Q_d < Q_s), maka akan terjadi kelebihan suplai menyebabkan harga cenderung turun (Gilarso, 2003).

2.2 Teori Cobweb

Aplikasi persamaan diferensi banyak diterapkan dalam model keseimbangan pasar. Salah satunya adalah pembahasan yang menerangkan siklus harga dan jumlah produksi yang naik turun dalam jangka waktu tertentu. Teori ini sering disebut teori cobweb (teori sarang laba-laba). Perilaku ini sangat menarik berkaitan dengan stabilitasnya. Model matematik untuk menjelaskan teori ini adalah:

Fungsi permintaan: $Q_d = A - \alpha P_t \ (A, \alpha > 0)$

Fungsi penawaran: $Q_s = B + \beta P_{t-1} \ (B, \beta > 0)$

Dimana : A dan B adalah fungsi komplementer, sedangkan α dan β adalah konstanta.

Dengan menyetarakan Q_d = Q_s (syarat keseimbangan pasar):

$$A - \alpha P_t = B + \beta P_{t-1} \qquad (2.1)$$

$$\alpha P_t = -\beta P_{t-1} + (A - B)$$

$$P_t = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right) P_{t-1} + \frac{(A-B)}{\alpha}$$

Dengan menggunakan penyelesaian seperti rumus persamaan diferensi dimana $t = 1, 2, ...$, didapatkan:

Pada $t = 1,\ P_1 = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)P_0 + \frac{(A-B)}{\alpha}$

$$= \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)P_0 + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\,.(1-(-\beta/\alpha))$$

$$= \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)P_0 + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)} - \frac{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right).\frac{A-B}{\alpha}}{1-(-\beta/\alpha)}$$

$$= \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)P_0 - \frac{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right).\frac{A-B}{\alpha}}{1-(-\beta/\alpha)} + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}$$

$$= \left[P_0 - \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\right](-\beta/\alpha) \quad + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}$$

Pada $t = 2,\ P_2 = \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)P_1 + \frac{(A-B)}{\alpha}$, dengan mensubsitusikan P_1 pada P_2, didapatkan :

$$\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)\left[\left[P_0 - \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\right](-\beta/\alpha) \quad + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\right] + \frac{(A-B)}{\alpha}$$

$$= \left[P_0 - \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\right](-\beta/\alpha)^2 + \frac{\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right).\frac{A-B}{\alpha}}{1-(-\beta/\alpha)} + \frac{(A-B)}{\alpha}$$

$$= \left[P_0 - \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\right](-\beta/\alpha)^2 + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}$$

Jika lintasan waktu ke-t maka diperoleh persamaan:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}\right](-\beta/\alpha)^t + \frac{(A-B)/\alpha}{1-(-\beta/\alpha)}$$

Dengan mengatur kembali suku-sukunya maka pemecahan persamaan di atas akan memberikan parameter P_t sehubungan dengan P_0 berupa harga inisial yaitu:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{(A-B)}{\alpha+\beta}\right](-\beta/\alpha)^t + \frac{(A-B)}{(\alpha+\beta)}$$

Jika model tersebut berada dalam keseimbangan yaitu $P_t = P_{t-1}$, maka dengan mensubsitusikan nilai P_e pada P_t dan P_{t-1} pada persamaan (2.1), diperoleh :

$$A - \alpha P_e = B + \beta P_e$$
$$P_e(\alpha + \beta) = A - B$$
$$P_e = \frac{A-B}{\alpha+\beta}$$

dengan P_e adalah harga saat mencapai titik keseimbangan
(Wibisono, 1999).

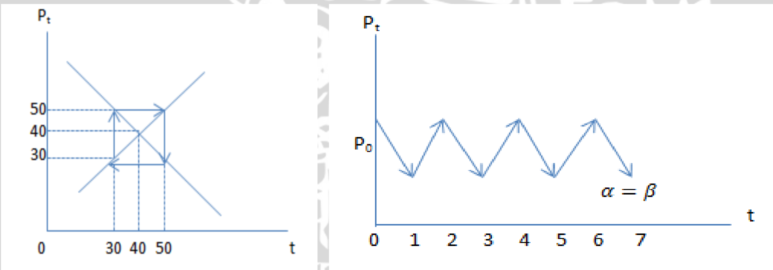
Bila permintaan dan penawaran diasumsikan tidak selalu sama maka untuk pengaturan harga, didapatkan model:

$$p(t) = p(t-1) + \alpha(Q_d - Q_s)$$

(Guangqin L.,2007).

2.2.1 Osilasi Stabil

Berdasarkan Gambar 2.2.a), titik kesimbangan terjadi pada (40 unit, 40 rupiah). Karena suatu sebab jumlah yang ditawarkan turun menjadi 30 unit dan mendorong harga naik menjadi 50 rupiah. Pada harga ini produksi akan bertambah terus sampai 50 unit dan menyebabkan jatuhnya harga menjadi 30 rupiah. Harga jatuh ini mendorong pengurangan produksi menjadi 30 unit dan seterusnya.



a) *b)*

Gambar 2.2 lintasan waktu dari model cobweb osilasi stabil

Penjelasan secara matematik untuk Gambar 2.2.b) yaitu apabila $\alpha = \beta$ diperoleh:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{(A-B)}{\alpha+\beta}\right](-1)^t + \frac{(A-B)}{(\alpha+\beta)}$$

Pada t = 0 atau setiap bilangan genap, maka:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{(A-B)}{\alpha+\beta}\right] + \frac{(A-B)}{(\alpha+\beta)} = P_0$$

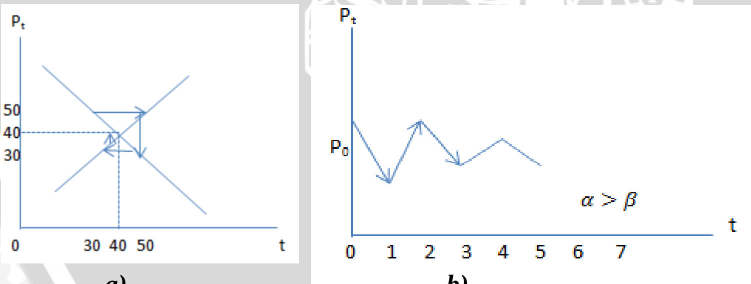
Pada t bilangan ganjil, maka:

$$P_t = \left[P_0 - \frac{(A-B)}{\alpha+\beta}\right] + \frac{(A-B)}{(\alpha+\beta)} = -P_0 + \frac{2(A-B)}{(\alpha+\beta)}$$

Dengan demikian harga akan bergerak antara kedua nilai harga dan jumlah-jumlah barang bergerak antara kedua nilai yang dicapai melalui substitusi harga-harga pada fungsi permintaan dan penawarannya.

2.2.2 Osilasi Menyatu

Seperti pada Gambar 2.3.a), osilasi menyatu (konvergen) terjadi jika koefisien elastisitas permintaan lebih besar dari koefisien elastisitas penawarannya. Pada osilasi ini, titik keseimbangan tetap yaitu (40,40). Namun, setelah periode harga naik menjadi 50 rupiah, mendorong jumlah produksi diperbesar tetapi tidak sebesar pada osilasi I melainkan hanya sebesar 45 unit. Ini mengakibatkan harga naik menjadi 35 rupiah. Penurunan harga ini menyebabkan produsen memperkecil produksinya menjadi 37,5 unit dan seterusnya.



a) *b)*

Gambar 2.3 lintasan waktu dari model cobweb osilasi menyatu

Pada Gambar 2.3.b) penjelasan matematiknya yaitu apabila $\alpha > \beta$, maka parameter $(-\beta/\alpha)^t$ akan mendekati nol untuk waktu t

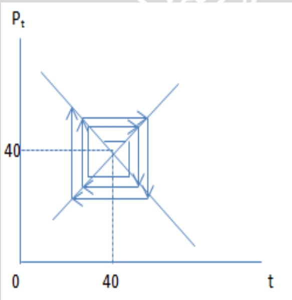
yang tak terhingga, sehingga lintasan waktu keseimbangannya adalah,

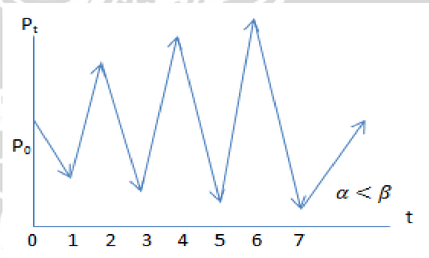
$$P_t = \frac{A - B}{\alpha + \beta} = P_e$$

Nilai $P_t$yang dicapai akan sama dengan harga perpotongan fungsi-fungsi permintaan dan penawaran. Dengan demikian P_t akan mendekati harga keseimbangan stabilitas P_e apabila t diperbesar. Setelah harga tersebut dicapai, maka variasi pada harga akan berhenti.

2.2.3 Osilasi Meledak

Sedangkan pada gambar 2.4.a) terjadi osilasi meledak. Osilasi ini terjadi apabila angka elastisitas permintaan lebih kecil dari angka elastisitas penawaran. Osilasi ini merupakan kebalikan dari osilasi menyatu karena kurva penawarannya sangat elastis sekali sehingga pertambahan produksi sebagai reaksi atas kenaikan harga relatif besar dan ini menyebabkan osilasi menjurus ke arah eksplosif.





a) ***b)***

Gambar 2.4 lintasan waktu dari model cobweb osilasi meledak

Sedangkan pada Gambar 2.4.b) apabila $\alpha < \beta$, untuk waktu *t* yang tak terhingga maka $(-\beta/\alpha)^t$ akan menjadi tak terhingga saat *t* bertambah tanpa limit atau tidak terbatas. Setiap nilai baru, harga dan kuantitas barang akan semakin jauh dari titik keseimbangan dibandingkan dengan posisi awal (Wibisono, 1999).

2.3 Matriks

Definisi:

Matrik A berukuran $m\ x\ n$ ialah suatu susunan elemen-elemen dalam persegi empat ukuran $m\ x\ n$, sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{atau} \quad A = (a_{ij})$$

Untuk menyatakan elemen matrik A yang ke (i,j), yaitu a_{ij}, digunakan notasi $(A)_{ij}$. Ini berarti $a_{ij} = (A)_{ij}$. Bila $m = n$, matriks dinamakan matriks bujur sangkar berukuran m. Matrik berukuran $m\ x\ 1$ disebut vektor kolom dan berukuran $1\ x\ n$ disebut vektor baris.

2.3.1 Trace Matriks

Trace terdefinisikan hanya pada matrik bujursangkar. Bila matrik A berukuran mxm maka trace A, dinotasikan $tr\ (A)$, adalah jumlah elemen-elemen diagonal utama matrik A,

$$tr\ (A) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii}$$

Matrik A berukuran mxn dan B berukuran nxm, maka matrik AB berukuran $m\ x\ m$. Berlaku :

$$trace\ (AB) = trace\ (BA)$$

2.4 Sistem Dinamik

Sistim dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik. Sistem dinamik diskrit ($t \in Z$ atau N) dan sistem dinamik kontinu $t \in R$. Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda yaitu :

$$x_{t+1} = f(x_t),\ t \in Z \text{ atau } N, \text{ dan } x, f \in R^n$$

(Arrowsmith dan place,1990)

Secara geometri, sistem dinamik diskrit dan sistem dinamik kontinu menggambarkan pergerakan titi-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian sistem persamaan diferansialnya.(Perko, 1996).

2.4.1 Sistem Dinamik Diskrit

Sistem dinamik diskrit adalah relasi berbentuk

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n,\, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n,\, y_n) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

dimana f dan g disebut fungsi pembangkit sistem. Jika f dan g bergantung pada parameter a maka fungsi pembangkitnya dinyatakan sebagai $f(a, x, y)$ dan $g(a, x, y)$ titik (x^*, y^*) disebut titik kesetimbangan sistem (2.2) jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$.

Sedangkan matriks Jacobi dari sistem dinamik diskrit (2.2), yaitu :

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_n,\, y_n)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f(x_n,\, y_n)}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial g(x_n,\, y_n)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial g(x_n,\, y_n)}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Misalkan terdapat titik kesetimbangan $E^*(x^*, y^*)$, matriks jacobian dari sistem dinamik diskrit menjadi

$$J(E^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari persamaan karakteristik dari matriks $J(E^*)$ dengan cara:

$$det(\lambda I - J(E^*)) = 0 \qquad (2.3)$$

(Elaydi, 2005).

2.4 Analisis Kestabilan

Misalkan λ_i, i = 1,2 adalah akar-akar dari persamaan karakteristik untuk persamaan (2.3), maka berlaku semua solusi persamaan (2.25) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika maksimum $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ (Elaydi, 2005).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Konstruksi Model

Pada skripsi ini diasumsikan jika semua developer *real estate* di pasar termasuk sebuah grup yang *benefit* dan mempunyai sebuah target yang *benefit*. Junhai Ma dan Lingling Mu mengatakan dalam artikelnya *Compleks Dynamic in a Nonlinear Cobweb Model for Real Estate Market* pada tahun 2007 bahwa harga *p* dicirikan sebagai fungsi invers permintaan dari $p = a - b\sqrt{Q}$, dimana a dan b konstanta positif, a adalah harga maksimal di pasar dan Q adalah total kwantitas permintaan di dalam pasar. Maka dapat ditentukan :

$$
\begin{aligned}
p &= a - b\sqrt{Q} \\
b\sqrt{Q} &= a - p \\
\sqrt{Q} &= \frac{a-p}{b} \\
Q &= \left(\frac{a-p}{b}\right)^2 \\
&= \frac{a^2 - 2ap + p^2}{b^2} \\
&= \frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b^2}p + \frac{1}{b^2}p^2
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Persamaan (3.1) merupakan bentuk dasar dari persamaan permintaan. Sedangkan pada skripsi ini, berdasarkan pada pendahuluan, dalam menyusun model pemasaran *real estate* dibutuhkan dua persamaan permintaan yaitu permintaan tanah dan permintaan rumah. Sehingga persamaan permintaan Q diubah dengan D_1 merupakan permintaan tanah dan D_2 merupakan permintaan rumah, sedangkan harga p menjadi p_1 yang merupakan harga tanah dan p_2 adalah harga rumah.

$$
\begin{aligned}
D_1(t) &= b_0 - b_1 p_1(t) + b_2 p_1^2(t) \\
D_2(t) &= c_0 - c_1 p_2(t) + c_2 p_2^2(t)
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

di mana :

$b_0, b_1, b_2, c_0, c_1, c_2$ adalah konstanta positif,
$p_1(t)$: harga tanah dalam periode waktu *t*
$p_2(t)$: harga rumah dalam periode waktu *t*

$D_1(t)$: permintaan tanah dalam periode waktu *t*
$D_2(t)$: permintaan rumah dalam periode waktu *t*

Berdasarkan hukum permintaan, menyebutkan bahwa slope dari kurva permintaan adalah negatif, maka harga $p_1(t)$ dan $p_2(t)$ harus memenuhi $2b_2p_1(t) - b_1 < 0$ dan $2c_2p_2(t) - c_1 < 0$; $4b_2b_0 - b_1^2 > 0$, $4c_2c_0 - c_1^2 > 0$.

Berdasarkan hukum penawaran yang menyatakan bahwa semakin tinggi harga pada barang maka akan semakin tinggi pula penawarannya. Oleh karena itu persamaan permintaan (3.1) dapat diubah menjadi :

$$S_1(t) = e_0 + e_1p_1(t) + e_2p_1^2(t) \qquad (3.3)$$

Dengan $S_1(t)$ adalah penawaran tanah pada periode waktu t dan e_0, e_1, e_2 adalah konstanta positif. *Slope* dari kurva penawaran adalah positif karena $2e_2p_1(t) + e_1 > 0$. Dan hal ini sesuai dengan hukum penawaran.

Pada kasus tersebut harga rumah dan harga tanah sangat berhubungan. Meskipun pemasaran rumah tidak dengan langsung berpengaruh pada pemasaran tanah, harga tanah mempunyai pengaruh yang kuat terhadap penawaran rumah. Penawaran rumah akan menurun seiring dengan naiknya harga tanah. Dengan demikian persamaan penawaran rumah ($S_2(t)$) menjadi :

$$S_2(t) = d_0 + d_1p_2(t) + d_2p_2^2(t) - d_3p_1(t) \qquad (3.4)$$

dengan d_0, d_1, d_2 adalah konstanta positif.

Karena *slope* dari kurva penawaran rumah adalah positif, maka dapat disimpulkan bahwa $2d_2p_2(t) + d_1 > 0$.

Karena semua developer *real estate* di pasar termasuk sebuah grup yang *benefit* dan mempunyai sebuah target yang *benefit*, akan dimisalkan $Z(p)$ adalah selisih fungsi permintaan yang berbanding terbalik dengan harga, dimana menunjukkan selisih antara permintaan dan penawaran. Ketika harga murah, maka permintaan akan berlebih, sebaliknya jika harga turun, maka penawaran yang akan berlebih. Sedangkan jika $Z(p) = 0$ maka tercapai titik equilibrium. Sehingga didapatkan:

$$Z(p) = D(p) - S(p) \qquad (3.5)$$

Jika persamaan (3.2), (3.3) dan (3.4) disubsitusikan pada persamaan (3.5) untuk masing-masing $p_1(t)$ dan $p_2(t)$ akan diperoleh:

$$\begin{aligned} Z\big(p_1(t)\big) &= b_0 - e_0 - (b_1 + e_1)p_1(t) + (b_2 - e_2)p_1^2(t) \\ Z\big(p_2(t)\big) &= c_0 - d_0 - (c_1 + d_1)p_2(t) + (c_2 - d_2)p_2^2(t) \\ &\quad + d_3 p_1(t) \end{aligned} \tag{3.6}$$

di mana $t = 1, 2, 3, \ldots$

Karena $Z(p)$ juga mengikuti hukum permintaan maka dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{gathered} b_2 - e_2 > 0 \\ c_2 - d_2 > 0 \\ 2(b_2 - e_2)p_1(t) - (b_1 + e_1) < 0 \\ 2(c_2 - d_2)p_2(t) - (c_1 + d_1) < 0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

Misalkan α_1 adalah parameter dari tanah yang menunjukkan tingkat pengendalian harga tanah oleh pemerintah dan α_2 adalah parameter harga rumah. Oleh sebab itu, harga tanah dan harga rumah pada periode waktu t dipengaruhi oleh selisih fungsi permintaan karena setelah rumah dan tanah siap untuk dijual akan diperhitungkan biaya-biaya pada saat pembangungan rumah itu dan kenaikan harga tanah dalam rentang waktu pembangunan. Model dinamik dari harga tanah dan harga rumah adalah:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_1(t-1) + \alpha_1 Z\big(p_1(t-1)\big) \\ p_2(t) &= p_2(t-1) + \alpha_2 Z\big(p_2(t-1)\big) \end{aligned} \tag{3.8}$$

Jika persamaan (3.6) disubsitusikan pada persamaan (3.8), maka akan didapatkan:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_1(t-1) + \alpha_1[b_0 - e_0 - (b_1 + e_1)p_1(t-1) \\ &\quad + (b_2 - e_2)p_1^2(t-1)] \\ p_2(t) &= p_2(t-1) + \alpha_2[c_0 - d_0 - (c_1 + d_1)p_2(t-1) \\ &\quad + (c_2 - d_2)p_2^2(t-1) + d_3 p_1(t-1)] \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 Analisis Kestabilan

3.2.1 Titik Kesetimbangan Sistem

Seperti pada landasan teori sebelum menganalisis kestabilan terlebih dahulu adalah mencari titik kesetimbangan pada sistem. Titik kesetimbangan pada sistem dinamik diskrit terdefinisi jika memenuhi:

$$p_1(t) = p_1(t-1)$$
$$p_2(t) = p_2(t-1) \tag{3.10}$$

Oleh karena itu pada persamaan (3.9) untuk memperoleh kondisi seperti pada (3.10), maka $Z\big(p_1(t-1)\big) = 0$ dan $Z\big(p_2(t-1)\big) = 0$. Maka titik kesetimbangan sistem dapat dicari dengan mencari akar-akar dari p_1 pada $Z\big(p_1(t-1)\big) = 0$ dan p_2 pada $Z\big(p_2(t-1)\big) = 0$, menjadi:

$$b_0 - e_0 - (b_1 + e_1)p_1(t-1) + (b_2 - e_2)p_1^2(t-1) = 0$$
$$c_0 - d_0 - (c_1 + d_1)p_2(t-1) + (c_2 - d_2)p_2^2(t-1) + d_3 p_1(t-1) = 0$$

sehingga akan didapatkan p_1 dan p_2 sebagai berikut:

$$p_1 = \frac{b_1+e_1 \pm \sqrt{(e_1+b_1)^2 - 4(b_2-e_2)(b_0-e_0)}}{2(b_2-e_2)}$$

$$p_2 = \frac{c_1+d_1 \pm \sqrt{(c_1+d_1)^2 - 4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)}$$

Dari p_1 dan p_2 di atas dapat diperoleh empat titik kesetimbangan sistem yaitu:

$$E_1 = \left(\frac{e_1+b_1+\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)}}{2(b_2-e_2)}, \frac{c_1+d_1+\sqrt{(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)}\right)$$

$$E_2 = \left(\frac{e_1+b_1+\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)}}{2(b_2-e_2)}, \frac{c_1+d_1-\sqrt{(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)}\right)$$

$$E_3 = \left(\frac{e_1+b_1-\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)}}{2(b_2-e_2)}, \frac{c_1+d_1+\sqrt{(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)}\right)$$

$$E_4 = \left(\frac{e_1+b_1-\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)}}{2(b_2-e_2)}, \frac{c_1+d_1-\sqrt{(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)}}{2(c_2-d_2)}\right)$$

Keempat titik kesetimbangan $E_1, E_2, E_3, E_4 \in \mathbb{R}^2$, jika memenuhi:

$$\begin{gathered}(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)\geq 0\\(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1)\geq 0\end{gathered}\qquad(3.11)$$

3.2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem

Titik E_1, E_2, E_3, E_4 akan dicari kestabilannya. Untuk mencari kestabilan dari titik kesetimbangan, pertama dibentuk matriks Jacobi dari sistem, setelah itu akan dimasukkan titik kesetimbangan pada matriks Jacobi yang sudah diperoleh untuk menentukan kestabilan dari titik kesetimbangan.

Untuk mencari matriks Jacobi dari E_1, pertama dicari terlebih dahulu matriks Jacobi terhadap p_1 dan p_2. Berdasarkan pada landasan teori matriks Jacobi dapat dicari dengan:

$$J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial p_1(t)}{\partial p_1(t-1)} & \dfrac{\partial p_1(t)}{\partial p_2(t-1)}\\ \dfrac{\partial p_2(t)}{\partial p_1(t-1)} & \dfrac{\partial p_2(t)}{\partial p_2(t-1)}\end{bmatrix}$$

Sistem (3.9) mempunyai matriks Jacobi pada titik $E^*(p_1^*(t), p_2^*(t))$

$$J(E^*)=\begin{bmatrix}1-\alpha_1(e_1+b_1)+2\alpha_1(b_2-e_2)p_1^*(t) & 0\\ \alpha_2 d_3 & 1-\alpha_2(d_1+c_1)+2\alpha_2(c_2-d_2)p_2^*(t)\end{bmatrix}$$

Misalkan untuk $E_1(p_1, p_2)$ mempunyai matriks jacobi sebagai berikut

$$J(E_1)=\begin{bmatrix}j_{11} & j_{12}\\ j_{21} & j_{22}\end{bmatrix}$$

Untuk p_1 disubsitusikan pada elemen j_{11} didapatkan:

$$\begin{aligned}&1-\alpha_1(e_1+b_1)+2\alpha_1(b_2-e_2)p_1^*(t)\\ &=1-\alpha_1(e_1+b_1)\\ &\quad+2\alpha_1(b_2-e_2)\left(\frac{e_1+b_1+\sqrt{(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)}}{2(b_2-e_2)}\right)\\ &=1-\alpha_1(e_1+b_1)+\alpha_1(e_1+b_1)\\ &\quad+\alpha_1[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2}\end{aligned}$$

$$= 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$

Sedangkan untuk p_2 disubsitusikan pada elemen j_{22} didapatkan:

$$1 - \alpha_2(d_1 + c_1) + 2\alpha_2(c_2 - d_2)p_2^*(t)$$

$$= 1 - \alpha_2(d_1 + c_1)$$

$$+2\alpha_2(c_2 - d_2)\left(\frac{c_1 + d_1 + \sqrt{(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1)}}{2(c_2 - d_2)}\right)$$

$$= 1 - \alpha_2(d_1 + c_1) + \alpha_2(d_1 + c_1)$$

$$+\alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}$$

$$= 1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}$$

Elemen j_{11} dan j_{22} dimasukan kedalam matriks, akan diperoleh matriks jacobi yang didapat dari $E_1(p_1, p_2)$ sebagai berikut

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2 d_3 & 1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2} \end{bmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen dari matriks Jacobi, terlebih dahulu adalah mencari persamaan karakteristik dari matriks Jacobi. Persamaan karakteristik dapat diproleh dari:

$$\det(\lambda I - J(E_1)) =$$

$$det \begin{bmatrix} \lambda - (1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}) & 0 \\ d_3 p_1 & \lambda - (1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\lambda - \left(1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}\right)\right)$$

$$(\lambda - (1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}))$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(E_1)$ adalah

$$\left(\lambda - \left(1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}\right)\right)$$

$$\left(\lambda - \left(1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}\right)\right) = 0$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa nilai eigen dari $J(E_1)$ didapatkan dari entri-entri diagonal matriks $J(E_1)$, yaitu :

$$\lambda_1 = 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$

$$\lambda_2 = 1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}$$

Titik $E_1(p_1, p_2)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \; -2 < \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{-2}{[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}} < \alpha_1 < 0$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \; -2 < \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{-2}{[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}} < \alpha_2 < 0$$

Karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif, sehingga pada titik $E_1(p_1, p_2)$ α_1 dan α_2 tidak memenuhi.

Untuk titik $E_2(p_1, p_2)$ juga akan disubsitusikan pada matriks *J(E)*. Misalkan matriks $J(E_2)$ mempunyai entri-entri:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{bmatrix}$$

Untuk p_1 disubsitusikan pada elemen j_{11} didapatkan:

$$1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$

Sedangkan untuk elemen j_{22} diperoleh:

$$1 - \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}$$

Elemen j_{11} dan j_{22} dimasukan kedalam matriks, akan diperoleh matriks jacobi yang didapat dari $E_2(p_1, p_2)$ sebagai berikut

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2 d_3 & 1 - \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2} \end{bmatrix}$$

Jika nilai eigen dari matriks $J(E_2)$ diperoleh seperti pada matriks $J(E_1)$ yaitu dari entri-entri diagonal, maka didapatkan :

$$\lambda_1 = 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$

$$\lambda_2 = 1 - \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}$$

Titik $E_2(p_1, p_2)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 + \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 < \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2}{[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}} < \alpha_1 < 0$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 - \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 < -\alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < \alpha_2 < \frac{2}{[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}}$$

Karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif, sehingga pada titik $E_2(p_1, p_2)$ α_1 dan α_2 tidak memenuhi.

Begitu juga dengan titik $E_3(p_1, p_2)$ dan $E_4(p_1, p_2)$ akan dilakukan metode yang sama seperti metode untuk menganalisis $E_1(p_1, p_2)$ dan $E_2(p_1, p_2)$.

Untuk titik $E_3(p_1, p_2)$, p_1 disubsitusikan pada elemen j_{11} matriks *J(E)* diperoleh :

$$1 - \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$

Sedangkan untuk p_2 yang disubsitusikan pada elemen j_{22} matriks *J(E)* diperoleh :

$$1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3 p_1]^{1/2}$$

Elemen j_{11} dan j_{22} dimasukan kedalam matriks, akan diperoleh matriks jacobi yang didapat dari $E_3(p_1, p_2)$ sebagai berikut

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2 d_3 & 1+\alpha_2[(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1]^{1/2} \end{bmatrix}$$

Jika nilai eigen dari matriks $J(E_3)$ diperoleh seperti pada matriks $J(E_1)$ yaitu dari entri-entri diagonal, maka didapatkan :

$$\lambda_1 = 1 - \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$
$$\lambda_2 = 1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3p_1]^{1/2}$$

Titik $E_3(p_1, p_2)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 - \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < -\alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2} < 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad 0 < \alpha_1 < \frac{2}{[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}}$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 + \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3p_1]^{1/2} < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3p_1]^{1/2} < 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad \frac{-2}{[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3p_1]^{1/2}} < \alpha_2 < 0$$

Karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif, sehingga pada titik $E_3(p_1, p_2)$ α_1 dan α_2 tidak memenuhi.

Untuk titik $E_4(p_1, p_2)$, p_1 disubsitusikan pada elemen j_{11} matriks *J(E)* diperoleh :

$$1 - \alpha_1[(e_1 + b_1)^2 - 4(b_2 - e_2)(b_0 - e_0)]^{1/2}$$

Sedangkan untuk p_2 yang disubsitusikan pada elemen j_{22} matriks *J* diperoleh :

$$1 - \alpha_2[(c_1 + d_1)^2 - 4(c_2 - d_2)(c_0 - d_0 + d_3p_1]^{1/2}$$

Elemen j_{11} dan j_{22} dimasukan kedalam matriks, akan diperoleh matriks jacobi yang didapat dari $E_4(p_1, p_2)$ sebagai berikut

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2 d_3 & 1-\alpha_2[(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1]^{1/2} \end{bmatrix}$$

Jika nilai eigen dari matriks $J(E_4)$ diperoleh seperti pada matriks $J(E_1)$ yaitu dari entri-entri diagonal, maka didapatkan :

$$\lambda_1 = 1-\alpha_1[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2}$$

$$\lambda_2 = 1-\alpha_2[(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1]^{1/2}$$

Titik $E_4(p_1, p_2)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1-\alpha_1[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \; -2 < -\alpha_1[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \; 0 < \alpha_1 < \frac{2}{[(e_1+b_1)^2-4(b_2-e_2)(b_0-e_0)]^{1/2}}$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1-\alpha_2[(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1]^{1/2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \; -2 < -\alpha_2[(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1]^{1/2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \; 0 < \alpha_2 < \frac{2}{[(c_1+d_1)^2-4(c_2-d_2)(c_0-d_0+d_3p_1]^{1/2}}$$

Dari analisis kestabilan pada titik kesetimbangan dapat disimpulkan bahwa hanya titik $E_4(p_1, p_2)$ yang memenuhi, karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif.

3.3 Simulasi Numerik

Menurut Junhai Ma dan Lingling MU (2007), pada persamaan (3.9) mempunyai parameter sebagai berikut:

$b_0 = 1{,}2;$	$b_1 = 2;$	$b_2 = 1{,}6;$	$c_0 = 4;$
$c_1 = 1{,}6;$	$c_2 = 0{,}04;$	$d_0 = 0;$	$d_1 = 3;$

$d_2 = 0{,}02;$ $d_3 = 0{,}4;$ $e_0 = 0{,}5$ $e_1 = 0{,}3$ $e_2 = 0{,}2;$

Maka $E_1(p_1, p_2)$ didapatkan :

$$p_1 = \frac{0{,}3 + 2 + \sqrt{(0{,}3+2)^2 - 4(1{,}6-0{,}2)(1{,}2-0{,}5)}}{2(1{,}6-0{,}2)}$$
$$= \frac{2{,}3 + \sqrt{1{,}37}}{2{,}8}$$
$$= \frac{2{,}3 + 1{,}17047}{2{,}8}$$
$$= 1{,}2396$$
$$p_2 = \frac{1{,}6 + 3 + \sqrt{(1{,}6+3)^2 - 4(0{,}04-0{,}02)(4-0+0{,}496)}}{2(0{,}04-0{,}02)}$$
$$= \frac{4{,}6 + \sqrt{20{,}8003}}{0{,}04}$$
$$= \frac{4{,}6 + 4{,}5607}{0{,}04}$$
$$= 229{,}1842$$

Jadi $E_1(p_1, p_2) = (1.2396\,, 229.1842)$

Dan matriks $J(E_1)$ menjadi:

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1\left[(0{,}3+2)^2 - 4(1{,}6-0{,}2)(1{,}2-0{,}5)\right]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2(1{,}2396) & 1 + \alpha_2\left[(1{,}6+3)^2 - 4(0{,}04-0{,}02)(4-0+0{,}496)\right]^{1/2} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1(1{,}17047) & 0 \\ \alpha_2(1{,}2396) & 1 + \alpha_2(4{,}5607) \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigen dari matriks $J(E_1)$ menjadi:

$$\lambda_1 = 1 + \alpha_1(1{,}17047)$$
$$\lambda_2 = 1 + \alpha_2(4{,}5607)$$

Titik $E_1(1.2396\,, 229.1842)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 + \alpha_1(1{,}17047) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < \alpha_1(1{,}17047) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2}{1{,}17047} < \alpha_1 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -1{,}7087 < \alpha_1 < 0$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \; -1 < 1 + \alpha_2(4{,}5607) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < \alpha_2(4{,}5607) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2}{4{,}5607} < \alpha_2 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -0{,}4385 < \alpha_2 < 0$$

Karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif, sehingga pada titik $E_1(1.2396\,,229.1842)$ α_1 dan α_2 tidak memenuhi.

Pada titik $E_2(p_1, p_2)$ didapatkan :

$$p_1 = \frac{0{,}3 + 2 + \sqrt{(0{,}3+2)^2 - 4(1{,}6-0{,}2)(1{,}2-0{,}5)}}{2(1{,}6-0{,}2)}$$
$$= \frac{2{,}3 + \sqrt{1{,}37}}{2{,}8}$$
$$= \frac{2{,}3 + 1{,}17047}{2{,}8}$$
$$= 1{,}2396$$

$$p_2 = \frac{1{,}6 + 3 - \sqrt{(1{,}6+3)^2 - 4(0{,}04-0{,}02)(4-0+0{,}496)}}{2(0{,}04-0{,}02)}$$
$$= \frac{4{,}6 - \sqrt{20{,}8003}}{0{,}04}$$
$$= \frac{4{,}6 - 4{,}5607}{0{,}04}$$
$$= 0{,}9876$$

Jadi titik $E_2(p_1, p_2) = (1.2396, 0.9876)$

Dan matriks *J*(E_2) menjadi:

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1\left[(0{,}3+2)^2-4(1{,}6-0{,}2)(1{,}2-0{,}5)\right]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2(1{,}2396) & 1+\alpha_2\left[(1{,}6+3)^2-4(0{,}04-0{,}02)(4-0+0{,}496)\right]^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+\alpha_1(1{,}17047) & 0 \\ \alpha_2(1{,}2396) & 1-\alpha_2(4{,}5607) \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigen dari matriks $J(E_2)$ menjadi:

$$\lambda_1 = 1+\alpha_1(1{,}17047)$$
$$\lambda_2 = 1-\alpha_2(4{,}5607)$$

Titik $E_2(1.2396, 0.9876)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < 1+\alpha_1(1{,}17047) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < \alpha_1(1{,}17047) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{-2}{1{,}17047} < \alpha_1 < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -1{,}7087 < \alpha_1 < 0$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < 1+\alpha_2(4{,}5607) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < \alpha_2(4{,}5607) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \alpha_2 < \frac{2}{4{,}5607}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \alpha_2 < 0{,}4385$$

Karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif, sehingga pada titik $E_2(1.2396, 0.9876)$ α_1 dan α_2 tidak memenuhi.

Pada titik $E_3(p_1, p_2)$ didapatkan :

$$p_1 = \frac{0{,}3+2-\sqrt{(0{,}3+2)^2-4(1{,}6-0{,}2)(1{,}2-0{,}5)}}{2(1{,}6-0{,}2)}$$

$$= \frac{2{,}3-\sqrt{1{,}37}}{2{,}8}$$

$$= \frac{2,3 - 1,17047}{2,8}$$

$$= 0,4034$$

$$p_2 = \frac{1,6 + 3 + \sqrt{(1,6+3)^2 - 4(0,04 - 0,02)(4 - 0 + 0,16)}}{2(0,04 - 0,02)}$$

$$= \frac{4,6 + \sqrt{20,8272}}{0,04}$$

$$= \frac{4,6 + 4,5637}{0,04}$$

$$= 229,0921$$

Jadi titik $E_3(p_1, p_2) = (0.4034, 229.0921)$
Dan matriks *J*(E_3) menjadi:

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_1\left[(0,3+2)^2 - 4(1,6-0,2)(1,2-0,5)\right]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2(0,4034) & 1 + \alpha_2\left[(1,6+3)^2 - 4(0,04-0,02)(4-0+0,16)\right]^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \alpha_1(1,17047) & 0 \\ \alpha_2(0,4034) & 1 + \alpha_2(4,5637) \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigen dari matriks $J(E_3)$ menjadi:

$$\lambda_1 = 1 - \alpha_1(1,17047)$$
$$\lambda_2 = 1 + \alpha_2(4,5637)$$

Titik $E_3(0.4034, 229.0921)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < 1 - \alpha_1(1,17047) < 1$$
$$\Leftrightarrow \quad -2 < -\alpha_1(1,17047) < 0$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \alpha_1 < \frac{2}{1,17047}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 < \alpha_1 < 1,7087$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < 1 + \alpha_2(4,5637) < 1$$

$$\Leftrightarrow \qquad -2 < \alpha_2(4,5637) < 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{-2}{4,5637} < \alpha_2 < 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad -0,4382 < \alpha_2 < 0$$

Karena pada pembentukan model pemasaran *real estate* α_1 dan α_2 adalah positif, sehingga pada titik $E_3(0.4034, 229.0921)$ α_1 dan α_2 tidak memenuhi.

Pada titik $E_4(p_1, p_2)$ didapatkan :

$$p_1 = \frac{0,3 + 2 - \sqrt{(0,3+2)^2 - 4(1,6-0,2)(1,2-0,5)}}{2(1,6-0,2)}$$

$$= \frac{2,3 - \sqrt{1,37}}{2,8}$$

$$= \frac{2,3 - 1,17047}{2,8}$$

$$= 0,4034$$

$$p_2 = \frac{1,6 + 3 - \sqrt{(1,6+3)^2 - 4(0,04-0,02)(4-0+0,16)}}{2(0,04-0,02)}$$

$$= \frac{4,6 - \sqrt{20,8272}}{0,04}$$

$$= \frac{4,6 - 4,5637}{0,04}$$

$$= 0,9079$$

Jadi titik $E_4(p_1, p_2) = (0.4034, 0.9079)$

Dan matriks *J*(E_4) menjadi:

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1\left[(0,3+2)^2 - 4(1,6-0,2)(1,2-0,5)\right]^{1/2} & 0 \\ \alpha_2(0,4034) & 1-\alpha_2\left[(1,6+3)^2 - 4(0,04-0,02)(4-0+0,16)\right]^{1/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-\alpha_1(1,17047) & 0 \\ \alpha_2(0,4034) & 1-\alpha_2(4,5637) \end{bmatrix}$$

Sehingga nilai eigen dari matriks $J(E_4)$ menjadi:

$$\lambda_1 = 1 - \alpha_1(1{,}17047)$$
$$\lambda_2 = 1 - \alpha_2(4{,}5637)$$

Titik $E_4(0.4034, 0.9079)$ dikatakan stabil asimtotik apabila $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$.

Jika $|\lambda_1| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_1 < 1$

$$\Leftrightarrow\ -1 < 1 - \alpha_1(1{,}17047) < 1$$
$$\Leftrightarrow\ -2 < -\alpha_1(1{,}17047) < 0$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < \alpha_1 < \frac{2}{1{,}17047}$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < \alpha_1 < 1{,}7087$$

Jika $|\lambda_2| < 1$, maka diperoleh $-1 < \lambda_2 < 1$

$$\Leftrightarrow\ -1 < 1 - \alpha_2(4{,}5637) < 1$$
$$\Leftrightarrow\ -2 < -\alpha_2(4{,}5637) < 0$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < \alpha_2 < \frac{2}{4{,}5637}$$
$$\Leftrightarrow\ 0 < \alpha_2 < 0{,}4382$$

Pada perhitungan numerik dapat diketahui nilai α_1 dan α_2 yang sesuai pada model pemasaran *real estate*, terdapat pada titik $E_4(0.4034, 0.9079)$ dengan $0 < \alpha_1 < 1{,}7087$ dan $0 < \alpha_2 < 0{,}4382$.

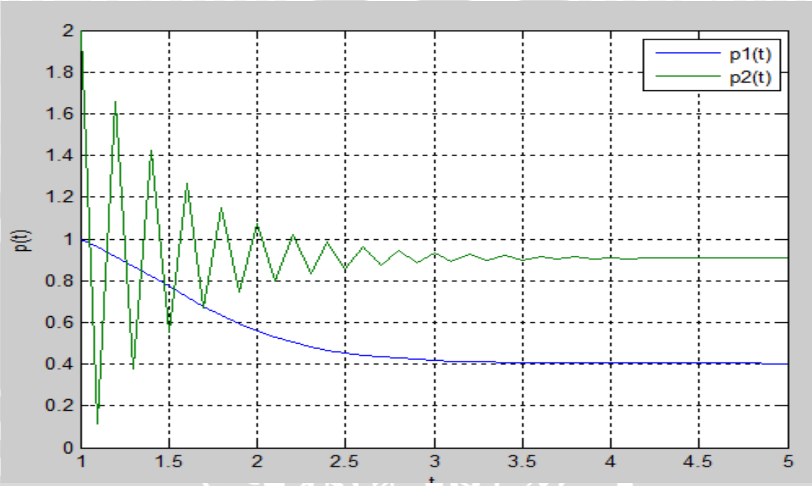
Untuk lebih memperjelas hasil perhitungan numeriknya, dibuat tabel sebagai berikut

Tabel 3.1 Syarat eksis α_1 dan α_2 pada model pemasaran *real estate*

Titik kesetimbangan	Syarat kestabilan	Syarat eksis pada model	
		$\alpha_1 > 0$	$\alpha_2 > 0$
$E_1(1.2396, 229.1842)$	$-1{,}7087 < \alpha_1 < 0$ $-0{,}4385 < \alpha_2 < 0$	tidak	tidak
$E_2(1.2396, 0.9876)$	$-1{,}7087 < \alpha_1 < 0$ $0 < \alpha_2 < 0{,}4385$	tidak	eksis
$E_3(0.4034, 229.0921)$	$0 < \alpha_1 < 1{,}7087$ $-0{,}4382 < \alpha_2 < 0$	eksis	tidak
$E_4(0.4034, 0.9079)$	$0 < \alpha_1 < 1{,}7087$ $0 < \alpha_2 < 0{,}4382$	eksis	eksis

Pada tabel diketahui jika α_1 dan α_2 akan eksis pada model di titik $E_4(0.4034, 0.9079)$.

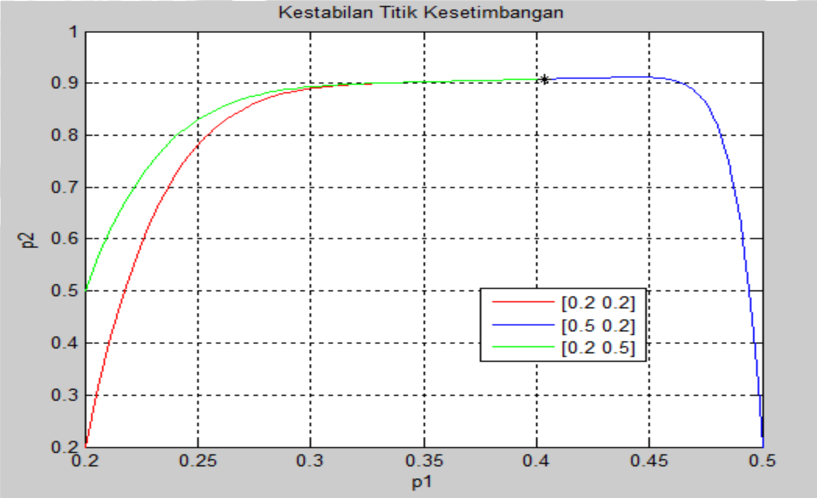
Untuk perilaku kestabilan dari sistem pemasaran *real estate* ditunjukkan oleh:



Gambar 3.1 Perilaku kestabilan sistem pemasaran real estat*e*

Gambar 3.1 menujukkan bahwa nilai $p(t)$ yang dicapai akan sama dengan perpotongan fungsi permintaan dan penawaran. Dengan demikian $p(t)$ akan mendekati harga keseimbangan apabila t diperbesar. Setelah harga tersebut dicapai, maka variasi pada harga akan berhenti. Jadi dapat disimpulkan bahwa harga cenderung stabil dan tidak berubah-ubah atau naik turun.

Untuk memperjelas titik $E_4(p_1, p_2)$ adalah titik kesetimbangan yang stabil akan dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan program Matlab. Simulasi numerik pada $E_4(p_1, p_2)$ diperlihatkan pada Gambar 3.2 sebagai berikut :



Gambar 3.2 Potret fase dengan titik awal (0.2 , 0.2), (0.2 , 0.5), dan (0.5, 0.2).

Seperti pada Gambar 3.2, sistem stabil pada titik $E_4(p_1, p_2)$, Gambar 3.1 disimulasikan dengan titik awal (0.2 , 0.2), (0.2 , 0.5), dan (0.5, 0.2).

Dimisalkan jika titik awal adalah harga tanah dan harga rumah pada saat waktu t tertentu, maka seiring berjalannya waktu atau t, harga tanah dan harga rumah cenderung tidak berubah-ubah lagi dan stabil pada titik $E_4(p_1, p_2)$.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pada rumusan masalah penulisan skripsi dan pembahasan pada Bab III, dapat disimpulkan bahwa :

1. Pada skripsi ini terdapat dua persamaan permintaan yaitu $D_1(t)$ untuk permintaan tanah dalam periode waktu *t* dan $D_2(t)$ untuk permintaan rumah dalam periode waktu *t*. Juga diperoleh dua persamaan penawaran yaitu $S_1(t)$ penawaran rumah dalam periode waktu *t* dan $S_2(t)$ penawaran rumah dalam periode waktu *t*. Dengan teori cobweb persamaan permintaan dan penawaran dikonstruksi menjadi model pemasaran *real estate*, yaitu persamaan $p_1(t)$ untuk harga tanah dan $p_2(t)$ untuk harga rumah.
2. Pada model pemasaran *real estate* didapatkan empat buah titik kesetimbangan (E_1, E_2, E_3, E_4). Dengan menggunakan nilai eigen dari matriks Jacobi pada titik kesetimbangan, maka titik E_4 stabil asimtotik dan parameter-parameter α_1 dan α_2 positif, sehingga memenuhi asumsi untuk model.
3. Dengan memasukkan parameter-parameter menurut Junhai Ma dan Lingling Mu pada analisis numerik, didapatkan titik kesetimbangan $E_1(p_1, p_2) = (1.24\ , 229.1842)$, $E_2(p_1, p_2) = (1.24, 0.9876)$, $E_3(p_1, p_2) = (0.4, 229.0921)$, $E_4(p_1, p_2) = (0.4, 0.9079)$. Setelah dilakukan analisis kestabilan dan ditunjukkan oleh simulasi matlab, dapat disimpulkan bahwa sistem stabil asimtotik pada $0 < \alpha_1 < 1{,}7087$ dan $0 < \alpha_2 < 0{,}4382$ di titik $E_4(0.4, 0.9079)$.

4.2 Saran

Untuk penulis selanjutnya yang ingin menyempurnakan tulisan ini. Dapat dikembangkan lagi dengan cara menganalisis bifurkasi dan serta menganalisa dan memecahkan masalah-masalah yang dapat membuat sistem pemasaran *real estate* menjadi dalam keadaan chaos. Karena jika parameter α_1 dan α_2 diperbesar maka titik kesetimbangan sistem yang stabil akan menjadi tidak stabil.

DAFTAR PUSTAKA

Arrowsmith, D.K dan C.M Place. 1990. *An Introductio to Dinamical System*. Cambrige University Press.USA.

Elaydi,S. 2005, *An Introduction to Difference Equations*.Third Edition, Springer. New York.

Gilarso. T. Drs. 2003. *Pengantar Ilmu Ekonomi Mikro*. Kanisius. Yogyakarta.

Guangqin, L. dan lifeng Xi. 2007. *Stability Analusis on a Kind of Nonlinear and Unbalanced Cobweb Model*.International Journal of Nonlinear Science.Vol.4(2007) No.2. pp.103-108.

Junhai, M. dan Lingling M. 2007. *Complex dinamyc in a nonlinear cobweb model for real estate market*. Discrete Dinamyc in Nature and Society. vol.2007. Article Id 29207. 10 pages.

Naimzada, A. K. Dan L. Sbragia. 2006. *Oligopoli games with nonlinear demand and cost function: two boundedly Rational adjustmen processes*. Chaos, Solution and Fractasl. vol.29. no. 3. pp.707-722.

Offerman,T., J. Potters dan J. Sonnemans. 2002. *Immitation and belief learning in an oligopoli experiment*. Review of Economic Studies. Vol.69. no.4. pp. 973-997

Perko,L. 1998. *Elements of Applied Bifurcation Theory.* Springer Verlog. New York.

Setiawan dan Kusrini, E. K. 2010. *Ekonometrika*. C.V. Andi Offset. Yogyakarta.

Wibisono, Yusuf. 1999. *Manual Matematika Ekonomi*. University Gajah Mada Press. Yogyakarta

Yali, L. 2011. *Duopoli output game with bounded rationality and linear control*. Management Science and Engineering. Vol.5. No.4. pp.26-29.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Listing Program Matlab untuk Potret fase dengan titik awal (0.2, 0.2), (0.2, 0.5), (0.5, 0.2)

```
function y=fs(t,x)
alpha1=0.2;
alpha2=0.4;
b0=1.2;
c0=4;
d0=0;
e0=0.5;
b1=2;
c1=1.6;
d1=3;
e1=0.3;
b2=1.6;
c2=0.04;
d2=0.02;
e2=0.2;
d3=0.4;
y(1)=alpha1*(b0-e0-(b1+e1)*x(1)+(b2-e2)*x(1)^2);
y(2)=alpha2*(c0-d0-(c1+d1)*x(2)+(c2-
d2)*x(2)^2+d3*x(1));
```

```
function [T Y]=RK4(f,a,h,za)
t=a(1):h:a(2);
N=length(t);
d=length(za);
x=zeros(N,d);
x(1,:)=za;
for i=1:N-1
    k1=h*f(t(i),x(i,:));
    k2=h*f(t(i)+h/2,x(i,:)+k1/2);
    k3=h*f(t(i)+h/2,x(i,:)+k2/2);
    k4=h*f(t(i+1),x(i,:)+k3);
    x(i+1,:)=x(i,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end;
T=t';
Y=x;
```

```
clear all;
clc;
[T,Y]=RK4(@fs,[0 100],0.1,[0.2 0.2]);
[T,Y1]=RK4(@fs,[0 100],0.1,[0.5 0.2]);
[T,Y2]=RK4(@fs,[0 100],0.1,[0.2 0.5]);
n=length(Y);
figure(1);
plot(Y(:,1),Y(:,2),'.r',Y1(:,1),Y1(:,2),'ob',
Y2(:,1),Y2(:,2),'g',Y(n,1),Y(n,2),'*y');
xlabel('p1');
ylabel('p2');
title('Kestabilan Titik Kesetimabangan');
legend('[0.2 0.2]','[0.5 0.2]','[0.2 0.5]');
grid on
```

Lampiran 2. Listing Program Matlab untuk Perilaku kestabilan sistem pemasaran *real estate*

```
clear all;
clc;
t=1:0.1:5;
alpha1=0.2;
alpha2=0.4;
b0=1.2;
b1=2;
b2=1.6;
c0=4;
c1=1.6;
c2=0.04;
d0=0;
d1=3;
d2=0.02;
d3=0.4;
e0=0.5;
e1=0.3;
e2=0.2;
n=length(t);
p1=zeros(1,n);
p2=zeros(1,n);
p1(1)=1;
p2(1)=2;
for i=2:n
    p1(i)=p1(i-1)+alpha1*(b0-e0-(b1+e1)*p1(i-1)+(b2-e2)*p1(i-1)^2);
    p2(i)=p2(i-1)+alpha2*(c0-d0-(c1+d1)*p2(i-1)+(c2-d2)*p2(i-1)^2+d3*p1(i-1));
end;
plot(t,p1,t,p2);
xlabel('t');
ylabel('p(t)');
legend ('p1(t)','p2(t)','b','k');
grid on
```