

**ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI
SATU PREDATOR DAN DUA PREY**

SKRIPSI

oleh:
GANDES NOVIA WULANSARI
0810940005-94



**PROGAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI
SATU PREDATOR DAN DUA PREY**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

**GANDES NOVIA WULANSARI
0810940005-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI
SATU *PREDATOR* DAN DUA *PREY***

oleh :

**GANDES NOVIA WULANSARI
0810940005**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 26 Juli 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

Telah diperiksa dan disahkan oleh:

Pembimbing I

Pembimbing II

**Dr. Wuryansari M.K., M.Si.
NIP. 196607281993032001**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP.196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Gandes Novia Wulansari
NIM : 0810940005
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model
Interaksi Satu *Predator* dan Dua
Prey

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini,
2. apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 26 Juli 2012
Yang menyatakan,

Gandes Novia Wulansari
NIM. 0810940005

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



ANALISIS DINAMIK MODEL INTERAKSI SATU *PREDATOR* DAN DUA *PREY*

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas dua macam model *predator-prey*. Keduanya terdiri dari satu *predator* dan dua *prey*. Pada model ke dua terdapat kerjasama antar *prey* sedangkan pada model pertama tidak demikian. Kedua model merupakan sistem otonomus nonlinier dengan tiga variabel tak bebas yaitu populasi *prey* pertama, populasi *prey* ke dua, dan populasi *predator*. Analisis dinamik berupa perhitungan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan lokal titik kesetimbangan dilakukan terhadap kedua model. Kerjasama antar *prey* menyebabkan *prey* lebih sulit dimangsa oleh *predator* sehingga populasi *prey* dan *predator* membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai keadaan yang setimbang. Di bagian akhir skripsi ini dilakukan simulasi numerik untuk mengilustrasikan dan menguji hasil analitik kedua model.

Kata kunci: model *predator-prey*, kerjasama antar *prey*, titik kesetimbangan, kestabilan lokal.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICAL ANALYSIS OF TWO *PREY* AND ONE *PREDATOR* INTERACTION MODEL

ABSTRACT

In this final project two kinds of predator–prey models are studied. Both of them consist of predator and two preys. The second model takes the competition between preys into account, while the first model does not. Both of models are formulated in three-dimensional nonlinear autonomous system, with three dependent variables, namely first prey populations, second prey populations, and predator populations. Dynamical analysis on both models, such as equilibrium points and local stability of equilibrium points are presented. Preys are more difficult to be caught by predator due to prey's cooperation so their population need longer time for reach balance condition. Finally, numerical simulations are presented to illustrate analytical result.

Keywords: *predator-prey* model, cooperation between preys, equilibrium point, local stability.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Analisis Dinamik Model Satu Predator dan Dua Prey**" ini dengan baik. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada teladan kita Rasulullah Muhammad saw, keluarga, para sahabat dan pengikut mereka yang setia.

Penulis menyadari penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si, selaku pembimbing I sekaligus dosen penasihat akademik atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan terhadap penulis selama studi dan penulisan skripsi ini.
2. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc selaku pembimbing II sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala bimbingan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Ratno Bagus E.W, MSi selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran guna perbaikan penulisan skripsi ini.
4. Dr. Sobri Abusini, MT selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala bimbingan dan arahan selama penulis menempuh studi.
5. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Ibu, Bapak, kedua Adikku, dan seluruh anggota keluarga besarku, atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang tiada henti diberikan.
7. Sahabat Bertujuh, 45 Comunity, Grup RanuPane, Dian, Nirma, Rani, Mega, Mimin, Risti dan semua teman-teman Matematika terutama angkatan 2008 dan 2007 atas segala bantuan, kebersamaan, kasih sayang dan motivasi selama penulis menempuh kuliah.
8. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan

skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih belum sempurna mengingat keterbatasan kemampuan penulis. Untuk itu, dengan segala kerendahan hati, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun melalui email penulis gandes.novia@gmail.com. Akhirnya penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca umumnya.

Malang, 26 Juli 2012

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Batasan Masalah.....	2
1.4 Tujuan Penulisan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Persamaan Diferensial	3
2.2 Sistem Dinamik	3
2.3 Sistem Otonomus Linier	5
2.4 Sistem Otonomus Nonlinier	6
2.5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz	8
2.6 Model Pertumbuhan Logistik	9
2.7 Model <i>Predator-Prey</i>	9
2.8 Simbiosis	10
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	
3.1 Model Interaksi Satu <i>Predator</i> dan Dua <i>Prey</i>	11
3.1.1 Model Pertama	11
3.1.2 Model Ke Dua	13
3.2 Titik Keseimbangan Model	14
3.2.1 Model Pertama	14
3.2.2 Model Ke Dua	18

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan Model	21
3.3.1 Model Pertama.....	21
3.3.2 Model Ke Dua	32
3.4 Simulasi Numerik	46
3.4.1 Model Pertama.....	46
3.4.2 Model Ke Dua.....	53
3.5 Pengaruh Kerjasama Antar <i>Prey</i>	60

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan.....	63
4.2 Saran.....	63

DAFTAR PUSTAKA	65
LAMPIRAN	67



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 3.1 Potret Fase Model Pertama untuk Solusi Pertama.....	47
Gambar 3.2 Potret Fase Model Pertama untuk Solusi Ke Dua	48
Gambar 3.3 Potret Fase Model Pertama untuk Solusi Ke Tiga.....	49
Gambar 3.4 Grafik Solusi Model Pertama untuk Solusi Ke Empat dengan $a > b$	50
Gambar 3.5 Potret Fase Model Pertama untuk Solusi Ke Empat dengan $a > b$	51
Gambar 3.6 Grafik Solusi Model Pertama untuk Solusi Ke Empat dengan $b > a$	52
Gambar 3.7 Potret Fase Model Pertama untuk Solusi Ke Empat dengan $b > a$	53
Gambar 3.8 Potret Fase Model Ke Dua untuk Solusi Pertama	54
Gambar 3.9 Potret Fase Model Ke Dua untuk Solusi Ke Dua	55
Gambar 3.10 Potret Fase Model Ke Dua untuk Solusi Ke Tiga.....	56
Gambar 3.11 Grafik Solusi Model Ke Dua untuk Solusi Ke Empat dengan $a > b$	57
Gambar 3.12 Potret Fase Model Ke Dua untuk Solusi Ke Empat dengan $a > b$	58
Gambar 3.13 Grafik Solusi Model Ke Dua untuk Solusi Ke Empat dengan $b > a$	59
Gambar 3.14 Potret Fase Model Ke Dua untuk Solusi Ke Empat dengan $b > a$	60

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1	Syarat Eksistensi dan Syarat Kestabilan Titik Keseimbangan.....	62
-----------	---	----

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Perhitungan Nilai x^* , y^* , dan z^* Model Pertama ...	67
Lampiran 2. Perhitungan Nilai x^* , y^* , dan z^* Model Ke Dua	71
Lampiran 3. Penyederhanaan Matriks Jacobi E_7 Model Pertama.....	75
Lampiran 4. Penyederhanaan B dan C	79
Lampiran 5. Perhitungan $AB - C$	81
Lampiran 6. Penyederhanaan Matriks Jacobi E_7 Model Ke Dua.....	83
Lampiran 7. Penyederhanaan B^* dan C^*	89
Lampiran 8. Perhitungan $A^*B^* - C^*$	93
Lampiran 9. <i>Listing Program</i>	95



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Adanya interaksi antarspesies berpengaruh terhadap pertumbuhan spesies. Interaksi antarspesies dapat dibedakan menjadi tiga tipe, yaitu *predator-prey* jika tingkat pertumbuhan spesies satu berkurang dan spesies lainnya meningkat, kompetisi jika tingkat pertumbuhan masing-masing spesies yang berinteraksi berkurang, dan mutualisme, jika tingkat pertumbuhan semua spesies yang berinteraksi bertambah (Murray, 2002).

Model pertama dan paling sederhana yang digunakan untuk mempelajari interaksi *predator-prey* dikemukakan oleh Lotka dan Volterra. Model ini menggambarkan interaksi antar dua spesies yang berperan sebagai mangsa dan pemangsa (Murray, 2002).

Di alam bebas, interaksi antar *predator-prey* tidak hanya melibatkan dua spesies. Salah satunya interaksi *predator-prey* yang melibatkan tiga spesies dengan satu *predator* dan dua *prey*. Dalam interaksi tersebut terdapat kemungkinan adanya kompetisi antar *prey* untuk memperebutkan nutrisi, kerjasama antar *prey* melawan *predator*, atau tanpa interaksi antar *prey*.

Berbeda dari skripsi Sakinah (2011) yang membahas model *predator-prey* dengan dua spesies atau Handayani (2012) yang membahas model interaksi tiga spesies dengan spesies ke tiga berupa omnivora, dalam skripsi ini dipelajari analisis dinamik model satu *predator* dan dua *prey* dengan kerjasama dan tanpa kerjasama antar *prey* serta pengaruh kerjasama antar *prey* terhadap populasi secara keseluruhan.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada subbab 1.1, pokok permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana formulasi model interaksi satu *predator* dan dua *prey* dengan kerjasama dan tanpa kerjasama antar *prey*?
2. Bagaimana kestabilan titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana simulasi numerik model dan interpretasinya?

4. Bagaimana pengaruh kerjasama antar *prey* terhadap populasi secara keseluruhan?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah, yaitu

1. populasi bersifat tertutup,
2. terdapat satu jenis *predator* dan dua jenis *prey*,
3. pada model ke dua, kedua *prey* bekerjasama melawan *predator*,
4. kerjasama antar *prey* hanya dilakukan ketika terdapat *predator*,
5. tidak ada kompetisi antar *prey*,
6. tingkat memangsa dari *predator* diasumsikan berbanding lurus dengan populasi *prey*,
7. kematian *predator* hanya disebabkan karena kelangkaan *prey*.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah untuk

1. mengkonstruksi model interaksi satu *predator* dan dua *prey* dengan kerjasama dan tanpa kerjasama antar *prey*,
2. menentukan kestabilan titik kesetimbangan model,
3. melakukan simulasi numerik model dan menginterpretasikannya,
4. mengetahui pengaruh kerjasama antar *prey* terhadap populasi secara keseluruhan.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Edward dan Penney, 2001).

Definisi 2.1.2 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (Erward dan Penney, 2001).

Definisi 2.1.3 (Sistem Persamaan Diferensial Biasa)

Sistem PDB berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa linier dengan n variabel. Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear orde satu berdimensi n dengan koefisien konstan adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\quad (2.1)$$

dengan $a_{i,j}$ adalah konstanta riil dan $i, j = 1, \dots, n$ (Robinson, 2004).

2.2 Sistem Dinamik

Definisi 2.2.1 (Sistem Dinamik)

Sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi awal pada masa sekarang atau di masa lalu (Naggle dan Saff, 1993).

Definisi 2.2.2 (Sistem Otonomus)

Sistem dinamik berdimensi tiga yang berbentuk

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = F_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (2.2)$$

disebut sistem otonomus jika F_i , untuk $i = 1,2,3$ adalah fungsi bernilai real yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap waktu t (Naggle dan Saff, 1993).

Definisi 2.2.3 (Titik Kesetimbangan)

Pandang sistem otonomus (2.2). Titik (x_1^*, x_2^*, x_3^*) yang memenuhi $F_1(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = F_2(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = F_3(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0$ disebut titik kritis sistem (2.2). Titik kritis merupakan solusi sistem otonomus (2.2) dengan $F_i = 0$, sehingga titik kritis disebut juga titik tetap atau titik kesetimbangan (Naggle dan Saff, 1993).

Definisi 2.2.4 (Kestabilan Titik Kesetimbangan)

Titik kesetimbangan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) dikatakan

(a) stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga bila

$$\begin{aligned} \|(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) - (x_1^*, x_2^*, x_3^*)\| < \delta \text{ maka} \\ \|(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) - (x_1^*, x_2^*, x_3^*)\| < \varepsilon, \quad t > 0 \end{aligned}$$

(b) tak stabil apabila titik tersebut tidak stabil atau tidak memenuhi kriteria (a)

(c) stabil asimtotik jika ia stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), x_3 = x_3(t)$ yang memenuhi $\|(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) - (x_1^*, x_2^*, x_3^*)\| < \delta_0$, akan bersifat $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ (Robinson, 2004).

2.3 Sistem Otonomus Linier

Definisi 2.3.1 (Sistem Otonomus Linier)

Suatu sistem otonomus dikatakan linier jika tidak terdapat perkalian di antara variabel tak bebasnya. Berikut adalah sistem otonomus linier tiga dimensi

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3,\end{aligned}\tag{2.3}$$

dimana a_{ij} merupakan konstanta riil, untuk $i, j = 1, 2, 3$. Persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}\tag{2.4}$$

dengan $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ dan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Jika $\det(A) \neq 0$, maka titik $(0,0,0)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem otonomus linier tersebut (Boyce dan DiPrima, 2005).

Teorema 2.3.1 (Kestabilan Sistem Otonomus Linier)

Misalkan λ_n , untuk $n = 1, 2, 3$ adalah nilai eigen matriks koefisien A sistem otonomus linier dengan $\det(A) \neq 0$. Titik kesetimbangan $(0,0,0)$ bersifat

1. Stabil asimtotik jika λ_n bernilai riil negatif atau bagian riil λ_n

bernilai negatif untuk setiap n .

2. Stabil (tetapi bukan stabil asimtotik) jika terdapat λ_n dengan bagian riil nol.
3. Tidak stabil jika terdapat λ_n yang memiliki bagian riil yang positif (Boyce dan DiPrima, 2005).

2.4 Sistem Otonomus Nonlinier

Suatu sistem otonomus dikatakan nonlinier jika terdapat perkalian di antara variabel tak bebasnya. Bentuk umum sistem otonomus nonlinier tiga dimensi adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3).\end{aligned}\tag{2.5}$$

di mana f_1 , f_2 , dan f_3 nonlinier.

Diasumsikan bahwa fungsi f_1 , f_2 , dan f_3 mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\bar{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Deret Taylor fungsi f_1 , f_2 , dan f_3 di sekitar titik \bar{x}^* adalah

$$f_1(\bar{x}) = f_1(\bar{x}^*) + \frac{\partial f_1(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_1(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)\tag{2.6}$$

$$+ \frac{\partial f_1(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \eta_1(\bar{x}),$$

$$f_2(\bar{x}) = f_2(\bar{x}^*) + \frac{\partial f_2(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_2(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)\tag{2.7}$$

$$+ \frac{\partial f_2(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \eta_2(\bar{x}),$$

$$f_3(\bar{x}) = f_3(\bar{x}^*) + \frac{\partial f_3(\bar{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_3(\bar{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial f_3(\bar{x}^*)}{\partial x_3}(x_3 - x_3^*) + \eta_3(\bar{x}), \quad (2.8)$$

dengan $\eta_1(\bar{x}), \eta_2(\bar{x}),$ dan $\eta_3(\bar{x})$ suku sisa. Karena

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d}{dt}(x_1 - x_1^*), \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d}{dt}(x_2 - x_2^*), \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{d}{dt}(x_3 - x_3^*)$$

maka persamaan (2.9) sampai dengan (2.11) dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\bar{x}^*) \\ f_2(\bar{x}^*) \\ f_3(\bar{x}^*) \end{bmatrix} + J(\bar{x}^*) \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ x_3 - x_3^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\bar{x}) \\ \eta_2(\bar{x}) \\ \eta_3(\bar{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

di mana

$$J(\bar{x}^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}_{(\bar{x}^*)} \quad (2.10)$$

matriks Jacobi atau *partial derivative matrix (derivative matrix)*.

Misalkan $\hat{x}_1 = x_1 - x_1^*, \hat{x}_2 = x_2 - x_2^*, \hat{x}_3 = x_3 - x_3^*$. Karena $F_1(\bar{x}^*) = F_2(\bar{x}^*) = F_3(\bar{x}^*) = 0$, maka persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{d \hat{x}_1}{dt} \\ \frac{d \hat{x}_2}{dt} \\ \frac{d \hat{x}_3}{dt} \end{bmatrix} = J(\bar{x}^*) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Persamaan (2.11) dapat ditulis

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = J\bar{w} + \bar{\eta},$$

dengan $\bar{w} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^T$, $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$, dan $J = J(\bar{x}^*)$. Jika (x_1, x_2, x_3) cukup dekat dengan (x_1^*, x_2^*, x_3^*) , maka $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ bernilai kecil sehingga $\|\bar{\eta}\| \leq \|\bar{w}\|$. Oleh karena itu, $\bar{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinier (2.5) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = J\bar{w}. \quad (2.12)$$

Untuk $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, x_3 = x_3^*$ diperoleh $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0,0,0)$, sehingga sistem linier (2.11) memiliki titik kesetimbangan $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0,0,0)$ dan J identik dengan A pada persamaan (2.4).

Teorema 2.4.1 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinier)

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinier (2.5) bersifat

1. stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan stabil asimtotik.
2. Tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan tak stabil (Robinson, 2004).

2.5 Kriteria Kestabilan Routh-Hurwitz

Jika suatu persamaan karakteristik sulit ditentukan nilai eigen beserta tandanya, dapat digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mempermudah menganalisis jenis kestabilannya.

Kestabilan titik kesetimbangan sistem otonomus (2.5) ditentukan dengan nilai eigen matriks Jacobi (2.10). Misalkan matriks Jacobi (2.10) memiliki persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0 \quad (2.13)$$

di mana $c_1 = -tr(J)$, $c_2 = \sum_{k=1}^3 \det(J_k)$, $c_3 = -\det(J)$, dan J_k adalah matriks yang diperoleh dari J dengan menghapus baris dan kolom ke- k (Ledder, 2005).

Teorema 2.5.1 (Kriteria Routh-Hurwitz)

Bagian real akar persamaan (2.13) bernilai negatif jika c_1, c_2 , dan c_3 memenuhi kriteria Routh-Hurwitz, yaitu

$$c_3 > 0, H_1 = |c_1| > 0, \text{ dan } H_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ 1 & c_2 \end{vmatrix} > 0$$

(Glass dan Murray, 2001).

2.6 Model Pertumbuhan Logistik

Model logistik yang diperkenalkan oleh Verhulst merupakan sebuah model pertumbuhan populasi. Model tersebut dideskripsikan sebagai

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right),$$

dimana r merupakan tingkat pertumbuhan intrinsik populasi dan bernilai positif dan K merupakan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) yaitu kapasitas maksimum lingkungan (Boyce dan DiPrima, 2005).

2.7 Model Predator Prey

Model interaksi *predator-prey* pertama kali diperkenalkan oleh Volterra dan dikenal dengan model Lotka-Volterra. Asumsi dari model tersebut adalah *prey* tumbuh tidak terbatas kecuali ada *predator*, adanya *predator* mengurangi populasi *prey*, kelangkaan *prey* mengakibatkan kematian *predator*, dan pemangsa terhadap *prey* sama dengan laju interaksi *prey* dan *predator*.

$$\frac{dN}{dt} = N(a - bP)$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cN - d),$$

di mana N adalah *prey*, P *predator*, a laju pertumbuhan *prey*, b tingkat memangsa dari *prey*, c tingkat kontribusi *prey* terhadap

predator, dan *d* tingkat kematian *predator* (Glass dan Murray, 2001).

2.8 Simbiosis

Simbiosis adalah hubungan antara dua makhluk hidup berbeda yang hidup bersama. Terdapat beberapa macam simbiosis diantaranya simbiosis komensalisme, simbiosis parasitisme, dan simbiosis mutualisme. Simbiosis komensalisme adalah hubungan antara dua jenis makhluk hidup yang menguntungkan salah satu pihak sedangkan pihak yang lain tidak dirugikan. Contoh hubungan antara ikan hiu dan ikan remora. Simbiosis parasitisme adalah hubungan antara dua jenis makhluk hidup, yang satu mendapat keuntungan sedangkan pihak yang lain dirugikan. Contoh hubungan antara benalu dan tumbuhan inangnya. Simbiosis mutualisme adalah hubungan antara dua jenis makhluk hidup yang saling menguntungkan. Contoh hubungan kupu-kupu dengan tanaman berbunga (Sugiyanto dan Ismawati, 2008).



BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Interaksi Satu *Predator* dan Dua *Prey*

Misalkan $x(t)$ menyatakan populasi *prey* pertama pada waktu t , $y(t)$ menyatakan populasi *prey* ke dua pada waktu t , dan $z(t)$ menyatakan populasi *predator* pada waktu t . Interaksi antara $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ dapat dimodelkan sebagai berikut

3.1.1 Model Pertama

Model pertama merupakan model interaksi antara *predator* dan dua *prey* tanpa kerjasama antar *prey*. Di bawah ini merupakan konstruksi model pertama.

3.1.1.1 Laju Perubahan Populasi *Prey* Pertama

Laju pertambahan populasi *prey* secara alami digambarkan dalam model pertumbuhan logistik *prey*

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x), \quad (3.1)$$

di mana a adalah laju pertumbuhan intrinsik x . Pertumbuhan populasi x akan melambat dan menuju titik nol ketika populasinya mendekati daya dukung lingkungan.

Adanya z yang memangsa x mengakibatkan populasi x berkurang. Semakin besar tingkat memangsa dari z terhadap x , maka populasi x akan semakin berkurang. Laju perubahan populasi x berbanding lurus dengan tingkat memangsa z terhadap x

$$\frac{dx}{dt} = -xz, \quad (3.2)$$

Berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.2), laju perubahan populasi *prey* satu adalah

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x) - xz. \quad (3.3)$$

3.1.1.2 Laju Perubahan Populasi *Prey* ke dua

Sama dengan penjelasan pada subbab 3.1.1.1, maka laju perubahan populasi y terhadap t adalah

$$\frac{dy}{dt} = by(1-y) - yz. \quad (3.4)$$

3.1.1.3 Laju Perubahan Populasi *Predator*

Tidak adanya populasi x dan y sebagai bahan makanan mengakibatkan kematian z . Laju perubahan populasi z berbanding lurus dengan laju kematian z karena tidak adanya mangsa (c)

$$\frac{dz}{dt} = -cz. \quad (3.5)$$

Ketersediaan populasi x dan y sebagai bahan makanan mempengaruhi perubahan populasi z . z mengubah x dan y yang dimangsanya menjadi energi untuk tumbuh dan berkembangbiak. Semakin banyak *prey* yang dimangsa, semakin besar pertumbuhan z . Laju perubahan populasi z terhadap waktu t berbanding lurus dengan koefisien kontribusi x terhadap pertumbuhan z (d) dan koefisien kontribusi y terhadap pertumbuhan z (e).

$$\frac{dz}{dt} = dxz + eyz. \quad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.5) dan (3.6), laju perubahan populasi z terhadap waktu t adalah sebagai berikut

$$\frac{dz}{dt} = -cz + dxz + eyz. \quad (3.7)$$

Berdasarkan persamaan (3.3), (3.4), dan (3.7) maka model interaksi satu *predator* dan dua *prey* tanpa kerjasama antar *prey* adalah

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax(1-x) - xz, \\ \frac{dy}{dt} &= by(1-y) - yz, \\ \frac{dz}{dt} &= -cz + dxz + eyz,\end{aligned}\tag{3.8}$$

$a, b, c, d,$ dan e bernilai positif.

3.1.2 Model Ke Dua

Model ke dua merupakan model interaksi antara *predator* dan dua *prey* dengan kerjasama antar *prey*. Di bawah ini merupakan konstruksi model ke dua.

3.1.2.1 Laju Perubahan Populasi *Prey* Pertama

Sebagaimana dijelaskan pada subbab 3.1.1.1, laju pertumbuhan populasi *prey* secara alami dan kematian *prey* pertama digambarkan dalam persamaan 3.1 dan 3.2

Terdapat interaksi antara x dan y , yaitu kerjasama untuk melawan z . Semakin besar tingkat interaksi tersebut, semakin banyak populasi x dan y yang tidak dimangsa z . Laju perubahan populasi x berbanding lurus dengan tingkat interaksi.

$$\frac{dx}{dt} = xyz.\tag{3.9}$$

Maka laju perubahan populasi x terhadap t adalah

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x) - xz + xyz.\tag{3.10}$$

3.1.2.2 Laju Perubahan Populasi *Prey* Ke Dua

Sama dengan penjelasan pada subbab 3.1.2.1, maka laju perubahan populasi y terhadap t adalah

$$\frac{dy}{dt} = by(1 - y) - yz + xyz. \quad (3.11)$$

3.1.2.3 Laju Perubahan Populasi Predator

Analog dengan penjelasan pada subbab 3.1.1.3, maka laju perubahan populasi z terhadap t adalah

$$\frac{dz}{dt} = -cz + dxz + eyz. \quad (3.12)$$

Berdasarkan persamaan (3.10), (3.11), dan (3.12), model interaksi satu predator dan dua prey dengan kerjasama antar prey adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax(1 - x) - xz + xyz, \\ \frac{dy}{dt} &= by(1 - x) - yz + xyz, \\ \frac{dz}{dt} &= -cz + dxz + eyz, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$a, b, c, d,$ dan e bernilai positif.

3.2 Titik Kesetimbangan Model

3.2.1 Model Pertama

Titik kesetimbangan model pertama (3.8) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned} ax(1 - x) - xz &= 0, \\ by(1 - y) - yz &= 0, \\ -cz + dxz + eyz &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sistem persamaan (3.14) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\begin{aligned}x(a - ax - z) &= 0, \\y(b - by - z) &= 0, \\z(-c + dx + ey) &= 0,\end{aligned}$$

diperoleh

$$\begin{aligned}x = 0 \text{ atau } a - ax - z &= 0, \\y = 0 \text{ atau } b - by - z &= 0, \\z = 0 \text{ atau } -c + dx + ey &= 0.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Kombinasi dari solusi-solusi (3.15) menghasilkan delapan kemungkinan, yaitu

1. $x = 0, y = 0,$ dan $z = 0,$
2. $x = 0, y = 0,$ dan $-c + dx + ey = 0,$
3. $a - ax - z = 0, y = 0,$ dan $z = 0,$
4. $x = 0, b - by - z = 0,$ dan $z = 0,$
5. $a - ax - z = 0, b - by - z = 0,$ dan $z = 0,$
6. $a - ax - z = 0, y = 0,$ dan $-c + dx + ey = 0,$
7. $x = 0, b - by - z = 0,$ dan $-c + dx + ey = 0,$
8. $a - ax - z = 0, b - by - z = 0,$ dan $-c + dx + ey = 0.$

Kemungkinan pertama menghasilkan titik kesetimbangan $E_1(0,0,0)$, yang menunjukkan bahwa semua populasi punah.

Kemungkinan ke dua mustahil sehingga tidak terdapat titik kesetimbangan yang memenuhi.

Kemungkinan ke tiga terjadi ketika $a - ax - z = 0, y = 0,$ dan $y = 0.$ Jika $y=0$ dan $z=0$ disubstitusikan ke $a - ax - z = 0,$ diperoleh $x=1.$ Sehingga pada kemungkinan ke tiga diperoleh titik kesetimbangan $E_2(1,0,0)$ Titik kesetimbangan E_2 menunjukkan populasi *prey* ke dua dan *predator* punah.

Kemungkinan ke empat terjadi ketika $x = 0, b - by - z = 0,$ dan $z = 0$ Jika $x=0$ dan $z=0$ disubstitusikan ke $-by - z = 0,$ diperoleh $y = 1.$ Pada kemungkinan ke empat diperoleh titik

kesetimbangan $E_3(0,1,0)$ Titik kesetimbangan E_3 menunjukkan populasi *prey* pertama dan *predator* punah.

Kemungkinan ke lima terjadi ketika $a - ax - z = 0, b - by - z = 0$ dan $z = 0$. Jika $z=0$ disubstitusikan ke $a - ax - z = 0$ dan $b - by - z = 0$, diperoleh

$$a - ax = 0, \quad (3.16)$$

$$b - by = 0. \quad (3.17)$$

Penyelesaian persamaan (3.16) dan (3.17) adalah $x=1$ dan $y=1$. Maka pada kemungkinan ke lima diperoleh titik kesetimbangan $E_4(1,1,0)$. Titik kesetimbangan E_4 menunjukkan hanya populasi *predator* yang punah.

Kemungkinan ke enam terjadi ketika $a - ax - z = 0, y = 0$ dan $-c + dx + ey = 0$. Jika $y=0$ maka diperoleh

$$-c + dx = 0, \quad (3.18)$$

$$a - ax - z = 0. \quad (3.19)$$

Penyelesaian persamaan (3.18) adalah $x = c/d$. Jika $x = c/d$ disubstitusikan ke persamaan (3.19), maka $z = a - ac/d$ atau $z = (ad - ac)/d$. Pada kemungkinan ke enam diperoleh titik kesetimbangan $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$. Titik kesetimbangan tersebut terjadi ketika populasi *prey* pertama sebesar c/d , populasi *predator* sebesar $(ad - ac)/d$ dan *prey* ke dua punah.

Titik kesetimbangan E_5 ada jika $d > c$, koefisien kontribusi *prey* pertama terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator*.

Kemungkinan ke tujuh terjadi ketika $x = 0, b - by - z = 0$, dan $-c + dx + ey = 0$. Jika $x=0$, diperoleh

$$-c + ey = 0, \quad (3.20)$$

$$b - by - z = 0. \quad (3.21)$$

Penyelesaian persamaan (3.20) adalah $y = c/e$. Jika $y = c/e$ disubstitusikan ke persamaan (3.21), diperoleh $z = b - bc/e$ atau $z = (be - bc)/e$. Pada kemungkinan ke tujuh diperoleh titik

kesetimbangan $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$. Titik kesetimbangan E_6 menunjukkan bahwa hanya populasi *prey* pertama yang punah.

Titik kesetimbangan E_6 ada jika $e > c$, koefisien kontribusi *prey* ke dua terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator*.

Kemungkinan ke delapan terjadi ketika

$$\begin{aligned} a - ax - z &= 0, \\ b - by - z &= 0, \\ -c + dx + ey &= 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Titik kesetimbangan kemungkinan ke delapan diperoleh dengan menyelesaikan sistem (3.22) seperti perhitungan pada Lampiran 1.

Dari perhitungan pada Lampiran 1, diperoleh

$$x^* = \frac{ae + bc - be}{ae + bd}, \tag{3.23}$$

$$y^* = \frac{ac + bd - ad}{ae + bd}, \tag{3.24}$$

$$z^* = \frac{abd + abe - abc}{ae + bd}. \tag{3.25}$$

Jadi pada kemungkinan ke delapan diperoleh titik kesetimbangan

$$E_7(x^*, y^*, z^*)$$

Titik kesetimbangan E_7 ada jika

$$\begin{aligned} c &> e, \\ c &> d, \\ d + e &> c \end{aligned}$$

Titik kesetimbangan E_7 terjadi ketika tidak ada populasi yang punah.

Jadi model pertama memiliki tujuh titik kesetimbangan, yaitu $E_1(0,0,0)$, $E_2(1,0,0)$, $E_3(0,1,0)$, $E_4(1,1,0)$, $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$, $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$, dan $E_7(x^*, y^*, z^*)$.

3.2.2 Model Ke Dua

Titik kesetimbangan model ke dua (3.13) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned} ax(1-x) - xz + xyz &= 0, \\ by(1-y) - yz + xyz &= 0, \\ -cz + dxz + eyz &= 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Sistem persamaan (3.26) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{aligned} x(a - ax - z + yz) &= 0, \\ y(b - by - z + xz) &= 0, \\ z(-c + dx + ey) &= 0, \end{aligned} \tag{3.27}$$

diperoleh

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ atau } a - ax - z + yz &= 0, \\ y = 0 \text{ atau } b - by - z + xz &= 0, \\ z = 0 \text{ atau } -c + dx + ey &= 0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Kombinasi dari solusi-solusi (3.28) menghasilkan delapan kemungkinan, yaitu

1. $x = 0, y = 0, \text{ dan } z = 0,$
2. $x = 0, y = 0, \text{ dan } -c + dx + ey = 0,$
3. $a - ax - z + yz = 0, y = 0, \text{ dan } z = 0,$
4. $x = 0, b - by - z + xz = 0, \text{ dan } z = 0,$
5. $a - ax - z + yz = 0, b - by - z + xz = 0, \text{ dan } z = 0,$
6. $a - ax - z + yz = 0, y = 0, \text{ dan } -c + dx + ey = 0,$
7. $x = 0, b - by - z + xz = 0, \text{ dan } -c + dx + ey = 0,$

8. $a - ax - z + yz = 0, b - by - z + xz = 0$, dan $-c + dx + ey = 0$.

Kemungkinan pertama menghasilkan titik kesetimbangan $E_1(0,0,0)$. Titik kesetimbangan E_1 menunjukkan bahwa semua populasi punah.

Kemungkinan ke dua mustahil sehingga tidak memiliki titik kesetimbangan.

Kemungkinan ke tiga terjadi ketika $a - ax - z + yz = 0, y = 0$, dan $z = 0$. Jika $y=0$ dan $z=0$ disubstitusikan ke $-ax - z + yz = 0$, diperoleh $x=1$. Jadi pada kasus tiga diperoleh titik kesetimbangan $E_2(1,0,0)$ yang menunjukkan populasi *prey* ke dua dan *predator* punah.

Kemungkinan ke empat terjadi ketika $x = 0, b - by - z + xz = 0$, dan $z = 0$. Jika $x=0$ dan $z=0$ disubstitusikan ke $-by - z + xz = 0$, diperoleh $y=1$. Jadi pada kemungkinan ke empat diperoleh titik kesetimbangan $E_3(0,1,0)$ yang menunjukkan populasi *prey* pertama dan *predator* punah

Kemungkinan ke lima terjadi ketika $a - ax - z + yz = 0, b - by - z + xz = 0$ dan $z = 0$. Jika $z=0$ disubstitusikan ke $a - ax - z + yz = 0$ dan $b - by - z + xz = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} a - ax &= 0, \\ b - by &= 0, \end{aligned} \tag{3.29}$$

dari persamaan (3.29) diperoleh penyelesaian $x=1$ dan $y= 1$. Jadi pada kemungkinan ke lima diperoleh titik kesetimbangan $E_4(1,1,0)$ yang menunjukkan hanya populasi *predator* yang punah.

Kemungkinan ke enam terjadi ketika $a - ax - z + yz = 0, y = 0$ dan $-c + dx + ey = 0$. Jika $y=0$ maka diperoleh

$$-c + dx = 0, \tag{3.30}$$

$$a - ax - z = 0. \tag{3.31}$$

Penyelesaian persamaan (3.30) adalah $x = c/d$. Jika $x = c/d$ disubstitusikan ke persamaan (3.31), diperoleh $z = a - ac/d$ atau $z = (ad - ac)/d$. Pada kemungkinan ke enam diperoleh titik kesetimbangan $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$ yang menunjukkan

populasi *prey* pertama sebesar c/d , populasi *predator* sebesar $(ad - ac)/d$ dan *prey* ke dua punah.

Titik kesetimbangan E_5 ada jika $d > c$, koefisien kontribusi *prey* pertama terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator*.

Kemungkinan ke tujuh terjadi ketika $x = 0, b - by - z + xz = 0$ dan $-c + dx + ey = 0$. Jika $x=0$, diperoleh

$$-c + ey = 0, \quad (3.32)$$

$$b - by - z = 0. \quad (3.33)$$

Penyelesaian persamaan (3.32) adalah $y = c/e$. Jika $y = c/e$ disubstitusikan ke persamaan (3.33), diperoleh $z = b - bc/e$ atau $z = (be - bc)/e$. Jadi pada kasus tujuh diperoleh titik kesetimbangan $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$ yang menunjukkan hanya populasi *prey* pertama yang punah. Titik kesetimbangan E_6 ada jika $e > c$, koefisien kontribusi *prey* ke dua terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator*.

Kemungkinan ke delapan terjadi ketika

$$a - ax - z + yz = 0,$$

$$b - by - z + xz = 0, \quad (3.34)$$

$$-c + dx + ey = 0.$$

Titik kesetimbangan kemungkinan ke delapan diperoleh dengan menyelesaikan sistem (3.34) seperti perhitungan pada Lampiran 2. Dari perhitungan pada Lampiran 2, diperoleh

$$x^* = \frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$y^* = \frac{c - d + d\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$z^* = \sqrt{ab}.$$

Jadi pada kasus delapan diperoleh titik kesetimbangan $E_7(x^*, y^*, z^*)$ yang menunjukkan tidak ada populasi yang punah. Titik kesetimbangan E_7 ada jika

$$c > e,$$

$$c > d.$$

Jadi model ke dua memiliki tujuh titik kesetimbangan, yaitu $E_1(0,0,0)$, $E_2(1,0,0)$, $E_3(0,1,0)$, $E_4(1,1,0)$, $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$, $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$, dan $E_7(x^*, y^*, z^*)$.

3.3 Kestabilan Titik Kesetimbangan Model

3.3.1 Model Pertama

Sebelum menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model, terlebih dahulu dilakukan proses linierisasi. Hasil linierisasi model pertama sistem (3.8) adalah matriks Jacobi yang berbentuk

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} a - 2ax - z & 0 & -x \\ 0 & b - 2by - z & -y \\ dz & ey & -c + dx + ey \end{bmatrix}.$$

3.3.1.1 Titik Kesetimbangan $E_1(0,0,0)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di titik E_1

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}. \quad (3.35)$$

Nilai eigen matriks (3.35) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_1) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(a - \lambda)(b - \lambda)(-c - \lambda) = 0, \quad (3.36)$$

dari persamaan karakteristik (3.36) diperoleh $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$ dan $\lambda_3 = -c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, dan $\lambda_3 < 0$. Sehingga berdasarkan teorema 2.3.1, titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil pelana.

3.3.1.2 Titik Kesetimbangan $E_2(1,0,0)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di titik E_2

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c+d \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Nilai eigen matriks (3.37) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_2) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(-a - \lambda)(b - \lambda)(-c + d - \lambda) = 0, \quad (3.38)$$

dari persamaan karakteristik (3.38) diperoleh $\lambda_1 = -a, \lambda_2 = b$ dan $\lambda_3 = d - c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Sehingga tanpa melihat tanda λ_3 , dapat ditentukan bahwa titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil pelana.

3.3.1.3 Titik Kesetimbangan $E_3(0,1,0)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di titik E_3

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -1 \\ 0 & 0 & -c+e \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Nilai eigen matriks (3.39) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_3) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(a - \lambda)(-b - \lambda)(-c + e - \lambda) = 0, \quad (3.40)$$

dari persamaan karakteristik (3.40) diperoleh $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -b$ dan $\lambda_3 = e - c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Sehingga tanpa melihat tanda λ_3 , dapat ditentukan bahwa titik kesetimbangan E_3 bersifat tidak stabil pelana.

3.3.1.4 Titik Kesetimbangan $E_4(1,1,0)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di titik E_4

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & -b & -1 \\ 0 & 0 & -c+d+e \end{bmatrix}. \quad (3.41)$$

Nilai eigen matriks (3.41) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_4) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(-a - \lambda)(-b - \lambda)(-c + d + e - \lambda) = 0, \quad (3.42)$$

dari persamaan karakteristik (3.42) diperoleh $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = -b$ dan $\lambda_3 = d + e - c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Titik kesetimbangan E_4 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_3 < 0$ haruslah $d + e < c$.

Jadi titik kesetimbangan E_4 bersifat stabil asimtotik lokal jika $d + e < c$.

3.3.1.5 Titik Kesetimbangan $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di titik E_5

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} a - 2a\frac{c}{d} - \left(\frac{ad-ac}{d}\right) & 0 & -\frac{c}{d} \\ 0 & b - \left(\frac{ad-ac}{d}\right) & 0 \\ d\left(\frac{ad-ac}{d}\right) & e\left(\frac{ad-ac}{d}\right) & -c + d\frac{c}{d} \end{bmatrix},$$

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} \frac{ad - 2ac - ad + ac}{d} & 0 & -\frac{c}{d} \\ 0 & b - \left(\frac{ad-ac}{d}\right) & 0 \\ ad - ac & \frac{ade - ace}{d} & -c + c \end{bmatrix},$$

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} -\frac{ac}{d} & 0 & -\frac{c}{d} \\ 0 & b - \left(\frac{ad-ac}{d}\right) & 0 \\ ad - ac & \frac{ade - ace}{d} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Persamaan karakteristik untuk matriks (3.43) adalah

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{ac}{d} - \lambda\right) \left(b - \frac{ad-ac}{d} - \lambda\right) (-\lambda) \\ & + \frac{c}{d} \left(b - \frac{ad-ac}{d} - \lambda\right) a(d-c) = 0, \end{aligned}$$

$$\left(b - \frac{ad-ac}{d} - \lambda\right) \left[\left(-\frac{ac}{d} - \lambda\right) (-\lambda) + \frac{ac}{d} (d-c) \right] = 0,$$

$$(bd - ad + ac - d\lambda)[(-ac - d\lambda)(-\lambda) + acd - ac^2] = 0,$$

$$(bd - ad + ac - d\lambda)(d\lambda^2 + ac\lambda + acd - ac^2) = 0,$$

diperoleh akar karakteristik $\lambda_1 = b - (ad - ac)/d$ dan dua akar karakteristik lainnya. Untuk menganalisis kestabilan, hanya perlu diketahui tanda dua akar karakteristik λ_2 dan λ_3 tanpa mencari besarnya. Untuk mengetahui tanda dua nilai eigen lainnya, menggunakan sifat-sifat akar persamaan kuadrat pada persamaan $d\lambda^2 + ac\lambda + acd - ac^2 = 0$, diperoleh

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{ac}{d} < 0,$$

$$\lambda_2\lambda_3 = \frac{acd - ac^2}{d} = \frac{c(ad - ac)}{d} > 0,$$

berdasar kondisi tersebut maka λ_2 dan $\lambda_3 < 0$.

Titik kesetimbangan E_5 stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika λ_1, λ_2 , dan $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_1 < 0$ haruslah $b < (ad - ac)/d$. Jadi titik kesetimbangan E_5 bersifat stabil asimtotik lokal asalkan $b < (ad - ac)/d$.

3.3.1.6 Titik Kesetimbangan $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di titik E_6

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} a - \left(\frac{be - bc}{e}\right) & 0 & 0 \\ 0 & b - 2b\frac{c}{e} - \left(\frac{be - bc}{e}\right) & -\frac{c}{e} \\ \frac{bde - bcd}{e} & be - bc & -c + e\frac{c}{e} \end{bmatrix},$$

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} a - \left(\frac{be - bc}{e}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{be - 2bc - be + bc}{e} & -\frac{c}{e} \\ \frac{bde - bcd}{e} & be - bc & -c + c \end{bmatrix},$$

$$J(E_6) = \begin{bmatrix} a - \left(\frac{be - bc}{e}\right) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{bc}{e} & -\frac{c}{e} \\ \frac{bde - bcd}{e} & be - bc & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Persamaan karakteristik dari matriks (3.44) yaitu

$$\left(a - \frac{be - bc}{e} - \lambda\right) \left(-\frac{bc}{e} - \lambda\right) (-\lambda) + \left(a - \frac{be - bc}{e} - \lambda\right) \left(\frac{c}{e}\right) b(e - c) = 0,$$

$$\left(a - \frac{be - bc}{e} - \lambda\right) \left[\left(-\frac{bc}{e} - \lambda\right) (-\lambda) + \frac{bc}{e}(e - c)\right] = 0,$$

$$(ae - be + bc - e\lambda)[(-bc - e\lambda)(-\lambda) + bce - bc^2] = 0,$$

$$(ae - be + bc - e\lambda)(e\lambda^2 + bc\lambda + bce - bc^2) = 0,$$

diperoleh akar karakteristik $\lambda_1 = a - (be - bc)/e$ dan dua akar karakteristik lainnya. Untuk menganalisis kestabilan, hanya perlu diketahui tanda dua akar karakteristik λ_2 dan λ_3 tanpa mencari besarnya. Untuk mengetahui tanda dua akar karakteristik lainnya, menggunakan sifat-sifat akar persamaan kuadrat pada persamaan $e\lambda^2 + bc\lambda + bce - bc^2 = 0$, diperoleh

$$\lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{bc}{e} < 0,$$

$$\lambda_2 \lambda_3 = \frac{bce - bc^2}{e} = \frac{c(be - bc)}{e} > 0,$$

berdasar kondisi tersebut maka λ_2 dan $\lambda_3 < 0$.

Titik kesetimbangan E_6 stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika λ_1, λ_2 , dan $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_1 < 0$ haruslah $a < (be - bc)/e$. Jadi titik kesetimbangan E_6 stabil asimtotik lokal asalkan $a < (be - bc)/e$.

3.3.1.7 Titik Kesetimbangan $E_7(x^*, y^*, z^*)$

Matriks Jacobi sistem (3.8) di E_7

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} a - 2ax^* - z^* & 0 & -x^* \\ 0 & b - 2by^* - z^* & -y^* \\ dz^* & ez^* & -c + dx^* + ey^* \end{bmatrix}, \quad (3.45)$$

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

dengan

$$\begin{aligned} r_{11} &= a - 2ax^* - z^* \\ r_{13} &= -x^* \\ r_{23} &= -y^* \\ r_{31} &= dz^* \\ r_{32} &= ez^* \\ r_{33} &= -c + dx^* + ey^* \end{aligned}$$

Substitusikan x^* , y^* , dan z^* di mana

$$x^* = \frac{ae + bc - be}{ae + bd},$$
$$y^* = \frac{ac + bd - ad}{ae + bd},$$
$$z^* = \frac{abe + abd - abc}{ae + bd},$$

ke dalam matriks (3.45) seperti tercantum dalam Lampiran 3, diperoleh

$$r_{11} = \frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd},$$
$$r_{13} = -\left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd}\right),$$
$$r_{22} = \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd},$$
$$r_{23} = -\left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd}\right),$$
$$r_{31} = \frac{abde + abd^2 - abcd}{ae + bd},$$
$$r_{32} = \frac{abe^2 + abde - abce}{ae + bd},$$
$$r_{33} = 0.$$

Sehingga matriks Jacobi $E_7(x^*, y^*, z^*)$

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} \frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd} & 0 & -\left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd}\right) \\ 0 & \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd} & -\left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd}\right) \\ \frac{abde + abd^2 - abcd}{ae + bd} & \frac{abe^2 + abde - abce}{ae + bd} & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks Jacobi E_7 diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C = 0. \quad (3.46)$$

Berdasarkan teorema 2.5.1 koefisien dari polinom (3.46) adalah

$$\begin{aligned} A = -\text{trace}(E_7) &= -\left(\frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd} + \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd}\right), \\ &= \left(\frac{a^2e + abc - abe}{ae + bd} + \frac{b^2d + abc - abd}{ae + bd}\right), \\ &= \left(\frac{a(ae + bc - be) + b(bd + ac - ad)}{ae + bd}\right). \end{aligned}$$

$$B = \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}_{(E_7)},$$

Penghitungan nilai B seperti yang tercantum dalam Lampiran 4 adalah

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd}\right)e \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd}\right) \\ &+ \left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd}\right)d \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd}\right) \\ &+ a \left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd}\right)b \left(\frac{bd + ac - ad}{ae + bd}\right). \end{aligned}$$

$$C = -\det(J(E_7)),$$

Penghitungan nilai C seperti yang tercantum dalam Lampiran 4 adalah

$$C = \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right).$$

Nilai-nilai eigen yang diperoleh dari persamaan (3.46) akan dianalisis menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Ketiga akar persamaan (3.46) akan bernilai negatif jika dan hanya jika $A, C > 0$ dan $AB - C > 0$.

a. $A > 0$.

$$A = \left(\frac{a(ae+bc-be) + b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right),$$

berdasar syarat eksistensi $c > e$ dan $c > d$, maka

$$A = \left(\frac{a(ae+bc-be) + b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) > 0,$$

$$A > 0.$$

b. $C > 0$

$$C = \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right),$$

berdasar syarat eksistensi $c > d, c > e$, dan $d + e > c$ maka

$$C = \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) +$$

$$\left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right),$$

$$C > 0.$$

c. $AB - C > 0$

Dengan perhitungan seperti tercantum dalam Lampiran 5, diperoleh

$$AB - C = \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right)$$

$$+ \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right)$$

$$+ \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right)$$

$$+ \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right).$$

berdasar syarat eksistensi $c > d, c > e$, dan $d + e > c$ maka $AB - C > 0$.

Ketiga akar persamaan (3.46) bernilai negatif sehingga titik kesetimbangan E_7 bersifat stabil asimtotik lokal asalkan

$$c > d,$$

$$c > e,$$

$$d + e > c.$$

3.3.2 Model Ke Dua

Sebelum menganalisis kestabilan titik kesetimbangan model, terlebih dahulu dilakukan proses linierisasi. Hasil linierisasi model ke dua yaitu sistem (3.13) adalah matriks Jacobi yang berbentuk

$$J(x, y, z) = \begin{bmatrix} a - 2ax - z + yz & xz & -x + xy \\ yz & b - 2by - z + xz & -y + xy \\ dz & ez & -c + dx + ey \end{bmatrix}.$$

3.3.2.1 Titik Kesetimbangan $E_1(0, 0, 0)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di titik E_1

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Nilai eigen matriks (3.47) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_1) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(a - \lambda)(b - \lambda)(-c - \lambda) = 0, \quad (3.48)$$

dari persamaan karakteristik (3.48) diperoleh $\lambda_1 = a, \lambda_2 = b$, dan $\lambda_3 = -c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, dan $\lambda_3 < 0$. Sehingga berdasarkan teorema 2.3.1, titik kesetimbangan E_1 bersifat tidak stabil pelana.

3.3.2.2 Titik Kesetimbangan $E_2(1, 0, 0)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di titik E_2

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -a & 0 & -1 \\ 0 & b & -1 \\ 0 & 0 & -c + d \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Nilai eigen matriks (3.49) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_2) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(-a - \lambda)(-b - \lambda)(d - c - \lambda) = 0, \quad (3.50)$$

dari persamaan karakteristik (3.50) diperoleh $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = b$, dan $\lambda_3 = d - c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Sehingga tanpa melihat tanda λ_3 , dapat ditentukan bahwa titik kesetimbangan E_2 bersifat tidak stabil pelana.

3.3.2.3 Titik Kesetimbangan $E_3(0, 1, 0)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di titik E_3

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & -1 \\ 0 & 0 & -c + e \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

Nilai eigen matriks (3.51) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_3) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(a - \lambda)(-b - \lambda)(-c + e - \lambda) = 0, \quad (3.52)$$

dari persamaan karakteristik (3.52) diperoleh $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -b$, dan $\lambda_3 = e - c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Sehingga tanpa melihat tanda λ_3 , dapat ditentukan bahwa titik kesetimbangan E_3 bersifat tidak stabil pelana.

3.3.2.4 Titik Kesetimbangan $E_4(1, 1, 0)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di titik E_4

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -c+d+e \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Nilai eigen matriks (3.53) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan $|J(E_4) - \lambda I| = 0$, yaitu

$$(-a - \lambda)(-b - \lambda)(-c + d + e - \lambda) = 0, \quad (3.54)$$

dari persamaan karakteristik (3.56) diperoleh $\lambda_1 = -a$, $\lambda_2 = -b$, dan $\lambda_3 = d + e - c$. Karena nilai semua parameter positif maka $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Titik kesetimbangan E_4 bersifat stabil asimtotik lokal jika $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_3 < 0$ haruslah $d + e < c$.

Jadi titik kesetimbangan E_4 bersifat stabil asimtotik lokal jika $d + e < c$.

1.3.2.5 Titik Kesetimbangan $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di E_5

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} a - 2a\frac{c}{d} - \left(\frac{ad-ac}{d}\right) & \frac{c}{d}\left(\frac{ad-ac}{d}\right) & -\frac{c}{d} \\ 0 & b - \left(\frac{ad-ac}{d}\right) + \frac{c}{d}\left(\frac{ad-ac}{d}\right) & 0 \\ d\left(\frac{ad-ac}{d}\right) & e\left(\frac{ad-ac}{d}\right) & -c + d\frac{c}{d} \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{ad - 2ac - ad + ac}{d} & \frac{acd - ac^2}{d} & -\frac{c}{d} \\ 0 & b - \left(\frac{ad^2 - 2acd + ac^2}{d^2}\right) & 0 \\ ad - ac & \frac{ade - ace}{d} & -c + c \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{ac}{d} & \frac{acd - ac^2}{d} & -\frac{c}{d} \\ 0 & b - a\left(\frac{d-c}{d}\right)^2 & 0 \\ ad - ac & \frac{ade - ace}{d} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Persamaan karakteristik dari matriks (3.55) yaitu

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{ac}{d} - \lambda\right) \left(b - a\left(\frac{d-c}{d}\right)^2 - \lambda\right) (-\lambda) \\ & + \left(\frac{c}{d}\right) \left(b - a\left(\frac{d-c}{d}\right)^2 - \lambda\right) (ad - ac) = 0, \\ & \left(b - a\left(\frac{d-c}{d}\right)^2 - \lambda\right) \left[\left(-\frac{ac}{d} - \lambda\right) (-\lambda) + \left(\frac{c}{d}\right) (ad - ac)\right] = 0, \\ & \left(bd - ad\left(\frac{d-c}{d}\right)^2 - d\lambda\right) [(-ac - d\lambda)(-\lambda) + (acd - ac^2)] = 0, \\ & \left(bd - ad\left(\frac{d-c}{d}\right)^2 - d\lambda\right) (d\lambda^2 + ac\lambda + acd - ac^2) = 0, \end{aligned}$$

diperoleh akar karakteristik $\lambda_1 = b - a(d - c/d)^2$ dan dua akar karakteristik lainnya. Untuk menganalisis kestabilan, hanya perlu diketahui tanda dua akar karakteristik λ_2 dan λ_3 tanpa mencari besarnya. Untuk mengetahui tanda dua akar karakteristik lainnya, menggunakan sifat-sifat akar persamaan kuadrat pada $d\lambda^2 + ac\lambda + acd - ac^2 = 0$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{ac}{d} < 0, \\ \lambda_2\lambda_3 &= \frac{acd - ac^2}{d} = \frac{c(ad - ac)}{d} > 0, \end{aligned}$$

berdasar kondisi tersebut maka λ_2 dan $\lambda_3 < 0$.

Titik kesetimbangan E_5 stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika λ_1, λ_2 , dan $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_1 < 0$ haruslah $b < a(d - c/d)^2$. Jadi

titik kesetimbangan E_5 bersifat stabil asimtotik lokal asalkan $b < a(d - c/d)^2$.

3.3.2.6 Titik Kesetimbangan $E_6(0, c/e, be - bc/e)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di E_6

$$\begin{aligned}
 J(E_6) &= \begin{bmatrix} a - \left(\frac{be-bc}{e}\right) + \frac{c}{e} \left(\frac{be-bc}{e}\right) & 0 & 0 \\ \frac{c}{e} \left(\frac{be-bc}{e}\right) & b - 2b \left(\frac{c}{e}\right) - \left(\frac{be-bc}{e}\right) & -\frac{c}{e} \\ d \left(\frac{be-bc}{e}\right) & e \left(\frac{be-bc}{e}\right) & -c + e \left(\frac{c}{e}\right) \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} a - \left(\frac{be^2 - 2bce + bc^2}{e^2}\right) & 0 & 0 \\ \frac{bce - bc^2}{e^2} & \frac{be - 2bc - be + bc}{e} & \frac{c}{e} \\ \frac{bde - bcd}{e} & be - bc & -c + c \end{bmatrix}, \\
 &= \begin{bmatrix} a - b \left(\frac{e-c}{e}\right)^2 & 0 & 0 \\ \frac{bce - bc^2}{e^2} & \frac{bc}{e} & \frac{c}{e} \\ \frac{bde - bcd}{e} & be - bc & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

Persamaan karakteristik dari matriks (3.56) yaitu

$$\begin{aligned}
 &\left(a - b \left(\frac{e-c}{e}\right)^2 - \lambda\right) \left(-\frac{bc}{e} - \lambda\right) (-\lambda) \\
 &+ \left(a - b \left(\frac{e-c}{e}\right)^2 - \lambda\right) \left(\frac{c}{e}\right) (be - bc) = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(a - b \left(\frac{e-c}{e} \right)^2 - \lambda \right) \left[\left(-\frac{bc}{e} - \lambda \right) (-\lambda) + \left(\frac{c}{e} \right) (be - bc) \right] = 0, \\ & \left(ae - be \left(\frac{e-c}{e} \right)^2 - e\lambda \right) \left[(-bc - e\lambda)(-\lambda) + (bce - bc^2) \right] = 0, \\ & \left(ae - be \left(\frac{e-c}{e} \right)^2 - e\lambda \right) (e\lambda^2 + bc\lambda + bce - bc^2) = 0, \end{aligned}$$

diperoleh akar karakteristik $\lambda_1 = a < b(e - c/e)^2$ dan dua akar karakteristik lainnya. Untuk menganalisis kestabilan, hanya perlu diketahui tanda dua akar karakteristik λ_2 dan λ_3 tanpa mencari besarnya. Untuk mengetahui tanda dua akar karakteristik lainnya, menggunakan sifat-sifat akar persamaan kuadrat pada $e\lambda^2 + bc\lambda + bce - bc^2 = 0$.

$$\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{bc}{e} < 0, \\ \lambda_2\lambda_3 &= \frac{bce - bc^2}{e} = \frac{c(be - bc)}{e} > 0, \end{aligned}$$

berdasar kondisi tersebut maka λ_2 dan $\lambda_3 < 0$.

Titik kesetimbangan E_6 stabil asimtotik lokal jika dan hanya jika λ_1, λ_2 , dan $\lambda_3 < 0$. Agar $\lambda_1 < 0$ haruslah $a < b(e - c/e)^2$. Jadi titik kesetimbangan E_6 bersifat stabil asimtotik lokal asalkan $a < b(e - c/e)^2$.

3.3.2.7 Titik Kesetimbangan $E_7(x^*, y^*, z^*)$

Matriks Jacobi sistem (3.13) di E_7

$$J(E_7^*) = \begin{bmatrix} a - 2ax^* - z^* + y^*z^* & x^*z^* & -x^* + x^*y^* \\ y^*z^* & b - 2by^* - z^* + x^*z^* & -y^* + x^*y^* \\ dz^* & ez^* & -c + dx^* + ey^* \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix},$$

dengan

$$t_{11} = a - 2ax^* - z^* + y^* z^*,$$

$$t_{12} = x^* z^*,$$

$$t_{13} = -x^* + x^* y^*,$$

$$t_{21} = y^* z^*,$$

$$t_{22} = b - 2by^* - z^* + x^* z^*,$$

$$t_{23} = -y^* + x^* y^*,$$

$$t_{31} = dz^*,$$

$$t_{32} = ez^*,$$

$$t_{33} = -c + dx^* + ey^*.$$

Substitusi x^* , y^* , dan z^* ke dalam matriks di mana

$$x^* = \frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}(c-e)}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$y^* = \frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$z^* = \sqrt{ab},$$

ke dalam matriks (3.57) seperti tercantum dalam Lampiran 6, diperoleh

$$t_{11} = \frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$t_{12} = \frac{e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$t_{13} = - \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d + e - c}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right),$$

$$t_{21} = \frac{bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$t_{22} = \frac{-bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$t_{23} = - \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\sqrt{\frac{b}{a}} - c\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right),$$

$$t_{31} = d\sqrt{ab},$$

$$t_{32} = e\sqrt{ab},$$

$$t_{33} = 0.$$

Sehingga matriks Jacobi $E_7(x^*, y^*, z^*)$

$$J(E_7) = \begin{pmatrix} \frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} & \frac{e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} & -\left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \\ \frac{bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} & \frac{-bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} & -\left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\sqrt{\frac{b}{a}} - c\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \\ \frac{d\sqrt{ab}}{e\sqrt{ab}} & & 0 \end{pmatrix}$$

dari matriks Jacobi tersebut diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda^3 + A^* \lambda^2 + B^* \lambda + C^* = 0. \quad (3.58)$$

Berdasarkan teorema 2.5.1 koefisien dari polinom (3.58) adalah

$$\begin{aligned} A^* = -\text{trace}(J(E_7^*)) &= -\left(\frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab} - bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right), \\ &= \left(\frac{ae + c\sqrt{ab} - e\sqrt{ab} + bd\sqrt{\frac{b}{a}} + bc - bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right), \end{aligned}$$

$$= \frac{a \left(e + c \sqrt{\frac{b}{a}} - e \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + b \left(d \sqrt{\frac{b}{a}} + c - d \right)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e}.$$

$$B^* = \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7^*)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7^*)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}_{(E_7^*)}$$

Penghitungan nilai B^* seperti yang tercantum dalam Lampiran 7 adalah

$$B^* = \left(\frac{d \sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e \sqrt{\frac{b}{a}} - c \sqrt{\frac{b}{a}}}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) e \sqrt{ab} + \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d + e - c}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) d \sqrt{ab}$$

$$C^* = -\det(J(E_7^*)),$$

Penghitungan nilai C^* seperti yang tercantum dalam Lampiran 7 adalah

$$C^* = \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d \sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d + e - c}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(abd \sqrt{\frac{b}{a}} + abe + bd \sqrt{ab} + abe \right).$$

Nilai-nilai eigen yang diperoleh dari persamaan (3.60) akan dianalisis menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Ketiga akar persamaan (3.60) akan bernilai negatif jika dan hanya jika $A^*, C^* > 0$ dan $A^* B^* - C^* > 0$.

a. $A^* > 0$.

$$A^* = \frac{a \left(e + c \sqrt{\frac{b}{a}} - e \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + b \left(d \sqrt{\frac{b}{a}} + c - d \right)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e}$$

Berdasar syarat eksistensi titik E_7^* $c > e$ dan $c > d$, maka $A^* > 0$.

b. $C^* > 0$.

$$C^* = \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d \sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d + e - c}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(abd \sqrt{\frac{b}{a}} + abe + bd \sqrt{ab} + abe \right)$$

Berdasar syarat eksistensi titik E_7 $c > e$, $c > d$, $d + e > c$, maka

$$C^* > 0.$$

c. $A^* B^* - C^* > 0$

Dengan perhitungan seperti tercantum dalam Lampiran 8 diperoleh

$$A^* B^* - C^* = H,$$

$$H = \left(\frac{d + e - c}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left[\frac{ae + ac \sqrt{\frac{b}{a}} - ae \sqrt{\frac{b}{a}} - bd \sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right] \left[\frac{de \sqrt{ab} + bcd - bde \sqrt{\frac{b}{a}} - bce}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right]$$

Pada titik kesetimbangan E_7 , semua populasi tidak ada yang punah. Secara biologi dapat dikatakan bahwa jumlah *prey* yang tersedia melebihi jumlah *predator*, besarnya kontribusi kedua *prey* terhadap pertumbuhan *presator* lebih besar daripada tingkat kematian *predator*. Sehingga berdasar kondisi tersebut dan syarat eksis titik E_7 kondisi

$$\begin{aligned}
 c &> e, \\
 c &> d, \\
 d + e &> c,
 \end{aligned}
 \tag{3.59}$$

dari kondisi (3.59) terdapat tiga kemungkinan yaitu $d > e$, $d = e$, atau $d < e$. d dan e adalah koefisien kontribusi x dan y terhadap pertumbuhan z . a dan b adalah laju pertumbuhan intrinsik x dan y . Semakin besar laju pertumbuhan x dan y , semakin besar pula kontribusi x dan y terhadap pertumbuhan z . a dan b berbanding lurus dengan d dan e . Terdapat kemungkinan, jika kontribusi x terhadap pertumbuhan z lebih besar daripada kontribusi y terhadap pertumbuhan z , maka dapat dipastikan laju pertumbuhan x lebih besar daripada laju pertumbuhan y dan sebaliknya. Jadi secara matematis kemungkinan-kemungkinan tersebut dapat dituliskan

$$d > e \text{ maka } a > b, \tag{3.60}$$

$$d = e \text{ maka } a = b, \text{ atau} \tag{3.61}$$

$$d < e \text{ maka } a < b. \tag{3.62}$$

Kondisi (3.59) sampai dengan (3.62) digunakan untuk menganalisis nilai $A^*B^* - C^*$.

i. Kondisi (3.59) dan kondisi (3.60)

$$H = \frac{d+e-c}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \left(\frac{ae+ac\sqrt{\frac{b}{a}}-ae\sqrt{\frac{b}{a}}-bd\sqrt{\frac{b}{a}}-bc+bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \right) \left(\frac{de\sqrt{ab+bcd}-bde\sqrt{\frac{b}{a}}-bce}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d + e - c}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \left[\frac{ae \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + c \left(a \sqrt{\frac{b}{a}} - b\right) + bd \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right] \\
&\left[\frac{bde \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + bc (d - e)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right], \\
&= \frac{d + e - c}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \left[\frac{ae \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + c \left(\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}\right) + bd \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right] \\
&\left[\frac{bde \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) + bc (d - e)}{d \sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right].
\end{aligned}$$

berdasar kondisi (3.61) dan kondisi (3.62) maka

$$d + e - c > 0, \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) > 0, \left(\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}\right) > 0, \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) > 0,$$

dan $d - e > 0$. Sehingga $A^* B^* - C^* = H > 0$.

ii. Kondisi (3.61) dan kondisi (3.63)

$$H = \frac{d+e-c}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \left[\frac{ae\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + c(\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}) + bd\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \right]$$

$$\left[\frac{bde\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + bc(d-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \right],$$

berdasar kondisi (3.59) dan kondisi (3.61) maka

$$d+e-c > 0, \left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 0, (\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}) = 0, \left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 0,$$

dan $d-e=0$. Sehingga $A^*B^* - C^* = H = 0$.

iii. Kondisi (3.59) dan (3.62)

$$H = \frac{d+e-c}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \left[\frac{ae\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + c(\sqrt{ab}-\sqrt{b^2}) + bd\left(1-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \right]$$

$$\left[\frac{bde\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + bc(d-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}}+e} \right],$$

berdasar kondisi (3.59) dan (3.62) maka

$$d + e - c > 0, \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 0, \left(\sqrt{ab} - \sqrt{b^2}\right) < 0, \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right) < 0,$$

dan $d - e < 0$. Sehingga $A^*B^* - C^* = H > 0$.

Kondisi (3.59) dan (3.61) tidak memenuhi kriteria Routh-Hurwitz karena $A^*B^* - C^* = 0$. Untuk kondisi (3.59) dan (3.60) atau kondisi (3.59) dan kondisi (3.62) memenuhi kriteria Routh-Hurwitz. Pada kondisi tersebut ketiga akar persamaan (3.58) bernilai negatif. Sehingga titik kesetimbangan E_7 bersifat stabil asimtotik lokal jika

$$\begin{aligned} c &> e, \\ c &> d, \\ d + e &> c, \\ d &> e, \\ a &> b. \end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned} c &> e, \\ c &> d, \\ d + e &> c, \\ d &> e, \\ a &> b. \end{aligned}$$

3.4 Simulasi Numerik dan Interpretasinya

Pada subbab ini akan diamati perilaku dinamik interaksi antara dua *prey* dan satu *predator* melalui simulasi numerik model pertama dan kedua. Perilaku solusi tersebut akan dibandingkan dengan perhitungan analitik pada subbab 3.3.

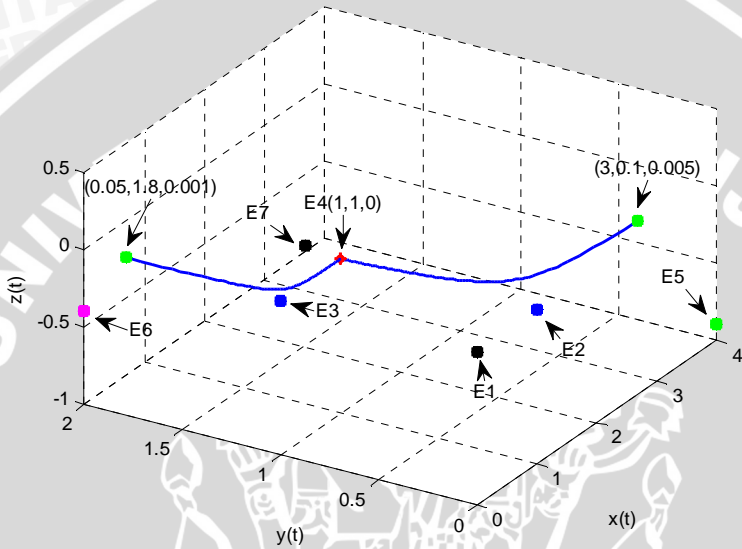
Model *predator-prey* memiliki tujuh titik kesetimbangan dengan empat titik diantaranya stabil. *Listing program* dari simulasi tersebut dicantumkan dalam Lampiran 9

3.4.1 Model Pertama

Model pertama disimulasikan dengan nilai awal yang berbeda-beda.

3.4.1.1 Simulasi 1

Pada simulasi pertama digunakan nilai parameter $a = 0.3, b = 0.4, c = 0.4, d = 0.1, e = 0.2$ yang memenuhi syarat kestabilan $E_4(1,1,0)$ yaitu $d + e < c$.

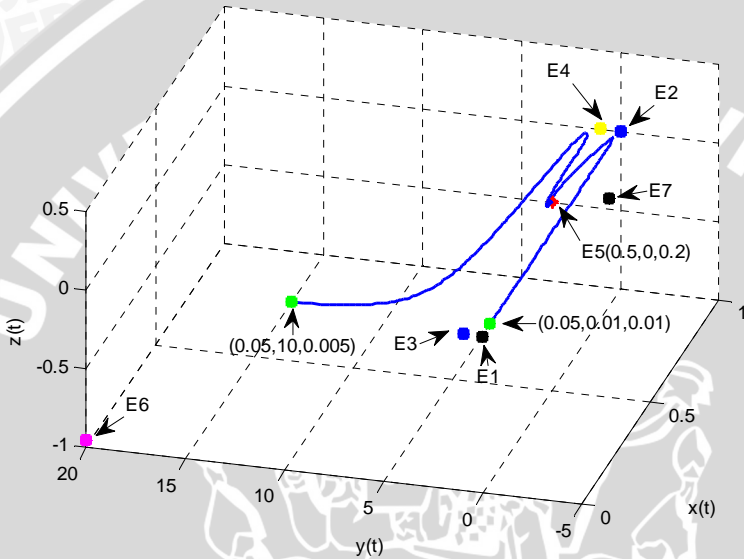


Gambar 3.1 Potret fase model pertama untuk simulasi pertama

Berdasarkan gambar 3.1 dengan menggunakan dua nilai awal berbeda, trayektori menuju ke titik kesetimbangan yang sama yaitu $E_4(1,1,0)$ yang menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ mencapai keadaan stabil saat $x(t) = 1, y(t) = 1$, dan $z(t) = 0$. Keadaan tersebut sesuai dengan syarat kestabilan E_4 , di mana tingkat kontribusi kedua *prey* terhadap pertumbuhan *predator* lebih kecil daripada tingkat kematian *predator*. Karena kondisi tersebut, populasi *predator* akan berkurang dan punah. Ketika *predator* punah, populasi *prey* satu dan *prey* dua akan tumbuh tanpa hambatan sampai batas daya dukung lingkungannya.

3.4.1.2 Simulasi 2

Pada simulasi ke dua digunakan nilai parameter $a=0.4, b=0.05, c=0.2, d=0.4, e=0.01$ yang memenuhi syarat kestabilan $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$ yaitu $b < (ad - ac)/d$.



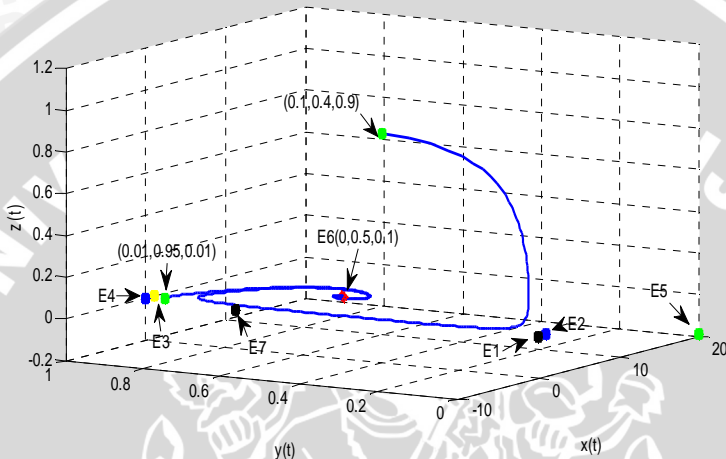
Gambar 3.2 Potret fase model pertama untuk simulasi ke dua

Berdasarkan gambar 3.2, jelas bahwa solusi model pertama stabil menuju titik $E_5(0.5, 0, 0.2)$ yang menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ stabil pada saat populasi $x(t) = 0.5, y(t) = 0$, dan $z(t) = 0.2$. *Prey* ke dua punah karena faktor pertumbuhan alami *prey* dua lebih kecil dari faktor-faktor yang berperan dalam interaksi $b < ad - ac/d$ serta adanya *predator*. Hal ini sesuai dengan syarat kestabilan E_5 .

Tingkat kontribusi *prey* pertama terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator* $d > c$ sehingga *predator* tidak mengalami kepunahan.

3.4.1.3 Simulasi 3

Pada simulasi 3 digunakan nilai parameter $a = 0.01$, $b = 0.2$, $c = 0.2$, $d = 0.01$, $e = 0.4$ yang memenuhi syarat kestabilan $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$ yaitu $< (be - bc)/e$.

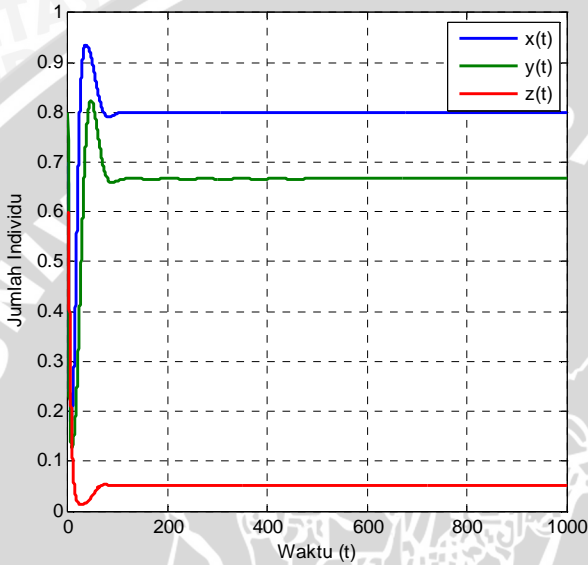


Gambar 3.3 Potret fase model pertama untuk Simulasi ke tiga

Berdasarkan gambar 3.3 terlihat solusi sistem stabil menuju titik $E_6(0,0.5,0.1)$ yang menunjukkan populasi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ stabil pada saat populasi $x(t) = 0$, $y(t) = 0.5$, dan $z(t) = 0.1$. *Prey* pertama mengalami kepunahan karena faktor pertumbuhan alami *prey* pertama lebih kecil dari faktor-faktor yang berperan dalam interaksi $a < (be - bc)/e$ serta adanya *predator*. Populasi *predator* tidak akan punah karena tingkat kontribusi *prey* dua terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator* $e > c$. Keadaan pada simulasi tiga ini merupakan kebalikan dari simulasi dua. Pada simulasi dua populasi *prey* dua yang punah, pada simulasi tiga populasi *prey* satu punah sedangkan *predator* pada kedua simulasi tersebut tidak mengalami kepunahan.

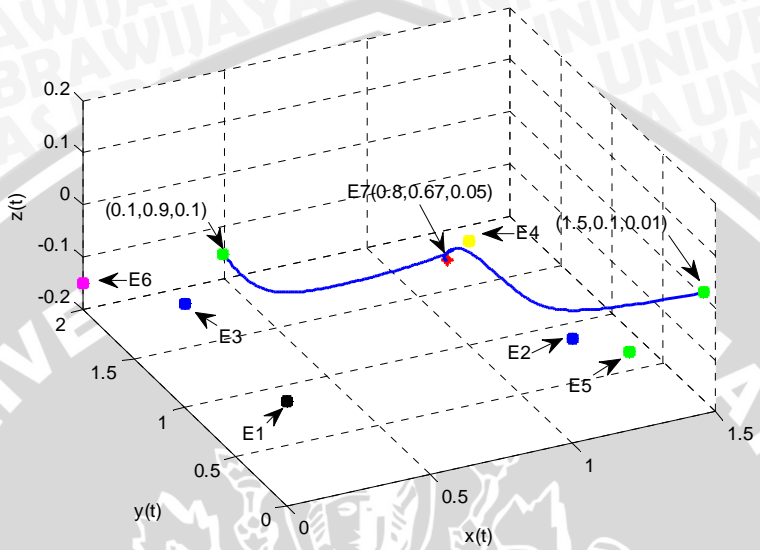
3.4.1.4 Simulasi 4

Pada simulasi empat ini digunakan dua macam nilai-nilai parameter $a = 0.25, b = 0.15, c = 0.3, d = 0.25, e = 0.15$ dan $a = 0.15, b = 0.25, c = 0.3, d = 0.15, e = 0.25$.



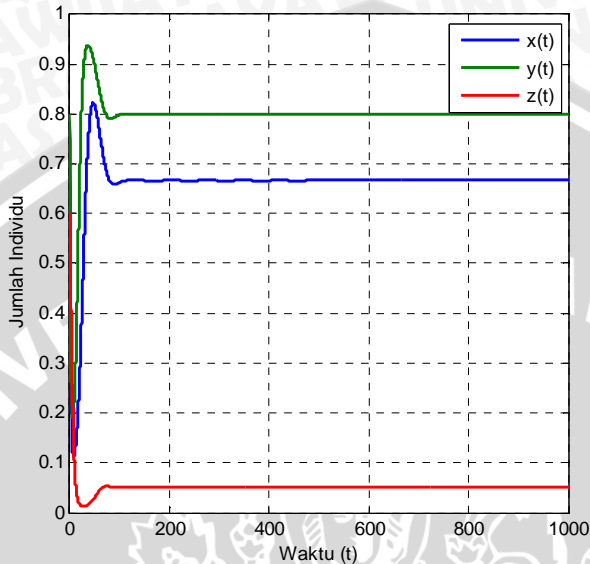
Gambar 3.4 Grafik solusi model pertama untuk simulasi ke empat dengan $a > b$

Berdasarkan gambar 3.4 dapat diketahui bahwa solusi sistem stabil menuju titik $E_7(0.8, 0.67, 0.05)$ yang menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ stabil pada saat populasi $x(t) = 0.8, y(t) = 0.67$, dan $z(t) = 0.05$. Ketiga spesies dapat hidup berdampingan dan tidak ada yang punah. Populasi *prey* satu lebih besar dari populasi *prey* dua. Hal tersebut terjadi karena dalam simulasi numerik digunakan parameter yang memenuhi $a > b$.



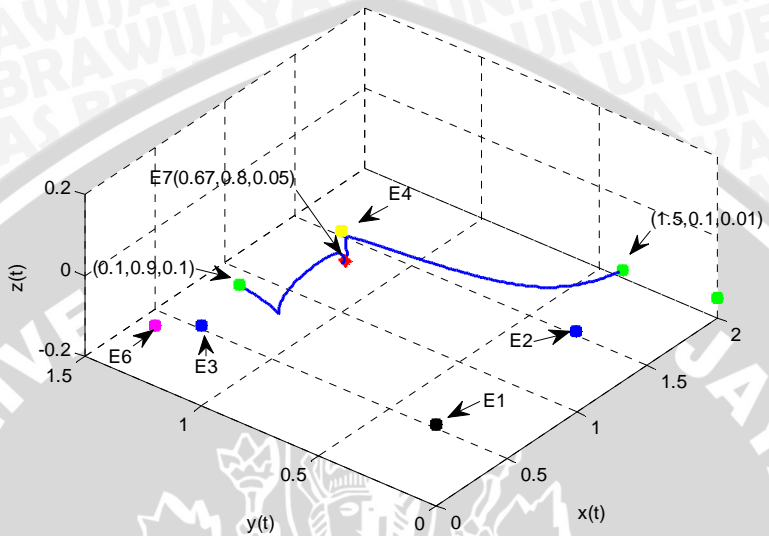
Gambar 3.5 Potret fase model pertama untuk simulasi ke empat dengan $a > b$

Gambar 3.5 merupakan potret fase model pertama untuk simulasi ke empat dengan $a > b$. Hasil yang ditunjukkan sama dengan gambar 3.4, di mana solusi stabil menuju titik $E_7(0.8, 0.67, 0.05)$.



Gambar 3.6 Grafik solusi model pertama untuk simulasi ke empat dengan $b > a$

Interpretasi gambar 3.6 hampir sama dengan gambar 3.4. Namun solusi sistem stabil menuju titik $E_7(0.67, 0.8, 0.05)$ yang menunjukkan populasi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ stabil pada saat populasi $x(t) = 0.67$, $y(t) = 0.8$, dan $z(t) = 0.05$. Ketiga spesies dapat hidup berdampingan dan tidak ada yang punah. Populasi *prey* dua lebih besar dari populasi *prey* satu. Hal tersebut terjadi karena dalam simulasi numerik digunakan parameter yang memenuhi $b > a$.



Gambar 3.7 Potret fase model pertama untuk simulasi ke empat dengan $b > a$

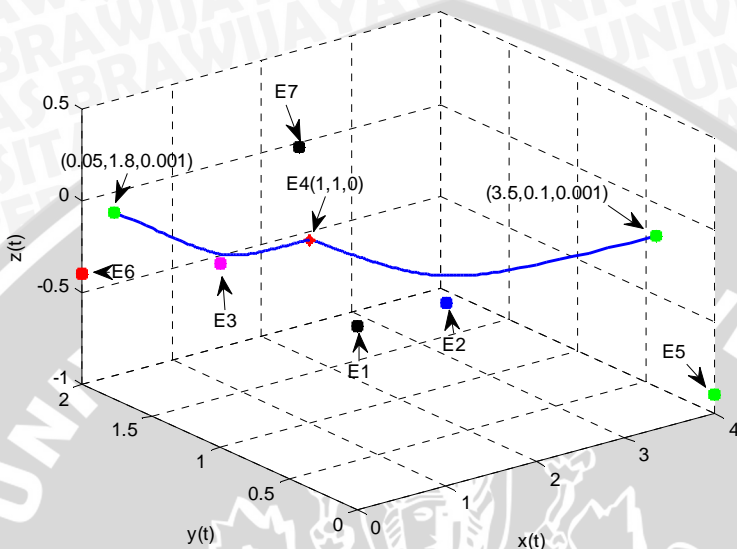
Gambar 3.7 merupakan potret fase model pertama untuk simulasi ke empat dengan $b > a$. Hasil yang ditunjukkan sama dengan gambar 3.6, di mana solusi stabil menuju titik $E_7(0.67, 0.8, 0.05)$.

3.4.2 Model Ke Dua

Model ke dua disimulasikan dengan nilai awal berbeda-beda. Pada model ke dua terdapat kerjasama antar *prey* untuk melawan *predator*.

3.4.2.1 Simulasi 1

Pada simulasi satu digunakan nilai-nilai parameter yang sama dengan 3.4.2.1 yang memenuhi syarat kestabilan $E_4(1, 1, 0)$ yaitu $d + e < c$.

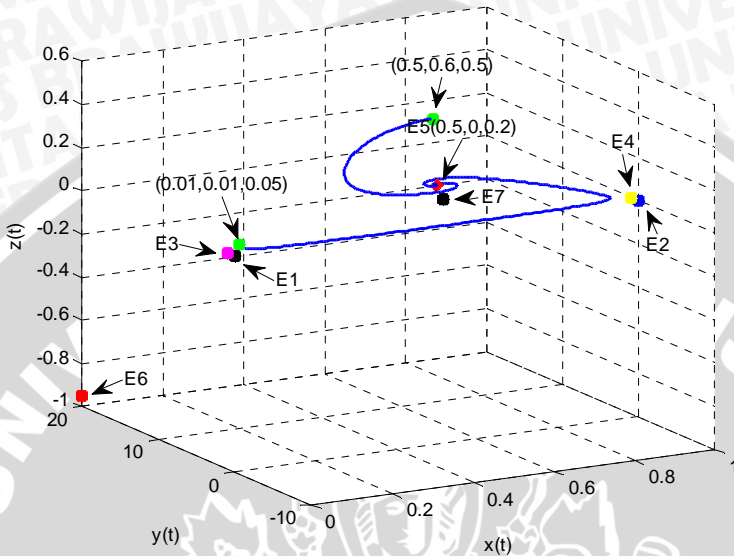


Gambar 3.8 Potret fase model ke dua untuk simulasi pertama

Interpretasi gambar 3.8 sama dengan interpretasi gambar 3.1. Solusi sistem stabil menuju titik $E_4(1,1,0)$ yang menunjukkan populasi $x(t), y(t)$, dan $z(t)$ mencapai keadaan stabil saat $x(t) = 1, y(t) = 1$, dan $z(t) = 0$.

3.4.2.2 Simulasi 2

Pada simulasi dua digunakan nilai-nilai parameter $a = 0.4, b = 0.05, c = 0.2, d = 0.4, e = 0.01$ yang memenuhi syarat kestabilan $E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$ yaitu $b < a((d - c)/d)^2$.

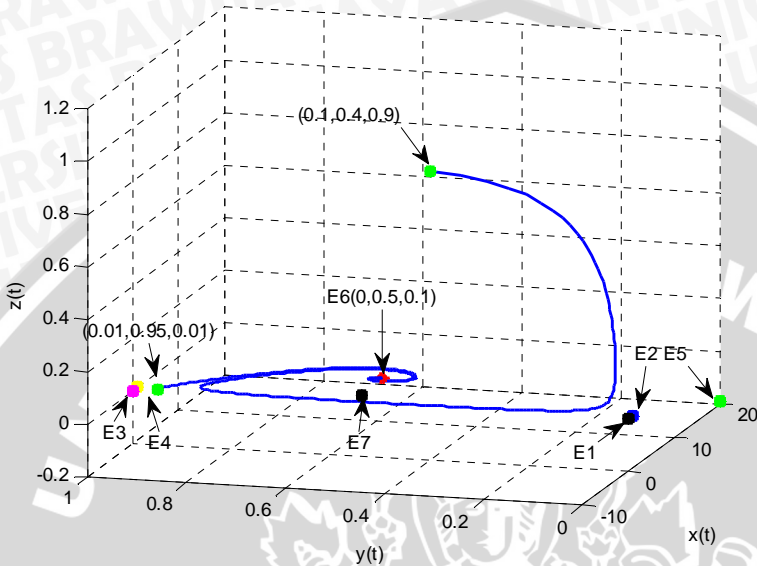


Gambar 3.9 Potret fase model ke dua untuk simulasi ke dua

Pada gambar 3.9 terlihat bahwa dengan nilai-nilai parameter tersebut, solusi numerik konvergen ke titik kesetimbangan $E_5(0.5, 0, 0.2)$. Populasi *prey* ke dua punah karena dimangsa *predator* selain itu faktor pertumbuhan alami *prey* dua lebih kecil dari faktor-faktor yang berperan dalam interaksi $b < a((d - c)/d)^2$. Tingkat kontribusi *prey* satu terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator* $d > c$ sehingga *predator* tidak mengalami kepunahan.

3.4.2.3 Simulasi 3

Pada simulasi tiga digunakan nilai-nilai parameter $a = 0.01, b = 0.2, c = 0.2, d = 0.01, e = 0.4$ yang memenuhi syarat kestabilan $E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$ yaitu $a < b((e - c)/e)^2$.

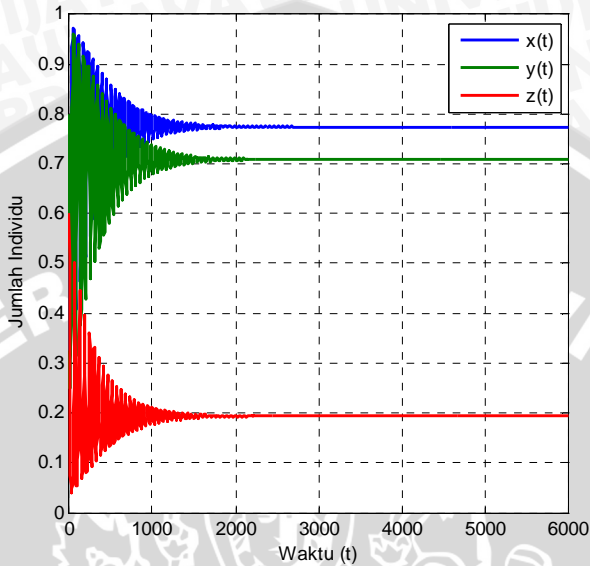


Gambar 3.10 Potret fase model ke dua untuk simulasi ke tiga

Berdasar gambar 3.10 solusi numerik konvergen ke titik kesetimbangan $E_6(0, 0.5, 0.1)$. Populasi *prey* pertama punah karena dimangsa *predator* selain itu faktor pertumbuhan alami *prey* satu lebih kecil dari faktor-faktor yang berperan dalam interaksi $a < b((e - c)/e)^2$. Tingkat kontribusi *prey* ke dua terhadap pertumbuhan *predator* lebih besar dari tingkat kematian *predator* $e > c$ sehingga *predator* tidak mengalami kepunahan.

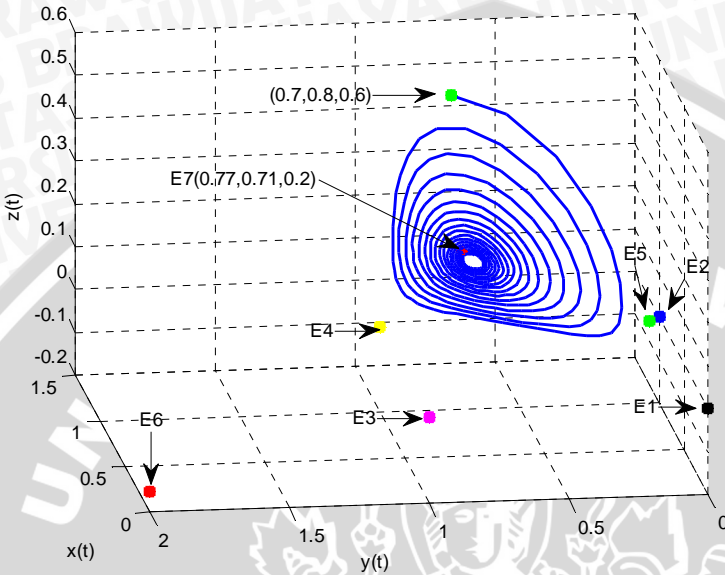
3.4.2.4 Simulasi 4

Sama dengan subbab 3.4.1.4, pada simulasi empat ini digunakan dua macam nilai-nilai parameter $a = 0.25, b = 0.15, c = 0.3, d = 0.25, e = 0.15$ dan $a = 0.15, b = 0.25, c = 0.3, d = 0.15, e = 0.25$ yang memenuhi syarat kestabilan $E_7(x^*, y^*, z^*)$ yaitu $d + e > c, d > e, a > b$ dan $d + e > c, e > d, b > a$.



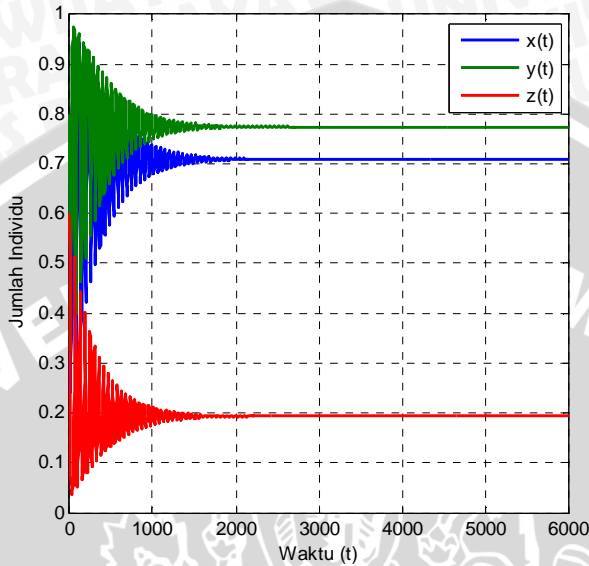
Gambar 3.11 Grafik solusi model ke dua untuk simulasi ke empat dengan $a > b$

Berdasar gambar 3.11, solusi sistem mengalami osilasi sebelum akhirnya stabil menuju titik $E_7(0.77, 0.71, 0.2)$ yang menunjukkan populasi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ stabil pada saat populasi $x(t) = 0.77$, $y(t) = 0.71$, dan $z(t) = 0.2$. Kondisi tersebut menunjukkan bahwa ketiga spesies dapat hidup berdampingan tanpa ada yang punah. Osilasi terjadi karena adanya kerjasama antar *prey*. Pada solusi numerik tersebut populasi *prey* satu lebih besar dari populasi *prey* dua karena digunakan nilai parameter yang memenuhi $a > b$.



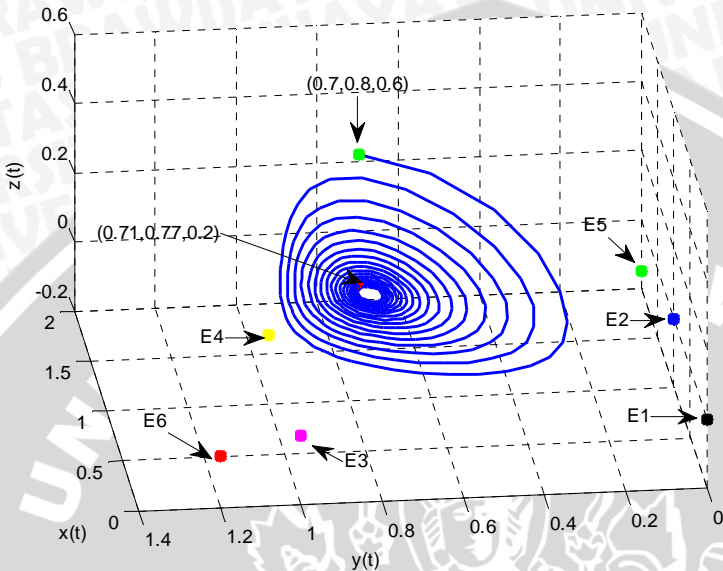
Gambar 3.12 Potret fase model ke dua untuk simulasi ke empat dengan $a > b$

Gambar 3.12 merupakan potret fase model pertama untuk simulasi ke empat dengan $a > b$. Hasil yang ditunjukkan sama dengan gambar 3.11, di mana solusi stabil menuju titik $E_7(0.77, 0.71, 0.2)$.



Gambar 3.13 Grafik solusi model ke dua untuk simulasi ke empat dengan $b > a$

Interpretasi gambar 3.13 hampir sama dengan interpretasi gambar 3.11. Namun solusi numerik pada gambar 3.13 stabil menuju titik $E_7(0.71, 0.77, 0.2)$ yang menunjukkan populasi $x(t)$, $y(t)$, dan $z(t)$ stabil pada saat populasi $x(t) = 0.71$, $y(t) = 0.77$, dan $z(t) = 0.2$. Populasi *prey* dua lebih besar dari populasi *prey* satu karena digunakan nilai parameter yang memenuhi $b > a$.



Gambar 3.14 Potret fase model ke dua untuk simulasi ke empat dengan $b > a$

Gambar 3.14 merupakan potret fase model pertama untuk simulasi ke empat dengan $a > b$. Hasil yang ditunjukkan sama dengan gambar 3.13, di mana solusi stabil menuju titik $E_7(0.71,0.77,0.2)$.

3.5 Pengaruh Kerjasama Antar Prey

Kondisi nyata interaksi predator prey tiga spesies ini adalah interaksi antara singa, rusa, dan zebra di mana singa berperan sebagai predator, rusa dan zebra sebagai prey pertama dan prey ke dua. Kerjasama antar prey berupa pembauran antara rusa dan zebra ketika terdapat singa.

Dampak kerjasama antar prey untuk melawan predator dapat dilihat pada gambar 3.11 dan gambar 3.13. Pada gambar 3.13 di mana terdapat kerjasama antar prey, solusi numerik sistem mengalami osilasi dan membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai titik kesetimbangan yang stabil dibandingkan solusi numeric gambar

3.11. Hal ini menunjukkan bahwa kerjasama antar *prey* menyebabkan *prey* lebih sulit dimangsa oleh *predator* sehingga populasi *prey* dan *predator* membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai keadaan yang setimbang.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Tabel 3.1 Syarat Eksistensi dan Syarat Kestabilan Titik Keseimbangan

Titik Keseimbangan		Syarat Eksistensi	Jenis Kestabilan	Syarat Kestabilan
$E_1(0,0,0)$	Model Pertama	-	Tidak Stabil Pelana	-
	Model Ke Dua	-		-
$E_2(1,0,0)$	Model Pertama	-		-
	Model Ke Dua	-		-
$E_3(0,1,0)$	Model Pertama	-		-
	Model Ke Dua	-		-
$E_4(1,1,0)$	Model Pertama	-		Stabil Asimtotik Lokal
	Model Ke Dua	-	$b < (ad - ac)/d$	
$E_5(c/d, 0, (ad - ac)/d)$	Model Pertama	$d > c$	Stabil Asimtotik Lokal	$b < a((d - c)/d)^2$
	Model Ke Dua	$d > c$		$a < (be - bc)/e$
$E_6(0, c/e, (be - bc)/e)$	Model Pertama	$e > c$	Stabil Asimtotik Lokal	$a < b((e - c)/e)^2$
	Model Ke Dua	$e > c$		Syarat eksistensi
$E_7(x^*, y^*, z^*)$	Model Pertama	$c > d,$ $c > e,$ $d + e > c$	Stabil Asimtotik Lokal	Syarat eksistensi
	Model Ke Dua	$c > d,$ $c > e$		$d + e < c, a > b,$ dan $d > e$ atau $d + e < c, b > a,$ dan $e > d$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam skripsi ini, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Model *predator-prey* tiga spesies dengan dan tanpa kerjasama antar *prey* merupakan sistem otonomus nonlinier dengan tiga variabel yaitu populasi *prey* pertama, *prey* ke dua, dan *predator*.
2. Terdapat tujuh titik kesetimbangan untuk masing-masing model. Empat titik dari masing-masing model stabil asimtotik lokal apabila memenuhi syarat kestabilannya dan tiga titik lainnya tidak stabil. Hasil simulasi numerik menunjukkan kesimpulan yang sama dengan analisis analitiknya.
3. Kerjasama antar *prey* menyebabkan *prey* lebih sulit dimangsa oleh *predator* sehingga populasi membutuhkan waktu yang lebih lama untuk mencapai keadaan yang setimbang.

4.2 Saran

Pada skripsi ini dibahas model *predator-prey* tiga spesies dengan dan tanpa kerjasama antar *prey*. Pada pembahasan selanjutnya terdapat beberapa hal yang masih bisa dikembangkan dari skripsi ini, yakni membentuk model *predator-prey* tiga spesies dengan kerjasama antar *prey* dan kompetisi antar *prey* atau model *predator-prey* empat spesies dengan kompetisi antar *predator* dan kerjasama antar *prey*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K.T., T.D. Sauer dan J.A.Yorke. 2000. *CHAOS : An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Eight edition, John Willey & Sons, Inc. USA.
- Edwards, C.H. dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equation and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey
- Elettreby, M.F. 2007. *Two-Prey One-Predator Model*. Chaos, Solitons, and Fractals. ScienceDirect.
- Glass, L. dan J. D. Murray. 2001. *Mathematical Biology : an Introduction, Third Edition*. Springer-Verlag. New York.
- Ledder, G. 2005. *Differential Equations : a Modelling Approach*. McGraw Hill Inc.USA.
- Naggle, R.K dan E.B. Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. USA.
- Novi, N.P. 2011. *Model Dinamik Infeksi Bakteriofage pada Populasi Bakteri Laut Sianobakteria*. Skripsi FMIPA UB. Malang.
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical System, Continuous and Discrete*. Pearson Education. USA.
- Sari, N.P. 2010. *Analisis Dinamik Model Penyebaran Penyakit Demam Dengue pada Infeksi Pertama dan Ke Dua*. Skripsi FMIPA UB. Malang.

Sugiyanto, T. dan Ismawati, E. 2008. *Ilmu Pengetahuan Alam untuk SMP/MTS Kelas VII*. Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional. Jakarta.

Sukmaningtyas, R. 2012. *Analisis Dinamik Model Interaksi Antara Dua Spesies TPP (Toxin-Producing Phytoplankton) dan Zooplankton*. Skripsi FMIPA UB. Malang.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Perhitungan Nilai x^* , y^* , dan z^* Model Pertama

Titik kesetimbangan x^* , y^* , dan z^* diperoleh dari menyelesaikan persamaan

$$\begin{aligned}a - ax - z &= 0, \\ b - by - z &= 0, \\ -c + dx + ey &= 0.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Dari persamaan (1.1) diperoleh

$$x^* = \frac{a - z^*}{a},\tag{1.2}$$

$$y^* = \frac{c - dx^*}{e},\tag{1.3}$$

$$z^* = b - by^*.\tag{1.4}$$

Substitusi persamaan (1.2) ke (1.3)

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \frac{c}{e} - \frac{d}{e} \left(\frac{a - \hat{z}}{a} \right), \\ \hat{y} &= \frac{c}{e} - \left(\frac{ad - d\hat{z}}{ae} \right), \\ \hat{y} &= \frac{ac - ad + d\hat{z}}{ae}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Substitusi persamaan (1.5) ke (1.4)

$$\begin{aligned}
 z^* &= b - b \left(\frac{ac - ad + dz^*}{ae} \right), \\
 z^* &= \frac{abe - abc + abd - bdz^*}{ae}, \\
 ae z^* &= abe - abc + abd - bdz^*, \\
 ae z^* + bdz^* &= abe - abc + abd, \\
 z^* (ae + bd) &= abe - abc + abd, \\
 z^* &= \frac{abe + abd - abc}{ae + bd}. \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (1.6) ke (1.2)

$$\begin{aligned}
 x^* &= 1 - \frac{abe + abd - abc}{a(ae + bd)}, \\
 &= \frac{ae + bd - be - bd + bc}{ae + bd}, \tag{1.7} \\
 &= \frac{ae - be + bc}{ae + bd}.
 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (1.6) ke (1.5)

$$\begin{aligned}
 y^* &= \frac{ac - ad}{ae} + \frac{d}{ae} \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd} \right), \\
 y^* &= \frac{(ac - ad)(ae + bd) + d(abe + abd - abc)}{ae(ae + bd)}, \\
 y^* &= \frac{a^2ce + abcd - a^2de - abd^2 + abde + abd^2 - abcd}{ae(ae + bd)}, \\
 y^* &= \frac{a^2ce - a^2de + abde}{ae(ae + bd)},
 \end{aligned}$$

$$y^* = \frac{ac - ad + bd}{ae + bd}. \quad (1.8)$$

Dari persamaan (1.6), (1.7), dan (1.8) diperoleh

$$x^* = \frac{ae - be + bc}{ae + bd},$$

$$y^* = \frac{ac - ad + bd}{ae + bd},$$

$$z^* = \frac{abe + abd - abc}{ae + bd}.$$



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 2. Perhitungan Nilai x^* , y^* , dan z^* Model Ke Dua

Titik kesetimbangan x^* , y^* , dan z^* diperoleh dari

$$a - ax - z + yz = 0, \quad (2.1)$$

$$b - by - z + xz = 0, \quad (2.2)$$

$$-c + dx + ey = 0. \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.2) dan (2.3) diperoleh

$$x^* = \frac{c - ey^*}{d}, \quad (2.4)$$

$$y^* = \frac{b - z^* + x^* z^*}{b}. \quad (2.5)$$

Substitusi persamaan (2.4) ke (2.5)

$$y^* = \frac{b - z^*}{b} + \frac{z^*}{b} \left(\frac{c - ey^*}{d} \right),$$

$$y^* = \frac{bd - dz^* + cz^* - ey^* z^*}{bd},$$

$$bdy^* = bd - dz^* + cz^* - ey^* z^*,$$

$$bdy^* + ey^* z^* = bd - dz^* + cz^*,$$

$$y^* (bd + ez^*) = bd - dz^* + cz^*,$$

$$y^* = \frac{bd - dz^* + cz^*}{bd + ez^*}. \quad (2.6)$$

Substitusi persamaan (2.6) ke (2.4)

$$x^* = \frac{c}{d} - \frac{e}{d} \left(\frac{bd - dz^* + cz^*}{bd + ez^*} \right),$$

$$x^* = \frac{c(bd + ez^*) - (bde - dez^* + cez^*)}{d(bd + ez^*)},$$

$$x^* = \frac{bcd + cez^* - bde + dez^* - cez^*}{d(bd + ez^*)},$$

$$x^* = \frac{bcd - bde + dez^*}{d(bd + ez^*)},$$

$$x^* = \frac{bc - be + ez^*}{bd + ez^*}. \quad (2.7)$$

Substitusi persamaan (2.6) dan (2.7) ke persamaan (2.1)

$$a - a \left(\frac{bc - be + ez^*}{bd + ez^*} \right) - z^* + \left(\frac{bd - dz^* + cz^*}{bd + ez^*} \right) z^* = 0,$$

$$a - \left(\frac{abc - abe + aez^*}{bd + ez^*} \right) - z^* + \left(\frac{bdz^* - d(z^*)^2 + c(z^*)^2}{bd + ez^*} \right) = 0,$$

$$\frac{a(bd + ez^*) - (abc - abe + aez^*) - z^*(bd + ez^*) + (bdz^* - d(z^*)^2 + c(z^*)^2)}{bd + ez^*} = 0,$$

$$abd + aez^* - abc + abe - aez^* - bdz^* - e(z^*)^2 + bdz^* - d(z^*)^2 + c(z^*)^2 = 0,$$

$$abd - abc + abe - e(z^*)^2 - d(z^*)^2 + c(z^*)^2 = 0,$$

$$(c - e - d)(z^*)^2 - ab(c - e - d) = 0,$$

$$(c - e - d)(z^*)^2 = ab(c - e - d),$$

$$(z^*)^2 = ab,$$

$$z^* = \sqrt{ab}, \quad (2.8)$$

karena z selalu bernilai positif sehingga tidak mungkin $z = -\sqrt{ab}$.

Substitusi (2.8) ke persamaan (2.6) dan (2.7)

$$x^* = \frac{bc - be + e\sqrt{ab}}{bd + e\sqrt{ab}},$$

$$x^* = \frac{c\sqrt{\frac{b}{a}} - e\sqrt{\frac{b}{a}} + e}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$x^* = \frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}. \quad (2.9)$$

$$y^* = \frac{bd - d\sqrt{ab} + c\sqrt{ab}}{bd + e\sqrt{ab}},$$

$$y^* = \frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}. \quad (2.10)$$

Dari persamaan (2.8), (2.9), dan (2.10) diperoleh

$$x^* = \frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$y^* = \frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$z^* = \sqrt{ab}.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 3. Penyederhanaan Matriks Jacobi E_7 Model Pertama

Matriks Jacobi $E_7(x^*, y^*, z^*)$ adalah

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} a - 2ax^* - z^* & 0 & -x^* \\ 0 & b - 2by^* - z^* & -y^* \\ dz^* & ez^* & -c + dx^* + ey^* \end{bmatrix},$$

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} r_{11} & 0 & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix},$$

di mana

$$r_{11} = a - 2ax^* - z^*,$$

$$r_{13} = -x^*,$$

$$r_{22} = b - 2by^* - z^*,$$

$$r_{23} = -y^*,$$

$$r_{31} = dz^*,$$

$$r_{32} = ez^*,$$

$$r_{33} = -c + dx^* + ey^*.$$

$$x^* = \frac{ae + bc - be}{ae + bd},$$

$$y^* = \frac{ac + bd - ad}{ae + bd},$$

$$z^* = \frac{abe + abd - abc}{ae + bd}.$$

Untuk mendapatkan r_{mn} , $i, j=1,2,3$ disubstitusikan nilai x^* , y^* , dan z^* sehingga diperoleh

$$r_{11} = a - 2ax^* - z^*,$$

$$r_{11} = a - 2a \left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd} \right) - \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd} \right),$$

$$r_{11} = \frac{a(ae + bd) - 2a(ae + bc - be) - (abe + abd - abc)}{ae + bd},$$

$$r_{11} = \frac{a^2e + abd - 2a^2e - 2abc + 2abe - abe - abd + abc}{ae + bd},$$

$$r_{11} = \frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd}.$$

$$r_{13} = - \left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd} \right).$$

$$r_{22} = b - 2by^* - z^*,$$

$$r_{22} = b - 2b \left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd} \right) - \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd} \right),$$

$$r_{22} = \frac{b(ae + bd) - 2b(ac + bd - ad) - (abe + abd - abc)}{ae + bd},$$

$$r_{22} = \frac{abe + b^2d - 2abc - 2b^2d + 2abd - abe - abd + abc}{ae + bd},$$

$$r_{22} = \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd}.$$

$$r_{23} = - \left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd} \right).$$

$$r_{31} = d \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd} \right),$$

$$r_{31} = \frac{abde + abd^2 - abcd}{ae + bd}.$$

$$r_{32} = e \left(\frac{abe + abd - abc}{ae + bd} \right),$$

$$r_{32} = \frac{abe^2 + abde - abce}{ae + bd}.$$

$$r_{33} = -c + d \left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd} \right) + e \left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd} \right),$$

$$r_{33} = \frac{-c(ae + bd) + d(ae + bc - be) + e(ac + bd - ad)}{ae + bd},$$

$$r_{33} = \frac{-ace - bcd + ade + bcd - bde + ace + bde - ade}{ae + bd},$$

$$r_{33} = 0.$$

Sehingga matriks Jacobi $E_7(x^*, y^*, z^*)$

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} \frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd} & 0 & -\left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd} \right) \\ 0 & \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd} & -\left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd} \right) \\ \frac{abde + abd^2 - abcd}{ae + bd} & \frac{abe^2 + abde - abce}{ae + bd} & 0 \end{bmatrix}.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 4. Penyederhanaan B dan C

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}_{(E_7)}, \\
 &= \begin{vmatrix} \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd} & -\left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd}\right) \\ \frac{abe^2 + abde - abce}{ae + bd} & 0 \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd} & -\left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd}\right) \\ \frac{abde + abd^2 - abcd}{ae + bd} & 0 \end{vmatrix} \\
 &+ \begin{vmatrix} \frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd} & 0 \\ 0 & \frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd} \end{vmatrix}, \\
 &= \left(\frac{ac + bd - ad}{ae + bd}\right) \left(\frac{abe^2 + abde - abce}{ae + bd}\right) \\
 &+ \left(\frac{ae + bc - be}{ae + bd}\right) \left(\frac{abde + abd^2 - abcd}{ae + bd}\right) \\
 &+ \left(\frac{-a^2e - abc + abe}{ae + bd}\right) \left(\frac{-b^2d - abc + abd}{ae + bd}\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) \\
&+ \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) \\
&+ \left(\frac{-a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{-b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right).
\end{aligned}$$

$$C = -\det(J(E_7)),$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} \frac{-a^2e-abc+abe}{ae+bd} & 0 & -\left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd}\right) \\ 0 & \frac{-b^2d-abc+abd}{ae+bd} & -\left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd}\right) \\ \frac{abde+abd^2-abcd}{ae+bd} & \frac{abe^2+abde-abce}{ae+bd} & 0 \end{vmatrix}, \\
&= \left[\left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{-b^2d-abc+abd}{ae+bd} \right) \left(\frac{abde+abd^2-abcd}{ae+bd} \right) + \right. \\
&\left. \left(\frac{-a^2e-abc+abe}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{abe^2+abde-abce}{ae+bd} \right) \right], \\
&= \left[\left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{-b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \right. \\
&\left. \left(\frac{-a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) \right] \\
&= \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \\
&\left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right).
\end{aligned}$$

Lampiran 5. Perhitungan AB-C

$$\begin{aligned}
 AB-C &= \left[\left(\frac{a(ae+bc-be)+b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{a(ae+bc-be)+b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) \right] \\
 &\quad + \left(\frac{a(ae+bc-be)+b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{-a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{-b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) - \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right), \\
 &= \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \\
 &\quad \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \\
 &\quad \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) - \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) - \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right), \\
 &= \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ae+bc-be}{ae+bd} \right) \left(\frac{d(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{ac+bd-ad}{ae+bd} \right) \\
 &\quad \left(\frac{e(abe+abd-abc)}{ae+bd} \right) + \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right) \left(\frac{a(ae+bc-be)}{ae+bd} \right) \left(\frac{b(bd+ac-ad)}{ae+bd} \right)
 \end{aligned}$$



Lampiran 6. Penyederhanaan Matriks E_7 Model Ke Dua

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} a-2ax^* -z^* + y^* z^* & x^* z^* & -x^* + x^* y^* \\ y^* z^* & b-2by^* -z^* + x^* z^* & -y^* + x^* y^* \\ dz^* & ez^* & -c+dx^* + ey^* \end{bmatrix}, \quad (3.60)$$

$$= \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix},$$

di mana

$$t_{11} = a - 2ax^* - z^* + y^* z^*,$$

$$t_{12} = x^* z^*,$$

$$t_{13} = -x^* + x^* y^*,$$

$$t_{21} = y^* z^*,$$

$$t_{22} = b - 2by^* - z^* + x^* z^*,$$

$$t_{23} = -y^* + x^* y^*,$$

$$t_{31} = dz^*$$

$$t_{32} = ez^*$$

$$t_{33} = -c + dx^* + ey^*.$$

$$x^* = \frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$y^* = \frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$z^* = \sqrt{ab},$$

Untuk mendapatkan t_{mn} , $i, j=1, 2, 3$ disubstitusikan nilai x^* , y^* , dan z^* , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} t_{11} &= a - 2ax^* - z^* + y^*z^*, \\ &= a - 2a \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) - \sqrt{ab} + \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \sqrt{ab}, \\ &= \frac{ad\sqrt{\frac{b}{a}} + ae - 2ae - 2ac\sqrt{\frac{b}{a}} + 2ae\sqrt{\frac{b}{a}} - bd - e\sqrt{ab} + bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}, \\ &= \frac{d\sqrt{ab} + ae - 2ae - 2c\sqrt{ab} + 2e\sqrt{ab} - bd - e\sqrt{ab} + bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}, \\ &= \frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{12} &= x^* z^*, \\
 &= \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \sqrt{ab}, \\
 &= \frac{e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{13} &= -x^* + x^* y^*, \\
 &= -x^* (1 - y^*), \\
 &= - \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left[1 - \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \right], \\
 &= - \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left[\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e - d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right], \\
 &= - \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c-e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{e + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{21} &= y^* z^*, \\
 &= \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \sqrt{ab}, \\
 &= \frac{bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}.
 \end{aligned}$$

$$t_{22} = b - 2by^* - z^* + x^*z^*,$$

$$= b - 2b \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) - \sqrt{ab} + \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \sqrt{ab},$$

$$= \frac{bd\sqrt{\frac{b}{a}} + be - 2bd\sqrt{\frac{b}{a}} - 2bc + 2bd - bd - e\sqrt{ab} + e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e},$$

$$= \frac{-bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e}.$$

$$t_{23} = -y^* + x^*y^*,$$

$$= -y^*(1 - x^*),$$

$$= - \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left[1 - \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \right],$$

$$= - \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e - e - c\sqrt{\frac{b}{a}} + e\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right),$$

$$= - \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\sqrt{\frac{b}{a}} - c\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right).$$

$$t_{31} = dz^*,$$

$$= d\sqrt{ab}.$$

$$t_{32} = ez^*,$$

$$= e\sqrt{ab}.$$

$$t_{33} = -c + dx^* + ey^*,$$

$$= -c + d \left(\frac{e + \sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a} + e} \right) + e \left(\frac{d\sqrt{b/a} + c - d}{d\sqrt{b/a} + e} \right),$$

$$= \frac{-cd\sqrt{b/a} - ce + de + cd\sqrt{b/a} - de\sqrt{b/a} + de\sqrt{b/a} + ce - de}{d\sqrt{b/a} + e},$$

$$= 0.$$

Sehingga matriks Jacobi $E_7^*(x^*, y^*, z^*)$

$$J(E_7) = \begin{bmatrix} \frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a} + e} & \frac{e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{b/a} + e} & \left(\frac{e + \sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a} + e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a} + e} \right) \\ \frac{bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a} + e} & \frac{-bd\sqrt{b/a} - bc + bd}{d\sqrt{b/a} + e} & \left(\frac{d\sqrt{b/a} + c - d}{d\sqrt{b/a} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a} + e\sqrt{b/a} - c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a} + e} \right) \\ \frac{d\sqrt{ab}}{d\sqrt{ab}} & \frac{e\sqrt{ab}}{e\sqrt{ab}} & 0 \end{bmatrix}$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 7. Penyederhanaan B^* dan C^*

$$\begin{aligned}
 B^* &= \begin{vmatrix} J_{22} & J_{23} \\ J_{32} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7^*)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{13} \\ J_{31} & J_{33} \end{vmatrix}_{(E_7^*)} + \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}_{(E_7^*)}, \\
 &= \left(\frac{-bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} - \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\sqrt{\frac{b}{a}} - c\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} - \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d + e - c}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \right) \\
 &\quad + \left(\frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} - \frac{e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} - \frac{-bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right), \\
 &= \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + c - d}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e\sqrt{\frac{b}{a}} - c\sqrt{\frac{b}{a}}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) e\sqrt{ab} + \left(\frac{e + \sqrt{\frac{b}{a}}(c - e)}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \\
 &\quad \left(\frac{d + e - c}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) d\sqrt{ab} + \left(\frac{-ae - c\sqrt{ab} + e\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{-bd\sqrt{\frac{b}{a}} - bc + bd}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{e\sqrt{ab} + bc - be}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right) \left(\frac{bd + c\sqrt{ab} - d\sqrt{ab}}{d\sqrt{\frac{b}{a}} + e} \right).
 \end{aligned}$$

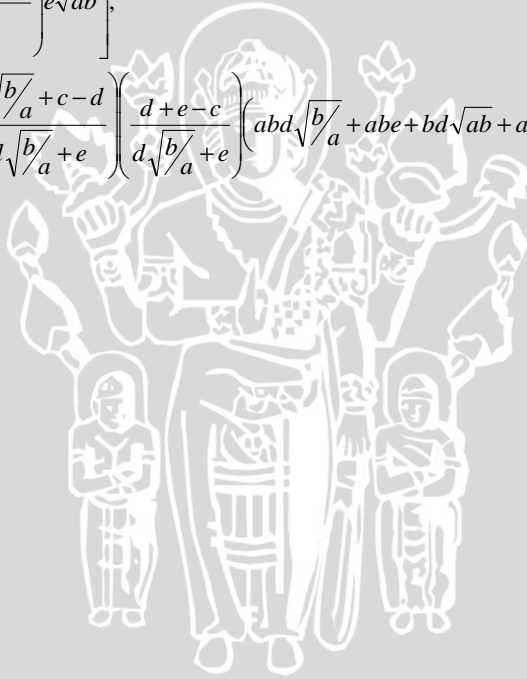
$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} + \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \\
&\quad \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} + \left(\frac{bde\sqrt{ab}+abce-abde+b^2cd+bc^2\sqrt{ab}-bcd\sqrt{ab}}{(d\sqrt{b/a}+e)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{b^2de-bce\sqrt{ab}+bde\sqrt{ab}}{(d\sqrt{b/a}+e)^2} \right) \left(\frac{bde\sqrt{ab}+abce-abde+b^2cd+bc^2\sqrt{ab}-bcd\sqrt{ab}}{(d\sqrt{b/a}+e)^2} \right) \\
&\quad \left. - \frac{b^2de-bce\sqrt{ab}+bde\sqrt{ab}}{(d\sqrt{b/a}+e)^2} \right) \\
&= \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} + \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

$$C^* = -\det(J(E_7^*))$$

$$\begin{vmatrix}
\frac{-ae-c\sqrt{ab}+e\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a}+e} & \frac{e\sqrt{ab}+bc-be}{d\sqrt{b/a}+e} & -\left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \\
\frac{bd+c\sqrt{ab}-d\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a}+e} & \frac{-bd\sqrt{b/a}-bc+bd}{d\sqrt{b/a}+e} & \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \\
\frac{d\sqrt{ab}}{d\sqrt{ab}} & \frac{e\sqrt{ab}}{e\sqrt{ab}} & 0
\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{e\sqrt{ab+bc-be}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a+c-d}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a+e}\sqrt{b/a-c}\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) d\sqrt{ab} \right. \\
&\quad - \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{bd+c\sqrt{ab}-d\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) e\sqrt{ab} + \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \\
&\quad \left. \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{-bd\sqrt{b/a}-bc+bd}{d\sqrt{b/a+e}} \right) d\sqrt{ab} + \left(\frac{-ae-c\sqrt{ab}+e\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a+c-d}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{d\sqrt{b/a+e}\sqrt{b/a-c}\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) e\sqrt{ab} \right] \\
&= \left[\left(\frac{e\sqrt{ab+bc-be}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a+c-d}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a+e}\sqrt{b/a-c}\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) d\sqrt{ab} \right. \\
&\quad + \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{bd+c\sqrt{ab}-d\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) e\sqrt{ab} - \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \\
&\quad \left. \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{-bd\sqrt{b/a}-bc+bd}{d\sqrt{b/a+e}} \right) d\sqrt{ab} - \left(\frac{-ae-c\sqrt{ab}+e\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a+c-d}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{d\sqrt{b/a+e}\sqrt{b/a-c}\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a+e}} \right) e\sqrt{ab} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{e\sqrt{ab}+bc-be}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} \right. \\
&+ \left. \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{bd+c\sqrt{ab}-d\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} + \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \right. \\
&\left. \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{bd\sqrt{b/a}+bc-bd}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} + \left(\frac{ae+c\sqrt{ab}-e\sqrt{ab}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \right. \\
&\left. \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} \right], \\
&= \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(abd\sqrt{b/a}+abe+bd\sqrt{ab}+abe \right).
\end{aligned}$$



Lampiran 8. Perhitungan $A^*B^* - C^*$

$$\begin{aligned}
 A^*B^* - C^* &= \left[\frac{d(e+c\sqrt{b/a}-e\sqrt{b/a})+b(d\sqrt{b/a}+c-d)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} + \frac{d(e+c\sqrt{b/a}-e\sqrt{b/a})+b(d\sqrt{b/a}+c-d)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} \right) - \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(abd\sqrt{b/a}+abe+bd\sqrt{ab}+abe \right) \right) \right] \\
 &= \left[\frac{d(e+c\sqrt{b/a}-e\sqrt{b/a})}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} + \frac{b(d\sqrt{b/a}+c-d)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+e\sqrt{b/a}-c\sqrt{b/a}}{d\sqrt{b/a}+e} \right) e\sqrt{ab} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{d(e+c\sqrt{b/a}-e\sqrt{b/a})}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} + \frac{b(d\sqrt{b/a}+c-d)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} \right) - \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \right) \right) \right] \\
 &\quad \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(abd\sqrt{b/a}+abe+bd\sqrt{ab}+abe \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{(e+c\sqrt{b/a}-e\sqrt{b/a})}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) abe + \frac{(bd\sqrt{b/a}+bc-bd)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) be + \frac{(ae+ac\sqrt{b/a}-ae\sqrt{b/a})}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \right. \\
 &\left. \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} + \frac{(d\sqrt{b/a}+c-d)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) bd\sqrt{ab} \right] - \left[\frac{(e+\sqrt{b/a}(c-e))}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) (ad\sqrt{ab}+abe+bd\sqrt{ab}+abe), \right. \\
 &= \frac{(bd\sqrt{b/a}+bc-bd)}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) be + \frac{(ae+ac\sqrt{b/a}-ae\sqrt{b/a})}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} - \frac{(ae+a\sqrt{b/a}(c-e))}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \\
 &\left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} - \frac{(ae+a\sqrt{b/a}(c-e))}{d\sqrt{b/a}+e} \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) \left(\frac{d+e-c}{d\sqrt{b/a}+e} \right) be, \\
 &= \frac{(d+e-c)}{d\sqrt{b/a}+e} \left[\frac{(ae+ac\sqrt{b/a}-ae\sqrt{b/a})}{d\sqrt{b/a}+e} - \frac{(bd\sqrt{b/a}+bc-bd)}{d\sqrt{b/a}+e} \right] \left[\left(\frac{e+\sqrt{b/a}(c-e)}{d\sqrt{b/a}+e} \right) d\sqrt{ab} - \left(\frac{d\sqrt{b/a}+c-d}{d\sqrt{b/a}+e} \right) be \right], \\
 &= \frac{(d+e-c)}{d\sqrt{b/a}+e} \left[\frac{ae+ac\sqrt{b/a}-ae\sqrt{b/a}-bd\sqrt{b/a}-bc+bd}{d\sqrt{b/a}+e} \right] \left[\frac{de\sqrt{ab}+bcd-bde-bde\sqrt{b/a}-bce+bde}{d\sqrt{b/a}+e} \right], \\
 &= \frac{(d+e-c)}{d\sqrt{b/a}+e} \left[\frac{ae+ac\sqrt{b/a}-ae\sqrt{b/a}-bd\sqrt{b/a}-bc+bd}{d\sqrt{b/a}+e} \right] \left[\frac{de\sqrt{ab}+bcd-bde\sqrt{b/a}-bce}{d\sqrt{b/a}+e} \right].
 \end{aligned}$$

Lampiran 9. Listing Program

Model Pertama

```
%Memasukkan nilai parameter dan sistem persamaan model interaksi satu predator dan dua prey
```

```
function dy=PP7(t,y)
a=0.3;
b=0.4;
c=0.4;
d=0.1;
e=0.2;
dy(1)=a*y(1)-a*y(1)^2-y(1)*y(3);
dy(2)=b*y(2)-b*y(2)^2-y(2)*y(3);
dy(3)=-c*y(3)+d*y(1)*y(3)+e*y(2)*y(3);
```

```
%Perhitungan solusi sistem persamaan model interaksi satu predator dan dua prey dengan Runge Kutta Orde 4
```

```
function [T,Z]=rks7(PP7,a,b,za,M)
h=(b-a)/M;
Z=zeros(M+1,length(za));
T=a:h:b;
Z(1,:)=za;
for j=1:M
    k1=h*feval(PP7,T(j),Z(j,:));
    k2=h*feval(PP7,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);
    k3=h*feval(PP7,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);
    k4=h*feval(PP7,T(j)+h,Z(j,:)+k3);
    Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
end;
```

```
%Program Utama
```

```
[t y]=rks7('PP7',0,1000,[0.05,1.8,0.01],8000);
figure(1);
plot(t,y,'Linewidth',2);
hold on;
xlabel('Waktu (t)');
ylabel('Jumlah Individu');
grid on;
axis square;
legend('x(t)','y(t)','z(t)');
```

```

figure(2);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3), 'LineWidth',1.5);
hold on
plot3(y(1,1),y(1,2),y(1,3), '*g', 'LineWidth',5);
plot3(y(500,1),y(500,2),y(500,3), '*r', 'LineWidth',2
);
plot3(0,0,0, 'k*', 'LineWidth',5);%E1
plot3(1,0,0, 'b*', 'LineWidth',5);%E2
plot3(0,1,0, 'b*', 'LineWidth',5);%E3
% plot3(1,1,0, 'y*', 'LineWidth',5);%E4
a=0.3;
b=0.4;
c=0.4;
d=0.1;
e=0.2;
x5=c/d;
z5=(a*d-a*c)/d;
y6=c/e;
z6=(b*e-b*c)/e;
x7=(a*e+b*c-b*e)/(a*e+b*d);
y7=(a*c+b*d-a*d)/(a*e+b*d);
z7=(a*b*d+a*b*e-a*b*c)/(a*e+b*d);
plot3(x5,0,z5, 'g*', 'LineWidth',5);%E5
plot3(0,y6,z6, 'm*', 'LineWidth',5);%E6
plot3(x7,y7,z7, 'k*', 'LineWidth',5);%E7
hold off
hold on
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)');
zlabel('z(t)');
grid on

```

Model Ke Dua

%Memasukkan nilai parameter dan sistem persamaan model interaksi satu predator dan dua prey

```

function dy=PP13(t,y)
a=0.3;
b=0.4;
c=0.4;
d=0.1;
e=0.2;
dy(1)=a*y(1)-a*y(1)^2-y(1)*y(3)+y(1)*y(2)*y(3);

```

```

dy(2)=b*y(2)-b*y(2)^2-y(2)*y(3)+y(1)*y(2)*y(3);
dy(3)=-c*y(3)+d*y(1)*y(3)+e*y(2)*y(3);

```

```

%Perhitungan solusi sistem persamaan model
interkasi satu predator dan dua prey dengan Runge
Kutta Orde 4

```

```

function [T,Z]=rks43(PP13,a,b,za,M)

```

```

h=(b-a)/M;

```

```

Z=zeros(M+1,length(za));

```

```

T=a:h:b;

```

```

Z(1,:)=za;

```

```

for j=1:M

```

```

    k1=h*feval(PP13,T(j),Z(j,:));

```

```

    k2=h*feval(PP13,T(j)+h/2,Z(j,:)+k1/2);

```

```

    k3=h*feval(PP13,T(j)+h/2,Z(j,:)+k2/2);

```

```

    k4=h*feval(PP13,T(j)+h,Z(j,:)+k3);

```

```

    Z(j+1,:)=Z(j,:)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;

```

```

end;

```

```

%Program Utama

```

```

[t y]=rks43('PP13',0,1000,[0.05,1.8,0.001],8000);

```

```

figure(1);

```

```

plot(t,y,'Linewidth',2);

```

```

hold on;

```

```

xlabel('Waktu (t)');

```

```

ylabel('Jumlah Individu');

```

```

grid on

```

```

axis square

```

```

legend('x(t)','y(t)','z(t)');

```

```

figure(2);

```

```

plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'LineWidth',2);

```

```

hold on

```

```

plot3(y(1,1),y(1,2),y(1,3),'*g','LineWidth',5);

```

```

plot3(y(500,1),y(500,2),y(500,3),'*r','LineWidth',2);
);

```

```

plot3(0,0,0,'*k','LineWidth',5);%E1

```

```

plot3(1,0,0,'*b','LineWidth',5);%E2

```

```

plot3(0,1,0,'*m','LineWidth',5);%E3

```

```

% plot3(1,1,0,'*y','LineWidth',5);%E4

```

```

a=0.01;

```

```

b=0.2;

```



```

c=0.2;
d=0.01;
e=0.4;
x5=c/d;
z5=(a*d-a*c)/d;
y6=c/e;
z6=(b*e-b*c)/e;
x7=(e+sqrt(b/a)*(c-e))/(d*sqrt(b/a)+e);
y7=(d*sqrt(b/a)+c-d)/(d*sqrt(b/a)+e);
z7=sqrt(a*b);
plot3(x5,0,z5,'g*','LineWidth',5);%E5
plot3(0,y6,z6,'r*','LineWidth',5);%E6
plot3(x7,y7,z7,'k*','LineWidth',5);%E7

hold off
hold on
xlabel('x(t)');
ylabel('y(t)');
zlabel('z(t)');
grid on

```

