

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Sistem Dinamik

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diberikan kondisi pada masa sekarang atau masa yang lalu (Nagle dkk, 2004).

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Jika $t \in \mathbb{Z}$ atau \mathbb{N} maka diperoleh sistem dinamik diskrit, sedangkan sistem dinamik kontinu diperoleh jika $t \in \mathbb{R}$. Sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$u_{t+1} = f(u_t), \quad t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \text{ dan } u, f \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

Definisi 2.1.1 (Titik Keseimbangan)

Titik u^* dalam domain f dikatakan sebagai titik keseimbangan atau titik tetap sistem dinamik diskrit (2.1) jika u^* memenuhi $f(u^*) = u^*$

(Elaydi, 2005).

2.2 Persamaan Diferensial dengan Waktu Tunda

Menurut Kuang (1993), persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan dalam bentuk

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0. \quad (2.2)$$

Jika $x(t) = e^{\lambda t}$, maka persamaan (2.2) dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} = 0$$
$$e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) = 0.$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$ haruslah

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.3)$$

Persamaan (2.3) disebut persamaan karakteristik untuk persamaan (2.2). Misalkan

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \quad \text{dan} \quad P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.3) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda) e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.4)$$

2.3 Persamaan Nicholson's Blowflies

Nicholson melakukan percobaan laboratorium pada lalat yang dikarantina dan diberi makan hati domba dalam jumlah terbatas sebagai sumber protein untuk menghasilkan telur. Percobaan ini menemukan adanya osilasi atau naik-turunnya pertumbuhan populasi lalat yang terjadi secara periodik. Penemuan Nicholson dapat dijelaskan dengan model sederhana

$$P(t+1) = sP(t) + s'(t-n)e(t-n)P(t-n),$$

dengan P adalah populasi lalat dewasa, t adalah waktu dalam hari, s adalah tingkat kelangsungan hidup harian lalat dewasa, e adalah tingkat produksi telur per lalat per hari, s' adalah tingkat kelangsungan hidup dari telur sampai dewasa, dan n adalah waktu yang dibutuhkan dari lahir sampai dewasa (Readshaw dan Cuff, 1980).

Meskipun persamaan logistik klasik Hutchinson

$$\frac{du}{dt} = ru(t) \left(1 - \frac{u(t-\tau)}{k} \right),$$

dapat digunakan juga untuk menjelaskan fenomena osilasi dengan k mewakili tersedianya tingkat makanan dan τ merupakan waktu generasi, namun terdapat perbedaan waktu tunda antara Nicholson dengan persamaan Hutchinson. Persamaan Hutchinson memiliki waktu tunda sembilan hari sedangkan sebenarnya waktu tunda terjadi selama sebelas hari (Gourley dan Ruan, 2000).

Untuk mengatasi kesenjangan ini, Gurney at al. mengusulkan suatu model berdasarkan model persamaan diferensial dengan waktu tunda untuk dinamika populasi yang mempertimbangkan populasi individu dewasa yaitu

$$\frac{dx}{dt} = B(x(t - \tau)) - D(x(t)), \quad (2.5)$$

di mana $x(t)$ adalah kepadatan populasi pada waktu t , B adalah tingkat kelahiran dengan waktu tunda τ , dan D merupakan tingkat kematian.

Dengan menggunakan fungsi Rickers's

$$B(x) = axe^{-bx},$$

dan $D(x(t)) = cx(t)$ persamaan (2.5) dapat dituliskan sebagai

$$\frac{dx}{dt} = ax(t - \tau)e^{-bx(t-\tau)} - cx(t), \quad (2.6)$$

dengan a merupakan tingkat maksimum produksi telur harian per kapita, $1/b$ adalah ukuran populasi bereproduksi pada tingkat maksimum, c merupakan tingkat kematian harian populasi dewasa per kapita, dan τ adalah waktu generasi atau waktu yang dibutuhkan dari lahir sampai dewasa. Persamaan (2.6) disebut dengan persamaan Nicholson's Blowflies (Berezansky dkk, 2009).

2.4 Deret Taylor

Fungsi $f(x)$ dapat diekspansi menjadi sebuah deret pangkat di sekitar titik x_0 menggunakan turunan-turunannya. Misalkan f memiliki turunan yang semuanya kontinu maka

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(x_0),$$

yang dikenal dengan ekspansi Taylor atau deret Taylor untuk f (Robinson, 2004).

Fungsi $f(x,y)$ juga dapat diekspansi menjadi sebuah deret pangkat di sekitar (x_0,y_0) dengan melibatkan turunan parsial dari f di (x_0,y_0) . Misalkan $\xi = x - x_0$ dan $\eta = y - y_0$, maka ekspansi Taylor dari f dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \xi \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \eta \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \\
 & + \frac{1}{2!} \left(\xi^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} + 2\xi\eta \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} + \eta^2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \right) \\
 & + \frac{1}{3!} \left(\xi^3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^3} + 3\xi^2\eta \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x^2 \partial y} + 3\xi\eta^2 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y^2} \right. \\
 & \left. + \eta^3 \frac{\partial^3 f(x_0, y_0)}{\partial y^3} \right) + \dots
 \end{aligned}$$

(Robinson, 2004).

Fungsi $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ juga dapat diekspansi menjadi sebuah deret pangkat, yang dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = \sum_{|i|=0}^{\infty} \frac{1}{i_1! i_2! \dots i_n!} \frac{\partial^{|i|} f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} (x_1 - x_1^0)^{i_1} (x_2 - x_2^0)^{i_2} \dots (x_n - x_n^0)^{i_n},$$

di mana $|i| = i_1 + i_2 + \dots + i_n$ (Kuznetsov, 1998).

2.5 Metode Euler

Pendekatan numerik untuk persamaan diferensial

$$\frac{du}{dt} = f(t, u),$$

di mana fungsi f dan $\frac{du}{dt}$ adalah fungsi kontinu dengan kondisi awal

$$u(t_0) = u_0,$$

dilakukan dengan menggunakan metode Euler. Metode ini dinyatakan oleh persamaan

$$u_{n+1} = u_n + f(t_n, u_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Jika $f_n = f(t_n, u_n)$, maka persamaan (2.7) dapat ditulis kembali sebagai

$$u_{n+1} = u_n + f_n(t_{n+1} - t_n).$$

Jika ukuran langkah antara titik yang satu dengan yang lain memiliki nilai yang sama sebesar h , kemudian $t_{n+1} = t_n + h$ untuk setiap n , maka diperoleh persamaan Euler dalam bentuk

$$u_{n+1} = u_n + f_n h, \quad (2.8)$$

(Boyce dan DiPrima, 2005).

2.6 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Misalkan A adalah suatu matriks $n \times n$. Skalar μ disebut nilai eigen atau nilai karakteristik dari A jika terdapat suatu vektor tak nol q di \mathbb{R}^n , sehingga

$$Aq = \mu q.$$

Vektor q disebut vektor eigen atau vektor karakteristik dari A yang sesuai dengan nilai eigen μ (Anton, 1991).

2.7 Bilangan Kompleks

Bilangan kompleks z dapat dituliskan dalam bentuk

$$z = a + ib,$$

di mana a dan b merupakan bilangan riil. Nilai a merupakan bagian riil dari z , dinotasikan dengan $a = \text{Re}(z)$ dan nilai b merupakan bagian imajiner dari z , dinotasikan dengan $b = \text{Im}(z)$. Jika terdapat dua bilangan kompleks z dan w , maka penjumlahan dan pengurangan dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$z \pm w = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d).$$

Sedangkan perkalian dari dua bilangan kompleks didefinisikan sebagai

$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Jika terdapat tiga bilangan kompleks w , z , dan q , maka terdapat 3 sifat yang dipenuhi, yakni:

1. komutatif

$$w + z = z + w$$

(untuk penjumlahan),

$$wz = zw$$

(untuk perkalian),

2. asosiatif

$$w + (z + q) = (w + z) + q$$

(untuk penjumlahan),

$$w(zq) = (wz)q$$

(untuk perkalian),

3. distributif

$$w(z + q) = wz + wq$$

(Wuncsh,2005).

Jika terdapat bilangan kompleks $z = a + ib$ maka konjugat dari z ditulis sebagai $\bar{z} = a - ib$. Terdapat sifat-sifat yang dipenuhi, yaitu:

1. $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$,
2. $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z$,
3. $z\bar{z} = a^2 + b^2$,
4. $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,
5. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
6. $\frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{z_2}$

(Wuncsh, 2005).

Akar dari jumlah kuadrat bagian riil dan imajiner suatu bilangan kompleks z disebut modulus bilangan kompleks tersebut dan dinotasikan sebagai berikut:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Jika terdapat bilangan kompleks z dan w maka sifat-sifat yang dipenuhi oleh modulus adalah

1. $|\bar{z}| = |z|$,
2. $z\bar{z} = |z|^2$,
3. $|zw| = |z||w|$,
4. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$.

Bilangan kompleks $z = a + ib$ juga dapat ditulis dalam bentuk

$$z = r e^{i\theta},$$

dengan r adalah modulus z , $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, dan $\tan \theta = \frac{b}{a}$
(Wuncsh, 2005).

2.8 Hasil Kali Dalam pada Ruang Vektor Kompleks

Diberikan \mathbb{C}^n yaitu himpunan semua n -tupel bilangan kompleks. Untuk $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$ didefinisikan dengan

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j y_j,$$

di mana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ disebut hasil kali dalam pada ruang vektor kompleks (Michael dan Simon, 1980).

Sifat-sifat hasil kali dalam pada ruang vektor kompleks untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{C}^n$, antara lain:

1. $\langle y, y \rangle \geq 0$ dan $\langle y, y \rangle = 0$ jika dan hanya jika $y = 0$,
2. $\langle 0, y \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0$,
3. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,
4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
5. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,
6. $\langle kx, y \rangle = \bar{k} \langle x, y \rangle$,
7. $\langle x, ky \rangle = k \langle x, y \rangle$.

(Anton, 1991).

2.9 Kriteria Kestabilan

Suatu sistem diskrit diberikan dalam bentuk

$$u \rightarrow f(u, \tau), u \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2. \quad (2.9)$$

u^* dan A berturut-turut merupakan titik tetap dan matriks Jacobi sistem (2.9). Jika nilai eigen dari matriks A yang merupakan solusi persamaan karakteristik $|\mu I - A| = 0$ adalah $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ di mana $\mu_i \in \mathbb{C}$ dan memuat parameter τ , maka didefinisikan ruang eigen stabil T_{stable} yang direntang oleh vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen yang memiliki modulus kurang dari satu ($|\mu_i| < 1$) dan ruang eigen tak stabil $T_{unstable}$ yang direntang oleh vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen yang memiliki modulus lebih dari satu ($|\mu_i| > 1$) (Kuznetsov, 1998).

Perubahan nilai τ menyebabkan nilai eigen mengalami pergerakan dalam bidang kompleks. Jika terdapat τ kritis (τ^*) yang menyebabkan nilai eigen memiliki modulus sebesar satu ($|\mu_i| = 1$), sehingga nilai eigen berada pada lingkaran satuan, maka bifurkasi dapat terjadi. Ruang eigen yang direntang oleh vektor eigen yang sesuai dengan nilai eigen yang memiliki modulus sebesar satu ($|\mu_i| = 1$) dinotasikan sebagai T_{centre} (Crawford, 1991).

2.10 Bifurkasi Neimark-Sacker

Definisi 2.10.1 (Bifurkasi Neimark-Sacker)

Bifurkasi yang berkaitan dengan munculnya nilai eigen $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ disebut dengan bifurkasi Neimark-Sacker

(Kuznetsov, 1998).

Berdasarkan persamaan (2.9) dengan $f(0, \tau) = 0$ untuk semua τ , terdapat asumsi sebagai berikut:

1. fungsi f memiliki matriks Jacobi A yang memenuhi

$$A(\tau) = D_u f(0, \tau),$$

di mana D_u merupakan operator turunan untuk u . $A(\tau^*)$ di mana τ^* merupakan τ kritis memiliki sepasang nilai eigen kompleks $\mu(\tau^*)$ dan $\bar{\mu}(\tau^*)$ yang tepat berada pada lingkaran satuan, sementara semua nilai eigen lainnya terletak di dalam lingkaran satuan,

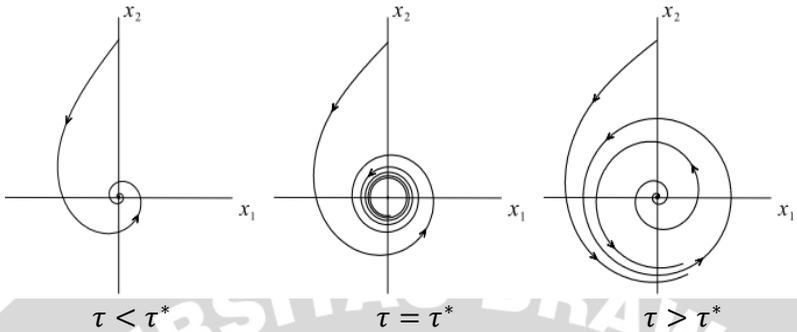
2. nilai eigen μ dan $\bar{\mu}$ melintasi lingkaran saat $\tau = \tau^*$ dengan

$$\frac{d}{d\tau} |\mu(\tau)|_{\tau=\tau^*} > 0,$$

3. jika $\arg(\mu(\tau)) = \theta(\tau)$ dan $\theta_0 = \theta(\tau^*)$ maka $e^{i\theta_0 k} \neq 1$ untuk $k = 1, 2, 3, 4$.

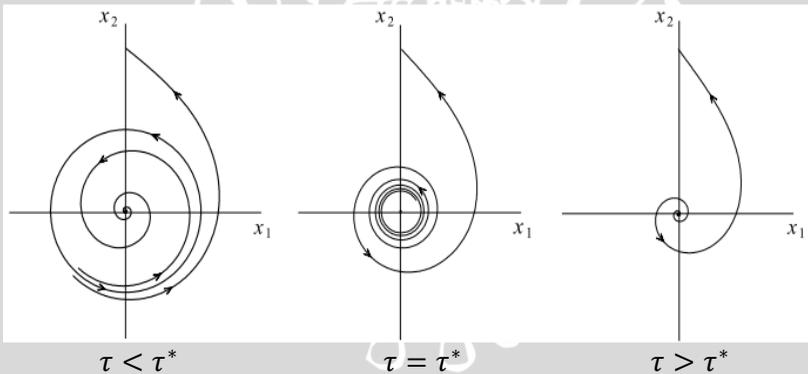
Kondisi dua menyatakan bahwa $\tau < \tau^*$, τ cukup dekat dengan τ^* , semua nilai eigen dari $A(\tau)$ memiliki modulus kurang dari satu. Titik tetap u^* adalah stabil asimtotik untuk τ dalam interval tersebut (Ford dan Wulf, 1998).

Menurut Kuznetsov (1998), jika terdapat $\tau = \tau^*$ sehingga muncul suatu *limit cycle* stabil pada sistem tersebut ketika τ melewati titik kritis τ^* maka sistem (2.9) tersebut mengalami bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*. Parameter $\tau = \tau^*$ menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0} > 0$. Hal ini berakibat pada perubahan struktur orbit dan munculnya *limit cycle* stabil dari sistem seiring dengan perubahan nilai parameter seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Bifurkasi Neimark-Sacker *supercritical*

Jika terdapat $\tau = \tau^*$ sehingga muncul suatu *limit cycle* tak stabil yang tereduksi pada sistem tersebut ketika τ melewati titik kritis τ^* maka sistem tersebut mengalami bifurkasi Neimark-Sacker *Subcritical*. Parameter $\tau = \tau^*$ menyebabkan nilai eigen pada sistem mempunyai bentuk $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0} > 0$. Sama dengan bifurkasi Neimark-Sacker *Supercritical*, struktur orbit dan tereduksinya *limit cycle* yang tak stabil dari sistem juga akan berubah seiring perubahan nilai parameter.



Gambar 2.2. Bifurkasi Neimark-Sacker *subcritical*

Struktur orbit disekitar u^* yang berubah sebagai akibat perubahan nilai parameter τ pun dianalisis lebih lanjut. Salah satu metode yang dapat digunakan dalam analisis kestabilan u^* adalah *center manifold*.

Perubahan struktur orbit ini dapat dianalisa menggunakan metode proyeksi pada teori *center manifold*. Metode proyeksi akan menghasilkan pemetaan dari sistem (2.9) yang akan menunjukkan ada tidaknya *limit cycle* pada struktur orbit. Teorema 2.1 diberikan untuk mempermudah perhitungan metode proyeksi.

Teorema 2.1

Diberikan pemetaan

$$v_n \rightarrow \mu v_n + \frac{1}{2} g_{20} v_n^2 + g_{11} v_n \bar{v}_n + \frac{1}{2} g_{02} \bar{v}_n^2 + \frac{1}{6} g_{30} v_n^3 + \frac{1}{2} g_{21} v_n^2 \bar{v}_n + \frac{1}{2} g_{12} v_n \bar{v}_n^2 + \frac{1}{6} g_{03} \bar{v}_n^3 + O(|z|^4),$$

di mana $v_n \in \mathbb{C}$, $\mu = \mu(\tau)$, $g_{ij} = g_{ij}(\tau) \in \mathbb{C}$, misalkan $\theta_0 = \arg(\mu(\tau^*))$ sedemikian sehingga $e^{i\theta_0 k} \neq 1$ untuk $k = 1, 2, 3, 4$. Didefinisikan

$$c_1 = c_1(\tau) = \frac{g_{20} g_{21} (\bar{\mu} - 3 + 2\mu)}{2(\mu^2 - \mu)(\bar{\mu} - 1)} + \frac{|g_{11}|^2}{1 - \bar{\mu}} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\mu^2 - \bar{\mu})} + \frac{g_{21}}{2},$$

maka

$$s_0 = \text{Re} \left(e^{-i\theta_0} c_1(\tau^*) \right),$$

1. jika $s_0 < 0$ maka u^* adalah titik tetap stabil nonlinear dari $f(0, \tau^*)$,
2. jika $s_0 > 0$ maka u^* adalah titik tetap tak stabil untuk sistem $f(0, \tau^*)$

(Ford dan Wulf, 1998).

Jika $s_0 < 0$ maka titik tetap u^* stabil asimtotik ketika $\tau < \tau^*$, tidak stabil ketika $\tau > \tau^*$, dan *limit cycle* stabil ada untuk $\tau > \tau^*$. Jika $s_0 > 0$ maka, *limit cycle* tak stabil ada untuk $\tau < \tau^*$ yang akan tereduksi seiring berubahnya parameter dan titik tetap u^* tak stabil ketika $\tau > \tau^*$. (Kuznetsov, 1998).