Diktat - Time Series Analysis

Siana Halim

19th January 2006

Prakata

Diktat Time series ini merupakan rangkuman dari buku Box, G.E.P, Jenkins, G.M, *Time Series Analysis, forecasting and Control*, Revised Edition, Holden Day,1976. Tujuan dari diktat ini adalah sebagai alat bantu dalam proses mengajar pada mata kuliah *Teknik Peramalan* yang diberikan sebagai mata kuliah pilihan di Jurusan Teknik Industri - UK. Petra - Surabaya.

Ditujukan untuk komunitas mahasiswa dan pengajar di Indonesia yang tertarik untuk menggunakan diktat ini sebagai bahan perkuliahan dan tidak untuk diperjual belikan.

Surabaya, January 2006
Siana Halim

Daftar Isi

Bab 1

Pendahuluan dan Ringkasan

1.1 Peramalan dengan Time Series

Definisi 1.1. *Time series adalah suatu himpunan pengamatan yang dibangun secara berurutan dalam waktu. Waktu atau periode yang dibutuhkan untuk melakukan suatu peramalan itu biasanya disebut sebagai* lead time *yang bervariasi pada tiap persoalan.*

Berdasarkan himpunan pengamatan yang tersedia maka time series dikatakan kontinu jika himpunan pengamatan tersebut adalah kontinu dan dikatakan diskrit bila himpunan pengatamatan tersebut juga diskrit.

Notasi 1.1. *Dalam diktat ini akan digunakan notasi sebagai berikut :*

- $\hat{Z}_t(l)$ *adalah peramalan yang dibuat dari awal pengamatan* t *dari misalnya data penjualan,* Z_{t+l} *yang terjadi pada* lead time l.

fungsi $\hat{Z}_t(l), l = 1, 2, 3, ...$ *disebut sebagai fungsi peramalan pada awal pengamatan.*

Tujuan yang hendak dicapai adalah $\min \mathbb{E}(Z_{t+l} - \hat{Z}_t(l))^2$ *untuk setiap* $l = 1, 2, ...$

Pembangunan data untuk time series diskrit dapat dilakukan dengan cara 2 macam, yaitu

1. Melalui sampling dari time series kontinu, artinya data yang kontinu diambil sampelnya dalam interval waktu yang sama.

2. Melalui akumulasi suatu peubah dalam suatu waktu tertentu. Misalnya curah hujan yang biasanya diakumulasikan melalui suatu periode waktu tertentu (hari, bulan, dst)

1.2 Model-model Matematika untuk Permasalahan Stokastik dan Deterministik Dinamik

Definisi 1.2. *(Deterministik dan Stokastik Time Series)*

1. *Jika nilai suatu masa depan* (future value) *dari suatu time series dengan tepat dapat ditentukan oleh suatu fungsi matematika, misalnya :*

$$Z_t = \cos(2\pi f t)$$

   maka time series dikatakan sebagai deterministik

2. *Jika nilai suatu masa depan* (future value) *hanya dapat digambarkan dalam suatu distribusi probabilitas maka time series dikatakan sebagai stokastik time series.*

1.2.1 Model-model Stokastik Stasioner dan Tak Stasioner untuk Peramalan

Definisi 1.3. *Proses Stokastik*

1. *Proses stokastik adalah suatu famili dari peubah acak* $\{Z_t, t \in T\}$ *yang didefinisikan pada suatu ruang probabilitas* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

2. *Realisasi adalah fungsi-fungsi* $\{Z(\omega), \omega \in \Omega\}$ *pada* T*, disebut juga jejak cuplikan* (sample path) *dari proses* $\{Z_t, t \in T\}$

1.2.1.1 Stasioneritas

Suatu kelas yang penting dalam model-model stokastik untuk menggambarkan suatu time series adalah apa yang disebut sebagai model-model stasioner yang mengasumsikan bahwa proses tetap berada dalam keseimbangan (*equilibrium*) disekitar konstan mean level. Namun pada kenyataannya time series lebih baik direpresentasikan dalam kelas tak stasioner dan umumnya tak memiliki mean yang alamiah (*natural mean*). Model stokastik yang digunakan untuk peramalan dengan pembobotan secara eksponensial terhadap rerata bergerak (*moving average*) adalah optimal dan merupakan anggota dari kelas proses tak stasioner yang dinamakan ARIMA (*Auto Regressive Integrated Moving Average*).

Definisi 1.4. *Beberapa Operator Sederhana*

Untuk menganalisa suatu time series secara matematik dibutuhkan beberapa operator sederhana sebagai berikut:

1. *Operator geser mundur (*Backward Shift*)*

$$\begin{aligned} B &:= BZ_t = Z_{t-1} \\ B^m Z_t &= Z_{t-m} \end{aligned}$$

2. *Operator geser maju (*Forward Shift*)*

$$\begin{aligned} F &:= FZ_t = Z_{t+1} \\ F^m Z_t &= Z_{t+m} \\ F &= B^{-1} \end{aligned}$$

3. *Operator beda mundur (*Forward Shift*)*

$$\begin{aligned} \Delta &:= \Delta Z_t = Z_t - Z_{t-1} \\ &= (1-B)Z_t \\ F &= B^{-1} \end{aligned}$$

   Invers dari Δ *adalah*

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} &:= S \\ \Delta^{-1} Z_t = SZ_t &= \sum_{j+0}^{\infty} Z_{t-j} \end{aligned}$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}Z_t &= (1-B)^{-1}Z_t \\ &= (1+B+B^2+...)Z_t \\ &= Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + ... \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j}\end{aligned}$$

■

1.2.1.2 Model Filter Linear

Model dengan filter linear didefinisikan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}Z_t &= \mu + a_0 + \psi_1 a_1 + \psi_2 a_2 + ... \\ &= \mu + \Psi(B)a_t\end{aligned} \tag{1.1}$$

- μ adalah parameter yang menentukan level dari proses
- a_t adalah *independent shock*, *shock* adalah suatu bilangan random yang diambil dari suatu distribusi tertentu, biasanya diasumsikan sebagai $\mathcal{N}(0, \sigma_a^2)$
- deret $a_t, a_{t-1}, a_{t-2}, ...$ disebut sebagai *white noise*
- $\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...$ adalah operator linear yang mentransformasikan a_t ke Z_t dan disebut sebagai fungsi transfer dari filter

Gambar 1.1: Ilustrasi dari Filter Linear dari (1.1)

Deret $\psi_1, \psi_2, ...$ adalah bobot, yang secara teoritikal dapat berhingga (*finite*) atau tak berhingga (*infinite*). Jika deret ini berhingga, atau tak berhingga dan konvergen maka filter ini dikatakan **stabil** dan proses Z_t dikatakan **stasioner**, sedangkan parameter μ berarti rata-rata dari variasi proses ini. Namun jika deret ini tidak konvergen maka Z_t dikatakan **tak stasioner** dan μ tidak mempunyai arti, kecuali hanya sebagai titik acuan untuk mengetahui level dari proses.

1.2.1.3 Model *Autoregressive* (AR(p))

Model autoregresif didefinisikan sebagai

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \qquad (1.2)$$
$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

Model ini diberi nama autoregresif karena :
Ingat model linear :

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{X}_1 + \phi_2 \tilde{X}_2 + ... + \phi_p \tilde{X}_p + a$$

model ini menyatakan hubungan antara peubah tak bebas Z terhadap himpunan peubah bebas $X_1, X_2, ..., X_p$ ditambah sebuah suku yang menyatakan error a, model ini sering kali dinyatakan sebagai model regresi dan dikatakan Z diregresikan terhadap $X_1, X_2, ..., X_p$. Pada (1.2) Z diregresikan terhadap nilai-nilai sebelumnya dari peubah Z itu sendiri, karena itulah model ini dikatakan sebagai model autoregresif.

Definisi 1.5. *(Operator* Autoregressive *order p)*

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$$

maka (1.2) dapat dituliskan menjadi :

$$\Phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

Model ini terdiri dari p+2 parameter tak diketahui yaitu $\mu, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_p, \sigma_a^2$. Dalam praktek nilai-nilai ini diestimasi dari data.

Dari model (1.2) di atas dapat dilihat dengan mudah bahwa sebenarnya model AR(p) adalah kasus khusus dari model dengan filter linear (1.1).

Penjelasan :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{t-1} &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-2} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-3} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p-1} + a_{t-1} \\ \tilde{Z}_{t-2} &= \phi_1 \tilde{Z}_{t-3} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-4} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p-2} + a_{t-2} \\ &\vdots\end{aligned} \tag{1.3}$$

Substitusikan (1.3) ke (1.2) maka kita akan dapatkan deret tak berhingga (*infinite series*) dalam a, sehingga akhirnya akan didapat:

$$\begin{aligned}\Phi(B)\tilde{Z}_t = a_t \;\; &\text{ekuivalen dengan} \\ \tilde{Z} = \Psi(B)a_t \;\; &\text{dengan} \;\; \Psi(B) = \Phi^{-1}(B)\end{aligned}$$

Proses autoregresif bisa saja stasioner ataupun tak stasioner. Agar proses ini stasioner maka nilai-nilai Φ harus dipilih sedemikian hingga $\psi_1, \psi_2, ...$ pada $\Psi(B) = \Phi^{-1}(B)$ membentuk deret yang konvergen.

1.2.1.4 Model Moving Average (MA(q))

Model *Moving Average* didefinisikan sebagai :

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - ... - \theta_q a_{t-q} \tag{1.4}$$

$\tilde{Z}_t$ tak bebas linear pada jumlahan berhingga q dari nilai-nilai a sebelumnya.

Definisi 1.6. *Operator* Moving Average *dengan order* q

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$$

Dengan menggunakan operator ini maka (1.4) dapat dituliskan menjadi :

$$\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t$$

Model ini terdiri dari $q+2$ *parameter tak diketahui yaitu,* $\mu, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_q, \sigma_a^2$*, Dalam praktek parameter-parameter ini harus diestimasi dari data.*

1.2.1.5 Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA(p,q))

Model *Autoregressive Moving Average* didefinisikan sebagai berikut :

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - ... - \theta_q a_{t-q} \tag{1.5}$$

atau

$$\Phi(B)\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t$$

Model ini terdiri dari $p+q+2$ parameter tak diketahui yang harus diestimasi dari data. Dalam kenyataan, seringkali suatu time series stasioner dapat direpresentasikan dengan AR, MA atau ARMA dengan p,q tak lebih dari 2.

1.2.1.6 Model-Model Tak Stasioner

Dalam dunia industri dan bisnis kebanyakan time series bersifat tak stasioner dan secara khusus tidak bervariasi di sekitar mean yang tetap. Jika sifat dari series ini masih tampak homogen dalam arti fluktuasi yang terjadi di sekitar level tertentu mungkin berbeda pada waktu yang berbeda pula, maka jika *difference* pada level dilakukan maka fluktuasi satu dengan yang lain akan tampak *mirip*.

Definisi 1.7. *Operator Autoregresif secara umum*

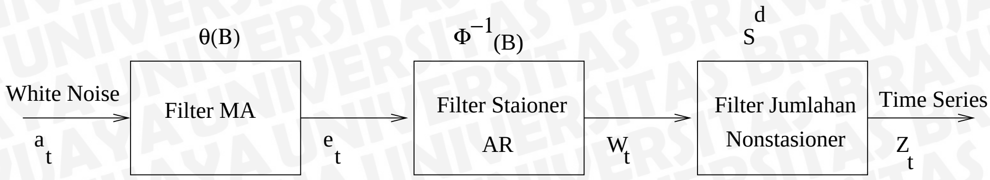
$$\varphi(B) = \Phi(B)(1-B)^d$$

merupakan model umum yang mencerminkan sifat-sifat non-stasioner homogen

$$\begin{aligned} \varphi(B)Z_t = \Phi(B)(1-B)^d Z_t &= \Theta(B)a_t \\ \textit{atau} \quad \Phi(B)W_t &= \Theta(B)a_t \\ \textit{dimana} \quad W_t &= \Delta^d Z_t \end{aligned}$$

Model ini disebut sebagai ARIMA(p,d,q). Dalam praktek umumnya nilai d biasanya 0,1, atau sebanyak-banyaknya 2.

Model ARIMA dapat dibangun dari *white noise* a_t melalui 3 filter operator.



Gambar 1.2: Model ARIMA dibangun dari *white noise* a_t melalui 3 filter operator.

$$
\begin{aligned}
e_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \\
&= \Theta(B) a_t \\
W_t &= \phi_1 W_{t-1} + \phi_2 W_{t-2} + \ldots + \phi_p W_{t-p} + e_t \\
&= \Phi^{-1}(B) e_t \\
Z_t &= S^d W_t \\
&= (1-B)^d W_t
\end{aligned}
$$

Bab 2

Fungsi Autokorelasi

2.1 Proses Stokastik Stasioner

Definisi 2.1. *Stasioner kuat*

Suatu proses stokastik dikatakan sebagai stasioner kuat jika sifat-sifatnya tidak dipengaruhi oleh perubahan titik awal dari observasi t

$$\mathcal{L}(Z_{t_1}, Z_{t_2}, ..., Z_{t_m}) = \mathcal{L}(Z_{t_1+k}, Z_{t_2+k}, ..., Z_{t_m+k}) \quad \forall k \geq 1$$

dengan kata lain distribusi-distribusi yang berlaku invarian terhadap pergeseran waktu.

2.1.1 Mean dan Varians dari Proses Stokastik

Jika $m = 1$, asumsi stasioner berarti distribusi probabilitas $p(Z_t)$ adalah sama untuk seluruh waktu t dan dapat dituliskan sebagai $p(Z)$, hal ini berarti proses stokastik memiliki mean konstan

$$\mu = \mathbb{E}[Z_t] = \int_{-\infty}^{\infty} Zp(Z)dZ$$

yang mendefinisikan level dari fluktuasi proses tersebut dan varians terbatas (*bounded*)

$$\sigma_Z^2 = \mathbb{E}[(Z_t - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (Z_t - \mu)^2 p(Z)dZ$$

yang mengukur penyebaran di sekitar levelnya.

Nilai estimasi dari kedua statistik di atas adalah :

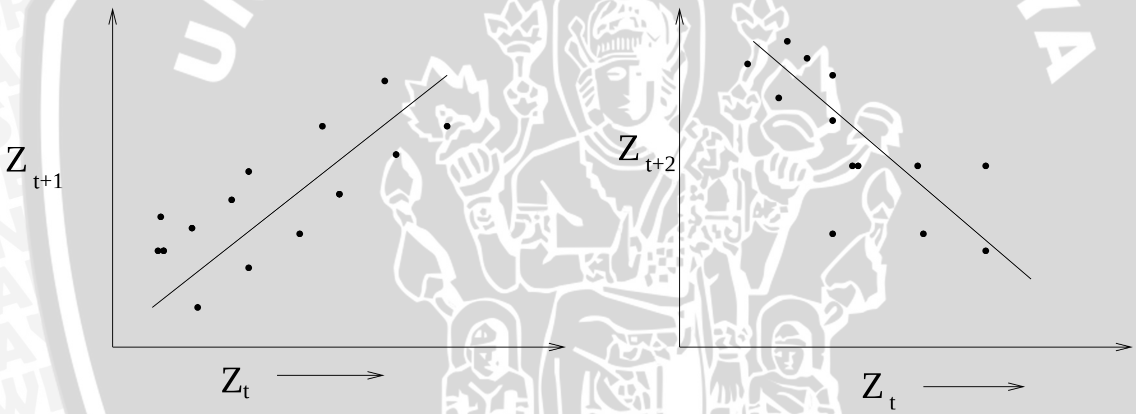
$$\hat{\mu} = \bar{Z} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} Z_t$$

$$\hat{\sigma^2} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(Z_t - \bar{Z})^2$$

2.1.2 Koefisien-koefisien dari Autokovarians dan Autokorelasi

Asumsi stasioneritas berarti juga distribusi probabilitas gabungan (*joint probability distribution*) $p(Z_{t_1}, Z_{t_2})$ adalah sama untuk setiap t_1, t_2 dengan interval konstan. Hal ini berarti jika *scatter diagram* dari time series ini di plot, maka nilai-nilai sekitar (*neighbourhood points*) dari time series tersebut akan berkorelasi.

Contoh 2.1. *Dari suatu data tertentu didapat plot* scatter diagram *sebagai berikut*



Gambar 2.1: *Scatter Plot Diagram*

Definisi 2.2. *Autokovarians, Autokorelasi*

Kovarians antara Z_t dan Z_{t+k} yang dipisahkan oleh k interval waktu disebut sebagai auto kovarians pada lag k dan didefinisikan sebagai barikut:

$$\gamma_k = cov[Z_t, Z_{t+k}] = \mathbb{E}[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]$$

Secara sama, autokorelasi pada lag k didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_k = \frac{\mathbb{E}[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sqrt{\mathbb{E}[(Z_t - \mu)^2]\mathbb{E}[(Z_{t+k} - \mu)^2]}}$$
$$= \frac{\mathbb{E}[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)]}{\sigma_Z^2}$$

Karena prose stasioner, maka varians $\sigma_Z^2 = \gamma_0$ *pada waktu* t *adalah sama untuk waktu* $t + k$*, maka autokorelasi pada lag* k *adalah :*

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad maka \quad \rho_0 = 1$$

2.1.3 Stasioneritas pada Fungsi Linear

Definisi 2.3. *Proses Gaussian*

Suatu proses $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *dikatakan Gaussian jika* $(Z_{t_1}, ..., Z_{t_m})$ *berdistribusi normal.*

Definisi 2.4. *Stasioner Lemah*

Suatu time series $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *dikatakan stasioner lemah jika:*

1. $\mathbb{E}Z_t^2 < \infty$
2. $\mathbb{E}Z_t = \mu$ *yang berarti bahwa nilai rata-ratanya tidak tergantung pada waktu, konstan sepanjang waktu.*
3. $Cov(Z_t, Z_{t+s}) = \gamma_s$ *adalah kovarians*

Catatan 2.1. *Kadangkala* Z_t *tidak stasioner tetapi dapat dibuat stasioner dengan melakukan transformasi sederhana.*

Contoh 2.2.

$$\begin{aligned}
Y_t &= \alpha t + X_t, \quad X_t \quad stasioner \\
Z_t &= Y_t - Y_{t-1} \\
&= \alpha t + X_t - (\alpha(t-1) + X_{t-1}) \\
&= X_t - X_{t-1} + \alpha \quad adalah\ stasioner
\end{aligned}$$

Proposisi 2.1. *Misalkan* $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *adalah proses Gaussian lemah dengan* $\mu = \mathbb{E}Z_t, \gamma_s = Cov(Z_t, Z_{t+s})$ *maka:*

1. $(Z_{t_1}, ..., Z_{t_n}) \sim \mathcal{N}_n(\bar{\mu}, \Gamma_n)$ *dimana* $\bar{\mu} = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$

2. $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *stasioner kuat*

Bukti: Jika $\{Z_t, t \in \mathbb{Z}\}$ adalah suatu proses Gaussian stasioner maka $\{Z_t\}$ adalah stasioner kuat karena untuk setiap $n \in \{1, 2, ...\}$ dan $h, t_1, t_2, ..., \in \mathbb{Z}$, peubah acak $\{Z_{t_1}, ..., Z_{t_n}\}$ dan $\{Z_{t_1+h}, ..., Z_{t_n+h}\}$ memiliki mean dan matriks autokovarians yang sama, hal ini berarti memiliki distribusi yang sama. ■

2.2 Matriks Positive Definit dan Matriks Autokovarians

Matriks autokovarians yang bersesuaian dengan proses stasioner untuk sebuah observasi $(Z_1, Z_2, ..., Z_n)$ yang dibuat pada n waktu secara berturutan adalah

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_{n-2} \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \gamma_{n-2} & \gamma_{n-3} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix}$$

adalah matriks autokovarians, matriks ini simetrik dengan elemen-elemen konstan pada sebarang diagonalnya.

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \sigma_Z^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \rho_{n-3} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_n^2 \varrho_n \end{aligned}$$

ϱ_n adalah matriks autokorelasi.

Ambil sebarang fungsi linear dari peubah acak $Z_t, Z_{t-1}, ..., Z_{t-n+1}$

$$L_t = l_0 Z_t + l_1 Z_{t-1} + ... + l_n Z_{t-n+1}$$

karena $Cov[Z_i, Z_j] = \gamma_{[i-j]}$ untuk proses stasioner, maka

$$Var[L_t] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} l_i l_j \gamma_{[j-i]} > 0$$

jika tak semuanya nol.

Berarti Γ_n, ϱ_n adalah matriks positif definit untuk sebarang proses stasioner. Perlu diingat juga bahwa pada matriks positif definit, determinan dari seluruh minor-minor utamanya lebih besar dari nol. Dengan menggunakan sifat nilai-nilai ρ pada ϱ_n secara khusus dapat diamati nilai-nilai determinan sebagai berikut: Untuk $n = 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

Hal ini berarti : $1 - \rho_1^2 > 0, -1 < \rho_1 < 1$

Untuk $n = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_1 & \rho_2 & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

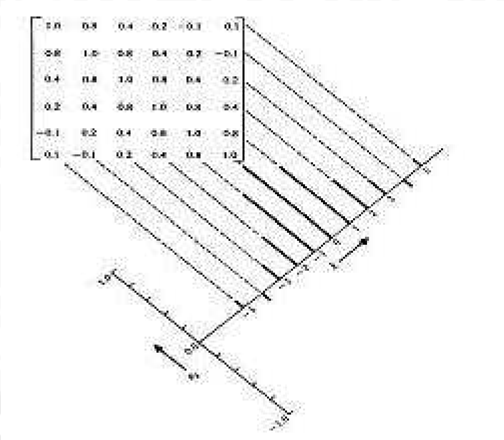
Hal ini berarti : $-1 < \rho_1 < 1, \quad -1 < \rho_2 < 1, \quad -1 < \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} < 1$

2.3 Fungsi-fungsi Autokovarians dan Autokorelasi

Telah diketahui bahwa koefisien autokovarians γ_k pada lag k, mengukur kovarians antara 2 nilai Z_t dan Z_{t+k}, pada jarak k. Plot antara γ_k vs k disebut sebagai fungsi autokovarians $\{\gamma_k\}$ dari proses.

Catatan 2.2. .

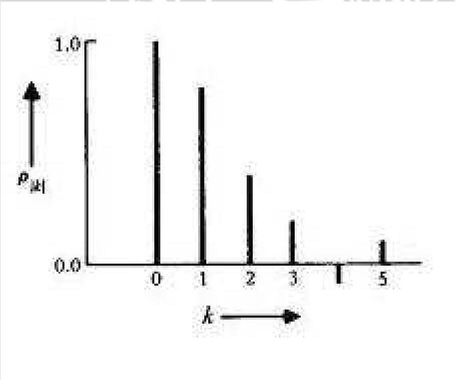
1. *fungsi autokorelasi tak berdimensi, berarti terbebas dari skala pengukuran dari time series*



Gambar 2.2: Illustrasi dari fungsi autokovarians

2. *karena* $\gamma_k = \rho_k \sigma_z^2$ *berarti jika fungsi autokorelasi* $\{\rho_k\}$ *diketahui dan varians dari proses* σ_z^2 *maka fungsi autokovariansnya diketahui juga.*

karena $\rho_k = \rho_{-k}$ maka $\{\rho_k\}$ simetri di sekitar nol, dalam praktek kita hanya perlu mengambarkan fungsi positifnya saja



Gambar 2.3: Illustrasi dari fungsi autokorelasi, kadang disebut juga sebagai korelogram

2.4 Estimasi dari Fungsi-Fungsi Autokovarians dan Autokorelasi

Diberikan $Z_1, Z_2, ..., Z_N$ adalah N data hasil observasi. Estimasi yang paling memuaskan untuk k lag autokorelasi ρ_k adalah :

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{C_k}{C_0}$$
$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z}); \quad k = 0, 1, 2, ..., K$$

dimana $C_k = \hat{\gamma}_k$ merupakan estimasi dari autokovarians, dan $\bar{Z}$ adalah estimasi dari mean dari autokovarians.

Dalam praktek untuk mendapatkan estimasi fungsi autokorelasi yang berguna diperlukan sedikitnya 50 observasi dan estimasi dari autokorelasi r_k akan dihitung untuk $k = 0, 1, ..., K$ dimana K tak lebih kecil dari katakanlah $N/4$

2.5 Standar Error dari Estimasi Autokorelasi

Perlu untuk menguji apakah ρ_k secara efektif akan sama dengan nol setelah lag tertentu

$$Var(r_n) \sim \frac{1}{N}\sum_{v=-\infty}^{\infty}\{\rho_v^2 + \rho_{v+k}\rho_{v-k} - 4\rho_k\rho_{v-k} + 2\rho_v^2\rho_k^2\} \tag{2.1}$$

adalah varians dari estimasi autokorelasi koefisien dari stationer normal jika $\rho_k = \phi^{|k|}, (-1 < \phi < 1)$ maka fungsi autokorelasi akan *damps out* secara eksponensial dan (2.1) akan menjadi:

$$Var(r_n) \sim \frac{1}{N}\left[\frac{(1+\phi^2)(1-\phi^{2k})}{1-\phi^2} - 2k\phi^{2k}\right] \tag{2.2}$$

Secara khusus

$$Var(r_1) \sim \frac{1}{N}(1-\phi^2)$$

Untuk sebarang proses dimana autokorelasi $\rho_v = 0$ untuk $v > q$ maka

$$\begin{aligned} Var(r_k) &\sim \frac{1}{N}\sum_{v=-\infty}^{\infty}\{\rho_v^2 + \rho_{v+k}\rho_{v-k} - 4\rho_k\rho_{v-k} + 2\rho_v^2\rho_k^2\} \\ &= 0 \quad k > q \\ &\sim \frac{1}{N}\{1 + 2\sum_{v=1}^{q}\rho_v^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

jika $k \leftarrow \infty$, $\phi \approx 1$

$$\lim_{k\to\infty} Var(r_k) \approx \frac{1}{N}\left[\frac{1+\phi^2}{1-\phi^2}\right]$$

dalam praktek gantilah ρ_k dengan r_k dan $\sqrt{var(r_k)}$ pada lag yang besar merupakan standard error.

Secara sama akan didapat:

$$Cov[r_k, r_{k+s}] \sim \frac{1}{N}\sum_{v=-\infty}^{\infty}\rho_v\rho_{v+s} \tag{2.4}$$

Bab 3

Model-Model Linear Stasioner

Asumsi yang digunakan pada model linear stokastik adalah *Time Series* dibangun dari kumpulan linear dari *random shock*. Pada masalah-masalah praktis, digunakan model-model dengan jumlah parameter yang sangat hemat dan ini diwujudkan dalam jumlah suku dari model *autoregresive* ataupun *moving average* yang pendek.

3.1 Proses Linear Umum

3.1.1 Dua bentuk yang ekuivalen dari proses linear

Pada sub bab 1.2.1 telah didiskusikan representasi dari proses stokastik sebagai output dari filter linear, dengan inputnya adalah *white noise* a_t, yaitu:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots \\ &= a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j a_{t-j} \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana $\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$ adalah deviasi proses dari nilai awalnya atau dari meannya, jika proses stasioner.

Proses *white noise* a_t dapat dianggap sebagai deret dari *shocks* yang mengendalikan sistem, yang terdiri dari barisan-barisan peubah acak yang tak berkorelasi dengan mean nol dan varians konstan, yaitu

$$\mu = \mathbb{E}[a_t] = 0 \quad Var[a_t] = \sigma_a^2$$

karena peubah acak a_t tak berkorelasi, maka fungsi autokovariansnya adalah:

$$\gamma_k = \mathbb{E}[a_t a_{t+k}] = \begin{cases} \sigma_a^2, & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

sedangkan fungsi autokorelasinya adalah:

$$\rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

Model (3.1) menunjukkan bahwa, pada kondisi yang sesuai, $\tilde{Z}_t$ merupakan jumlahan berbobot dari nilai-nilai $\tilde{Z}$ sebelumnya ditambah *shock* a_t, yaitu:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= \pi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Z}_{t-2} + ... + a_t \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j \tilde{Z}_{t-j} + a_t \end{aligned} \tag{3.2}$$

Relasi antara bobot ψ dan bobot π

Dengan menggunakan operator geser mundur $B^j Z_t = Z_{t-j}$ maka model (3.1) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j\right) a_t \\ &= \Psi(B) a_t \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} \Psi(B) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j B^j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \quad \text{dengan} \quad \Psi_0 = 1 \end{aligned}$$

$\Psi(B)$ disebut sebagai fungsi transfer dari filter linear $\tilde{Z}_t$ terhadap a_t atau dapat pula dianggap sebagai fungsi pembangkit bobot Ψ.

Secara sama (3.2) dapat dituliskan sebagai:

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j\right) \quad \tilde{Z}_t = a_t$$
$$\Pi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

dengan $\Pi(B) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j$ adalah fungsi pembangkit dari bobot π.

Jika kedua sisi dikalikan dengan $\Psi(B)$, akan didapat

$$\Psi(B)\Pi(B)\tilde{Z}_t = \Psi(B)a_t$$
$$\text{berarti: } \Psi(B)\Pi(B) = 1$$
$$\Pi(B) = \Psi^{-1}(B)$$

Contoh 3.1. *Lihat MA(1) :*

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t$$

berarti

$$\psi_1 = -\theta; \psi_j = 0 \quad \textit{untuk} \quad j > 1$$
$$(1 - \theta B)^{-1}\tilde{Z}_t = a_t \quad \textit{untuk} \quad |\theta| < 1$$
$$(1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \theta^3 B^3 + ...)\tilde{Z}_t = a_t$$
$$\tilde{Z}_t = -\theta\tilde{Z}_{t-1} - \theta^2\tilde{Z}_{t-2} - \theta^3\tilde{Z}_{t-3} - ... + a_t$$

untuk model ini $\pi_j = -\theta^j$

3.1.2 Fungsi Pembangkit Autokovarians dari Proses Linear

Perangkat analisa data yang digunakan untuk menganalisa model adalah fungsi autokorelasi, untuk itulah fungsi autokorelasi ini sangatlah perlu untuk diketahui.

Fungsi Autokovarians dari proses linear (3.1) diberikan sebagai berikut :

$$\gamma_k = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \psi_{j+k}$$

bila $k = 0$

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \tag{3.3}$$

adalah varians dari proses.

Berarti bila proses ini memiliki $\sigma_z^2 < \infty$ (varians yang finit) maka bobot ψ_j haruslah merupakan nilai-nilai yang menurun dengan cukup cepat sedemikian hingga deret $\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2$ konvergen.

Autokovarians dari proses linear dapat pula diperoleh melalui fungsi pembangkit autokovarians (*autocovariance generating function*)

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \tag{3.4}$$

perlu dicatat bahwa γ_0, varians dari proses adalah koefisien dari $B^0 = 1$, sedangkan γ_k, autokovarians pada lag k adalah koefisien dari B^j dan $B^{-j} = F^j$.

Dengan suatu perhitungan didapat:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \Psi(B)\Psi(B^{-1}) = \sigma_a^2 \Psi(B)\Psi(F) \tag{3.5}$$

Contoh 3.2. *Misalkan :*

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= a_t - \theta a_{t-1} = (1 - \theta B)a_t \\ \Psi(B) &= 1 - \theta B \end{aligned}$$

substitusika ken (3.5) akan didapat :

$$\begin{aligned} \gamma(B) &= \sigma_a^2 (1 - \theta B)(1 - \theta B^{-1}) \\ &= \sigma_a^2 \{-\theta B^{-1} + (1 + \theta^2) - \theta B\} \end{aligned}$$

dengan melakukan perbandingan dengan (1.4) didapat :

$$\gamma_{-1} B^{-1} + \gamma_0 + \gamma_1 B + \gamma_2 B^2 + ... = \sigma_a^2 \{-\theta B^{-1} + (1 + \theta^2) - \theta B\}$$

berarti:

$$\gamma_0 = (1+\theta^2)\sigma_a^2$$
$$\gamma_1 = -\theta\sigma_a^2$$
$$\gamma_k = 0 \quad k \geq 2$$

3.1.3 Kondisi-kondisi stasioner dan dapat diinverskan pada proses linear

Definisi 3.1. *Stationeritas:*

- *Jika deret pada persamaan (3.3) konvergen proses memiliki varians yang finit.*
- *Autokovarians dan autokorelasi harus memenuhi kondisi-kondisi tertentu (lihat subbab 2.2)*
- *Untuk proses linear kondisi ini dapat dirangkum dalam suatu kondisi yaitu deret* $\Psi(B)$, *fungsi pembangkit dari bobot harus konvergen untuk* $|B| \leq 1$ *(yaitu berada di dalam unit lingkaran)*

Definisi 3.2. *Dapat diinverskan (*invertibility*) :*

Kondisi dapat diinverskan independen terhadap kondisi stasioneritas dan dapat digunakan juga pada model-model yang tak stasioner.

Ide dasar dari invertibility *adalah:*

Misalkan:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_t &= (1-\theta B)a_t\\ a_t &= (1-\theta B)^{-1}\tilde{Z}_t\\ &= (1+\theta B+\theta^2B^2+...+\theta^kB^k)(1-\theta^{k+1}B^{k+1})^{-1}\tilde{Z}_t\end{aligned}$$

berarti:

$$\tilde{Z}_t = -\theta\tilde{Z}_{t-1} - \theta^2\tilde{Z}_{t-2} - ... - \theta^k\tilde{Z}_{t-k} + a_t - \theta^{k+1}\tilde{Z}_{t-k-1} \tag{3.6}$$

Jika $|\theta| \geq 1$ *maka deviasi pada persamaan (3.6) bergantung pada* $\tilde{Z}_{t-1}, \tilde{Z}_{t-2}, ..., \tilde{Z}_{t-k}$ *dengan nilai bobot* θ *meningkat bila* k *meningkat, untuk menghindari hal ini maka perlu disyaratkan bahwa* $|\theta| < 1$ *sehingga dapat dikatakan bahwa deret tersebut dapat diinverskan.*

3.1.4 *Autoregresive* dan *Moving Average Proses*

AR(p)

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \quad (3.7)$$

dalam praktek seringkali dijumpai

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + a_t$$
$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

Jika (3.7) ditulis ulang, maka persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned} (1 - \phi_1 B - -\phi_2 B^2 - ... - -\phi_p B^p)\tilde{Z}_t &= a_t \quad \text{atau} \\ \Phi(B)\tilde{Z}_t &= a_t \quad \text{berarti} \qquad (3.8) \\ \tilde{Z}_t &= \Phi^{-1}(B) a_t \end{aligned}$$

AR proses dapat dipikirkan sebagai output dari $\tilde{Z}_t$ dari proses linear dengan fungsi transfer $\Phi^{-1}(B)$, bila inputnya adalah *white noise* a_t.

MA(q)

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - ... - \theta_q a_{t-q} \quad (3.9)$$

dalam praktek seringkali dijumpai

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$
$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

Jika (3.9) ditulis ulang, maka persamaan ini dapat ditulis dalam bentuk:

$$\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q) a_t$$
$$\tilde{Z}_t = \Theta(B) a_t \quad (3.10)$$

Proses MA dapat dipikirkan sebagai output $\tilde{Z}_t$ dari filter linear dengan fungsi transfer $\Theta(B)$, bila inputnya adalah *white noise* a_t

ARMA(p,q)

Telah diketahui bahwa proses MA yang berhingga(*finite*) adalah

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (1 - \theta_1 B)a_t, \quad |\theta_1| < 1$$

dapat dituliskan sebagai proses AR yang tak berhingga (*infinite*):

$$\tilde{Z}_t = -\theta_1 \tilde{Z}_{t-1} - \theta_1^2 \tilde{Z}_{t-2} - ... + a_t$$

karena itu, jika suatu proses adalah MA(1) maka akan didapat model AR yang tak hemat (tidak parsimoni) dalah hal jumlah parameternya. Sebaliknya AR(1) tak dapat secara hemat direpresentasikan dengan menggunakan proses MA. Secara praktis untuk mendapatkan jumlah parameter yang hemat, kadangkala diperlukan penggunaan kedua buah model secara bersamaan yaitu:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - ... - -\theta_q a_{t-q} \quad \text{atau} \tag{3.11}$$

$$\Phi(B)\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t \tag{3.12}$$

Contoh 3.3. *ARMA(1,1) dapat dituliskan sebagai:*

$$\tilde{Z}_t - \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

pada model ini (3.12) dapat dituliskan sebagai:

$$\tilde{Z}_t = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)a_t$$

Berarti proses ARMA dapat dipikirkan sebagai output dari $\tilde{Z}_t$ dari filter linear, dengan fungsi transfer adalah rasio dari kedua polinomial $\Theta(B)$ dan $\Phi(B)$, bila inputnya adalah *white noise* a_t.

3.2 Proses-Proses Autoregresif

3.2.1 Kondisi-kondisi stasioner untuk proses - AR

Diketahui proses AR(p) adalah :

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \quad \text{atau}$$
$$(1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p)\tilde{Z}_t = \Phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

harus memenuhi suatu kondisi tertentu untuk dapat dikatakan sebagai proses stasioner.

Ilustrasi : AR(1)

$$\begin{aligned}(1 - \phi_1 B)\tilde{Z}_t &= a_t \\ \tilde{Z}_t &= (1 - \phi_1 B)^{-1} a_t \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j a_{t-j}\end{aligned}$$

berarti

$$\Psi(B) = (1 - \phi_1 B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi_1^j B^j \tag{3.13}$$

telah diketahui pada sub-bab 3.1.3 agar sifat stasioneritas terpenuhi maka $\Psi(B)$ harus konvergen untuk $|B| \leq 1$ yang berarti parameter ϕ_1 pada proses AR(1) harus memenuhi kondisi $|\phi_1| < 1$ untuk menjamin stasioneritasnya.

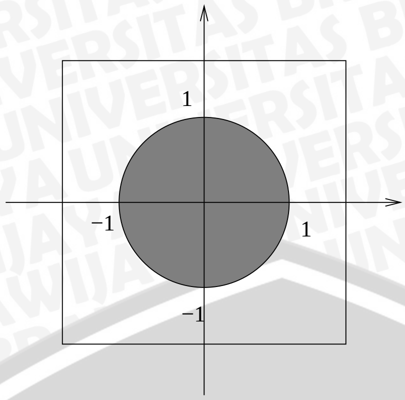
Karena akar-akar dari $1 - \phi_1 B = 0$ adalah $B = \phi_1^{-1}$, maka kondisi ini ekivalen dengan menyatakan akar-akar dari $1 - \phi_1 B = 0$ harus terletak di luar lingkaran satuan.

Secara umum: proses AR(p) dapat dinyatakan sebagai

$$\tilde{Z}_t = \Phi^{-1}(B) a_t$$

Secara teoritik $\Phi(B)$ dapat difaktorkan menjadi :

$$\Phi(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B)(1 - G_3 B)...(1 - G_p B)$$



Gambar 3.1: *Akar-akar persamaan* $1 - \phi_1 B = 0$ *harus terletak di luar lingkaran satuan*

berarti

$$\tilde{Z}_t = \Phi^{-1}(B)a_t = \sum_{i=1}^{p} \frac{K_i}{1 - G_i B} a_t$$

Persamaan $\Psi(B) = \Phi^{-1}B$ akan merupakan deret yang konvergen bila $|B| < 1$, berarti $|G_i| < 1 \quad \forall i = 1, 2, ..., p$. Secara ekivalen berarti akar-akar $\Phi(B) = 0$ harus terletak di luar lingkaran satuan. Persamaan $\Phi(B) = 0$ dikatakan sebagai persamaan karakteristik dari proses.

Karena deret

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$$

adalah finit, maka kita tidak memerlukan lagi persyaratan pada parameter-parameter dari proses AR untuk menjamin *invertibility.*

3.2.2 Fungsi Autokorelasi dari proses AR

Fungsi Autokovarians dari proses AR stasioner adalah:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + ... + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t \tag{3.14}$$

kalikan persamaan (3.14) dengan $\tilde{Z}_{t-k}$ lalu ambillah nilai ekspektasinya, maka:

$$\mathbb{E}\tilde{Z}_{t-k}\tilde{Z}_t = \mathbb{E}\phi_1 \tilde{Z}_{t-k}\tilde{Z}_{t-1} + \mathbb{E}\phi_2 \tilde{Z}_{t-k}\tilde{Z}_{t-2} + ... + \mathbb{E}\phi_p \tilde{Z}_{t-k}\tilde{Z}_{t-p} + \tilde{Z}_{t-k}a_t \tag{3.15}$$

Perhatikan bahwa $\mathbb{E}\tilde{Z}_{t-k}a_t = 0$ karena a_t adalah peubah random yang tidak berkorelasi, berarti (3.15) dapat dituliskan menjadi :

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} + ... + \phi_p\gamma_{k-p} \quad k > 0 \tag{3.16}$$

Jika (3.16) dibagi dengan γ_0 maka akan didapat fungsi autokorelasi, yaitu :

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + ... + \phi_p\rho_{k-p} \quad k > 0$$

Substitusikan $k = 1, 2, ..., p$ sehingga didapat:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= \phi_1 + \phi_2\rho_1 + ... + \phi_p\rho_{p-1} \\
\rho_2 &= \phi_1\rho_1 + \phi_2 + ... + \phi_p\rho_{p-2} \\
&\vdots \\
\rho_p &= \phi_1\rho_{p-1} + \phi_2\rho_{p-2} + ... + \phi_p
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Sistem persamaan (3.17) ini disebut sebagai sistem persamaan *Yule Walker* Jika

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} \varrho_p = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix} \mathbf{P}_p = \begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{p-2} \\ \vdots & & & & \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

maka (3.17) dapat dituliskan menjadi :

$$\begin{aligned}
\varrho_p &= \mathbf{P}_p\Phi \\
\Phi &= \mathbf{P}_p^{-1}\varrho_p
\end{aligned}$$

berarti

$$\hat{\Phi} = \hat{\mathbf{P}}_p^{-1}\hat{\varrho}_p$$

$$\hat{\Phi} = \mathbf{R}_p^{-1}r_p$$

adalah estimasi dari parameter-parameter dari proses AR.

Varians

Bila $k = 0$ berarti

$$\mathbb{E}(\tilde{Z}_{t-k}a_t) = \mathbb{E}(\tilde{Z}_t a_t) = \mathbb{E}(a_t^2) = \sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_{-1} + \phi_2\gamma_{-2} + ... + \phi_P\gamma_{-p} + \sigma_a^2$$

$$\gamma_0 = \sigma_Z^2 \qquad \gamma_k = \gamma_{-k}$$

Berarti

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1\rho_1 - \phi_2\rho_2 - ... - \phi_p\rho_p}$$

$$\hat{\sigma}_Z^2 = \frac{\hat{\sigma}_a^2}{1 - \phi_1 r_1 - \phi_2 r_2 - ... - \phi_p r_p}$$

adalah estimasi dari varians proses.

3.2.3 Proses AR(1) - Proses Markov

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} \quad k > 0$$

$$\rho_0 = 1$$

$$\rho_k = \phi_1^k \quad k \geq 0$$

adalah fungsi autokorelasi dari proses AR(1)

Catatan 3.1. *Fungsi autokorelasi ini akan menuju 0 secara eksponensial bila* $\phi_1 > 0$
Tetapi ia akan menuju 0 dan berosilasi bila $\phi_1 < 0$
Secara khusus $\rho_1 = \phi_1$ *berarti autokorelasi dapat ditunjukkan dari nilai parameter* ϕ_1

Varians Proses:

$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1\phi_1} = \frac{\sigma_a^2}{1 - \phi_1^2}$$

3.2.4 Proses AR(2)

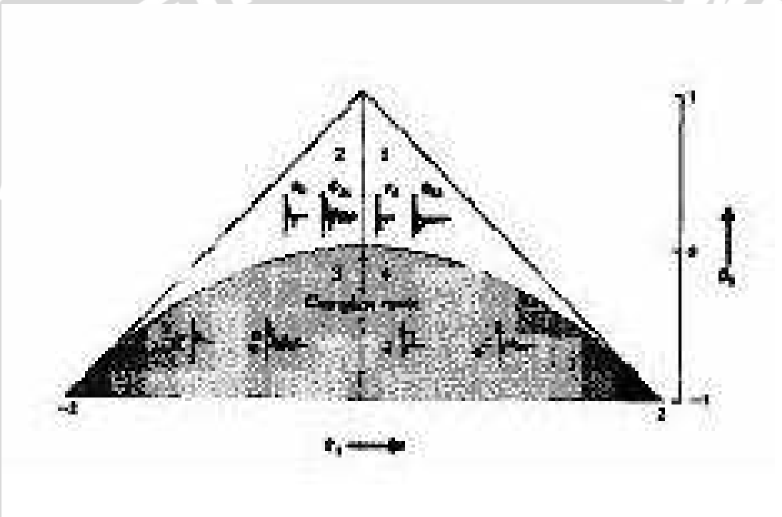
$$\tilde{Z}_t = \phi_1\tilde{Z}_{t-1} + \phi_2\tilde{Z}_{t-2} + a_t$$

untuk proses stasioner, akar-akarnya :

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1(B) - \phi_2 B^2 = 0$$

harus terletak di luar lingkaran satuan. Hal ini berarti pula bahwa parameter ϕ_1 dan ϕ_2 harus terletak di daerah segitiga yaitu :

$$\phi_1 + \phi_2 < 1$$
$$\phi_1 - \phi_2 < 1$$
$$-1 < \phi_2 < 1$$



Gambar 3.2: *Akar-akar persamaan* $1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0$ *harus terletak di luar lingkaran satuan*

Fungsi Autokorelasi

Pada Subbab 3.2.2 fungsi autokorelasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + ... + \phi_p \rho_{k-p} \quad k > 0 \tag{3.18}$$

Untuk AR(2)

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k > 0$$

dengan nilai awal $\rho_0 = 1$ dan $\rho_1 = \phi_1(1 - \phi_2)$

Analisis

Andaikan (3.18) dapat ditulis dalam bentuk

$$\Phi(B)\rho_k = 0$$

dimana $\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - ... - \phi_p B^p$ (dalam hal ini B dioperasikan terhadap k, bukan terhadap t)

$$\Phi(B) = \Pi_{i=1}^{p}(1 - G_i B)$$

maka penyelesaian umum (3.18) adalah:

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G_2^k + ... + A_p G_p^k \tag{3.19}$$

Dimana $G_1^{-1}, G_2^{-1}, ..., G_p^{-1}$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik :

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 - ... - \phi_p B^p = 0$$

agar stasioner maka $|G_i| < 1$.

Dengan asumsi akar-akar G_i adalah berbeda, (dalam kenyataan memang demikian) maka akan terjadi dua situasi yaitu:

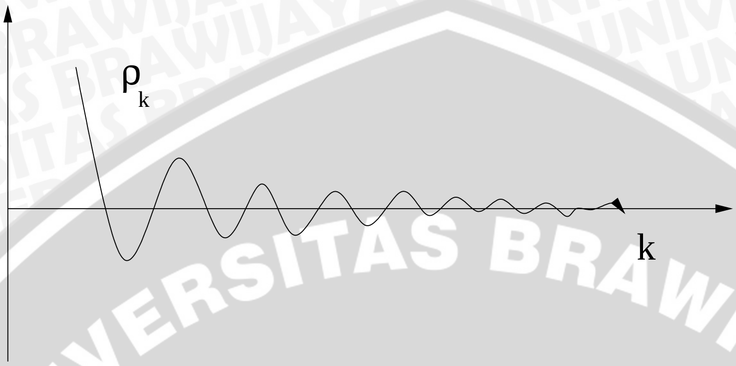
1. $G_i \in \mathbb{R}$ maka $A_i G_i^k$ pada (3.19) akan menuju ke nol secara geometrik bila $k \to \infty$ (*damped exponential*)

Gambar 3.3: Illustration of *damp exponential* effect

2. Pasangan G_i, G_j adalah bilangan kompleks, maka kedua nilai ini akan memiliki konstribusi terhadap

$$d^k \sin(2\pi f k + F)$$

berarti fungsi autokorelasi (3.19) akan *damp sine wave*



Gambar 3.4: Illustration of *damp Sine Wave* effect

Untuk AR(2)

$$\rho_k = A_1 G_1^k + A_2 G^k$$

dimana G_1^{-1} dan G_2^{-1} adalah akar-akar dari persamaan karakteristik

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 = 0$$

- Jika akar-akar real : $\phi_1^2 + 4\phi_2^2 \geq 0$ (pada daerah 1,2) maka fungsi autokorelasinya merupakan campuran dari *damped exponential*
  - Daerah(1)
    $\rho_k > 0$ *damp out*, bersesuaian dengan akar-akar yang dominan dari (3.18)
  - Daerah(2)
    ρ_k berganti-ganti tanda $(+) \rightarrow (-)$, *alternatif damps out* bersesuaian dengan akar-akar dominan $(-)$
- Jika akar-akarnya imajiner berarti $\phi_1^2 + 4\phi_2^2 < 0$ dan merupakan *pseudo periodic behaviour*

Persamaan Yule-Walker

Dari persamaan *Yule Walker* secara umum, substitusikan $p = 2$

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1$$
$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2$$

berarti

$$\phi_1 = \frac{\rho_1(1-\rho_2)}{1-\rho_1^2} \quad \phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1-\rho_1^2}$$
$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad \rho_2 = \phi_2 + \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2}$$

agar AR(2) stasioner maka:

$$-1 < \rho_1 < 1$$
$$-1 < \rho_2 < 1$$
$$\rho_1^2 < 1/2(\rho_2 + 1)$$

Varians

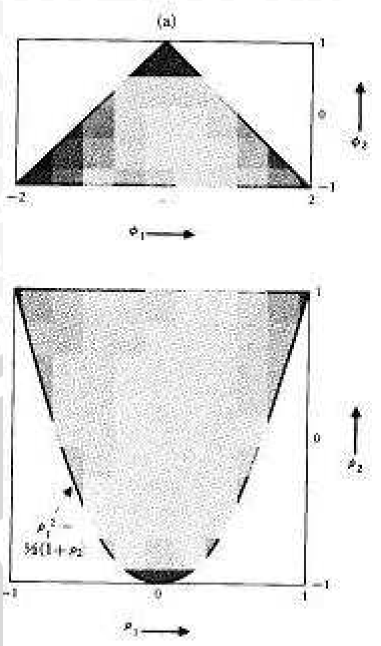
$$\sigma_z^2 = \frac{\sigma_a^2}{1 - \rho_1\phi_1 - \rho_2\phi_2}$$
$$= \left(\frac{1-\phi_1}{1+\phi_2}\right)\frac{\sigma_a^2}{(1-\phi_2)^2 - \phi_1}$$

3.2.5 Fungsi Autokorelasi Parsial (*Partial Autocorrelation Function, PACF*)

Pada awalnya order dari AR proses yang cocok dengan time series yang diamati tidak diketahui.

Masalah ini analog dengan menentukan jumlah peubah bebas yang akan digunakan pada regresi ganda. PACF adalah alat deteksi yang diperlukan untuk menjawab masalah ini. Dalam hal ini PACF merupakan fungsi tak-nol dari autokorelasi

notation ϕ_{kj} adalah koefisien ke-j pada proses AR order k, ϕ_{kk} adalah koefisien terakhirnya



Gambar 3.5: Daerah yang dapat diterima untuk $\phi_1, \phi_2, \rho_1, \rho_2$ pada AR(2) yang stasioner

Dari (3.18)

$$\rho_j = \phi_{k1}\rho_{j-1} + ... + \phi_{k(k-1)}\rho_{j-k+1} + \phi_{kk}\rho_{j-k}, \quad j = 1, 2, ..., k$$

YWE :

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} \\ \vdots & & & & \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{k1} \\ \rho_{k2} \\ \vdots \\ \rho_{kk} \end{pmatrix}$$

$$P_k \Phi_k = \varrho_k$$

Penyelesaian dari persamaan ini untuk $k = 1, 2, 3, ...$ akan didapat sebagai berikut:

$$\phi_{11} = \rho_1; \qquad \phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}; \qquad \phi_{33} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

ϕ_{kk} adalah fungsi pada lag k, dan disebut PACF. Untuk AR(p) PACF $\phi_{kk} \neq 0$ untuk $k \leq p$ dan $\phi_{kk} = 0$ untuk $k > p$ dengan kata lain PACF dari AR(p) memiliki *cut off* setelah lag p

3.2.6 Estimasi dari PACF

Gantikan ρ_k dengan r_k sebagai estimasi dari fungsi autokorelasi maka didapat $\hat{\phi}_{kk}$ (estimasi dari PACF)

3.2.7 Error Baku dari Estimasi PACF

Telah dibuktikan oleh *Quenouville* bahwa hipotesa pada proses AR(p), estimasi PACF order > p+1 kira-kira akan merupakan distribusi yang independen.

Jika n buah observasi digunakan untuk fitting:

$$Var[\hat{\phi}_{kk}] \approx \frac{1}{n} \qquad k \geq p+1$$

$$SE[\hat{\phi}_{kk}] \approx \hat{\sigma}[\hat{\phi}_{kk}] = \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad k \geq p+1$$

3.3 Proses-proses Moving Average

3.3.1 Kondisi-kondisi untuk proses MA(q) agar dapat diinverskan

MA(q)

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q} \\
&= (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q) a_t \\
&= \Theta(B) a_t
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa MA(1) : $\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B) a_t$ dapat diinverskan bila $|\theta_1| < 1$, yaitu

$$\begin{aligned}
\pi(B) &= (1 - \Theta_1 B)^{-1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \theta_1^j B^j
\end{aligned}$$

konvergen bila akar-akar dari $B = \theta_1^{-1}$ dari $(1 - \theta_1 B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran. Untuk MA(q) :

$$a_t = \Theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t$$

jika:

$$\Theta(B) = \prod_{j=1}^{q}(1 - H_j B)$$
$$\pi(B) = \Theta^{-1}(B) = \sum_{j=1}^{q} \frac{M_j}{1 - H_j B}$$

akan konvergen jika $|H_j| < 1 \quad \forall j = 1, 2, ..., q$. Karena akar-akar $\theta(B) = 0$ adalah H_j^{-1} berarti kondisi dapat diinverskan untuk MA(q) proses adalah : akar-akar dari persamaan karakteristik:

$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q = 0$$

terletak di luar unit lingkaran.

Catatan 3.2. *Karena deret :* $\Psi(B) = \Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$ *adalah berhingga* (finite)*, maka batasan-batasan pada parameter-parameter MA(q) tidak diperlukan untuk menjamin stasioneritas.*

3.3.2 Fungsi Autokorelasi

- Fungsi Autokorelasi dari proses MA(q) adalah:

$$\gamma_k = \mathbb{E}\left[(a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - ... - \theta_q a_{t-k-q})\right]$$

- Maka varians dari proses adalah:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + ... + \theta_q^2)\sigma_a^2 \quad \text{dan}$$
$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma_a^2 & k = 1, 2, ..., q \\ 0 & k > q \end{cases} \tag{3.20}$$

- Fungsi autokorelasi

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + ... + \theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+...+\theta_q^2} & k = 1, 2, ..., q \\ 0 & k > q \end{cases} \tag{3.21}$$

  Hal ini berarti bahwa fungsi autokorelasi dari proses MA memiliki *cut off* pada lag ke-q

Parameter-parameter pada MA dalam bentuk Autokorelasi

Jika $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_q$ diketahui maka q buah persamaan pada (3.21) dapat diselesaikan dan parameter-parameter $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$ dapat diperoleh. Namun demikian, tidak seperti halnya pada persamaan YWE, untuk mendapatkan proses AR yang linear, maka persamaan (3.21) di atas tidak linear, karena itu kecuali untuk $q = 1$, persamaan (3.21) di atas hanya dapat diselesaikan secara iteratif.

Akibatnya: hasil estimasinya kasar dan tidak memiliki efisiensi statistik yang tinggi.

Catatan 3.3. *Untuk mengatasi estimasi yang kasar ini, diperlukan sebuah estimasi tangguh, salah satu cara adalah dengan menggunakan* bootstrapping

3.3.3 MA(1)

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} \\ &= (1 - \theta_1 B)a_t \end{aligned}$$

agar dapat diinverskan maka $-1 < \theta_1 < 1$, dan proses akan stasioner untuk setiap θ.

Proses Autokorelasi

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2)\sigma_a^2$$

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

Jika $k = 1$ maka :

$$\theta_1^2 + \frac{\theta_1}{\rho_1} + 1 = 0 \tag{3.22}$$

Karena itu hasil dari akar-akar ini adalah satuan (unity), terlihat bahwa jika θ_1 adalah suatu solusi, maka demikian pula dengan θ_1^{-1}. Lebih lanjut lagi, jika θ_1 memenuhi kondisi dapat diinverskan $|\theta_1| < 1$, maka akar yang lain $\theta_1^{-1} > 1$, tidak memenuhi kondisi tersebut.

Contoh 3.4. *Jika* $\rho_1 = -0.4$*, maka (3.22) memenuhi dua penyelesaian yaitu* $\theta_1 = 1/2$ *dan* $\theta_1 = 2$*, tetapi hanya* $\theta_1 = 1/2$ *saja yang memenuhi kondisi dapat diinverskan.*

Fungsi Autokorelasi Partial (*Partial Autocorrelation Function, PACF*)

Dengan menggunakan

$$P_k\phi_k = \rho_k \quad \text{dan} \quad \rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+\theta_1^2}, \quad \rho_k = 0 \quad \text{untuk} \quad k > 1$$

didapat :

$$\phi_{kk} = \frac{-\phi_1^k(1-\phi_1^2)}{1-\phi_1^{2(k+1)}}$$

Jadi $|\phi_{kk}| < \phi_1^k$ dan PACF didominasi oleh *damped exponential*

Jika

$\rho_1 > 0$ maka $\phi_1 < 0$ dan PACF akan berubah-ubah tanda (*alternate in sign*)

$\rho_1 < 0$ maka $\phi_1 < 0$ dan PACF akan negatif

Catatan 3.4. *Dualitas pada AR(1) dan MA(1):*

Ma(1)	*AR(1)*
- Fungsi Autokorelasi memiliki cut off setelah lag 1	- Fungsi Autokorelasi berekor secara eksponensial
- PACF bersifat *tail off* dan didominasi secara *damped exponential*	- PACF memiliki *cut off* setelah lag 1

3.3.4 MA(2)

Kondisi dapat diinverskan:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

stasioner untuk semua nilai θ_1 dan θ_2, tetapi proses ini hanya akan dapat diinverskan jika akar-akar dari persamaan karakteristik yaitu

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = 0$$

terletak di luar unit lingkaran, yaitu :

$$\theta_1 + \theta_2 < 1; \quad \theta_2 - \theta_1 < 1 \ \text{ dan } \ -1 < \theta_2 < 1 \tag{3.23}$$

kondisi ini paralel dengan syarat stasioneritas dari AR(2)

Fungsi Autokorelasi

Varians :

$$\gamma_0 = \sigma_a^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$$

Fungsi Autokorelasinya

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}; \quad \rho_k = 0 \ \text{ untuk } \ k \geq 3 \tag{3.24}$$

Berarti, fungsi autokorelasinya memiliki *cut off* setelah lag 2 Dari persamaan (3.23) dan (3.24). Dua autokorelasi pertama dari proses MA harus terletak dalam daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva :

$$\rho_1 + \rho_2 = -1/2; \quad \rho_2 - \rho_1 = -1/2; \quad \rho_1^2 = 4\rho_2(1 - 2\rho_2) \tag{3.25}$$

PACF

Formulasi PACF dari proses MA(2) ini terlalu rumit, tetapi PACF ini didominasi oleh fungsi eksponensial.

3.3.5 Dualitas Antara Proses AR dan Proses MA

Dualitas ini memiliki konsekuensi - konsekuensi berikut :

1. Pada proses AR(p) stasioner, a_t dapat direpresentasikan sebagai jumlahan berbobot berhingga (*finite*) dari nilai-nilai $\tilde{Z}$ sebelumnya, atau $\tilde{Z}_t$ sebagai jumlahan berbobot tak berhingga dari nilai-nilai a sebelumnya.

$$\tilde{Z}_t = \Phi^{-1}(B)a_t$$

Demikian pula pada MA(q) yang dapat diinverskan. $\tilde{Z}_t$ dapat direpresentasikan sebagai jumlahan berbobot berhingga dari nilai-nilai a sebelumnya, atau jumlahan berbobot tak berhingga dari nilai-nilai $\tilde{Z}$ sebelumnya.

$$\Theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t = a_t$$

2. Proses MA (*finite*) memiliki fungsi autokorelasi yang sama dengan nol setelah suatu titik tertentu, tetapi karena proses ini ekuivalen dengan proses AR (*infinite*) maka PACF-nya *infinite* dan didominasi oleh *damped exponential* atau *damp sine waves*. Selainnya proses AR memiliki PACF yang sama dengan nol setelah suatu titik tertentu, tetapi fungsi autokorelasinya tak berhingga dan terdiri dari campuran *damped exponential* dan atau *damp sine waves*.

3. Pada proses AR(p) parameter-parameternya tak perlu memenuhi kondisi-kondisi tertentu untuk memenuhi syarat dapat diinverskan. Tetapi untuk stasioneritas akar-akar dari $\Phi(B) = 0$ harus terletak di luar unit lingkaran.

4. Pada proses MA(q) parameter-parameternya tidak perlu memenuhi kondisi-kondisi tertentu untuk memenuhi syarat-syarat stasioneritas tetapi untuk dapat diinverskan, akar-akar dari $\Theta(B) = 0$ harus terletak di luar unit lingkaran.

3.4 Mixed Autoregressive - Moving Average Processes

3.4.1 Sifat-sifat Stasioneritas dan Dapat Diinverskan

ARMA (p,q)

$$\tilde{Z}_t = \phi_1\tilde{Z}_{t-1} + ... + \phi_p\tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - ... - \theta_q a_{t-q} \tag{3.26}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p)\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q)a_t$$
$$\Phi(B)\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t$$

Model ini dapat didekati dengan 2 cara, yaitu :

(a) Proses AR(p)

$$\Phi(B)\tilde{Z}_t = e_t \quad \text{dimana} \quad e_t = \theta(B)a_t$$

(b) Proses MA(q)

$$\tilde{Z}_t = \Theta(B)b_t$$

dimana b_t adalah AR(p), $\Theta(B)b_t + a_t$ sedemikian hingga

$$\begin{aligned}\Phi(B)\tilde{Z}_t &= \Theta(B)\Phi(B)b_t \\ &= \Theta(B)a_t\end{aligned}$$

Jadi pada proses $\Phi(B)\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t$ akan merupakan proses yang stasioner bila akar-akar dari persamaan karakteristik $\Phi(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran, dan merupakan proses yang dapat diinverskan bila akar-akar dari $\Theta(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran.

3.4.2 Fungsi Autokorelasi

(lihat sub.bab 3.2.2)
Autokovarians

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + ... + \phi_p\gamma_{k-p} + \gamma_{za} - \theta_1\gamma_{za}(k-1) - ... - \theta_q\gamma_{za}(k-q) \tag{3.27}$$

dimana $\gamma_{za}(k)$ adalah fungsi kovarians silang (*cross covarians function*) antara z dan a, dan didefinisikan sebagai berikut :

$$\gamma_{za}(k) = \mathbb{E}[\tilde{Z}_{t-k}a_t]$$

karena $\tilde{Z}_{t-k}$ hanya tergantung pada *shock* yang hanya terjadi sampai $t-k$, maka :

$$\begin{aligned}\gamma_{za}(k) &= 0 \quad \text{bila} \quad k > 0 \\ \gamma_{za}(k) &\neq 0 \quad \text{bila} \quad k \leq 0\end{aligned}$$

berarti persamaan (3.27) dapat dituliskan menjadi:

$$\begin{aligned}\gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1} + ... + \phi_p\gamma_{k-p} \quad \text{bila} \quad k \geq q+1 \\ \rho_k &= \phi_1\rho_{k-1} + ... + \phi_p\rho_{k-p} \quad \text{bila} \quad k \geq q+1\end{aligned}$$

atau

$$\Phi(B)\rho_k = 0 \text{ bila } k \geq q+1$$

Catatan 3.5. .

- *Pada proses ARMA(p,q) akan terdapat q autokorelasi* $\rho_q, \rho_{q-1}, ..., \rho_{q-p+1}$ *yang nilainya tergantung secara langsung pada pilihan q parameter pada MA, yaitu* θ. *(Dan tentunya, juga terhadap pilihan p parameter pada AR yaitu* ϕ*)*

- *Berarti p buah nilai-nilai* $\rho_q, \rho_{q-1}, ..., \rho_{q-p+1}$ *diperlukan sebagai nilai awal untuk menyelesaikan* $\Phi(B)\rho_k = 0, \quad k \geq q+1$

- *Jika* $q - p < 0 \quad \forall \rho_j, j = 0, 1, 2, ...$ *akan terjadi* mixture damped exponential *dan atau* damped sine waves

- *Jika* $q - p \geq 0$ *akan terdapat* $q - p + 1$ *nilai awal* $\rho_0, \rho_1, ..., \rho_{q-p}$ *yang tidak mengikuti pola umum ini*

Varians

Untuk $k = 0$

$$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + ... + \phi_p\gamma_p + \sigma_a^2 + \theta_1\gamma_{za}(-1) - ... - \theta_q\gamma_{za}(-q) \tag{3.28}$$

Jika (3.27) dan (3.28) ini diselesaikan untuk $k = 1, 2, ..., p$ maka akan terdapat p buah persamaan dan akhirnya akan didapat $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_p$

PACF

Dari persamaan (3.26) didapat: $a_t = \Theta_1^{-1}(B)\Phi(B)\tilde{Z}_t$, jika $\Theta^{-1}(B)$ merupakan deret tak berhingga dari PACF dari proses ini juga tak berhingga.

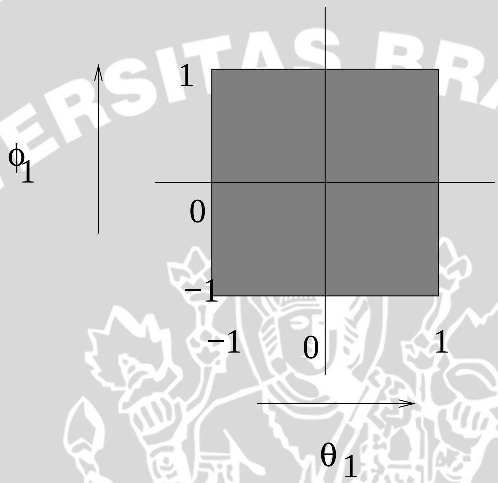
PACF pada ARMA akan berperilaku sama dengan PACF pada proses MA(q) murni, yaitu didominasi oleh *mixture damped exponential* dan atau *damped sine waves*, tergantung pada derajad dari MA dan nilai dari parameter-parameternya.

3.4.3 ARMA(1,1)

$$\tilde{Z}_t - \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \tag{3.29}$$
$$(1 - \phi_1 B)\tilde{Z}_t = (1 - \theta_1 B)a_t$$

Kondisi stasioner dan dapat diinverskan:

- Stasioner jika $-1 < \phi_1 < 1$
- Dapat diinverskan jika $-1 < \theta_1 < 1$



Gambar 3.6: Daerah yang invertible dan stasioner pada proses ARMA(1,1)

Fungsi Autokorelasi

Dari (3.27) dan (3.28) didapat:

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \sigma_a^2 - \theta_1 \gamma_{za}(-1)$$
$$\gamma_1 = \phi_1 \gamma_0 - \theta_1 \sigma_a^2$$
$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} \quad \text{untuk} \quad k \geq 2$$

Kalikan persamaan (3.29) dengan a_{t-1} dan ambil nilai ekspekstasinya:

$$\mathbb{E}\tilde{Z}_t a_{t-1} - \phi_1 \mathbb{E}\tilde{Z}_{t-1} a_{t-1} = \mathbb{E}a_t a_{t-1} - \theta_1 \mathbb{E}a_{t-1} a_{t-1}$$
$$\gamma_{za}(-1) - \phi_1 \sigma_a^2 = 0 - \theta_1 \sigma_a^2$$
$$\gamma_{za}(-1) = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_a^2$$

dari sini didapat :

$$\gamma_0 = \frac{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}\sigma_a^2$$

$$\gamma_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1-\phi_1^2}\sigma_a^2 \quad (3.30)$$

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} \quad \text{untuk} \quad k \geq 2 \quad (3.31)$$

Berarti :

- Fungsi autokorelasi menurun secara eksponensial dari nilai awal ρ_1, dan hal ini tergantung pada θ_1 dan ϕ_1
- Jika $\phi_1 > 0$ maka fungsi ini akan menurun secara eksponensial dengan mulus jika $\phi_1 < 0$ maka fungsi ini akan menurun secara eksponensial dengan berganti-ganti tanda (*alternate*)
- Lebih lanjut tanda(+ atau -) dari ρ_1 ditentukan oleh tanda dari $(\phi_1 - \theta_1)$

Jika (3.30) dibagi dengan γ_0 maka didapat:

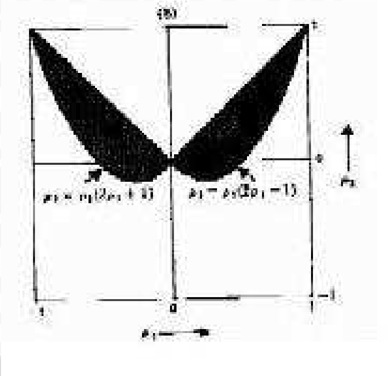
$$\rho_1 = (1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)\{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1\}; \quad \rho_2 = \phi_1\rho_1 \quad (3.32)$$

Nilai-nilai ρ_k dengan $k > 2$ dapat dicari dengan substitusi.
Dengan menggunakan (3.32) dan kondisi stasioneritas serta dapat diinverskan, maka ρ_1 dan ρ_2 harus terletak di daerah:

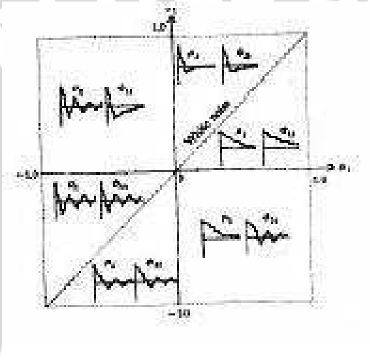
$$\begin{aligned} |\rho_2| &< |\rho_1| \\ \rho_2 &> \rho_1(2\rho_1+1) \quad \text{and} \quad \rho_1 < 0 \\ \rho_2 &> \rho_1(2\rho_1-1) \quad \text{and} \quad \rho_1 > 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

PACF

- PACF dari ARMA(1,1) terdiri dari nilai awal tunggal $\phi_{11} = \rho_1$
- Berperilaku seperti pada PACF MA(1) dan didominasi oleh *damped exponential*



Gambar 3.7:



Gambar 3.8:

- Perhatikan gambar di bawah ini

  Jika $\theta_1 > 0$ maka akan terjadi *smooth damped exponential* (*decay*) mulai dari ρ_1 dan tandanya ditentukan oleh tanda $(\phi_1 - \theta_1)$

  Jika $\theta_1 < 0$ maka akan terjadi *exponential* berosilasi, *decay* mulai dari nilai ρ_1 dan tandanya ditentukan oleh tanda $(\phi_1 - \theta_1)$

Ringkasan

	AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)
- Model dalam bentuk nilai-nilai $\tilde{Z}$ sebelumnya	$\Phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$ — —	$\Theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t = a_t$ — —	$\Theta^{-1}(B)\Phi(B)\tilde{Z}_t = a_t$ — —
- Model dalam bentuk nilai-nilai a sebelumnya	$\tilde{Z}_t = \Phi^{-1}(B)a_t$ — —	$\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t$ — —	$\tilde{Z}_t = \Phi^{-1}(B)\Theta(B)a_t$ — —
- Bobot ϕ	*finite series*	*infinite series*	*infinite series*
- Bobot ψ	*infinite series*	*finite series*	*infinite series*
- Kondisi stasioner	akar-akar dari $\Phi(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran	selalu stasioner — —	Mengikuti syarat untuk proses AR(p) —
- Kondisi dapat diinverskan	selalu dapat diinverskan — —	akar-akar dari $\Theta(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran	Mengikuti syarat untuk proses MA(q) — —
- ACF	-*infinite* (*damped exponential* dan atau *damped sine wave* - *Tail off*	- *finite* - *cut off* —	Mengikuti pola pada proses AR(p), setelah lag ke $q - p$ pertama —
- PACF	-*finite* -*cut off*	-*infinite* (*damped exponential* dan atau *damped sine wave* - *Tail off*	Mengikuti pola pada proses MA(q), setelah lag ke $p - q$ pertama —

Bab 4

Model-Model Linear Tak - Stasioner

Pada data-data industri dan ekonomi, banyak sekali dijumpai time series yang tidak memiliki *mean* yang tetap, misalnya harga-harga stok di bursa saham. Namun demikian jika pada tiap bagian dari level lokal, atau pada trend lokal berperilaku mirip dengan bagian yang lain, maka dapat dikatakan bahwa time series tersebut menunjukkan prilaku homogenitas.

Prilaku homogenitas di atas dapat dijadikan stasioner dengan mengambil beberapa beda (*difference*) dari proses yang bersesuaian.

Pada Bab ini akan dibahas sifat-sifat dari kelas-kelas mode, dimana *difference* ke-d nya adalah ARMA, dan model ini disebut sebagai proses ARIMA.

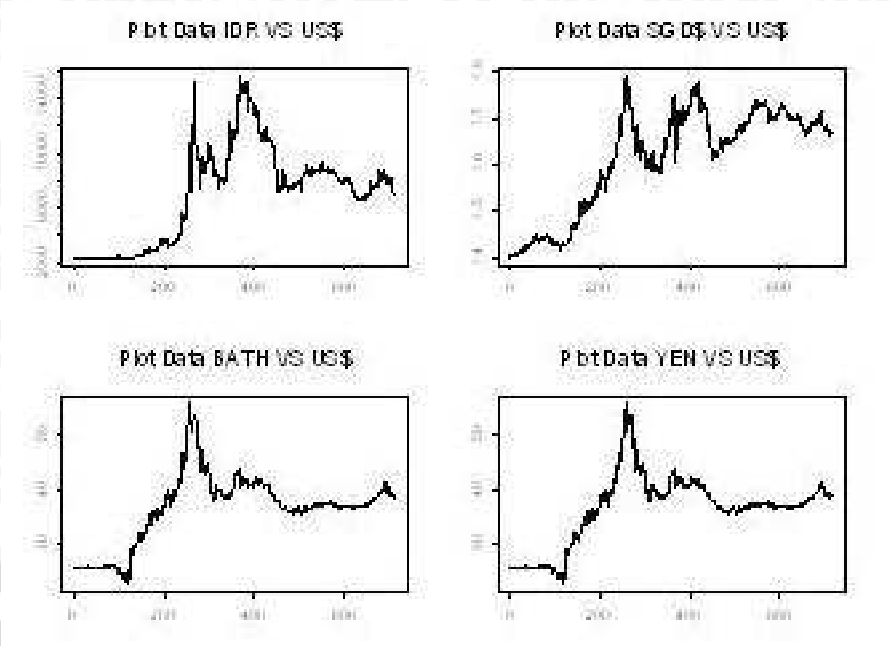
4.1 Proses-Proses ARIMA

4.1.1 Proses AR(1) Tak Stasioner

Pada Bab 3, diketahui bahwa proses ARMA(p,q)

$$\Phi(B)\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t$$

untuk menjamin stasioneritas akar-akar dari $\Phi(B) = 0$ harus terletak di luar unit lingkaran. Salah satu cara untuk mendapatkan proses tak stasioner adalah dengan merelaksasikan batasan ini.



Gambar 4.1: Data-data yang tidak stationer

Contoh 4.1. *Proses AR(1)*

$$(1 - \phi B)\tilde{Z}_t = a_t$$

stasioner bila $|\phi| < 1$*, pelajari proses ini untuk* $\phi = 2$*, nilai di luar daerah stasioneritas. Misalnya* $\tilde{Z}_0 = 0.7, a_t$ *berdistribusi Normal*

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_t		0.1	-1.1	0.2	-2.0	-0.2	-0.8	0.8	0.1	0.1	0.9
$\tilde{Z}_t$	0.7	1.5	1.9	4.0	6.0	11.8	22.8	46.4	92.9	185.9	370.9

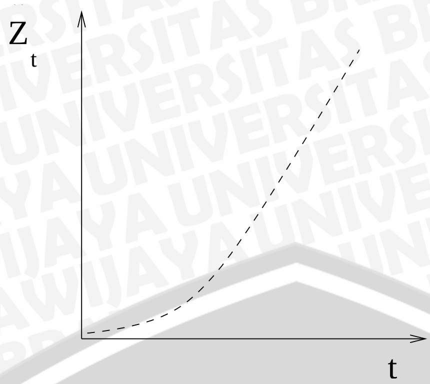
4.1.2 Model Umum Untuk Proses Tak Stasioner yang Homogen

Model ARIMA

Perhatikan model

$$\Psi(B)\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t \tag{4.1}$$

Dimana $\Psi(B)$ adalah operator *autoregressive* tak stasioner, sedemikian hingga d dari akar-akar $\Psi(B) = 0$ adalah unity dan sisanya terletak di luar unit lingkaran.



Gambar 4.2: Plot waktu terhadap $\tilde{Z}_t$, menunjukkan nilai $\tilde{Z}_t$ bergerak secara eksponensial

Model(4.1) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\Psi(B)\tilde{Z}_t = \Phi(B)(1-B)^d\tilde{Z}_t = \Theta(B)a_t \tag{4.2}$$

dimana $\Phi(B)$ adalah operator *autoregressive* stasioner.

Karena $\Delta^d\tilde{Z}_t = \Delta^d Z_t$ untuk $d \geq 1$, maka model(4.2) dapat ditulis menjadi

$$\Phi(B)\Delta^d Z_t = \Theta(B)a_t \tag{4.3}$$

secara ekivalen, proses ini dapat didefinisikan melalui 2 persamaan, yaitu:

$$\Phi(B)W_t = \Theta(B)a_t \text{ dan } W_t = \Delta^d Z_t \tag{4.4}$$

Terlihat bahwa model di atas berkorespondensi dengan asumsi bahwa beda (*difference*) ke-d dari suatu series dapat direpresentasikan melalui proses ARMA yang stasioner, dan dapat diinverskan.

Untuk mendapatkan data mula-mula:

$$Z_t = S^d W_t \tag{4.5}$$

dimana S adalah operator jumlahan tak berhingga yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} SX_t &= \sum_{n=-\infty}^{t} X_n \\ &= (1+B+B^2+...)X_t \\ &= \Delta^{-1}X_t \end{aligned}$$

Jadi

$$S = (1-B)^{-1} = \Delta^{-1}$$

Secara sama operator S^2X didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} S^2X_t &= SX_t + SX_{t-1} + SX_{t-2} + \ldots \\ &= \sum_{i=-\infty}^{t} \sum_{h=-\infty}^{i} X_h \\ S^3X_t &= \sum_{j=-\infty}^{t} \sum_{i=-\infty}^{j} \sum_{h=-\infty}^{i} X_h \end{aligned}$$

Persamaan(4.5) menunjukkan bahwa proses (4.3) dapat dicapai dengan menjumlahkan (atau mengintegrasikan) proses stasioner (4.4) sebanyak d kali, karena itulah proses (4.3) disebut sebagai proses *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Lihat Bab 1, model (4.3) ekuivalen dengan representasi proses $\tilde{Z}_t$ sebagi output dari filter linear (kecuali $d = 0$, ini adalah filter linear yang tidak stabil), yang inputnya adalah *white noise* a_t. Berarti filter yang ada tersebut merupakan perangkat untuk mentransformasikan suatu proses Z_t yang sangat dependen dan berkemungkinan tak stasioner atau dengan kata lain mentransformasikan proses ke *white noise*.

Jika pada model(4.3), operator *autoregressive* $\Phi(B)$ berorder p, diambil *difference* ke-d dan operator *moving average* $\Theta(B)$ berorder q, maka model yang didapat adalah ARIMA(p,d,q)

Dua Interpretasi dari Model ARIMA

Perhatikan bahwa karakteristik dasar dari AR(1); $(1-\phi B)\tilde{Z}_t = a_t$ untuk $|\phi| > 1$; adalah prilaku lokal dari series yang dibangun dari model sangatlah tergantung pada level dari $\tilde{Z}_t$. Lihat Gambar.4.1.1,perhatikan bahwa prilaku lokal dari series yang muncul independen dari levelnya.

Untuk mencerminkan prilaku proses yang independen terhadap levelnya, harus digunakan operator *autoregregressive* $\Psi(B)$ sedemikian hingga:

$$\Psi(B)(\tilde{Z}_t + c) = \Psi(B)\tilde{Z}_t$$

dimana c adalah konstan, $\Psi(B)$ pasti dalam bentuk

$$\Psi(B) = \Phi_1(B)(1 - B) = \Phi_1(B)\Delta$$

Karena itu, klas dari proses-proses yang memiliki sifat yang diinginkan akan berbentuk

$$\Phi(B)_1 W_t = \Theta(B)a_t \quad \text{dimana} \quad W_t = \Delta Z_t$$

Syarat homogenitas akan menghilangkan kemungkinan bahwa W_t akan meningkat secara eksponensial. Hal ini berarti $\Phi_1(B)$ adalah operator AR-stasioner, atau

$$\Phi_1(B) = \Phi_2(B)(1 - B) \quad \text{sedemikian hingga}$$
$$\Phi_2(B)W_t = \Theta(B)a_t \quad \text{dengan} \quad W_t = \Delta^2 Z_t$$

order dari operator beda yang diambil akan menunjukkan sifat dari time series tak stasioner.

- Model: $\Phi(B)\Delta Z_t = \Theta(B)a_t$ akan dapat merepresentasikan time series pada tiap *difference*-nya adalah stasioner dengan mean nol, tetapi levelnya 'bebas'
- Model: $\Phi(B)\Delta^2 Z_t = \Theta(B)a_t$ dapat merepresentasikan time series yang tidak memiliki level yang tetap ataupun *slope* yang tetap, tetapi tetap bersifat homogen jika diambil nilai *difference*-nya.

4.1.3 Bentuk Umum dari proses ARIMA

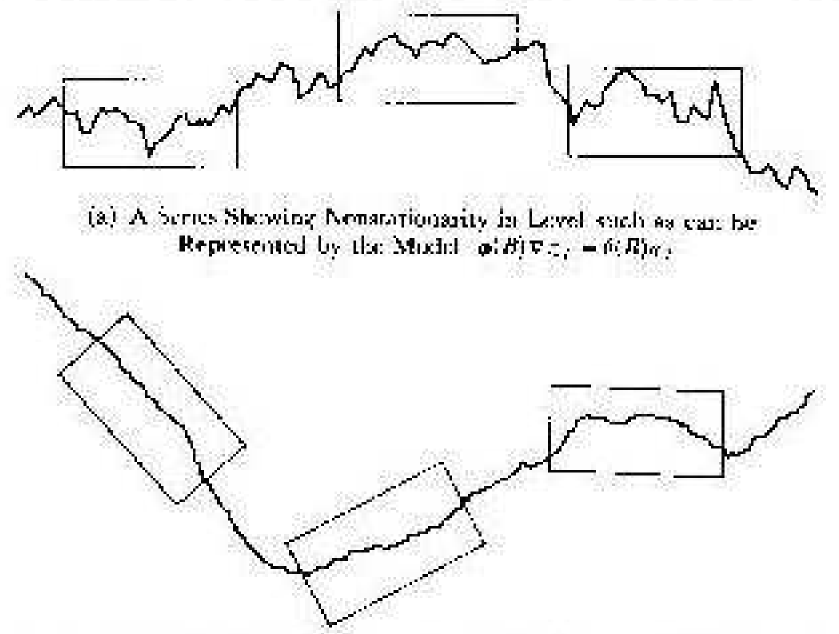
Kadangkala ada gunanya untuk menambahkan suatu konstanta θ_0 pada model ARIMA, sehingga didapat model umum:

$$\Psi(B)Z_t = \Phi(B)\Delta^d Z_t = \theta_0 + \Theta(B)a_t \tag{4.6}$$

Dimana :

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p$$
$$\Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q$$

Dalam hal ini:



(a) A Series Showing Nonstationarity in Level such as can be Represented by the Model $\varphi(B)\nabla z_t = \theta(B)a_t$

(b) A Series Showing Nonstationarity in Level and in Slope such as can be Represented by the Model $\varphi(B)\nabla^2 z_t = \theta(B)a_t$

Gambar 4.3:

1. $\Phi(B)$ disebut **operator *autoregressive*** yang diasumsikan stasioner, yaitu akar-akar $\Phi(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran.
   $\Psi(B) = \Delta^d\Phi(B)$ disebut **operator *autoregressive* umum** merupakan operator tak stasioner dengan d buah akar-akar dari $\Psi(B) = 0$ sama dengan unity

2. $\Theta(B)$ disebut **operator *moving average***, diasumsikan dapat diinverskan, yaitu akar-akar $\Theta(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran

Bila $d = 0$ maka model(4.6) merupakan model dari proses stasioner. Persyaratan stasioneritas dan dapat diinverskan diaplikasikan secara independen, dan secara umum, operator $\Phi(B)$ dan $\Theta(B)$ tidak akan memiliki order yang sama.

Stokastik dan Deterministik *Tren*

Pada Sub.bab 4.1.2 terlihat bahwa bila konstanta θ_0 dibuang, model(4.6) dapat merepresentasikan deret yang memiliki *tren* stokastik, melalui perubahan acak pada level dan *slope* dari deret. Secara umum, pada model dapat ditambahkan fungsi deterministik

$f(t)$. Misalnya, *trend* polinomial deterministik dengan derajat d, dapat dilakukan dengan membuat $\theta_0 \neq 0$

Contoh 4.2. *Bila* $d = 1$*, model dengan* $\theta_0 \neq 0$*, akan diestimasi sebagai* trend *linear deterministik yang mungkin terjadi pada* noise *yang tak stasioner.*

Hal ini ekivalen dengan:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}W_t &= \mathbb{E}[\Delta^d Z_t] = \mu_w \\ &= \frac{\theta_0}{1 - \phi_1 - \phi_2 - ... - \phi_p} \neq 0 \end{aligned}$$

dengan memisalkan $\tilde{W}_t = W_t - \mu_w$*, maka model(4.6) menjadi ARMA:*

$$\Phi(B)\tilde{W}_t = \Theta(B)a_t \tag{4.7}$$

Pada banyak aplikasi, asumsi stokastik tren lebih sering realistik daripada asumsi deterministik tren.

Contoh 4.3. *Beberapa kasus pada Model ARIMA(p,d,q)*

1. *Proses ARIMA (1,1,1)*

$$\Delta Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad \textit{di sini} \quad \Phi(B) = 1, \quad \Theta(B) = 1 - \theta_1 B$$

2. *Proses ARIMA(0,2,2)*

$$\Delta^2 Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \quad \textit{di sini} \quad \Phi(B) = 1, \quad \Theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2$$

3. *Proses ARIMA(1,1,1)*

$$\begin{aligned} &\Delta Z_t - \phi_1 \Delta Z_{t-1} = a_t - \theta_1 a_{t-1} \quad \textit{di sini} \quad \Phi(B) = 1 - \phi_1 B, \quad \Theta(B) = 1 - \theta_1 B \\ &(1 - \phi_1 B)\Delta Z_t = (1 - \theta_1 B)a_t \end{aligned}$$

Transformasi Tak Linear dari Z

Pada model(4.6), substitusikan Z_t dengan $Z_t^{(\lambda)}$, dimana $Z_t^{(\lambda)}$ adalah beberapa transformasi tak-linear dari Z_t yang meliputi satu atau lebih parameter transformasi λ

4.2 Tiga Bentuk Eksplisit dari Model ARIMA

4.2.1 Bentuk Persamaan Beda dari Model

$$\begin{aligned}\Psi(B)Z_t &= \Phi(B)(1-B)^d \\ &= 1-\psi_1 B-\psi_2 B^2-...-\psi_{p+d}B^{p+d}\end{aligned}$$

Model (4.6) dengan $\theta_0 = 0$, dapat ditulis menjadi:

$$Z_t = \psi_1 Z_{t-1}+...+\psi_{p+d}Z_{t-p-d}-\theta_1 a_{t-1}-...-\theta_q a_{t-q}+a_t \tag{4.8}$$

Contoh 4.4. *ARIMA(1,1,1)*

$$\begin{aligned}(1-\phi B)(1-B)Z_t &= (1-\theta B)a_t \\ \{1-(1+\phi)B+\phi B^2\}Z_t &= (1-\theta B)a_t \qquad (4.9) \\ Z_t &= (1+\phi)Z_{t-1}+\phi Z_{t-2}+a_t-\theta a_{t-1}\end{aligned}$$

4.2.2 Bentuk *Random Shock* dari Model

Model dalam bentuk *shocks* sebelumnya dan pada saat ini

Filter linear :

$$\begin{aligned}Z_t &= a_t+\psi_1 a_{t-1}+\psi_2 a_{t-2}+... \\ &= a_t+\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j a_{t-j} \\ &= \Psi(B)a_t\end{aligned}$$

Ekspresi umum dari bobot Ψ:

$$\begin{aligned}\varphi(B)Z_t &= \varphi(B)\Psi(B)a_t \;\text{ karena} \\ \varphi(B)Z_t = \Theta(B)a_t \;\text{ maka }\; \varphi(B)\Psi(B) &= \Theta(B) \qquad (4.10) \\ (1-\varphi_1 B-...-\varphi_{p+d}B^{p+d})(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+...) &= (1-\theta_1 B-...-\theta_q B^q)\end{aligned}$$

Catatan 4.1. .

$j > p+d-1$ *jika* $p+d-1 \geq q$

$j > q$ *jika* $p+d-1 < q$

Maka bobot Ψ memenuhi persamaan beda yang didefinisikan melalui operator *autoregressive* umum, yaitu :

$$\varphi(B)\Psi_j = \Phi(B)(1-B)^d\Psi_j = 0 \tag{4.11}$$

Dimana B sekarang dioperasikan terhadap indeks j. Jadi untuk j yang cukup besar, bobot Ψ_j akan direpresentasikan melalui campuran antara polinomial, *damped exponential* dan *damped sinusoids* dalam argumen j.

Contoh 4.5. *ARIMA(1,1,1)*

$$\begin{aligned}\varphi(B) &= (1-\phi B)(1-B) \quad \textit{dan} \quad \Theta(B) = 1-\theta B\\ &= 1-(1-\phi)B+\phi B^2\end{aligned}$$

substitusikan ke (4.10) didapat:

$$\{1-(1-\phi)B+\phi B^2\}(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+...) = 1-\theta B$$

setarakan ruas kiri dan ruas kanan maka didapat:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= 1 \quad \textit{dimana} \quad A_0 = \frac{1-\theta}{1-\phi}\\ \psi_1 &= A_0 + A_1\phi \quad A_1 = \frac{\theta-\phi}{1-\phi}\\ \psi_2 &= A_0 + A_1\phi^2 \quad \psi_0 = A_0 + A_1 = 1\\ &\vdots\\ \psi_j &= A_0 + A_1\phi^j\end{aligned}$$

maka model ARIMA(1,1,1)

$$Z_t = (1+\phi)Z_{t-1} - \phi Z_{t-2} + a_t - \theta a_{t-1}$$

Dapat dituliskan dalam bentuk ekivalen

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty}(A_0 + A_1\phi^j)a_{t-j}$$

Karena $|\phi| < 1$, maka bobot $\psi \longrightarrow_{j\to\infty} A_0$ sedemikian hingga shock *a_{t-j} akan mendapat bobot konstan sebesar A_0*

4.2.3 Bentuk Invers dari Model

Model dalam bentuk (yang terdiri dari) nilai-nilai Z sebelumnya dan nilai *shock* saat itu, a_t (lihat sub.bab 3.1.1)

$$Z_t = \Psi(B)a_t$$

Dapat dituliskan dalam bentuk invers yaitu

$$\Psi^{-1}(B)Z_t = a_t \quad \text{atau}$$

$$\pi(B)Z_t = (1 - \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j B^j)Z_t = a_t \tag{4.12}$$

Jadi Z_t merupakan jumlahan berbobot tak berhingga dari nilai-nilai Z sebelumnya, ditambah sebuah *random shock*

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + ... + a_t$$

$\pi(B)$ harus konvergen pada / atau dalam unit lingkaran.

Ekspresi Umum untuk Bobot π

Untuk mendapatkan bobot π pada model ARIMA umum, maka substitusikan persamaan (4.12) ke

$$\varphi(B)Z_t = \Theta(B)a_t \quad \text{didapat}$$

$$\varphi(B)Z_t = \Theta(B)\pi(B)Z_t$$

berarti, bobot π dapat diperoleh secara eksplisit dengan menggunakan relasi persamaan dari operator B pada

$$\varphi(B) = \Theta(B)\pi(B) \tag{4.13}$$

yaitu

$$(1 - \varphi_1 B - ... - \varphi_{p+d}B^{p+d} = (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ...)$$

perlu dicatat bahwa untuk $j > p + d$ dan q yaitu
$j > p + d$ jika $p + d \geq q$
$j > q$ jika $p + d < q$

bobot π akan memenuhi persamaan *difference* yang didefinisikan oleh operator *moving averate*

$$\Theta(B)\pi_j = 0$$

dimana B saat ini dioperasikan pada indeks j. Hal ini berarti, untuk j yang cukup besar, bobot π akan berprilaku seperti fungsi *autokorelasi* dari proses AR, yaitu mengikuti campuran dari *damped exponential* dan *damped sine waves*

Fakta lain yang menarik adalah: Jika $d \geq 1$, maka jumlahan dari bobot π pada (4.12) adalah 1. Hal ini dapat dijelaskan dengan mensubstitusikan $B = 1$ pada (4.13)

Jadi $\varphi(B) = \phi(B)(1-B)^d = 0$ jika $B = 1$ dan
$\theta(1) \neq 0$, karena akar-akar dari $\theta(B) = 0$ terletak di luar unit lingkaran.

Berarti dari (4.13) $\pi(1) = 0, \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1$.

Karena itu, jika $d \geq 1$, proses dapat dituliskan dalam bentuk

$$Z_t = \tilde{Z}_{t-1}(\pi) + a_t \tag{4.14}$$

Dimana $\tilde{Z}_{t-1}(\pi) = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-1}$ adalah bobot rata-rata dari nilai-nilai sebelumnya dari proses.

Contoh 4.6. *ARIMA(1,1,1)*

$$(1-\phi B)(1-B)Z_t = (1-\theta B)a_t$$

gunakana (4.13)

$$\begin{aligned}\pi(B) &= \varphi(B)\Theta^{-1}(B)\\ &= (1-(1+\phi)B+\phi B^2)(1+\theta B+\theta^2 B^2)\end{aligned}$$

berarti

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \phi + (1-\theta)\\ \pi_2 &= (\theta-\phi)(1-\theta)\\ \vdots \pi_j &= (\theta-\phi)(1-\theta)\theta^{j-2} \quad j \geq 3\end{aligned}$$

Nilai tujuh π pertama bila $\phi = -0.3$ dan $\theta = 0.5$

j	1	2	3	4	5	6	7
π_j	0.2	0.4	0.2	0.1	0.05	0.025	0.012

$$Z_t = (0.2Z_{t-1} + 0.4Z_{t-2} + 0.2Z_{t-3} + 0.1Z_{t-4} + ...)a_t$$

Perhatikan bahwa π_j menurun untuk $j \to \infty$ berarti deret ini dapat diinverskan.

4.3 Proses Integrated Moving Average

Suatu model tak stasioner yang seringkali digunakan / seringkali muncul adalah proses (0,1,1).

$$\Delta Z_t = a_t - \theta a_{t-1}$$

model ini terdiri dari 2 parameter, θ dan σ_a^2. Model-model seperti ini seringkali didapatkan berguna pada masalah-masalah pengendalian inventori, proses gangguan yang terjadi di industri dan di ekonometri.

Model lain yang juga seringkali digunakan adalah proses(0,2,2)

$$\Delta^2 Z_t = a_t - \theta a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

model ini terdiri dari 3 parameter, θ_1, θ_2 dan σ_a^2.

Kedua model di atas, adalah kasus khusus dari klas

$$\Delta^d Z_t = \Theta(B)a_t \tag{4.15}$$

yang disebut sebagai IMA(0,d,q) - proses *integrated moving average* berorder(0,d,q)

4.3.1 IMA(0,1,1)

Bentuk Persamaan *difference*, Proses (0,1,1)

$$\Delta Z_t = (1 - \theta B)a_t, -1 < \theta < 1$$

model ini dapat dituliskan dalam bentuk suku-suku Z dan a dalam bentuk

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t - \theta a_{t-1} \tag{4.16}$$

Bentuk Random *Shock* dari Model

Sebagai alternatif, suku-suku Z dapat dinyatakan dalam a saja dengan melakukan penjumlahan pada kedua sisi persamaan (4.16). Sebelumnya ada baiknya jika operator yang ada di ruas kanan diubah ke dalam operator Δ (daripada dalam bentuk B), yaitu :

$$\begin{aligned} 1-\theta B &= (1-\theta)B + (1-B) \\ &= (1-\theta)B + \Delta \\ &= \lambda B + \Delta \end{aligned}$$

$\lambda = 1-\theta$, dan daerah invertibilitas dalam suku λ didefinisikan melalui $0 < \lambda < 2$, karena itu :

$$\Delta Z_t = \lambda a_{t-1} + \Delta a_t$$

jika dilakukan penjumlahan :

$$\begin{aligned} Z_t &= \lambda S a_{t-1} + a_t \\ Z_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j a_{t-j}, \quad \Psi_0 = 0, \Psi_j = \lambda, \quad \text{untuk} j \geq 1 \end{aligned}$$

Bentuk Invers dari Model

$$\begin{aligned} \pi(B) Z_t &= a_t \\ Z_t &= \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} + a_t \\ &= \tilde{Z}_{t-j}(\pi) + a_t \end{aligned}$$

dimana $\tilde{Z}_{t-j}(\pi)$ adalah *moving average* berbobot dari nilai-nilai proses sebelumnya.

Dari sub-bab terdahulu diketahui bahwa

$$\varphi(B) = \Theta(B)\pi(B)$$

untuk IMA(0,1,1) didapat

$$\begin{aligned}
(1-\theta B)\pi(B) &= 1-B \\
\pi(B) &= \frac{1-B}{1-\theta B} = \frac{1-\theta B-(1-\theta)B}{1-\theta B} \\
&= 1-(1-\theta)\{B+\theta B^2+\theta^2 B^3+...\} \\
\pi_j &= (1-\theta)\theta^{j-1} \\
&= \lambda(1-\lambda)^{j-1} \quad j \geq 1 \\
Z_t &= \tilde{Z}_{t-1}(\lambda)+a_t
\end{aligned}$$

Moving average berbobot dari nilai-nilai proses sebelumnya

$$\tilde{Z}_{t-1}(\lambda) = \lambda \sum_{j=1}^{\infty}(1-\lambda)^{j-1} Z_{t-j}$$

Model di atas disebut sebagai *Exponentially Weighted Moving Average* (EWMA)

Walaupun kondisi dapat diinverskan terpenuhi untuk $0 < \lambda < 2$ namun secara praktis seringkali digunakan $0 < \lambda < 1$. Perlu dicatat :

- Bila $\lambda = 1$, fungsi bobot hanya akan terdiri dari satu nilai saja ($\pi_1 = 1, \pi_j = 0, j > 1$)
- Bila $\lambda \to 0$, bobot eksponensialnya akan mengalami penurunan *die out* semakain lama semakin lambat dan EWMA terukur jauh dari proses.
- Bila $\lambda = 0$ dan $\theta = 1$, model
  $(1-B)Z_t = (1-B)a_t$ akan menjadi $Z_t = \theta_0 + a_t$
  θ_0 menjadi *mean* dari nilai-nilai masa lalu yang diberikan.

4.3.2 IMA(0,2,2)

Bentuk Persamaan *difference*

Proses:

$$\Delta^2 Z_t = (1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)a_t \tag{4.17}$$

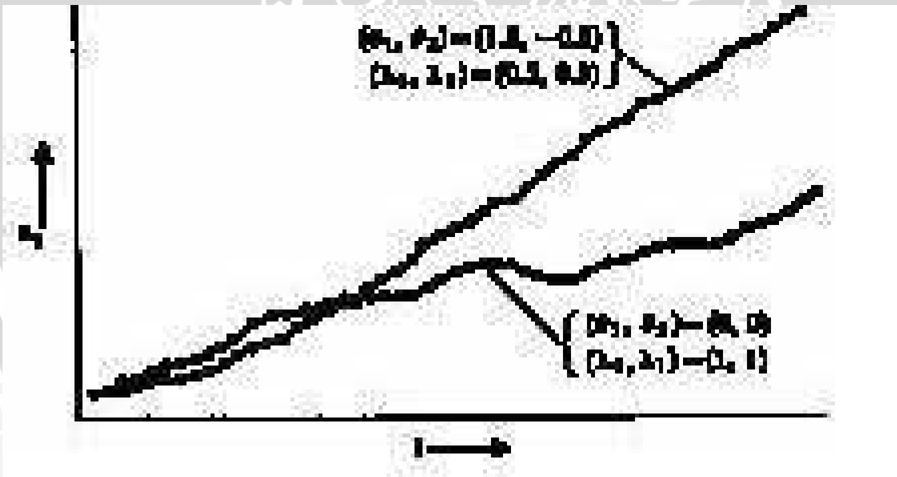
Gambar 4.4: Model EWMA dengan $\theta = 0(\lambda = 0.4)$ digambarkan dengan garis lurus dan $\theta = 0(\lambda = 1)$, digambarkan dengan garis terputus-putus

memiliki kemungkinan untuk mewakili suaru deret yang memiliki *stochastic trend.* Sifat-sifat umu dalam daerah yang dapat diinverskan adalah

$$-1 < \theta_2 < 1 \quad \theta_1 + \theta_2 < 1 \quad \theta_2 - \theta_1 < 1$$

Sebagaimana sebelumnya, Z_t dapat secara eksplisit dituliskan dalam suku-suku Z dan a

$$Z_t = 2Z_{t-1} - Z_{t-2} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \tag{4.18}$$



Gambar 4.5: Model IMA(0,2,2)

Model dalam Bentuk *Random Shock*

Agar Z dapat dituliskan dalam suku-suku a, maka operator pada ruas kanan persamaan

(4.17) dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 = (\lambda_0 \Delta + \lambda_1)B + \Delta^2$$

dengan mempersamakan koefisien-koefisien pada ruas kiri dan ruas kanan akan didapat

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 2 - \lambda_0 - \lambda_1 \quad \text{berarti} \quad & \lambda_0 &= 1 + \theta_2 \\ \theta_2 &= \lambda_0 - 1 & \lambda_1 &= 1 - \theta_1 - \theta_2 \end{aligned}$$

Model (4.17) dapat ditulis menjadi

$$\Delta^2 Z_t = (\lambda_0 \Delta + \lambda_1) a_{t-1} + \Delta^2 \tag{4.19}$$

$$Z_t = \lambda_0 S a_{t-1} + \lambda_1 S^2 a_{t-1} + a_t \tag{4.20}$$

Bobot Ψ adalah:

$$\psi_0 = 1, \psi_1 = (\lambda_0 + \lambda_1), ..., \psi_j = (\lambda_0 + j\lambda_1), ...$$

Terdapat sebuah keuntungan yang penting jika digunakan persamaan (4.19) atau (4.20) dari model bila dibandingkan dengan persamaan (4.16). Hal ini terlihat jika digunakan $\lambda_1 = 0$, didapat

$$\Delta Z_t = (1 - (1 - \lambda_0)B) a_t$$

yaitu proses (0,1,1) dengan $\theta = 1 - \lambda_0$, tetapi jika digunakan $\theta_2 = 0$ didapat

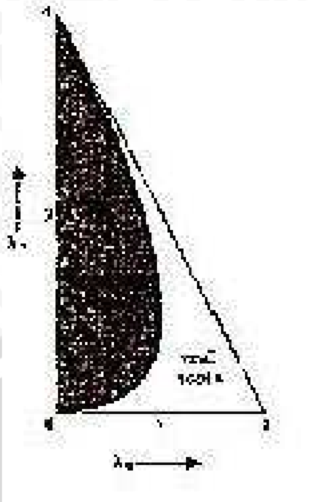
$$\Delta^2 Z_t = (1 - \theta_1 B) a_t$$

Daerah yang dapat diinverskan untuk IMA(0,2,2) sama seperti pada MA(2) yaitu:

$$\begin{aligned} \theta_1 + \theta_2 &< 1 & 0 &< 2\lambda_0 + \lambda_1 < 4 \\ \theta_2 - \theta_1 &< 1 & \lambda_1 &> 0 \\ -1 < \theta_2 &< 1 & \lambda_2 &> 0 \end{aligned}$$

Bentuk Invers dari Model

$$Z_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j Z_{t-j} + a_t = \tilde{Z}_t(\pi) + a_t$$



Gambar 4.6: Daerah yang dapat inverskan pada Model IMA(0,2,2)

Diketahui bahwa:

$$1 - 2B + B^2 = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ...)$$

Untuk IMA(0,2,2) didapat

$$\pi_1 = 2 - \theta_1 = \lambda_0 + \lambda_1$$
$$\pi_2 = \theta_1(2 - \theta_1) - (1 + \theta_2) = \lambda_0 + 2\lambda_1 - (\lambda_0 + \lambda_1)^2$$
$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)\pi_j = 0 \quad j \geq 3$$