EVALUASI METODE EULER

dalam menyelesaikan

MODEL EPIDEMIK SIR

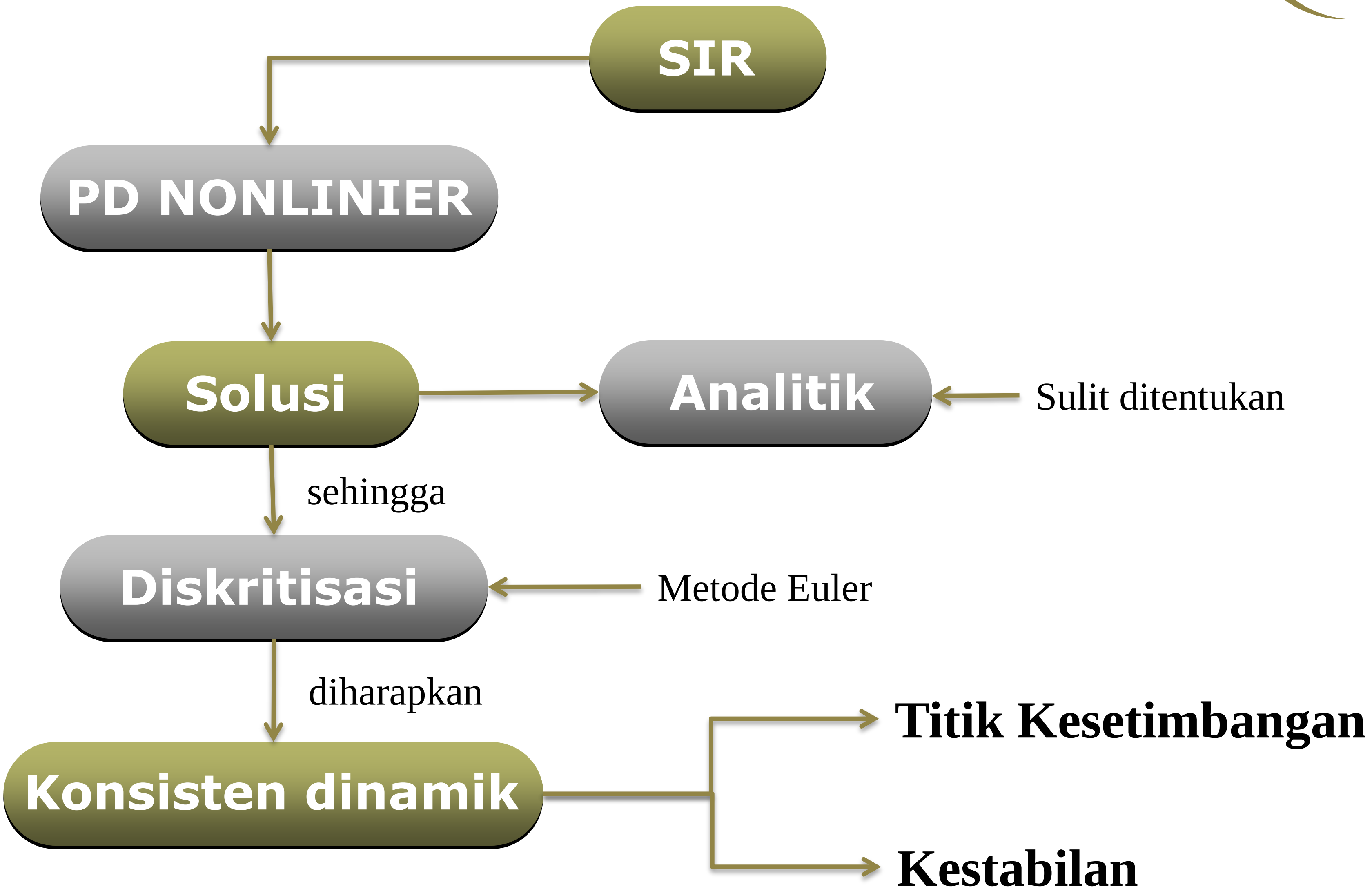
Oleh :

TONI (0710943033)

Pembimbing

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc
2. Drs. M. Muslikh, M.Si

Latar Belakang



Konsistensi Dinamik

Dalam beberapa kasus, solusi dari persamaan diferensial secara eksak sulit didapat, sehingga dibutuhkan skema numerik yang merupakan persamaan beda untuk memperkirakan solusi dari persamaan diferensial.

Jika suatu skema numerik memiliki titik kesetimbangan dan sifat kestabilan yang sama dengan sistem kontinunya, maka skema numerik tersebut dikatakan **konsisten secara dinamik.**

(Dimitrov dan Kojouharov, 2007)

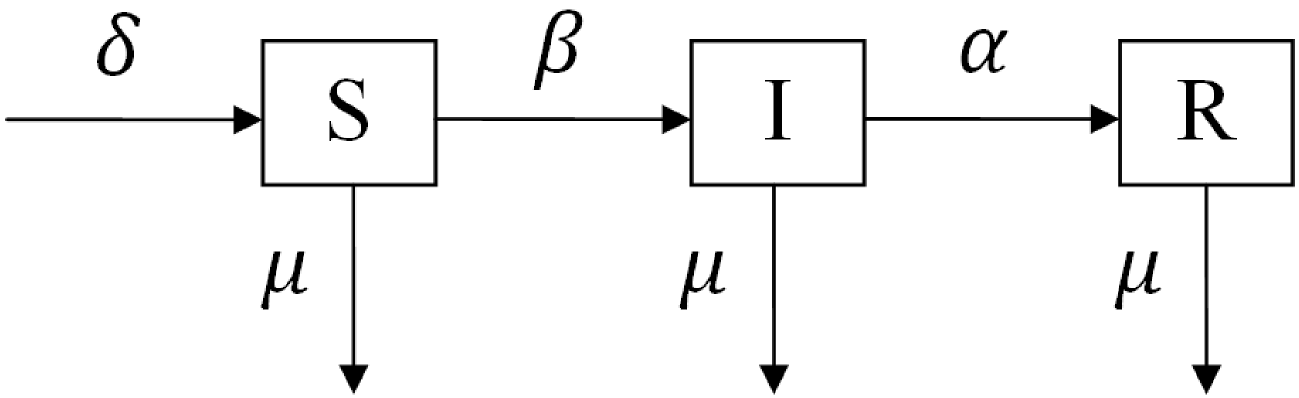
Rumusan Masalah

1. Bagaimana melakukan diskritisasi model SIR kontinu dengan menggunakan metode Euler?
2. Bagaimana konsistensi dinamik SIR model diskrit dengan model SIR kontinu?
3. Bagaimana simulasi numerik pada SIR model diskrit?

Tujuan

1. Melakukan diskritisasi model SIR kontinu dengan menggunakan metode Euler
2. Menganalisis konsistensi dinamik SIR model diskrit dengan model SIR kontinu
3. Melakukan simulasi numerik pada SIR model diskrit

Model SIR



$S(t)$ = Kelompok yg sehat tapi rawan untuk terinfeksi
$I(t)$ = Kelompok yg terinfeksi
$R(t)$ = Kelompok yg sembuh & memiliki kekebalan permanen
α = Laju kesembuhan
β = Laju terinfeksi
μ = Laju kematian
δ = Laju kelahiran

Sistem Persamaan

$$\frac{dS}{dt} = \delta - \beta.SI - \mu.S \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta.SI - \mu.I - \alpha.I \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha.I - \mu.R \qquad (3)$$

Karena variabel *R* tidak muncul pada persamaan (1) dan (2). Hal ini menunjukkan jumlah kelompok individu *R* tidak mempengaruhi laju perubahan jumlah kelompok individu *S* maupun *I*,

Sehingga Persamaan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \delta - \beta.SI - \mu.S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta.SI - \mu.I - \alpha.I$$

Titik kesetimbangan & Kestabilan

Titik Kesetimbangan	Kestabilan
$E_1 = \left({}^{\delta}/_{\mu}, 0\right)$	stabil jika $\mu > 0$ dan $R_0 < 1$
$E_2 = \left(\frac{\mu+\alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\mu+\alpha} - \frac{\mu}{\beta}\right)$	stabil jika $\mu + \alpha > 0$ dan $R_0 > 1$

dimana, Rasio Reproduksi Dasar

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu+\alpha)}$$

Metode Euler

Persamaan differensial sbb:

$$\frac{dx}{dt} = f\big(x(t)\big), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \le t \le b$$

Dengan metode Euler mendekati $x'(t)$ dengan $\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$,

diperoleh $\quad x(t+h) = x(t) + hf\big(x(t)\big)$.

Dan untuk $t = t_0 + nh$, , diperoleh

$$x(t_0 + (n+1)h) = x(t_0 + nh) + hf\big(x(t_0 + nh)\big)$$

mengganti $x(t_0 + nh)$ dengan $x(n)$, diberikan

$$x(n+1) = x(n) + hfx(n)$$

(Elaydi, 2005)

(Definisi 2.4) Titik Kesetimbangan

Titik (x^*, y^*) disebut titik kesetimbangan persamaan

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$. (Elaydi, 2005).

Titik (x^*, y^*) adalah solusi konstan dari sistem (1), karena jika $\left(x_{(0)}, y_{(0)}\right) = (x^*, y^*)$ adalah titik awal, maka

$$x_{(1)} = f(x^*, y^*) = x^*$$

$$y_{(1)} = g(x^*, y^*) = y^*$$

$$x_{(2)} = f\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) = f(x^*, y^*) = x^*$$

$$y_{(2)} = g\left(x_{(1)}, y_{(1)}\right) = g(x^*, y^*) = y^*$$

Hal lain yang perlu dipelajari adalah perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan/kestabilan dari titik kesetimbangan.

Sistem dinamik diskrit Tak-Linier

Perhatikan sistem dinamik diskrit tak-linier sbb:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

linierisasi dari persamaan (1) adalah sebagai berikut

$$x_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*, y^*)x_n + \frac{\partial f}{\partial y_n}(x^*, y^*)y_n$$

$$y_{n+1} = \frac{\partial g}{\partial x_n}(x^*, y^*)x_n + \frac{\partial g}{\partial y_n}(x^*, y^*)y_n$$

Dapat ditulis menjadi

$$J(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x_n, y_n)}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

(Elaydi, 2005).

Kestabilan Titik Kesetimbangan

Sistem persamaan beda orde satu dgn *n* variabel bebas yaitu

$$\vec{x}(n+1) = A\vec{x}(n), \qquad (1)$$

maka solusi umum dari persamaan (1),

$$x(n) = c_1\lambda_1{}^n v_1 + c_2\lambda_2{}^n v_2 + \cdots + c_k\lambda_k{}^n v_k,$$

di mana v_i adalah vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_i dan c_i adalah sebarang konstanta

Teorema 2.3

Misalkan $\lambda_i, i = 1,2, \ldots, k$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik (1), maka berlaku semua solusi persamaan (1) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika maksimum $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_k|\} < 1$ (Elaydi, 2005)

Kestabilan Titik Kesetimbangan

Lemma 2.4

Persamaan kuadrat $f(\lambda) = \lambda^2 - A\lambda + B = 0$ memiliki dua akar yang memenuhi $|\lambda_i| < 1, i = 1,2$ jika dan hanya jika memenuhi kondisi berikut.

1. $1 - A + B > 0$
2. $1 + A + B > 0$
3. $1 - B > 0$

(Elaydi, 2005)

Metodologi

Rumusan Masalah

Diskritisasi Model SIR kontinu dengan metode Euler

Menyelidiki Titik Kesetimbangan & Kestabilan SIR model diskrit

Menganalisis konsisten dinamik

Simulasi Numerik

Kesimpulan

Hasil dan Pembahasan

Diskritisasi Model

$$\frac{dS}{dt} = \delta - \beta.SI - \mu.S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta.SI - \mu.I - \alpha.I$$

Dengan menggunakan metode Euler, diperoleh diskritisasi sistem persamaan

$$S_{n+1} = \Delta t\delta - \Delta t\beta.S_nI_n - \Delta t\mu.S_n + S_n$$

$$I_{n+1} = \Delta t\beta.S_nI_n - \Delta t\mu.I_n - \Delta t\alpha.I_n + I_n$$

SIR MODEL DISKRIT

Titik Kesetimbangan

Berdasarkan Definisi 2.4, titik kesetimbangan SIR Diskrit diperoleh jika $S^* = f(S^*, I^*)$ dan $I^* = g(S^*, I^*)$, yaitu

$$I^* = \Delta t\beta . S^* I^* - \Delta t\mu . I^* - \Delta t\alpha . I^* + I^*$$

$$S^* = \Delta t\delta - \Delta t\beta . S^* I^* - \Delta t\mu . S^* + S^*$$

Diperoleh dua titik kesetimbangan

$$E_0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0\right) \text{ dan } E_1 = \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta}, \frac{\delta}{\mu + \alpha} - \frac{\mu}{\beta}\right)$$

Dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan SIR model diskrit konsisten dengan model SIR kontinu

Kestabilan Titik Kesetimbangan

Kestabilan titik kesetimbangan SIR diskrit dianalisis secara lokal yaitu dengan linierisasi

$$S_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial S_n}(S^*, I^*)S_n + \frac{\partial f}{\partial I_n}(S^*, I^*)I_n$$

$$I_{n+1} = \frac{\partial g}{\partial S_n}(S^*, I^*)S_n + \frac{\partial g}{\partial I_n}(S^*, I^*)I_n$$

diperoleh

$$S_{n+1} = (-\Delta t\beta I^* - \Delta t\mu + 1\,)S_n + (-\Delta t\beta S^*)I_n$$

$$I_{n+1} = (\Delta t\beta I^*)S_n + (\Delta t(\beta S^* - \mu - \alpha) + 1)I_n.$$

Selanjutnyat akan dibahas syarat kestabilan lokal dari masing-masing titik kesetimbangan SIR diskrit

Titik Kesetimbangan E_0

Diperoleh $$S_{n+1} = (-\Delta t\mu + 1)S_n + \left(-\Delta t\frac{\beta\delta}{\mu}\right)I_n$$

$$I_{n+1} = \left(\Delta t\left(\frac{\beta\delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1\right)I_n$$

Dapat ditulis menjadi

$$J(S_n, I_n) = \begin{bmatrix} -\Delta t\mu + 1 & -\Delta t\frac{\beta\delta}{\mu} \\ 0 & \Delta t\left(\frac{\beta\delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik

$$P(\lambda) = (-\Delta t\mu + 1 - \lambda)\left(\Delta t\left(\frac{\beta\delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1 - \lambda\right)$$

Titik Kesetimbangan E_0

Akar-akar persamaan karakteristik adalah

$$\lambda_1 = -\Delta t\mu + 1 \text{ dan } \lambda_2 = \Delta t\left(\frac{\beta\delta}{\mu} - \mu - \alpha\right) + 1$$

- Nilai $|\lambda_1| < 1$ diperoleh jika $\Delta t < \frac{2}{\mu}$
- Nilai $|\lambda_2| < 1$ diperoleh jika $\Delta t < \frac{2}{\mu+\alpha-\frac{\beta\delta}{\mu}}$

Dari kedua pertidaksamaan diatas diperoleh

$$\Delta t < min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu+\alpha-\frac{\beta\delta}{\mu}}\right)$$

$\Delta t > 0,$ diperoleh $\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu} > 0 \Leftrightarrow R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu+\alpha)} < 1.$

Titik Kesetimbangan E_0

Disimpulkan bahwa titik kesetimbangan $E_0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0\right)$ pada sistem persamaan SIR diskrit stabil asimtotik. Kestabilan titik kesetimbangan E_0 konsisten secara dinamik bila

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu + \alpha)} < 1.$$

dan

$$\Delta t < min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu+\alpha-\frac{\beta\delta}{\mu}}\right)$$

Titik Kesetimbangan E_1

Diperoleh
$$S_{n+1} = \left(1 - \Delta t \frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right) S_n - \Delta t(\mu + \alpha) I_n$$
$$I_{n+1} = \Delta t \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha} - \mu\right) S_n + I_n.$$

Dapat ditulis menjadi
$$J(S_n, I_n) = \begin{bmatrix} 1 - \Delta t \frac{\beta\delta}{\mu+\alpha} & -\Delta t(\mu + \alpha) \\ \Delta t \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha} - \mu\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik
$$P(\lambda) = \lambda^2 + \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\Delta t - 2\right)\lambda$$
$$+\big(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)\big)\Delta t^2 - \left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)\Delta t + 1 = 0$$

Titik Kesetimbangan E_1

Dapat ditulis menjadi

$$P(\lambda) = \lambda^2 + A\lambda + B = 0$$

Dimana

$$A = \frac{\Delta t\beta\delta}{\mu+\alpha} - 2 \text{ dan } B = \left(1 - \frac{\Delta t\beta\delta}{\mu+\alpha}\right) + \Delta t^2\left(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\right)$$

Dalam Lemma 2.1 dijelaskan bahwa, akar dari persamaan kuadrat diatas akan memenuhi jika dan hanya jika memenuhi ketiga kondisi berikut:

i. $1 + A + B > 0$,

ii. $1 - B > 0$,

iii. $1 - A + B > 0$.

Kondisi *i.* $1 + A + B > 0$

$$0 < 1 + A + B$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 + \left(\frac{\Delta t \beta \delta}{\mu+\alpha} - 2\right) + \left(1 - \frac{\Delta t \beta \delta}{\mu+\alpha}\right) + \Delta t^2 \big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)$$

$$\Leftrightarrow 0 < \Delta t^2 \big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)$$

Karena $\Delta t > 0$, diperoleh

$$\beta\delta - \mu(\mu+\alpha) > 0$$

atau

$$R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu+\alpha)} > 1$$

Kondisi *ii.* $1 - B > 0$

$$0 < 1 - B$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - \left(\left(1 - \frac{\Delta t \beta \delta}{\mu+\alpha}\right) + \Delta t^2\big(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)\big)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta t \beta \delta}{\mu+\alpha} > \Delta t^2\big(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)\big)$$

Diperoleh $\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)\big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)}$

Karena $\Delta t > 0$ dan $\frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)} > 0$

berlaku $\beta\delta - \mu(\mu + \alpha) > 0$ atau $R_0 = \frac{\beta\delta}{\mu(\mu+\alpha)} > 1$

Kondisi *iii.* $1 - \mathrm{A} + B > 0$

$$0 < 1 - A + B$$

$$\Leftrightarrow 0 < 1 - \left(\frac{\Delta t\beta\delta}{\mu+\alpha} - 2\right) + \left(1 - \frac{\Delta t\beta\delta}{\mu+\alpha}\right) + \Delta t^2\big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)$$

Perhatikan fungsi kuadrat,

$$P(\Delta t) = \big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)\Delta t^2 - 2\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\Delta t + 4 > 0 \qquad (1)$$

Fungsi $P(\Delta t)$ memotong sumbu Δt pada

$$\Delta t_{1,2} = \frac{2\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha} \pm \sqrt{D}}{2\big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)} \qquad (2)$$

Dimana $D = \left(2\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16\big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big)$

Berikut dijelaskan tiga kemungkinan nilai D

Jika $D < 0$

Jika $D < 0$, maka akar (2) merupakan bilangan imajiner sehingga fungsi $P(\Delta t) > 0$. Hal ini berarti pertidaksamaan (1) akan terpenuhi untuk semua $\Delta t > 0$. Kondisi ini berlaku jika $D < 0$, yaitu

$$\frac{\mu R_0}{4(\mu + \alpha)} < 1 \qquad (3)$$

Kondisi iii) terpenuhi jika pertidaksamaan (3) berlaku.

Jika $D = 0$

Jika $D = 0$, maka fungsi $P(\Delta t)$ bernilai nol pada $\Delta t = \Delta t_{1,2} = \Delta t_0$, dimana

$$\Delta t_0 = \frac{\beta\delta}{\mu + \alpha\big(\beta\delta - \mu(\mu + \alpha)\big)}.$$

Hal ini berarti pertidaksamaan (1) akan terpenuhi untuk $\Delta t \neq \Delta t_0$, $D = 0$ jika

$$\frac{\mu R_0}{4(\mu + \alpha)} + \frac{1}{R_0} = 1. \tag{4}$$

Jika persamaan (4) berlaku maka kondisi iii) berlaku untuk semua Δt kecuali $\Delta t \neq \Delta t_0$.

Jika $D > 0$

Jika $D > 0$, maka fungsi $P(\Delta t)$ memotong sumbu Δt pada Δt_1 dan Δt_2. Berarti pertidaksamaan (1) akan terpenuhi jika

$$0 < \Delta t < \Delta t_1 \text{ atau } \Delta t > \Delta t_2,$$

dimana

$$\Delta t_1 = \frac{2\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha} - \sqrt{D}}{2\left(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\right)} > 0 \ , \Delta t_2 = \frac{2\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha} + \sqrt{D}}{2\left(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\right)} > 0.$$

Kondisi ini berlaku jika $D > 0$, yaitu

$$\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} > 1. \tag{5}$$

Jika persamaan (5) berlaku maka kondisi iii) berlaku untuk $0 < \Delta t < \Delta t_1$ atau $\Delta t > \Delta t_2$.

Rangkuman

Dari analisis kestabilan titik kesetimbangan E_1 diperoleh tiga kondisi sebagai berikut :

i. $1 + A + B > 0$ terpenuhi,

ii. $1 - B > 0$ terpenuhi dengan syarat $\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)\left(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha)\right)}$,

iii. $1 - A + B > 0$ terpenuhi dengan tiga kemungkinan, yaitu

1) $\Delta t > 0$ dan $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} < 1$,

2) $\Delta t \neq \Delta t_0$ dan $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} = 1$,

3) $0 < \Delta t < \Delta t_1$ atau $\Delta t > \Delta t_2$ dan $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} > 1$.

Titik Kesetimbangan E_1

Karena ketiga kondisi sebelumnya terpenuhi maka menurut Lemma 2.4, akar-akar karakteristik $|\lambda_{1,2}| < 1$. Menurut Teorema 2.3. titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik.

Kestabilan E_1 konsisten secara dinamik jika dipenuhi $R_0 > 1$ dan salah satu kemungkinan sbb:

1. $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} < 1$ dan $\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha))}$
2. $\frac{\mu R_0}{4(\mu+\alpha)} + \frac{1}{R_0} > 1$ dan $\Delta t < min\left(\Delta t_1, \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha))}\right)$

Selanjutnya akan ditunjukkan Simulasi Numerik SIR Diskrit

Simulasi 1

Nilai Parameter

$\alpha = 10, \beta = 0.1, \delta = 1.5, \mu = 1.6, n = 50$

diperoleh $R_0 = 0.0081 < 1$

Titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik ketika

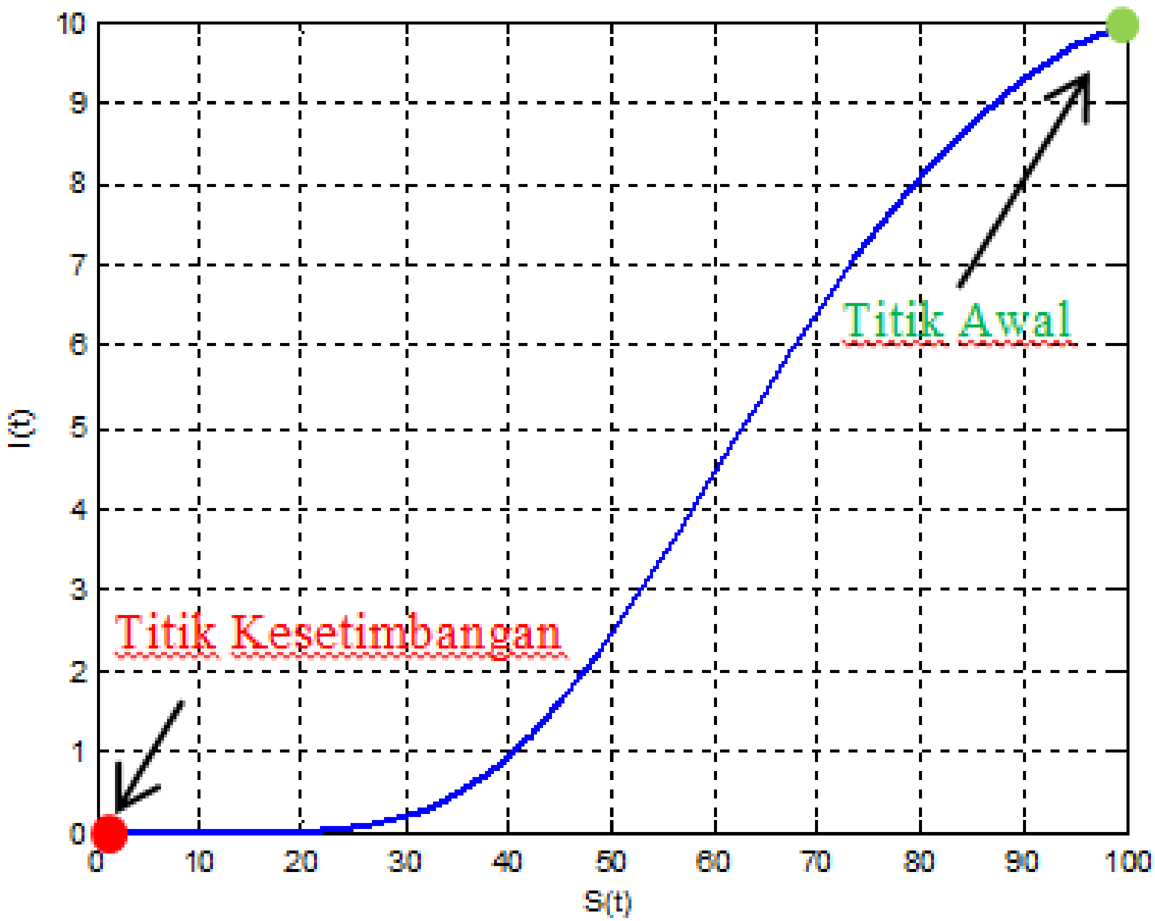
$$R_0 < 1 \text{ dan } \Delta t < min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu+\alpha-\frac{\beta\delta}{\mu}}\right)$$

Nilai Δt yang harus diambil agar E_0 stabil adalah

$$\Delta t < min\left(\frac{2}{\mu}, \frac{2}{\mu + \alpha - \frac{\beta\delta}{\mu}}\right) = min(1.25\,, 0.17) = 0.17$$

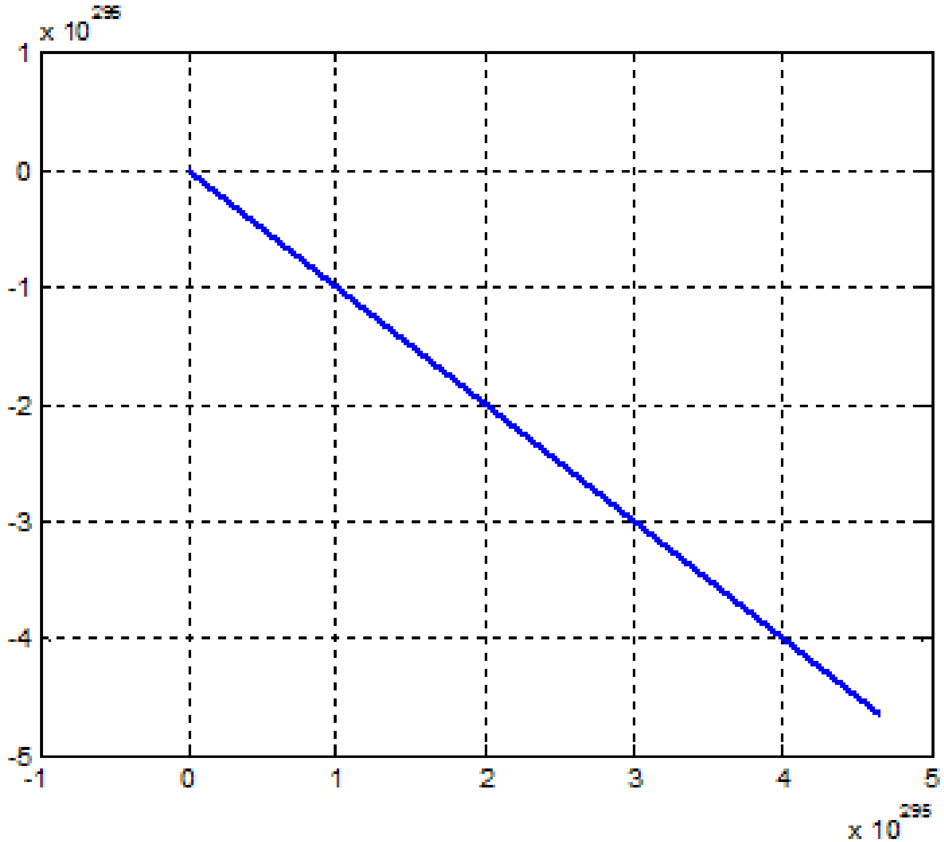
Selanjutnya akan diambil sebarang nilai Δt?

$R_0 < 1$ *dan* $\Delta t = 0.02$



potret fase dengan $\Delta t = 0.02$ dan nilai awal $(S_{0,}I_0) = (100{,}10)$, solusi konvergen menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit $E_0(0.94\ ;\ 0)$

$R_0 < 1$ dan $\Delta t = 0.2$



Potret fase dengan $\Delta t = 0.2$ dan nilai awal yang sama. Titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil karena solusi tidak konvergen menuju titik tersebut

Simulasi 2

Nilai Parameter

$\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\delta = 6$, $\mu = 0.1$, dan $n = 100$

diperoleh $R_0 = 11.76 > 1$

Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik ketika

$$R_0 > 1 \text{ dan } \Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)\big(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha)\big)}$$

Dicari nilai D sebagai berikut

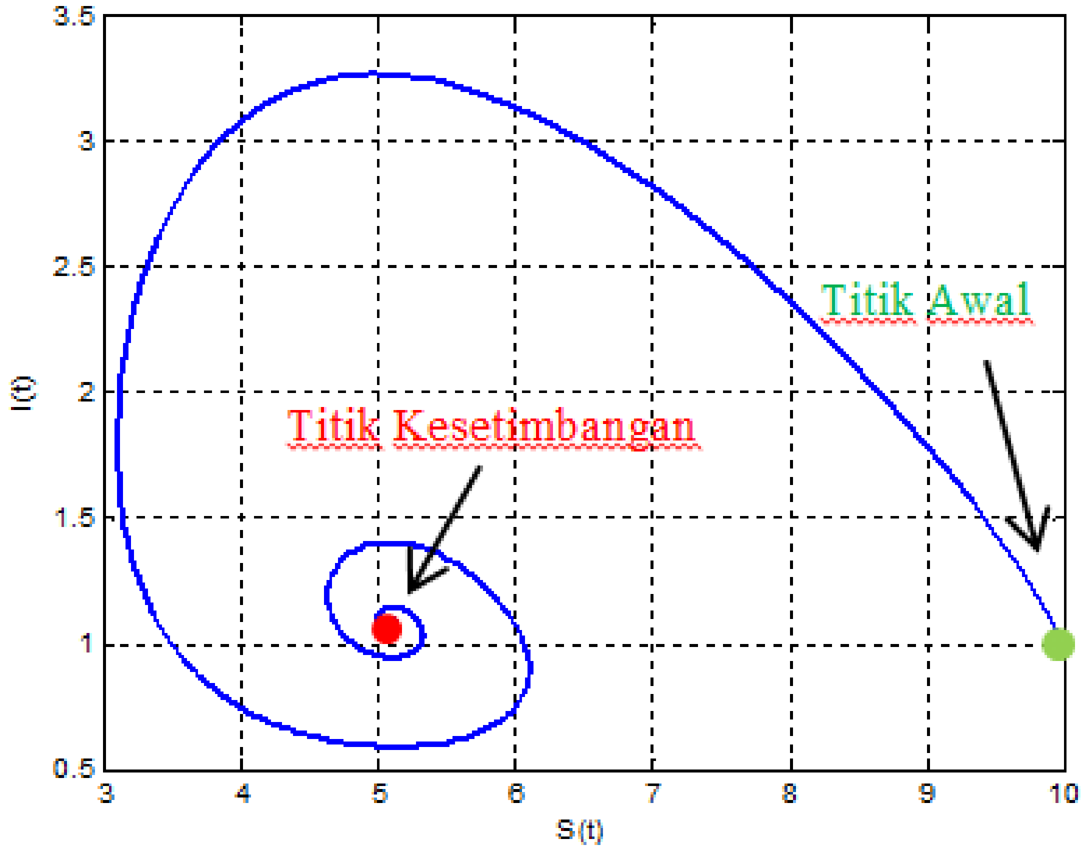
$$D = 4\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16\big(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha)\big) = -82.3037 < 0$$

Nilai Δt yang harus diambil agar E_1 stabil adalah

$$\Delta t < \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)\big(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha)\big)} = 0.2143$$

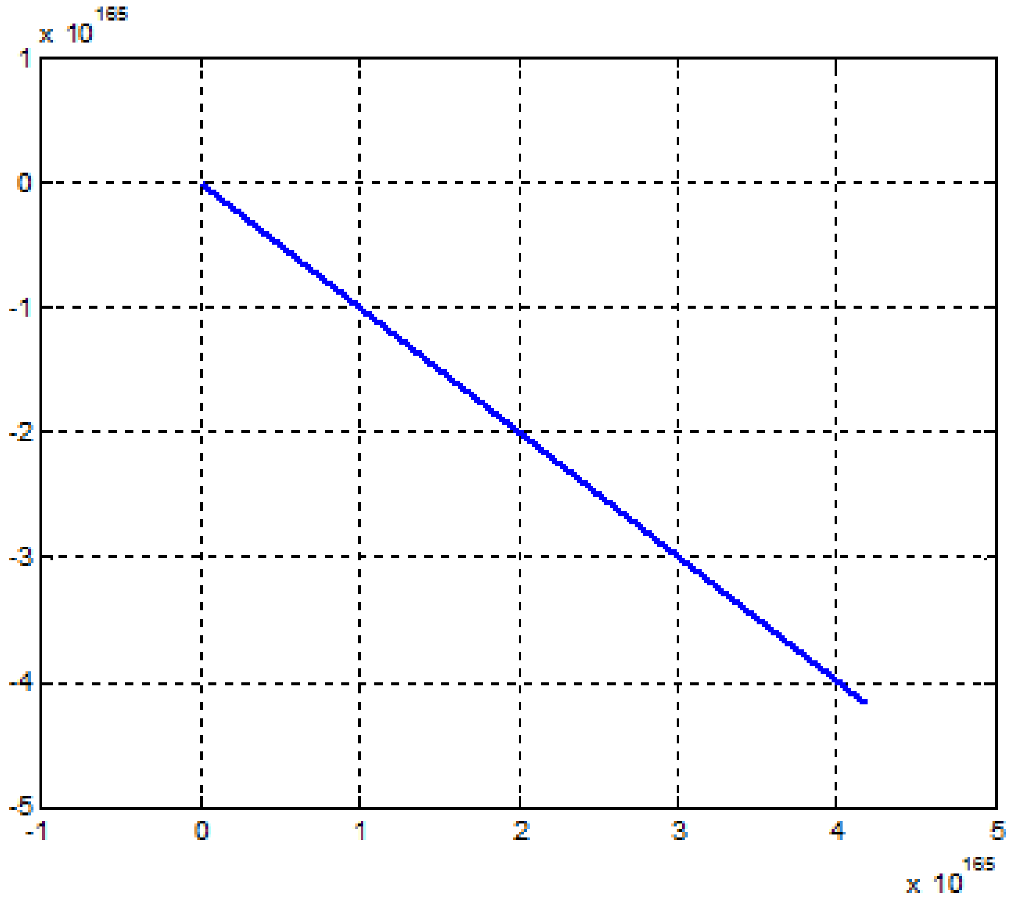
Selanjutnya akan diambil sebarang nilai Δt?

$R_0 > 1,\ D < 1$ dan $\Delta t = 0.02$



Potret fase dengan $\Delta t = 0.02$ dan nilai awal $(S_0, I_0) = (10,1)$, titik kesetimbangan epidemik bersifat stabil asimtotik

$R_0 > 1, \;\; D < 1$ dan $\Delta t = 0.3$



diperlihatkan nilai $\Delta t = 0.3$, titik kesetimbangan epidemik tidak stabil karena solusi tidak konvergen menuju titik kesetimbangan epidemik $E_1 = (5.1 \;, 1.08)$.

Simulasi 3

Nilai Parameter

$\alpha = 6.5$, $\beta = 10$, $\delta = 46.5$, $\mu = 5$, $n = 100$ diperoleh $R_0 = 11.76 > 1$

Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik ketika

$$R_0 > 1 \text{ dan } \Delta t < min\left(\Delta t_1, \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)\big(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha)\big)}\right)$$

Dicari nilai D sebagai berikut

$$D = 4\left(\frac{\beta\delta}{\mu+\alpha}\right)^2 - 16\big(\beta\delta - \mu(\mu+\alpha)\big) = 0.5198 > 0$$

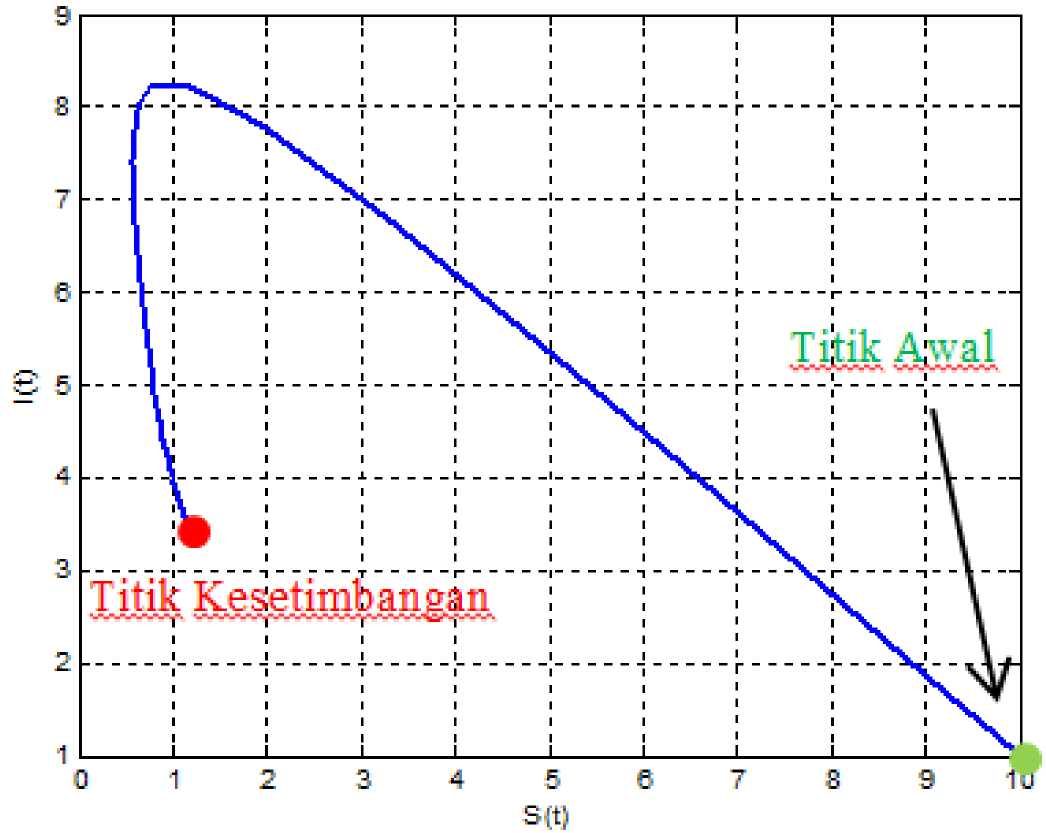
Nilai Δt yang harus diambil agar E_1 stabil adalah

$$\Delta t < min\left(\Delta t_1, \frac{\beta\delta}{(\mu+\alpha)\big(\beta\delta-\mu(\mu+\alpha)\big)}\right) = min(0.0984; 0.0993)$$

$$= 0.0984$$

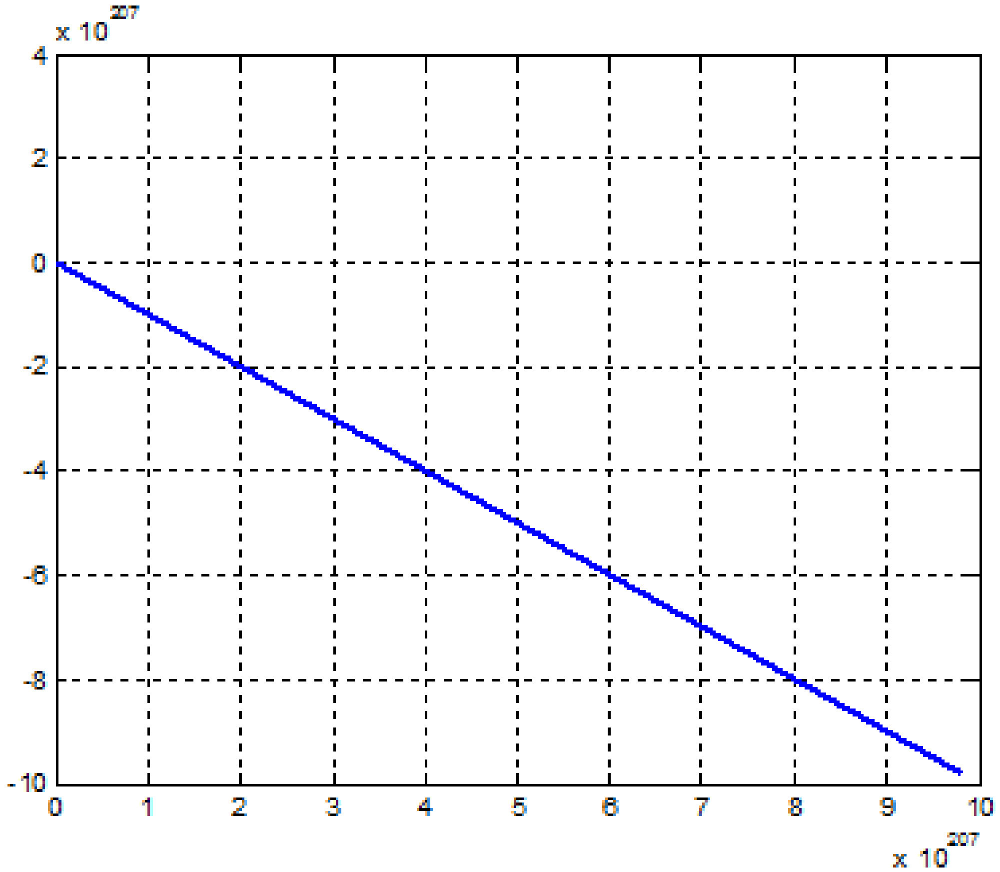
Selanjutnya akan diambil sebarang nilai Δt?

$R_0 > 1$, $D > 1$ dan $\Delta t = 0.033$



untuk $\Delta t = 0.033$, solusi dari sistem dengan nilai awal $\left(S_{0,}I_0\right) = (10,1)$ konvergen menuju ke titik kesetimbangan epidemik $E_1(1.15\ ;\ 3.53)$ dan stabil asimtotik.

$R_0 > 1$, $D > 1$ dan $\Delta t = 0.1$



untuk $\Delta t = 0.3$ dan nilai parameter yang sama, titik kesetimbangan epidemik tidak stabil karena solusi tidak konvergen menuju titik epidemik $E_1(1.15\ ;\ 3.53)$.

Kesimpulan

Dari pembahasan pada bab 3 dapat disimpulkan bahwa:

1. Diskritisasi model SIR menggunakan metode Euler

$$= \Delta t\delta - \Delta t\beta S_n I_n - \Delta t\mu S_n + S_n$$

$$I_{n+1} = \Delta t\beta S_n I_n - \Delta t\mu I_n - \Delta t\alpha I_n + I_n$$

2. Persamaan SIR model diskrit mempunyai dua titik kesetimbangan yang konsisten dengan titik kesetimbangan model SIR kontinu. Kestabilan titik-titik kesetimbangan tak-trivial dari persamaan SIR diskrit tidak konsisten dengan persamaan diferensial SIR, karena masih bergantung nilai ukuran langkah komputasi.

Daftar Pustaka

Bircoff, G dan G.C. rota. 1989. *Ordinary differential equation*. Canada: John Willey & Sons Inc.

Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2005. *Elementary differential equations and boundary value problems*. Eight edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.

Edwards, C.H. dan D.E. Penney. 2001, *Diferential equation and linear algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.

Elaydi, S. 2005. *An introduction to difference equations*. Third edition, Springer. New York.

Mickens, R.E. 2000. *Applications of nonstandard methods for initial value problems*, World Scientific. Singapore.

Robinson, R.C. 2004. *An introduction to dynamical systems contiuous and discrete*. Prentice Hall Education. USA.

Thank You!

Mathemathic

Faculty of Sains