MODEL DISTRIBUSI *BIVARIATE* LOGNORMAL PADA PROPERTI

SKRIPSI

Oleh :
ITUT LISNA INDRAWATI
0810940047-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

MODEL DISTRIBUSI *BIVARIATE* LOGNORMAL PADA PROPERTI

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

ITUT LISNA INDRAWATI
0810940047-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

MODEL DISTRIBUSI *BIVARIATE* LOGNORMAL PADA PROPERTI

Oleh:
ITUT LISNA INDRAWATI
0810940047-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 24 Juli 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dra. Endang Wahyu H., M.Si.	**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**
NIP. 196611121991032001	**NIP. 196709071992031001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**ITUT LISNA INDRAWATI**
NIM	**:**	**0810940047-94**
Jurusan	**:**	**MATEMATIKA**
Judul Skripsi	**:**	**MODEL DISTRIBUSI *BIVARIATE* LOGNORMAL PADA PROPERTI**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 24 Juli 2012
Yang menyatakan,

(ITUT LISNA INDRAWATI)
NIM. 0810940047

MODEL DISTRIBUSI *BIVARIATE* LOGNORMAL PADA PROPERTI

ABSTRAK

Dalam mempelajari karakteristik suatu properti dikenal istilah depresiasi properti yaitu penurunan nilai fisik properti seiring dengan waktu dan penggunaannya. Fakta bahwa suatu properti dipengaruhi oleh nilai (*value*) dan umur menunjukkan bahwa distribusi *univariate* kurang mampu menjelaskan sepenuhnya hubungan antara *value* dan umur pada properti. Dalam skripsi ini, dijabarkan penurunan distribusi gabungan antara *value* dan umur dari properti. Beberapa model waktu hidup kontinu diantaranya adalah distribusi eksponensial, distribusi weibull, dan distribusi lognormal. Dalam kasus depresiasi properti digunakan distribusi lognormal dan karena terdapat dua peubah maka distribusi gabungan pada properti merupakan distribusi *bivariate* lognormal. Sedangkan untuk menduga parameter-parameter dari distribusi tersebut digunakan metode maksimum likelihood. Distribusi ini menyajikan S(t) atau proporsi total *value* properti yang merupakan perbandingan total *value* setelah waktu hidup (*life time*) terhadap total *value* dari suatu properti.

Kata kunci: depresiasi properti, *bivariate* lognormal

BIVARIATE LOGNORMAL DISTRIBUTION MODEL FOR PROPERTY

ABSTRACT

In studying the characteristics of a property, that is a term that called depreciation property which is property physical value decreasing along with time and purpose of it. The fact that the property is influenced by value and time show that the univariate distribution can not be use to explain the relationship between value and time in property. This paper is described about combination distribution time and value from property. Some of life time continue model are eksponential distribution, weibull distribution, and lognormal distribution. Property depreciation use lognormal distribution, there exist two variables therefore combination distribution on property is a bivariate lognormal distribution. Meanwhile to predict that distribution parameters is used maximum likelihood method. This distribution show S(t) or property total value proportion that comparison a total value after life time to total value from a property.

Keywords: property depreciation, bivariate lognormal

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, Alhamdulillah, Alhamdulillah.

Puji syukur kepada Allah SWT yang telah melimpahkan anugrah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul "**Model Distribusi *Bivariate* Lognormal pada Properti".** Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Dra. Endang Wahyu Handamari, M.Si., selaku dosen pembimbing I atas segala bimbingan, nasehat, kesabaran, masukan yang membangun, serta waktu yang telah diluangkan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Drs. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., selaku dosen pembimbing II sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala bimbingan, nasehat, serta kesabaran yang telah diberikan.
3. Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes., selaku dosen penguji pada ujian skripsi yang telah memberikan masukan dan telah meluangkan waktunya.
4. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak, Ibu tercinta dan Kakakku yang telah memberikan doa, materi, dan segalanya.
6. Enje yang telah menemani, men*support,* dan mendoakanku.
7. Teman sepermainanku, Tintin, Nuphi, Gandez, Nanda, Aini, dan Retno terimakasih kenangannya selama ini.
8. Keluarga besar Matematika 2008 dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga Allah SWT memberikan balasan pahala kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis icrutz_29@yahoo.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 24 Juli 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisa waktu hidup (*life time analisys*) merupakan salah satu teknik statistika yang mempelajari dan menganalisis waktu hidup bergantung dari waktu. Waktu hidup adalah waktu sampai terjadinya suatu kegagalan yang dapat berupa tidak berfungsinya properti tersebut secara optimal atau mati. Waktu hidup tidak hanya berkaitan dengan makhluk hidup saja seperti manusia, hewan, dan tumbuhan, melainkan juga meliputi benda-benda mati semisal properti. Secara matematis, waktu hidup merupakan peubah acak dengan nilai non negatif. Beberapa model waktu hidup kontinu diantaranya adalah distribusi eksponensial, distribusi weibull, dan distribusi lognormal (Lawless, 1982).

Depresiasi properti adalah penurunan nilai fisik properti seiring dengan waktu dan penggunaannya. Perilaku mortalitas properti sangat berguna untuk menghitung depresiasi suatu properti. Karakteristik mortalitas dipelajari melalui beberapa metode, antara lain metode aktuarial, metode semi aktuarial, dan metode *forecast*. Dalam metode aktuarial diperlukan data lengkap mengenai umur suatu properti. Sedangkan metode semi akruarial hanya memerlukan beberapa data saja mengenai unit properti. Metode *forecast* atau metode peramalan adalah metode yang didasarkan pada pertimbangan akal dan tidak memerlukan data numerik sehingga sangat tidak relevan.

Properti terdiri dari beberapa unit yang mempunyai karakteristik fisik yang berbeda. Pada kenyataannya, hampir semua properti dinyatakan dalam satuan uang daripada dalam satuan unit. Umur antara unit-unit dalam properti bersifat saling bebas. Sedangkan satuan mata uang bersifat homogen dan memberikan skala pengukuran umum pada properti. Akan tetapi, jumlah uang yang diinvestasikan dalam unit-unit properti tersebut tidak sama. Umur dan satuan uang dari unit-unit dalam properti tersebut saling terikat. Sehingga keduanya bukan merupakan peubah acak yang bebas. Dalam kasus waktu hidup properti ini akan dianalisa dengan menggunakan distribusi lognormal. Karena terdapat dua peubah yaitu *value* dan umur, maka mendorong pengembangan distribusi *bivariate* lognormal antara *value* dan umur suatu properti.

Distribusi *bivariate* lognormal adalah distribusi lognormal dengan dua peubah. Distribusi lognormal sendiri adalah fungsi kepadatan sebuah peubah yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi normal (Boediono dan Koester, 2001).

Skripsi ini akan membahas penurunan model distribusi *bivariate* lognormal pada properti, dengan peubahnya yaitu *value* dan umur dari properti tersebut. Setelah model distribusi *bivariate* lognormal terbentuk, parameter-parameter distribusi tersebut diestimasi menggunakan metode maksimum likelihood. Gross dan Clark(1975) mengemukakan bahwa, untuk memperoleh estimasi dari distribusi lognormal dapat digunakan suatu metode yaitu metode maksimum likelihood karena secara konsep prosedur metode ini sederhana dan metode ini lebih umum digunakan untuk mengestimasi parameter-peremeter distribusi waktu hidup. Dari distribusi *bivariate* lognormal pada properti tersebut dapat diperoleh nilai proporsi dari properti. Proporsi properti menyatakan perbandingan total *value* setelah waktu hidup (*life time*) terhadap total *value* dari suatu properti secara keseluruhan. Jika nilai-nilai parameternya diketahui, maka nilai proporsi dari properti dapat dihitung.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan yang telah diuraikan sebelumnya, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menurunkan model distribusi *bivariate* lognormal pada properti?
2. Bagaimana memperoleh proporsi pada properti dari estimasi parameter-parameter distribusi *bivariate* lognormal menggunakan metode maksimum likelihood?

1.3 Batasan Masalah

Properti yang dimaksud dalam skripsi ini adalah properti yang mengalami depresiasi, misalnya mobil.

1.4 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. menurunkan model distribusi *bivariate* lognormal pada properti,

2. memperoleh proporsi properti dari estimasi parameter-parameter distribusi *bivariate* lognormal menggunakan metode maksimum likelihood.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Peubah Acak

Suatu fungsi bernilai *real* yang harganya ditentukan oleh setiap anggota dalam ruang contoh disebut peubah acak. Ruang contoh adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Peubah acak dinyatakan dalam huruf kapital misalnya *X*, *Y*, *Z*, dan sebagainya. Sementara itu nilainya dinyatakan sebagai huruf kecil padanannya misalkan *x*, *y*, *z*. Peubah acak dikatakan sebagai usaha menumeriskan kejadian dari suatu percobaan.

Jika suatu ruang contoh mengandung suatu barisan unsur yang tidak pernah berakhir tetapi sama banyaknya dengan bilangan cacah, maka ruang itu disebut sebagai ruang contoh diskrit. Peubah acak yang didefinisikan pada ruang contoh diskrit disebut peubah acak diskrit. Ruang contoh yang mengandung tak hingga banyaknya titik contoh yang sama dengan banyaknya titik pada sebuah ruas garis disebut ruang contoh kontinu. Peubah acak yang didefinisikan pada ruang contoh kontinu disebut peubah acak kontinu.

(Walpole, 1995)

2.2 Fungsi Kepadatan Peluang

Pada suatu peubah acak, setiap nilainya dikaitkan dengan peluang tertentu. Sering kali lebih memudahkan jika semua peluang suatu peubah acak dinyatakan dalam sebuah rumus. Rumus yang mencantumkan semua kemungkinan nilai suatu peubah acak beserta peluangnya disebut fungsi kepadatan peluang.

(Walpole, 1995)

2.2.1 Fungsi Kepadatan Peluang Peubah Acak Diskrit

Definisi 2.1

Himpunan pasangan terurut $(x, f(x))$ merupakan suatu fungsi kepadatan peluang peubah acak diskrit X jika memenuhi:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$.

2.2.2 Fungsi Kepadatan Peluang Peubah Acak Kontinu

Definisi 2.2

Jika X adalah peubah acak kontinu, maka fungsi *f*(*x*) disebut fungsi kepadatan peluang dari X apabila memenuhi kriteria:

1. $f(x) \geq 0$ untuk semua $x \epsilon R$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$

(Walpole dan Myers, 1995)

2.3 Distribusi Normal

Sebuah peubah acak X disebut berdistribusi normal dengan rata-rata μ, $(-\infty < \mu < \infty)$ dan varian $\sigma^2 > 0$, jika bentuk fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}, -\infty < x < \infty. \qquad (2.1)$$

Distribusi normal biasanya dinotasikan sebagai $X \sim N\,(\mu,\sigma^2)$ yang menunjukkan bahwa peubah acak X adalah berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan variansinya σ^2.

Beberapa sifat penting yang dimiliki distribusi normal:

1. $f[(x+\ \mu)] = f[-(x-\mu)]$
2. nilai maksimum dari f terjadi pada $x = \mu$
3. bentuk grafiknya simetris terhadap $x = \mu$
4. luas daerah yang terletak di bawah kurva dan di atas garis mendatar sama dengan satu.

(Hines, 1990)

Definisi 2.3

Bila Z merupakan peubah acak yang kemungkinan harga-harganya menyatakan bilangan *real* antara $-\infty$ dan ∞, maka Z disebut peubah normal baku jika dan hanya jika peluang interval dari *a* ke *b* menyatakan luas dari *a* ke *b* antara sumbu Z dan kurva normalnya. Persamaannya dinotasikan $Z \sim N\,(0,1)$ menunjukkan bahwa rata-rata $\mu = 0$, variansinya $\sigma^2 = 1$ dan diformulasikan sebagai,

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}.$$

Distribusi normal baku diperoleh dari distribusi normal dengan cara transformasi nilai *X* menjadi nilai *Z*, dengan formula sebagai berikut:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}.$$

Proses tersebut disebut dengan proses standarisasi. Untuk memudahkan perhitungan dapat digunakan sebuah fungsi distribusi kumulatif normal baku $\Phi(z)$ yang menunjukkan luas area di bawah kurva normal antara nilai rata-rata dan suatu nilai peubah acak.

(Milton dan Jesse,1996)

2.3.1 Distribusi Normal Dua Peubah (*Bivariate*)

Distribusi normal dua peubah merupakan bentuk perluasan dari distribusi normal satu peubah. Jika (X, Y) peubah acak normal dua peubah, maka fungsi kepadatan peluang gabungannya adalah:

$$\mathrm{f}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad (2.2)$$

untuk - ∞ < x < ∞, - ∞ < y < ∞ dan ρ merupakan korelasi antara x dan y.

Peluang gabungan dari dua peubah didefinisikan sebagai,

$$\mathrm{P}\ (a_1 \le X \le b_1, a_2 \le Y \le b_2) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dxdy.$$

untuk a_1, a_2, b_1, dan b_2 masing-masing merupakan bilangan *real*.

Teorema 2.1

Kepadatan marjinal $f_1$dan f_2 diberikan sebagai berikut:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}$$

untuk -∞ < x < ∞,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

untuk - ∞ < y < ∞.

Bukti dari teorema ini dapat dilihat pada Lampiran 2.

(Hines, 1990)

2.3.2 Distribusi Normal Banyak Peubah (*Multivariate*)

Distribusi normal *multivariate* (*p*-peubah) merupakan perluasan dari konsep-konsep distribusi normal satu peubah (*univariate*). Pandang kuantitas,

$$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(x-\mu)(x-\mu)}{\sigma^2} = (x-\mu)^T(\sigma^2)^{-1}(x-\mu).$$

Peubah *X*, parameter μ dan σ^2 pada distribusi normal *univariate* diperluas sebagai berikut:

a. Peubah *X* diperluas menjadi matriks ***X*** berukuran (*p* x *1*) yang merupakan vektor acak dengan komponen $X_1, X_2, \dots, X_p$.
b. Parameter μ diperluas menjadi **μ** yang merupakan vektor kolom nilai harapan dari vektor ***X***.
c. Parameter σ^2 diperluas menjadi Σ yang merupakan matriks varian kovarian berukuran (*p* x *p)* dari komponen ***X*** yang berupa matriks simetri berdefinit positif.

Vektor acak adalah vektor dimana elemen-elemennya merupakan peubah acak. Sedangkanmatriks acak adalah matriks yang elemen-elemennya merupakan peubah acak. Nilai harapan dari matriks acak adalah matriks yang mengandung nilai harapan dari setiap elemennya. Misalnya ***X*** = $\{X_{ij}\}$ adalah matriks acak dengan ordo (*p* x *n)*, nilai harapan dari ***X*** dinotasikan dengan E(***X***) adalah matriks bilangan (*p* x *n).*

$$E(\boldsymbol{X}) = \begin{pmatrix} E(X_{11}) & \cdots & E(X_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{p1}) & \cdots & E(X_{pn}) \end{pmatrix}$$

dimana untuk setiap elemen dari matriks-matriksnya yaitu,

$$\mathrm{E}\left(X_{ij}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x_{ij}\, f_{ij}\left(x_{ij}\right) dx$$

jika X_{ij} adalah suatu peubah acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluangnya $f_{ij}\left(x_{ij}\right)$ dan

$$\mathrm{E}\left(X_{ij}\right) = \sum_{\forall x_{ij}} p_{ij}\ \left(x_{ij}\right)$$

jika X_{ij} adalah suatu peubah acak diskrit dengan fungsi kepadatan peluangnya $p_{ij}\left(x_{ij}\right)$.

Pembentukan fungsi kepadatan peluang distribusi *multivariate* normal dapat diperoleh dari fungsi kepadatan peluang distribusi *univariate* normal dengan perluasan peubah dan parameternya. Kuantitas persamaan $(x-\mu)^2/\sigma^2$ pada fungsi kepadatan peluang distribusi *univariate* normal (dapat dilihat pada persamaan 2.1) diperluas menjadi $(x-\mu)^{T}(\sum)^{-1}(x-\mu)$, sedangkan konstanta $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}$ diperluas menjadi suatu konstanta baru yaitu $(2\pi)^{-\frac{p}{2}}|\sum|^{-\frac{1}{2}}$ agar isi dibawah fungsi kepadatan *multivariate* sama dengan satu untuk setiap *p*. Hal ini diperlukan karena pada kasus *multivariate* peluangnya dinyatakan oleh volume di bawah permukaan kurva. Sebagai akibatnya kepadatan normal dimensi-*p* untuk vektor acak ***X*** mempunyai bentuk

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}|\sum|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^{\mathrm{T}}(\sum)^{-1}(x-\mu)}{2}\right\}$$

dimana $-\infty < x_i < \infty$, dan *i* = 1, 2, ..., *p*. Fungsi kepadatan normal dimensi *p* dinotasikan dengan $N_p(\mu, \sigma^2)$ yang analog dengan kasus distribusi *univariate* normal.

Beberapa hal yang perlu diperhatikan pada vektor ***X*** yang berdistribusi *multivariate* normal adalah sebagai berikut:

1. kombinasi linier komponen ***X*** adalah berdistribusi normal,
2. semua subset dari komponen ***X*** berdistribusi *multivariate* normal,

3. kovarian 0 menyatakan bahwa komponen-komponen yang berkorespondensi berdistribusi bebas,
4. distribusi bersyarat dari komponennya adalah *multivariate* normal.

(Johnson dan Wichern, 1992)

2.4 Distribusi Lognormal

Distribusi lognormal dalam bentuk sangat sederhana adalah fungsi kepadatan sebuah peubah yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi normal. Peubah acak non negatif X dikatakan memiliki distribusi lognormal jika peubah acak $Y = \ln(X)$ berdistribusi normal. Sehingga fungsi kepadatan peluang untuk peubah acak lognormal bila $\ln(X)$ berdistribusi normal dengan parameter μ dan σ adalah

$$\mathrm{f}(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right\}.$$

(Hines, 1990)

2.5 Momen

Definisi 2.4

Momen ke-r terhadap rata-rata μ atau momen pusat ke-r dari peubah acak X didefinisikan sebagai

$$\mu_r(X) = \mathrm{E}[(X - \mu)^r], \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Dari definisi diperoleh $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \sigma^2$. Momen pusat kedua (μ_2) disebut dengan variansi.

Definisi 2.5

Momen pusat ke-r untuk suatu peubah acak diskrit X didefinisikan

$$\mu_r(X) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - \mu)^r f(x_j) = \sum_{x} (x - \mu)^r f(x),$$

sedangkan jika peubah acak bersifat kontinu maka momen pusat ke-$r$dari peubah acak X adalah

$$\mu_r(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^r f(x)dx.$$

Definisi 2.6

Momen ke-r dari suatu peubah acak X, dapat juga ditulis $\mu_r'(X)$ dan didefinisikan

$$\mu_r'(X) = \mathrm{E}(x^r), \qquad r = 1, 2, \ldots$$

Momen pertama dari suatu peubah acak X disebut dengan ekspektasi atau nilai harapan dan sering dinamakan rata-rata (*mean*).

(Spiegel,1975)

2.6 Fungsi Kepadatan Peluang Gabungan Distribusi

Definisi 2.7

Misalkan X dan Y masing-masing adalah peubah acak, pasangan (X, Y) merupakan gabungan peubah acak dua dimensi. Maka, fungsi kepadatan peluang gabungannya yaitu f_{XY}.

Untuk kasus diskrit yaitu:

1. $f(x, y) \geq 0$
2. $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$
3. $\mathrm{P}\,(X = a_1, Y = a_2) = f(a_1, a_2)$

sedangkan untuk kasus kontinu,

1. $f(x, y) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ dan $-\infty < y < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\, dydx = 1$
3. $\mathrm{P}\,(a_1 \leq X \leq b_1,\ a_2 \leq Y \leq b_2) = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\, dydx$

untuk a_1, a_2, b_1, dan b_2 masing-masing merupakan bilangan *real*.

(Milton dan Jesse, 1996)

2.6.1 Fungsi Kepadatan Peluang Marginal

Definisi 2.8

Jika $f(x,y)$ adalah fungsi kepadatan peluang gabungan dari peubah acak X dan Y, maka fungsi kepadatan marginal dari $f(x,y)$ didefinisikan sebagai

$$f(x) = \sum_{y} f(x,y) \text{ sedangkan } f(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

untuk kasus diskrit dan

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dy \text{ sedangkan } f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

untuk kasus kontinu.

(Fisz, 1963)

2.6.2 Fungsi Kepadatan Peluang Bersyarat

Definisi 2.9

Misalkan *X* dan *Y* dua peubah acak, diskrit ataupun kontinu. Fungsi kepadatan peluang bersyarat dari peubah acak *X* dengan syarat *Y*= *y* adalah

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}, \qquad f(y) > 0.$$

(Pal dkk, 2006)

2.6.3 Ekspektasi Bersyarat

Definisi 2.10

Misalkan *X* dan *Y* peubah acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang gabungan *f*(*x*,*y*). Jika *f*(*y*) ≥ 0 maka ekspektasi bersyarat dari *X* dengan syarat *Y*= *y* adalah

$$\mathrm{E}(x|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x|y)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f(x,y)}{f(y)} dx.$$

(Pal dkk, 2006)

2.7 Kovarian

Definisi 2.11

Dua peubah acak *X* dan *Y* dengan rata-rata berturut-turut adalah μ_x dan μ_y. Kovarian antara *X* dan *Y* dinotasikan oleh cov(*x*,*y*) atau σ_{xy} yaitu:

$$\mathrm{cov}(x,y) = \mathrm{E}\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right].$$

Teorema 2.2
Komputasi rumus untuk kovarian yaitu:

$$\mathrm{cov}(x,y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(x,y) &= E\left[(X-\mu_x)(Y-\mu_y)\right] \\ &= E[(X-E(X))(Y-E(Y))] \\ &= E[XY - XE(Y) - YE(X) + E(X)E(Y)] \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y)\end{aligned}$$

(Milton dan Jesse,1996)

2.8 Koefisien Korelasi

Definisi 2.12

Dua peubah acak *X* dan *Y* dengan rata-rata dan variansi berturut-turut adalah μ_x, μ_y, σ_x^2 dan σ_y^2. Korelasi antara *X* dan *Y* yaitu:

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)\ \mathrm{var}(Y)}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

(Milton dan Jesse,1996)

2.9 Transformasi Peubah Acak

Teorema 2.3

Pasangan (*X*, *Y*) merupakan gabungan peubah acak dua dimensi. Maka fungsi kepadatan peluang gabungannya yaitu f_{XY} dan jika diberikan

$$U = g_1(X,Y) \ \text{ dan } \ V = g_2(X,Y).$$

dimana g_1 dan g_2 didefinisikan sebuah fungsi transformasi satu-satu dan invers transformasinya didefinisikan oleh

$$X = h_1(U,V) \ \text{ dan } \ Y = h_2(U,V)$$

dimana h_1 dan h_2 memiliki turunan parsial pertama. Maka, fungsi kepadatan peluang gabungan untuk (*U*, *V*) adalah

$$f_{UV}\ (u,v) = f_{XY}(\ h_1(u,v), h_2(u,v))|\ J\ |$$

dengan nilai *J* merupakan matriks jacobian dari invers transformasi yaitu:

$$|J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{matrix} \right\| \text{ dan } |J| \neq 0.$$

(Milton dan Jesse,1996)

2.10 Estimasi Parameter Menggunakan Metode Maksimum Likelihood

Misalkansuatu populasi diketahui mempunyai distribusi normal, tetapi parameter rata-rata μ dan simpangan baku σ tidak diketahui. Oleh karena parameter populasi tidak diketahui itulah, maka dalam statistika inferensial dipelajari bagaimana cara mengetahui parameter tersebut. Ada dua cara yang dipelajari dalam statistika inferensial untuk mengetahui parameter populasi, yaitu dengan cara pendugaan (estimasi) dan pengujian hipotesis.

Boediono dan Koster (2001) menjelaskan bahwa parameter populasi ditulis dengan huruf latin θ, dimana θ bisa berupa rata-rata populasi μ atau simpangan baku populasi σ. Statistik dari sampel ditulis dengan huruf latin $\hat{\theta}$, bisa berupa rata-rata sampel $\hat{\mu}$ atau simpangan baku sampel $\hat{\sigma}$. Statistik $\hat{\theta}$ inilah yang digunakan untuk mengestimasi atau menduga parameter θ dari populasi.

Metode estimasi parameter menggunakan metode maksimum likelihood digunakan untuk menentukan penduga bagi θ, dimana nilai duga tersebut adalah nilai yang membuat data pengamatan paling mungkin terjadi.

Definisi 2.13

Jika $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah sampel acak berukuran *n* dari sebuah fungsi kepadatan peluang diskrit atau kontinu , $f_x(x_i|\theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui, maka fungsi likelihood dinotasikan dengan:

$$\mathrm{L}(\theta) = f(x_1|\theta), \dots f(x_n|\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(\,x_i|\theta).$$

Definisi 2.14

Diberikan $\mathrm{L}(\theta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta), \theta \in \Omega$, dan Ω merupakan himpunan seluruh nilai parameter yang mungkin. Maka *maximum likelihood estimate* (MLE) adalah nilai $\hat{\theta} \in \Omega$ yang memaksimumkan $\mathrm{L}(\theta)$. Sehingga $\hat{\theta}$ adalah nilai θ yang memenuhi:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Omega} f(x_1, x_2, \ldots, x_n|\theta)$$

Berdasarkan definisi tersebut $\hat{\theta}$ adalah penyelesaian dari turunan pertama fungsi likelihood terhadap θ, yang disamadenganakan 0

$$\frac{d}{d\theta}\mathrm{L}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = 0$$

untuk mempermudah perhitungan secara matematis, umumnya digunakan log-likelihood

$$l(\theta) = \ln \mathrm{L}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta)$$

yang juga diturunkan terhadap θdan disamadenganakan noluntuk memperoleh $\hat{\theta}$:

$$\frac{d}{d\theta} l(\theta) = \frac{d}{d\theta}\sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i|\theta).$$

(Hogg,2005)

Contoh 2.1

Apabila $x_1, x_2, \ldots, x_n$ berdistribusi poissondengan fungsi kepadatan peluang:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2, \ldots \text{dan } \lambda > 0$$

fungsi likelihood bagi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ adalah perkalian dari fungsi keepadatan peluang masing-masing peubah.

$$\mathrm{L}(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{x_i}}{x_i!} = \frac{\mathrm{e}^{-n\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Log-likelihood dari fungsi likelihood tersebut yaitu:

$$l(\lambda) = \ln \mathrm{L}(\lambda) = -\mathrm{n}\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln \lambda - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i!$$

Turunan pertama dari $l(\lambda)$ tehadap λ adalah:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = -\mathrm{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$$

Solusi dari persamaan tersebut jika disamakan dengan nol:

$$\frac{d}{d\lambda} l(\lambda) = -\mathrm{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\hat{\lambda}} = n$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X}$$

$$\hat{\lambda} = \bar{X}$$

Sehingga, $\hat{\lambda} = \bar{X}$ adalah penduga kemungkinan maksimum bagi λ.

(Klugman, 2004)

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Penurunan Model Distribusi *Bivariate* Lognormal pada Properti

Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, bahwa hubungan antara *value* dan umur suatu properti mengikuti model distribusi *bivariate* lognormal. Distribusi *bivariate* lognormal merupakan perluasan dari distribusi lognormal dengan dua peubah.Distribusi lognormal sendiri merupakan fungsi kepadatan sebuah peubah yang logaritmanya mengikuti hokum distribusi normal.Sehingga penurunan distribusi *bivariate* lognormal dapat diperoleh dari distribusi *bivariate* normal. Dalam kasus ini, X_1 menyatakan peubah umur dan X_2 menyatakan *value* dari suatu properti.

Misal (*U*,*V*) merupakan peubah acak yang berdistribusi *bivariate* normal, maka fungsikepadatan peluang gabungannya adalah:

$$g(u,v)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{u-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\frac{(u-\mu_1)(v-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\left(\frac{v-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \qquad (3.1)$$

untuk $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$, dimana σ_1, σ_2, μ_1, μ_2, dan ρ merupakan parameter sedemikian sehingga $-1 \le \rho \le 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-\infty < \mu_1 < \infty$, dan $-\infty < \mu_2 < \infty$.

Distribusi *bivariate* lognormal diperoleh dari distribusi *bivariate* normal dengan cara mentransformasi peubah acaknya menggunakan Teorema 2.3 yaitu:

$$X_1 = j_1(U,V) = e^U \text{ dan } X_2 = j_2(U,V) = e^V$$

Dimana j_1 dan j_2 didefinisikan sebuah fungsi transformasi satu-satu dan invers transformasinya didefinisikan oleh

$$U = h_1(X_1,X_2) = ln\, X_1 \text{ dan } V = h_2(X_1,X_2) = ln\, X_2$$

sehingga fungsi kepadatan peluang *bivariate* lognormalnya berbentuk:

$$f\ (x_1, x_2) = g(\ln x_1, \ln x_2)|J| \tag{3.2}$$

dimana $|J|$ merupakan determinan dari transformasi matriks jacobi,

$$|J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{matrix} \right\|$$

Turunan dari *u* dan *v* terhadap x_1 dan x_2 adalah:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1};\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0;\ \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0;\ \text{dan}\ \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{1}{x_2}$$

Sehingga determinan jacobi transformasinyayaitu:

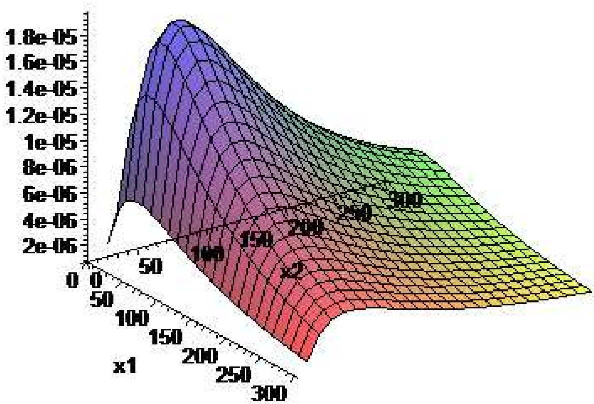
$$|J| = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \end{matrix} \right\| = \left| \begin{matrix} \frac{1}{x_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{x_1 x_2}$$

Maka, Persamaan (3.2) dapat ditulis menjadi,

$$\mathrm{f}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}\frac{1}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \tag{3.3}$$

$f(x_1,x_2)$ merupakan fungsi kepadatan peluang distribusi *bivariate* lognormal pada properti dengan X_1 menyatakan peubah umur dan X_2 menyatakan peubah *value* dari suatu properti. Gambar 3.1 memperlihatkan contoh plot dari distribusi *bivariate* lognormal.



Gambar 3.1. Distribusi *Bivariate* Lognormal dengan Parameter $\mu_1 = \mu_2 = 5$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, dan $\rho = 0$

3.2 Distribusi Marginal dan Bersyarat dari *Bivariate* Lognormal pada Properti

Distribusi marginal dari fungsi kepadatan peluang *bivariate* lognormal tersebut yaitu $f_1(x_1)$ dan $f_2(x_2)$, sedangkan distribusi bersyaratnya yaitu $f(x_1|x_2)$ dan $f(x_2|x_1)$. Distribusi marginal dariX_1 yaitu $f_1(x_1)$ dapat dicari dengan mensubstitusi persamaan (3.3) ke dalam Definisi 2.8, yaitu:

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2)\, dx_2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dx_2$$

Misalkan $p = \dfrac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}$. Maka,

$$f_1(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho p\frac{(\ln x_1 - \mu_1)}{\sigma_1} + p^2\right]\right\} x_2\sigma_2\, dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho p\frac{(\ln x_1 - \mu_1)}{\sigma_1} + p^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho p\frac{(\ln x_1 - \mu_1)}{\sigma_1} + p^2 - \rho^2\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + p^2 - 2\rho p\frac{(\ln x_1-\mu_1)}{\sigma_1} + \rho^2\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[p^2 - 2\rho p\frac{(\ln x_1-\mu_1)}{\sigma_1} + \rho^2\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[p-\rho\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{p-\rho\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} dp.$$

Misalkan $\zeta = \dfrac{p - \rho\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Maka,

$$p - \rho\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) = \zeta\sqrt{1-\rho^2}$$

$$p = \zeta\sqrt{1-\rho^2} + \rho\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)$$

$$dp = \sqrt{1-\rho^2}\,d\zeta$$

Sehingga, dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan di atas, diperoleh:

$f_1(x_1)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\right\}\sqrt{1-\rho^2}\,d\zeta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\right\}d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1 x_1}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}.\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\}d\zeta$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\}d\zeta$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\}d\zeta$$

Berdasarkan sifat fungsi kepadatan peluang normal baku, nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\} d\zeta = 1$$

maka,

$$f_1(x_1) = \frac{1}{x_1\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \qquad (3.4)$$

untuk $0 < \ln x_1 < \infty$, $\sigma_1 > 0$, $0 < \mu_1 < \infty$. $f_1(x_1)$ menyatakan distribusi marginal dari umur suatu properti.

Dengan menggunakan cara yang sama, kepadatan marginal dari x_2 yaitu $f_2(x_2)$ dapat dicari dengan mensubstitusikan Persamaan (3.3) ke dalam Definisi 2.8, yaitu:

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) dx_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dx_1.$$

Misalkan $q = \frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}$. Maka,

$$f_2(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q\frac{(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} x_1\sigma_1 dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q\frac{(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q\frac{(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) + q^2 - 2\rho q\,\frac{(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} + \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q\frac{(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_2} + \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q - \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]^2\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{q - \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} dq.$$

Misalkan $\eta = \dfrac{q - \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Maka

$$q - \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right) = \eta\sqrt{1-\rho^2}$$

$$q = \eta\sqrt{1-\rho^2} + \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$dq = \sqrt{1-\rho^2}\, d\eta$$

Sehingga, dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan di atas, diperoleh:

$f_2(x_2)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right\} \sqrt{1-\rho^2}\, d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_2 x_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\, x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}. \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\, x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\, x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

Berdasarkan sifat fungsi kepadatan peluang normal baku, nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\} d\zeta = 1$$

Maka,

$$f_2(x_2) = \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} \qquad (3.5)$$

untuk $0 < \ln x_2 < \infty$, $\sigma_2 > 0$, $0 < \mu_2 < \infty$. $f_1(x_2)$ merupakan distribusi marginal dari *value* suatu properti.

Fungsi kepadatan peluang bersyarat $f(x_1|x_2)$ dapat dicari dengan memasukkan Persamaan (3.3) dan (3.5) ke dalam Definisi 2.9, maka diperoleh:

$$\begin{aligned} f(x_1|x_2) \\ = \frac{1}{\sigma_1 x_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Bigg\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Bigg[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 \\ - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\Bigg] \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\Bigg\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - (1-\rho^2)\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + (1-(1-\rho^2))\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right) - \rho\left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 x_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x_1 - \mu_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{x_1\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x_1 - \left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\ln x_2 - \mu_2)\right)}{\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

Berdasarkan fungsi kepadatan di atas, $f(x_1|x_2)$ merupakan fungsi kepadatan peluang berdistribusi lognormal dengan rata-ratanya $(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\ln x_2 - \mu_2))$ dan variansinya adalah $(\sigma_1{}^2(1 - \rho 2)$. Selanjutnya distribusi bersyarat *f(x2/x1)* dapat dicari dengan memasukkan Persamaan (3.3) dan (3.4) ke dalam Definisi 2.9, maka diperoleh:

$$f(x_2|x_1)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sigma_2 x_2 \sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right. \\ &\qquad \left. - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sigma_2 x_2 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right.\right. \\ &\qquad - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2 \\ &\qquad \left.\left. - (1-\rho^2)\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1-\mu_1)(\ln x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + (1-(1-\rho^2))\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1-\mu_1)(\ln x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \rho^2\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\left(\frac{\ln x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right) - \rho\left(\frac{\ln x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_2 x_2\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x_2-\mu_2-\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\ln x_1-\mu_1)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{x_2\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{(1-\rho^2)}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln x_2-\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\ln x_1-\mu_1)\right)}{\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\}$$

Berdasarkan fungsi kepadatan diatas, $f(x_2|x_1)$ merupakan fungsi kepadatan peluang berdistribusi lognormal dengan parameter, rata-ratanya $(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\ln x_1 - \mu_1))$ dan variansinya $\sigma_2{}^2(1-\rho^2)$.

Selanjutnya dengan menggunakan Definisi 2.4, 2.5, dan 2.6 dapat dicari momen-momen dari distribusi tersebut. Bila *X* didistribusikan lognormal:

$$f(x,\mu,\sigma) = \frac{1}{x\,\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

maka,

$$\mu_r^1(\mathrm{x}) = \exp\left(\mu_r + r^2\frac{\sigma^2}{2}\right)$$

untuk $r = 1$ diperoleh:

$$E(X) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

Berdasarkan persamaan tersebut, maka rata-rata untuk X_1 adalah:

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = \exp\left(\mu_1 + \frac{\sigma_1{}^2}{2}\right) \tag{3.6}$$

dan rata-rata untuk X_2 adalah:

$$E(X_2) = \exp\left(\mu_2 + \frac{\sigma_2{}^2}{2}\right).$$

Pencarian momen pertama diatas dari distribusi lognormal, dapat dianalogkan dengan pencarian momen pertama dari fungsi bersyarat distribusi *bivariate* lognormal. Sehingga, ekspektasi bersyarat dari distribusi *bivariate* lognormal tersebut adalah:

$$E(X_1|\,X_2) = \exp\left\{\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(ln\,x_2-\mu_2) + \frac{\left(\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}\right)^2}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\ln x_2 - \mu_2) + \frac{{\sigma_1}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\ln x_2 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2 + \frac{{\sigma_1}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}$$

$$= {x_2}^{\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \exp\left\{\mu_1 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2 + \frac{{\sigma_1}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}$$

Sedangkan ekspektasi bersyarat selainnya yaitu:

$$E(X_2|\,X_1) = \exp\left\{\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\ln x_1 - \mu_1) + \frac{\left(\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\right)^2}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\ln x_1 - \mu_1) + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}$$

$$= \exp\left\{\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\ln x_1 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}$$

$$= {x_1}^{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\} \tag{3.7}$$

3.3 Estimasi Distribusi *Bivariate* Lognormal Menggunakan Maksimum Likelihood

Estimasi parameter-parameter pada distribusi *bivariate* lognormal menggunakan maksimum likelihood dapat dianalisa terlebih dahulu menggunakan estimasi distribusi *multivariate*-nya. Oleh karena distribusi lognormal merupakan perluasan dari distribusi normal, maka estimasi distribusi *multivariate* lognormal dapat diperoleh dari estimasi distribusi *multivariate* normal.

Berdasarkan definisi, distribusi lognormal adalah fungsi kepadatan sebuah peubah yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi normal. Jika f_{L} merupakan fungsi distribusi lognormal dan

f_{N} merupakan fungsi distribusi normal maka hubungan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$f_{\mathrm{L}}(x_1, x_2, \dots, x_p; \mu, \Sigma) = f_{\mathrm{N}}(ln\, x_1, lnx_2, \dots, lnx_p; \mu, \Sigma)$$

Fungsi likelihood kepadatan distribusi *multivariate* lognormalnya (*p*-peubah) yaitu:

$$f_{\mathrm{L}}(x_1, x_2, \dots, x_p; \mu, \Sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_{\mathrm{N}}(ln\, x_1, lnx_2, \dots, lnx_n; \mu, \Sigma)$$

Mengacu pada Tinjauan Pustaka (2.3.2) tentang distribusi *multivariate* normal, maka fungsi likelihood distribusi *multivariate* lognormalnya menjadi,

$$f_{\mathrm{L}}(\mu, \Sigma)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{x_1 x_2 \dots x_p}\right) \frac{1}{\sqrt[p]{2\pi}\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(ln\, x_i - \mu)^T\, \Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu)\right\}$$

$$= \left(x_1 x_2 \dots x_p\right)^{-n} (2\pi\,)^{-\frac{np}{2}} (|\Sigma|)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}(ln\, x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu)\right\}$$

Sehingga fungsi log-likelihoodnya,

$$l_{\mathrm{L}}(\mu, \Sigma) = -n\, ln\left(x_1 x_2 \dots x_p\right) - \frac{np}{2} ln(2\pi\,) - \frac{n}{2} ln|\Sigma| - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (ln\, x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu)$$

maksimum likelihood untuk parameter vektor μ yaitu:

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(ln\, x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu)}{\partial \mu}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d(ln\, x_i - \mu)^T}{\partial \mu} \Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu) + (ln\, x_i - \mu)^T \frac{d\Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu)}{\partial \mu}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ln\, x_i - \mu)^T\, (\Sigma^{-1})^T\, \frac{d(ln\, x_i - \mu)}{\partial \mu} (ln\, x_i - \mu) + (ln\, x_i - \mu)^T \frac{d\Sigma^{-1}(ln\, x_i - \mu)}{\partial \mu}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -(ln\, x_i - \mu)^T\, (\Sigma^{-1})^T\, - (ln\, x_i - \mu)^T \Sigma^{-1}$$

Karena Σ merupakan matriks simetris, maka persamaan di atas menjadi.

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = -2 \sum_{i=1}^{n} (ln\, x_i - \mu)^T\, \Sigma^{-1}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = 0 \rightarrow -2 \sum_{i=1}^{n} (ln\, x_i - \mu)^T\, \Sigma^{-1} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} (ln\, x_i - \mu)^T\, = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} ln\, x_i - \mathrm{n}\mu\, = 0$$

$$\mathrm{n}\mu = \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i$$

sehingga estimasi parameter μ adalah:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i \qquad (3.8)$$

Maksimum likelihood untuk parameter Σ,

$$l_{\mathrm{L}}(\mu, \Sigma) = -n\, ln\left(x_1 x_2 \dots x_p\right) - \frac{np}{2} ln(2\pi\,) + \frac{n}{2} ln|\Sigma|^{-1}$$
$$- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr\,(\,\Sigma^{-1}(ln\,x_i - \mu)(ln\,x_i - \mu)^T)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \Sigma^{-1}} = \frac{\frac{n}{2} ln|\Sigma|^{-1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr\,(\,\Sigma^{-1}(ln\,x_i - \mu)(ln\,x_i - \mu)^T)}{\partial \Sigma^{-1}}$$

$$\frac{\partial l}{\partial \Sigma^{-1}} = 0$$

$$\frac{n}{2}\Sigma - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ln\,x_i - \mu)(ln\,x_i - \mu)^T = 0$$

$$\frac{n}{2}\Sigma = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(ln\,x_i - \mu)(ln\,x_i - \mu)^T$$

$$\Sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\,x_i - \mu)(ln\,x_i - \mu)^T$$

sehingga estimasi parameter Σ adalah:

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\,x_i - \hat{\mu})(ln\,x_i - \hat{\mu})^T \qquad (3.9)$$

Dalam kasus *bivariate,* rata-ratanya diperluas menjadi vektor rata-rata berukuran 2 x 1 sedangkan variansi σ^2 diperluas menjadi Σ yang merupakan matriks simetri berukuran 2 x 2. Keduanya dapat ditulis sebagai berikut,

$$\mu = \begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix} \text{ dan } \Sigma = \begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}{\sigma_1}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & {\sigma_2}^2\end{pmatrix} \;;\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

berdasarkan Persamaan (3.7) maka,

$$\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln\, x_i$$

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln\, x_{1i}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} ln\, x_{2i}$$

Dan berdasarkan Persamaan (3.8) maka,

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1{}^2 & \hat{\sigma}_{12} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_2{}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} (ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1) & (ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}) \\ (ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2) & (ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} (ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)^2 & (ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2) \\ (ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2) & (ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2)^2 \end{pmatrix}$$

Sehingga,

$$\hat{\sigma}_1{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}_2{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2)^2}{n}$$

$$\hat{\sigma}_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2)}{n}$$

3.4 Proporsi Total *Value* Saat Umur Tertentu

Proporsi total *value* properti disimbulkan S(t) yang menyatakan perbandingan total value setelah waktu hidup (*life time*) terhadap total *value* dari suatu properti secara keseluruhan. Proporsi total *value* pada kasus diskrit dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\mathrm{S}(t) = \frac{\sum_{i \to T \geq t} x_{2i}}{\sum_{i=1}^{n} x_{2i}}$$

$$= \frac{\sum_{i \to T \geq t} \frac{x_{2i} n_t}{n_t \;\; n}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i}}{n}}$$

$$= \frac{\mathrm{E}(x_2 | T \geq t)\, \bar{\mathrm{S}}\,(t)}{E(x_2)}$$

dimana,

T : waktu hidup(*life time*)

t : waktu yang akan dicari nilai proporsinya

N_t : jumlah *value* yang mencapai umur *t*

N : jumlah *value* keseluruhan

Oleh karena distribusi lognormal merupakan distribusi kontinu, maka S(t) harus diubah ke dalam bentuk fungsi yang kontinu. Proporsi yang kontinu dapat diperoleh dengan menganalogkan S(t) kasus diskrit di atas, sehingga S(t) pada kasus kontinu diformulasikan sebagai berikut:

$$\mathrm{S}(t) = \frac{\int_{\mathrm{t}}^{\infty} \mathrm{E}(x_2 |\, x_1) \bar{\mathrm{S}}\,(t)}{E(x_2)}$$

$$= \frac{\frac{\int_{\mathrm{t}}^{\infty} \mathrm{E}(x_2 |\, x_1) f_1(x_1) dx_1 \bar{\mathrm{S}}\,(t)}{\int_{\mathrm{t}}^{\infty} f_1\,(x_1) dx_1}}{E(x_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{\int_t^{\infty} \mathrm{E}(x_2|\, x_1) f_1(x_1) dx_1 \bar{\mathrm{S}}\,(t)}{\bar{\mathrm{S}}\,(t)}}{E(x_2)}$$

$$= \frac{\int_t^{\infty} \mathrm{E}(x_2|\, x_1) f_1(x_1) dx_1}{E(x_2)} \qquad (3.10)$$

Proporsi total *value* saat umur tertentu dapat diperoleh dengan mensubstitusi Persamaan (3.5), (3.6) dan (3.7) ke dalam persamaan (3.10) dan untuk mempermudah perhitungan, akan dihitung pembilang terlebih dahulu.

$$\int_t^{\infty} \mathrm{E}(x_2|\, x_1)\, f_1\,(x_1) dx_1$$

$$= \int_t^{\infty} \; x_1^{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2\,)}{2}\right\}.\frac{1}{x_1\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(\ln x_1 - \mu_1\right)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} dx_1$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2\,)}{2}\right\}.\int_t^{\infty} \frac{x_1^{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{x_1\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(\ln x_1 - \mu_1\right)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} dx_1$$

Misalkan *ln* $x_1 = \zeta$. Maka,

$$\int_t^{\infty} \mathrm{E}(x_2|\, x_1)\; f_1(x_1)\, dx_1$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\int_{\ln t}^{\infty} \frac{{x_1}^{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{x_1\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}x_1 d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\int_{\ln t}^{\infty} \frac{{x_1}^{\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\zeta\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}\exp\left\{\frac{-(\zeta^2-2\mu_1\zeta+{\mu_1}^2)}{2{\sigma_1}^2}\right\}d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta^2-2\mu_1\zeta+{\mu_1}^2)}{2{\sigma_1}^2}+\zeta\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right\}d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(\zeta^2-2\mu_1\zeta+{\mu_1}^2\right)+2{\sigma_1}^2\zeta\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{2{\sigma_1}^2}\right\}d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(\zeta^2-2\mu_1\zeta+{\mu_1}^2-2\zeta\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{2{\sigma_1}^2}\right\}d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}. \int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(\zeta^2 - 2\mu_1\zeta + {\mu_1}^2 - 2\zeta\rho\sigma_1\sigma_2\right)}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}. \int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(\zeta^2 - 2\zeta(\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2) + {\mu_1}^2\right)}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}. \int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp \left\{\frac{-\left(\zeta^2 - 2\zeta(\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2\right) + {\mu_1}^2 + (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)^2 - (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}. \int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp \left\{\frac{-\left(\zeta^2 - 2\zeta(\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2\right) + (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)^2 + {\mu_1}^2 - (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}. \int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp \left\{\frac{-\left(\zeta^2 - (\mu_1 + \rho\,\sigma_1\sigma_2)\right)^2 + {\mu_1}^2 - (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}. \int_{\ln t}^{\infty} \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(\zeta^2 - (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)\right)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} \exp\left\{\frac{-{\mu_1}^2 + (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\} d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_1}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\exp$$

$$\left\{\frac{2\mu_1\rho\sigma_1\sigma_2 + \rho^2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{2{\sigma_2}^2}\right\}\int_{\ln t}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(\zeta^2-(\mu_1+\rho\sigma_1\sigma_2)\right)^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}d\zeta$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_1}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\exp\left\{\frac{2\mu_1\rho\sigma_1\sigma_2}{2{\sigma_1}^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\rho^2{\sigma_1}^2{\sigma_2}^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}\int_{\ln t}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta^2-(\mu_1+\rho\sigma_1\sigma_2))^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}d\zeta \quad (3.11)$$

Mengacu pada Persamaan 2.1,

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta^2-(\mu_1+\rho\sigma_1\sigma_2))^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}$$

analog dengan fungsi kepadatan peluang distribusi normal dengan rata-rata $(\mu_2 + \rho\,\sigma_1\sigma_2)$ dan variannya σ_2. Fungsi tersebut dapat dibentuk ke dalam distribusi normal baku dengan cara distandarisasi.

$$Z = \frac{\zeta - (\mu_1 + \rho\sigma_1\sigma_2)}{\sigma_1}$$

Berdasarkan sifat fungsi kepadatan peluang kontinu pada Definisi 2.2, maka nilai

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta^2-(\mu_1+\rho\sigma_1\sigma_2))^2}{2{\sigma_1}^2}\right\}d\zeta = 1$$

Sehingga,

$$\int_{\ln t}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-(\zeta^2-(\mu_1+\rho\sigma_1\sigma_2))^2}{2{\sigma_1}^2}d\zeta\right\}$$

$$= \int_{ln\ t}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\}dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\}dz - \int_{-\infty}^{ln\,t}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{z^2}\right\}dz$$

$$= 1 - \Phi(z)$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln t\ - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

Sehingga Persamaan 3.11 menjadi:

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2}\right\}.\exp\left\{\frac{\mu_1\rho\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\rho^2{\sigma_2}^2}{2}\right\}$$
$$\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{t} - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)\right)$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2(1-\rho^2)}{2} + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{\rho^2{\sigma_2}^2}{2}\right\}$$
$$\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{t} - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)\right)$$

$$= \exp\left\{\mu_2 - \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{{\sigma_2}^2}{2} - \frac{\rho^2{\sigma_2}^2}{2} + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\mu_1 + \frac{\rho^2{\sigma_2}^2}{2}\right\}$$
$$\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{t} - \mu_2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2}\right)\right)$$

$$= \exp\left\{\mu_2 + \frac{{\sigma_2}^2}{2}\right\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{t} - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)\right) \qquad (3.12)$$

Selanjutnya, disubstitusikan Persamaan (3.12) dan (3.6) ke dalam Persamaan (3.9) sehingga,

$$S(t) = \frac{\exp\left\{\mu_2 + \frac{{\sigma_2}^2}{2}\right\}\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{t} - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)\right)}{\exp\left\{\mu_2 + \frac{{\sigma_2}^2}{2}\right\}}$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

Berdasarkan Definisi 2.12 tentang koefisien korelasi, maka persamaan tersebut menjadi:

$$S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln \mathrm{t} - \mu_1 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1}\right)$$

Estimasi proporsi total *value* pada property dapat diperoleh dari mengganti parameternya dengan statistic sampel (parameter yang telah diestimasi), maka persamaan di atas menjadi:

$$\hat{S}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \hat{\mu}_1 - \hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1}\right) \tag{3.13}$$

Sehingga apabila mean, varian, dan kovarian sampel diketahui maka proporsi total *value* dapat dihitung.

3.5 Aplikasi Model Distribusi *Bivariate* Lognormal pada Properti

Berikut ini merupakan simulasi tentang properti yang mengaplikasikan model distribusi *bivariate* lognormal. Data ini merupakan data bangkitan sebanyak 20 data yang berdistribusi lognormal dengan μ_1 = 1,394964; μ_2 = 1,542626; σ_1= 1,071679 dan σ_2= 1,408988. Properti dalam hal ini adalah suatu mesin produksi yang mengalami depresiasi. Data umur dan *value* mesin tersebut disajikan pada tabel di bawah ini.

Tabel 3.1 Data Bangkitan *Bivariate* Lognormal

data ke-*i*	x_{1i}	x_{2i}
1	1,446779	60,541495
2	1,566082	44,308831
3	1,604020	39,070277
4	1,683706	20,162552
5	2,202004	14,774578
6	2,502509	9,228947
7	2,780734	4,563017

Tabel 3.1 Data Bangkitan *Bivariate* Lognormal (Lanjutan)

8	2,815314	3,484261
9	2,844599	2,953285
10	2,865818	2,695582
11	3,061087	2,540602
12	3,147555	2,163090
13	3,199463	2,089099
14	3,276802	2,034602
15	3,288798	1,967870
16	4,158877	1,869279
17	4,163013	1,849980
18	9,952900	1,707197
19	18,971863	1,673346
20	148,199746	1,513544

Dalam permasalahan tersebut, untuk menghitung proporsi total *value* mesin produksi dapat menggunakan model distribusi *bivariate* lognormal. Kemudian dimisalkan peubah X_1 menyatakan umur dan peubah X_2 menyatakan *value*. Oleh karena berdistribusi *bivariate* lognormal, maka terlebih dahulu dicari logaritma dari peubah-peubahnya. Sehingga diperoleh suatu data baru, sebagai berikut:

Tabel 3.2 Nilai-Nilai Peubah Umur dan *Value* Mesin Produksi dari Data Bangkitan Distribusi *Bivariate* Lognormal

data ke-i	umur(tahun) x_{1i}	*value*(rupiah) x_{2i}	ln x_{1i}	ln x_{2i}
1	1,446779	60,541495	0,369340	4,103329
2	1,566082	44,308831	0,448577	3,791184
3	1,604020	39,070277	0,472513	3,665362
4	1,683706	20,162552	0,520997	3,003827
5	2,202004	14,774578	0,789368	2,692908
6	2,502509	9,228947	0,917294	2,222345
7	2,780734	4,563017	1,022715	1,517984
8	2,815314	3,484261	1,035074	1,248256

Tabel 3.2 Nilai-Nilai Peubah Umur dan *Value* Mesin Produksi dari Data Bangkitan Distribusi *Bivariate* Lognormal (Lanjutan)

9	2,844599	2,953285	1,045422	1,082918
10	2,865818	2,695582	1,052854	0,991614
11	3,061087	2,540602	1,118770	0,932401
12	3,147555	2,163090	1,146626	0,771538
13	3,199463	2,089099	1,162983	0,736733
14	3,276802	2,034602	1,186868	0,710300
15	3,288798	1,967870	1,190522	0,676952
16	4,158877	1,869279	1,425245	0,625553
17	4,163013	1,849980	1,426239	0,615175
18	9,952900	1,707197	2,297864	0,534853
19	18,971863	1,673346	2,942957	0,514825
20	148,199746	1,513544	4,998561	0,414454

Nilai estimasi parameter-parameter dari distribusi *bivariate* lognormal umur dan *value* mesin produksi dapat diperoleh dari memasukkan data-data di atas ke dalam estimasi dari parameter-parameter maksimum likelihood pada pembahasan sebelumnya. Nilai estimasi rata-rata untuk X_1 yaitu:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\, x_{1i}$$

$$= \frac{1}{20}(0{,}36934 + 0{,}448577 + 0{,}472513 + 0{,}520997 + 0{,}789368 + 0{,}917294 + 1{,}022715 + 1{,}035074 + 1{,}045422 + 1{,}052854 + 1{,}11877 + 1{,}146626 + 1{,}162983 + 1{,}186868 + 1{,}190522 + 1{,}425245 + 1{,}426239 + 2{,}297864 + 2{,}942957 + 4{,}998561)$$

$$= \frac{1}{20}(26{,}570789)$$

$$= 1{,}328539$$

Sedangkan estimasi rata-rata untuk X_2 yaitu:

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} ln\, x_{2i}$$

$= \frac{1}{20}$ (4,103329 + 3,791184 + 3,665362 + 3,003827 + 2,692908 + 2,222345 + 1,517984 + 1,248256 + 1,082918 + 0,991614 + 0,932401 + 0,771538 + 0,736733 + 0,710300 + 0,676952 + 0,625553 + 0,615175 + 0,534853 + 0,514825 + 0,414454)

$= \frac{1}{20}$ (30,852511)

= 1,542626

Nilai estimasi dari simpangan baku peubah X_1 adalah:

$$\hat{\sigma}_1{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1\right)^2$$

$= \frac{1}{20}\ ((0{,}369340 - 1{,}328539)^2 + (0{,}448577 - 1{,}328539)^2 + (0{,}472513 - 1{,}328539)^2 + (0{,}520997 - 1{,}328539)^2 + (0{,}789368 - 1{,}328539)^2 + (0{,}917294 - 1{,}328539)^2 + (1{,}022715 - 1{,}328539)^2 + (1{,}035074 - 1{,}328539)^2 + (1{,}045422 - 1{,}328539)^2 + (1{,}052854 - 1{,}328539)^2 + (1{,}118770 - 1{,}328539)^2 + (1{,}146626 - 1{,}328539)^2 + (1{,}162983 - 1{,}328539)^2 + (1{,}186868 - 1{,}328539)^2 + (1{,}190522 - 1{,}328539)^2 + (1{,}425245 - 1{,}328539)^2 + (1{,}426239 - 1{,}328539)^2 + (2{,}297864 - 1{,}328539)^2 + (2{,}942957 - 1{,}328539)^2 + (4{,}998561 - 1{,}328539)^2)$

$= \frac{1}{20}\ ((-0{,}959199)^2 + (-0{,}879962)^2 + (-0{,}856026)^2 + (-0{,}807542)^2 + (-0{,}539172)^2 + (-0{,}411246)^2 + (-0{,}305824)^2 + (-0{,}293466)^2 + (-0{,}283118)^2 + (-0{,}275686)^2 + (-0{,}209770)^2 + (-0{,}181914)^2 + (-0{,}165556)^2 + (-0{,}141672)^2 + (-0{,}138018)^2 + (0{,}096706)^2 + (0{,}097700)^2 + (0{,}969324)^2 + (1{,}614418)^2 + (3{,}670022)^2\ )$

$= \frac{1}{20}$ (0,920064 + 0,774334 + 0,732781 + 0,652125 + 0,290706 + 0,169123 + 0,093529 + 0,086122 + 0,080156 + 0,076002 + 0,044003 + 0,033092 + 0,027409 + 0,020071 + 0,019049 + 0,009352 + 0,009545 + 0,939590 + 2,606344 + 13,469058)

$= \frac{1}{20}$ (21,052454)

= 1,052623

$$\hat{\sigma}_1 = \sqrt{1,052623} = 1,025974 \tag{3.14}$$

Sedangkan nilai estimasi dari simpangan baku peubah X_2 adalah:

$$\hat{\sigma}_2{}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(ln\ x_{2i} - \hat{\mu}_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{20}\left((4,103329 - 1,542626)^2 + (3,791184 - 1,542626)^2 + (3,665362 - 1,542626)^2 + (3,003827 - 1,542626)^2 + (2,692908 - 1,542626)^2 + (2,222345 - 1,542626)^2 + (1,517984 - 1,542626)^2 + (1,248256 - 1,542626)^2 + (1,082918 - 1,542626)^2 + (0,991614 - 1,542626)^2 + (0,932401 - 1,542626)^2 + (0,771538 - 1,542626)^2 + (0,736733 - 1,542626)^2 + (0,710300 - 1,542626)^2 + (0,676952 - 1,542626)^2 + (0,625553 - 1,542626)^2 + (0,615175 - 1,542626)^2 + (0,534853 - 1,542626)^2 + (0,514825 - 1,542626)^2 + (0,414454 - 1,542626)^2\right)$$

$$= \frac{1}{20}\left((2,560703)^2 + (2,248558)^2 + (2,122736)^2 + (1,461201)^2 + (1,150282)^2 + (0,679719)^2 + (-0,024642)^2 + (-0,294370)^2 + (-0,459708)^2 + (-0,551012)^2 + (-0,610225)^2 + (-0,771088)^2 + (-0,805893)^2 + (-0,832326)^2 + (-0,865674)^2 + (-0,917073)^2 + (-0,927451)^2 + (-1,007773)^2 + (-1,027801)^2 + (-1,128172)^2\right)$$

$= \frac{1}{20}$ (6,557202 + 5,056015 + 4,506010 + 2,135110 + 1,323150+ 0,462018 + 0,000607 + 0,086654 + 0,211331 + 0,303614 +

0,372374 + 0,594576 + 0,649463 + 0,692766 + 0,749391 + 0,841022 + 0,860165 + 1,015606 + 1,056374 + 1,272771)

$= \frac{1}{20}$ (28,746217)

= 1,437311

$\hat{\sigma}_2 = \sqrt{1,437311}$ = 1,198879 (3.15)

Nilai estimasi kovarian antara X_1 dan X_2 adalah:

$$\hat{\sigma}_{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\, x_{1i} - \hat{\mu}_1)(ln\, x_{2i} - \hat{\mu}_2)$$

$= \frac{1}{20}$ ((0,36934 - 1,328539) (4,103329 - 1,542626) + (0,448577 - 1,328539) (3,791184 - 1,542626) + (0,472513 - 1,328539) (3,665362 - 1,542626) + (0,520997 - 1,328539) (3,003827 - 1,542626) + (0,789368 - 1,328539) (2,692908 - 1,542626) + (0,917294 - 1,328539) (2,222345 - 1,542626) + (1,022715 - 1,328539) (1,517984 - 1,542626) + (1,035074 - 1,328539) (1,248256 - 1,542626) + (1,045422 - 1,328539) (1,082918 - 1,542626) + (1,052854 - 1,328539) (0,991614 - 1,542626) + (1,118770 - 1,328539) (0,932401 - 1,542626) + (1,146626 - 1,328539) (0,771538 - 1,542626) + (1,162983 - 1,328539) (0,736733 - 1,542626) + (1,186868 - 1,328539) (0,710300 - 1,542626) + (1,190522 - 1,328539) (0,676952 - 1,542626) + (1,425245 - 1,328539) (0,625553 - 1,542626) + (1,426239 - 1,328539) (0,615175 - 1,542626) + (2,297864- 1,328539) (0,534853- 1,542626) + (2,942957 - 1,328539) (0,514825- 1,542626) + (4,998561- 1,328539) (0,414454 - 1,542626))

$= \frac{1}{20}$ (-2,456225 - 1,978647 - 1,817118 - 1,179982 - 0,620200 - 0,279532 + 0,007536 + 0,086387 + 0,130151 + 0,151906 + 0,128006 + 0,140271 + 0,133421 + 0,117917 + 0,119478 - 0,088686 - 0,090612 - 0,976859 - 1,659299 - 4,140414)

$= \frac{1}{20}$ (- 14,272500)

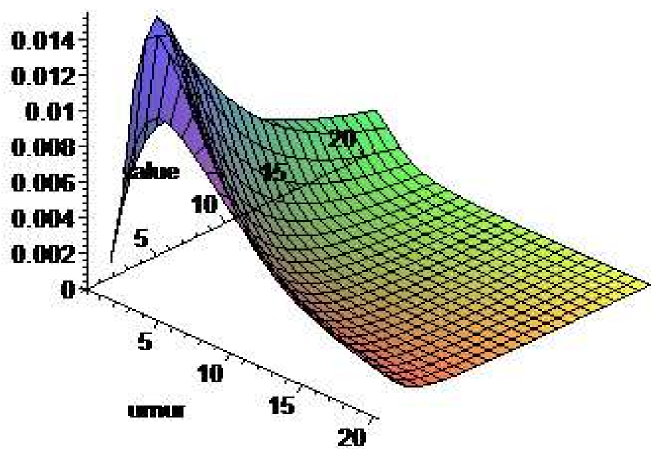
= - 0,713625 (3.16)

Nilai estimasi koefisien korelasi antara X_1 dan X_2 dapat diperoleh dengan mensubstitusi Persamaan (3.14), (3.15), dan (3.16) ke dalam Definisi 2.12, diperoleh:

$$\hat{\rho} = \frac{\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2} = \frac{-0{,}713625}{1{,}025974 \text{ x } 1{,}198879} = -\ 0{,}580174$$

Berikut merupakan plot dari distribusi *bivariate* lognormal umur (X_1) dan *value* (X_2) dengan $\hat{\mu}_1$ = 1,328539; $\hat{\mu}_2$ =1,542626; $\hat{\sigma}_1$ =1,025974; $\hat{\sigma}_2$ = 1,198879 dan $\hat{\rho}$ = - 0,580174.

.



Gambar 3.2 Distribusi *Bivariate* Lognormal Umur dan *Value* Properti pada Aplikasi Model

Nilai parameter-parameter data bangkitan distribusi lognormal di atas μ_1 =1,394964; μ_2 =1,542626; σ_1=1,071679 dan σ_2=1,408988. Sedangkan nilai parameter-parameter dari perhitungan $\hat{\mu}_1$=1,328539; $\hat{\mu}_2$=1,542626; $\hat{\sigma}_1$ =1,025974; $\hat{\sigma}_2$ = 1,198879 dan $\hat{\rho}$ = - 0,580174. Selisih antara nilai dari masing-masing parameter data bangkitan dan nilai masing-masing parameter dengan perhitungan tidak terlalu besar. Meski nilai ketakbiasan parameter tidak terpenuhi, tapi selisih nilai masing-masing parameter masih relatif kecil.

Proporsi total *value* dari mesin produksi dapat dicari dengan dengan menggunakan rumus S(t) pada Persamaan (3.12). Semisal ingin menghitung nila *value* saat berumur satu, empat dan dua puluh tahun maka,

$$\begin{aligned}
\hat{S}(1) &= 1-\Phi\left(\frac{\ln 1-\hat{\mu}_1-\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1}\right)\\
&= 1-\Phi\left(\frac{0-1{,}328539+0{,}713625}{1{,}025974}\right)\\
&= 1-\Phi(-0{,}614914)\\
&= 1-0{,}2709\\
&= 0{,}7291
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}(4) &= 1-\Phi\left(\frac{\ln 4-\hat{\mu}_2-\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_2}\right)\\
&= 1-\Phi\left(\frac{1{,}3862944-1{,}328539+0{,}713625}{1{,}025974}\right)\\
&= 1-\Phi(0{,}713625)\\
&= 1-0{,}7611\\
&= 0{,}2389
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{S}(20) &= 1-\Phi\left(\frac{\ln 20-\hat{\mu}_2-\hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_2}\right)\\
&= 1-\Phi\left(\frac{2{,}9957323-1{,}328539+0{,}713625}{1{,}025974}\right)\\
&= 1-\Phi(2{,}380818)\\
&= 1-0{,}9913\\
&= 0{,}0087
\end{aligned}$$

Notasi Φ merupakan fungsi distribusi kumulatif normal baku yang nilainya dapat dilihat pada tabel Lampiran 2. Berdasarkan perhitungan di atas, proporsi total *value* dari mesin produksi saat berumur satu tahun adalah 0,7291; saat berumur empat tahun adalah 0,2389 dan saat berumur dua puluh tahun adalah 0,0087. Dengan kata lain, setelah pemakaian mesin produksi selama satu tahun, sisa nilai *value*-nya 72,91%; setelah pemakaian mesin produksi selama empat tahun, sisa nilai *value*-nya berkurang menjadi 23,89% dan setelah pemakaian mesin produksi selama dua puluh tahun, nilai *value*-nya berkurang lagi menjadi 0,87%. Hal ini menunjukkan bahwa, semakin bertambahnya usia dari properti maka nilai proporsi total *value*-nya semakin berkurang.

BAB IV
KESIMPULAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bab sebelumnya, kesimpulan yang diperoleh yaitu:

1. Pada kasus depresiasi properti dapat diturunkan model distribusi gabungan antara *value* dan umur yaitu distribusi *bivariate* lognormal. Fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2 x_1 x_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{\ln x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(\ln x_1 - \mu_1)(\ln x_2 - \mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{\ln x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}.$$

   untuk $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ dan σ_1, σ_2, μ_1, μ_2, ρ merupakan parameter sedemikian sehingga $-1 \leq \rho \leq 1$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $-\infty < \mu_1 < \infty$, dan $-\infty < \mu_2 < \infty$, dengan X_1 menyatakan variabel umur dan X_2 menyatakan *value* dari suatu properti.

2. Distribusi *bivariate* lognormal antara *value* dan umur dengan estimasi parameter-parameternya menggunakan metode maksimum likelihood menyajikan $\hat{S}(t)$ atau proporsi total *value* properti yang merupakan perbandingan total *value* setelah waktu hidup *(life time)* terhadap total *value* keseluruhan dari suatu properti, dan dinyatakan sebagai:

$$\hat{S}(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln t - \hat{\mu}_1 - \hat{\sigma}_{12}}{\hat{\sigma}_1}\right)$$

   semakin usia dari properti bertambah maka nilai proporsi total *value* properti semakin berkurang

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 2003. *Aljabar Linear Elementer*. Erlangga. Jakarta.

Anton, H. dan C. Rorres. 2000. *Aljabar Linear Elementer: Versi Aplikasi*. Erlangga. Jakarta.

Anton, H. dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi ke-8, terjemahan Refina Indriasari dan Irzan Harmein. Erlangga. Jakarta.

Boediono dan Wayan Koester. 2001. *Statistika dan Probabilitas*. PT Remaja Rosdakarya. Bandung.

Bissinger, B.H. 1981. *A Long Life Analysis*. The Statistican 30:15-21.

Cullen, C.G. 1993. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*. PT. Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Fisz, Marek. 1963. *Probability Theory and Mathematical Statistics.* John Wiley and Sons, Inc. New York.

Gross, A. J. dan Clark Virginia. 1975. *Distribution Life Expectancy, Reability and Biometry Statistics*. John Wiley and Sons, Inc. New york.

Hines, W.W. dan D.C. Montgomery. 1990. *Probabilita dan Statistik Dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. Edisi kedua, Universitas Indonesia Press. Jakarta.

Hogg, R.V. dan Allen Craig. 2005. *Introduction to Mathematical Statitics*. Sixth Edition, United States of America.

Johnson, R.A. and D.W. Wichern. 1992. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Third Edition, Prentice Hall, New Jersey.

Klugman, Stuart A., H.H. Panjer, dan G.E. Wilmop. 2004. *Loss Models from Data to Decisions*. Second Edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.

Lawless, J.F. 1982. *Statistical Model and Methods for Lifetime Data*. John Wiley and Sons, Inc. New York.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*. Erlangga. Jakarta.

Milton, J.S. dan C.A. Jesse. 1996. *Introduction to Probability and Statistics*. Third edition, Mc. Graw hill, Inc. New York.

Mulyono, Slamet. 2001. *Life Analysis Bivariat Lognormal*. Kappa 2:10-20.

Saefudin, Asep, Khairil Anwar, Aam Alamudi, dan Kusman Sadik. 2009. *Statistika Dasar*. PT Grasindo. Jakarta.

Spiegel, Murray R. 1982. *Schaum's Outline Series. Theory and Problems of Probability and Statistics.* Asian Student Edition, Kin Keong Printing Co. Singapore.

Walpole, Ronald E. 1995. *Pengantar statistika*. Edisi ketiga, PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Walpole, Ronald E. dan R.H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insyinyur dan Ilmuwan*. ITB. Bandung.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Pencarian kepadatan marginal dari distribusi *bivariate* normal.

Kepadatan marginal dari x yaitu $f_1(x)$ dapat dicari dengan mensubstitusi Persamaan (2.2) ke dalam Definisi 2.8, yaitu:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dy$$

Misalkan $p = \dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}$. Maka,

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho p\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} + p^2\right]\right\} \sigma_2\,dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho p\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} + p^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho p\ \frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} + p^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 + p^2 - 2\rho p\ \frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} + \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[p^2 - 2\rho p\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1} + \rho^2\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right]\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[p-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\right]^2\right\} dp$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\ \rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{p-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} dp$$

Misalkan $\zeta = \dfrac{p-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Maka,

$$p-\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right) = \zeta\sqrt{1-\rho^2}$$

$$p = \zeta\sqrt{1-\rho^2} + \rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)$$

$$dp = \sqrt{1-\rho^2}\,d\zeta$$

Sehingga, dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan di atas, diperoleh:

$$f_1(x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\right\}\sqrt{1-\rho^2}\,d\zeta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{1}{2}\zeta^2\right\} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} . \exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\} d\zeta$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\} d\zeta$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\} . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\}d\zeta$$

karena nilai $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\zeta^2\right\}d\zeta = 1,$

maka kepadatan marginal dari *x* yaitu:

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2\right\}$$

untuk $-\infty < x < \infty$, $\sigma_1 > 0$, $0 < \mu_1 < \infty$.

Dengan menggunakan cara yang sama, kepadatan marginal dari *y* yaitu $f_2(y)$ dapat dicari dengan mensubstitusi Persamaan (2.2) ke dalam Definisi 2.8, yaitu:

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}dx$$

Misalkan $q = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}$. Maka,

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q\frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\}\sigma_1 dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q \frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q \frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \rho^2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + q^2 - 2\rho q \frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \rho^2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \rho^2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q^2 - 2\rho q \frac{(y-\mu_2)}{\sigma_2} + \rho^2\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(1-\rho^2)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right] - \frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[q - \rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]^2\right\} dq$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{q-\rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]^2\right\} dq$$

Misalkan $\eta = \frac{q-\rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sqrt{1-\rho^2}}$. Maka,

$$q-\rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) = \eta\sqrt{1-\rho^2}$$

$$q = \eta\sqrt{1-\rho^2} + \rho\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)$$

$$dq = \sqrt{1-\rho^2}\,d\eta$$

Sehingga, dengan mensubstitusikannya ke dalam persamaan di atas, diperoleh:

$$f_2(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right\}\sqrt{1-\rho^2}\,d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 - \frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_2}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}.\exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} . \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\} . \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta$$

karena nilai $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\eta^2\right\} d\eta = 1$,

maka kepadatan marginal dari y yaitu:

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}$$

untuk $-\infty < y < \infty$, $\sigma_2 > 0$, $0 < \mu_2 < \infty$.

Lampiran 2. Tabel fungsi distribusi kumulatif normal baku $\Phi(z)$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,001	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,001	0,001
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,002	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,003	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,004	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,006	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,008	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0091	0,0116	0,0113	0,011
-2,1	0,0179	0,0174	0,017	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,015	0,0146	0,0143
-2	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0278	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0265	0,025	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,063	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,102	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,123	0,121	0,119	0,117
-1	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,166	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,209	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,242	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451

Lampiran 2. Tabel fungsi distribusi kumulatif normal baku $\Phi(z)$ (lanjutan)

-0,5	0,3085	0,305	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,281	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,33	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,352	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,409	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5817	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,758	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916