GENERALIZED JORDAN LEFT DERIVATION PADA RING PRIMA

SKRIPSI

oleh

IRVANIA SUKMA KUMALA
0810940045-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

GENERALIZED JORDAN LEFT DERIVATION PADA RING PRIMA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh
IRVANIA SUKMA KUMALA
0810940045-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

GENERALIZED JORDAN LEFT DERIVATION PADA RING PRIMA

oleh

IRVANIA SUKMA KUMALA
0810940045-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 7Juni 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
<u>**Drs. Bambang Sugandi, M.Si.**</u>	<u>**Dra. Ari Andari, MS.**</u>
NIP. 195905151992031002	**NIP. 196105161987012001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

<u>**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**</u>
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Irvania Sukma Kumala**
Nim	**: 0810940045-94**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**: Generalized Jordan Left Derivation pada Ring Prima**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam daftar pustaka semata-mata digunakan sebagai acuan atau referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 7 Juni 2012
Yang menyatakan,

(Irvania Sukma Kumala)
NIM 0810940045-94

GENERALIZED JORDAN LEFT DERIVATIONS PADA RING PRIMA

ABSTRAK

Dalam skripsi ini, diperkenalkan definisi *generalized left derivation* pada ring dan *generalized Jordan left derivation* pada ring prima serta hubungan keduanya. Telah diketahui bahwa *generalized left derivation* pada ring adalah *generalized Jordan left derivation*, akan tetapi tidak berlaku sebaliknya. Pada skripsi ini ditunjukan bahwa setiap *generalized left derivation* pada ring R adalah *generalized Jordan left derivation* jika R adalah ring 2-*torsion free* dan memiliki komutator yang bukan merupakan pembagi nol kiri. Dalam ring prima, setiap *generalized left derivation* adalah *generalized Jordan left derivation* jika ring prima tersebut adalah *2-torsion free.*

Kata kunci **:** *left derivation***,** *generalized left derivation, generalized Jordan left derivation,* ring prima.

GENERALIZED JORDAN LEFT DERIVATIONS ON PRIME RINGS

ABSTRACT

In this paper will introduced the definition of generalized left derivation on a ring R and generalized Jordan left derivation on prime ring and discuss about their relationship. In fact, a generalized left derivation on a ring R is a generalized Jordan left derivation, but the converse statement does not hold in general. In this paper will showed that generalized Jordan left derivation on ring R is a generalized left derivation if R is a 2-torsion free ring and has a commutator which is not a left zero divisor. On prime ring, generalized Jordan left derivation is a generalized left derivation if 2-torsion prime ring.

Keywords : left derivation**,** generalized left derivation, generalized Jordan left derivation, prime ring

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan dan petunjuk-Nya sehingga skripsi yang berjudul **Generalized Jordan Left Derivation pada Ring Prima** ini dapat diselesaikan dengan baik.

Banyak pihak yang telah memberikan dukungan baik moral maupun spiritual dalam penyelesaian skripsi ini. Oleh karena itu, Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Drs. Bambang Sugandi, M.Si. selaku pembimbing I atas segala bimbingan dan motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dra. Ari Andari, MS. selaku pembimbing II atas segala bimbingan dan motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika yang memberikan banyak dukungan selama penulisan skripsi ini.
4. Dr. Sobri Abusini, MT.Si selaku Ketua Program Studi Matematika yang sudah memberikan banyak nasehat, dukungan dan saran selama proses penulisan skripsi ini.
5. Drs. M. Muslikh, M.Si**.** selaku pembimbing akademik atas bimbingan yang terarah bagi penulis selama masa perkuliahan.
6. Drs. Marsudi, M.S selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
7. Seluruh bapak / ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
8. Ibunda Elna. M dan Ayahanda Andayani. G beserta saudara yang selalu mengiringi penulis dengan segala doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesaikannya skripsi ini.
9. Semua teman-teman jurusan Matematika, khususnya angkatan 2008 atas do’a, bantuan, dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari masih terdapat kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menerima masukan, saran dan kritik yang membangun melalui email irvania.s@gmail.com . Akhir kata, semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis khususnya serta semua pihak pada umumnya.

Malang, 7 Juni 2012

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
$*$	Operasi biner pada grup
$\cdot$	Operasi pergandaan biasa
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\in$	Anggota himpunan
$\neq$	Tidak sama dengan
$A \times B$	Hasil kali cartesian A dan B
$f: A \to B$	Pemetaan dari A ke B
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$	Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya adalah bilangan bulat
$[a, b]$	Komutator
d	*Derivation*
δ	*Left derivation*
F	*Generalized derivation*
G	*Generalized left derivation*
$\blacksquare$	Akhir sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ring merupakan salah satu contoh dari struktur aljabar yang dibentuk oleh himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan pergandaan serta memenuhi beberapa aksioma. Ring memiliki beberapa bentuk, diantaranya adalah ring prima.

Pembahasan Ring prima terus berkembang dengan diterapkannya berbagai teori, seperti *generalized derivation.* Konsep dari *generalized derivation* dari ring telah diperkenalkan sebelumnya oleh B. Hvala pada tahun 1998 dalam jurnalnya yang berjudul *Generalized Derivations in Ring.* Dalam jurnal tersebut banyak dibahas mengenai teorema yang berkaitan dengan *generalized derivation* pada ring serta pada ring prima. Selanjutnya konsep dari *generalized derivation* mengalami perkembangan juga, seperti yang dituliskan oleh M. Asraf dan N rehman pada tahun 2000 dengan jurnalnya yang berjudul *on Generalized Jordan Derivation in Rings.* Dalam jurnal tersebut dibahas tentang definisi serta teorema tentang *generalized Jordan derivation* pada ring prima.

Selama 2 dekade terakhir banyak pembahasan yang menarik tentang hubungan antara *generalized* left *derivation* dan *generalized Jordan left derivation* pada ring prima. Telah diketahui bahwa setiap *generalized left derivation* adalah *generalized Jordan left derivation*. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, ada syarat tertentu yang harus dipenuhi. Oleh karena itu, dalam skripsi ini dibahas mengenai syarat-syarat agar *generalized Jordan left derivation generalized left derivation* adalah *generalized left derivation* bila diterapkan pada ring maupun pada ring prima.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah:

1. Apa definisi *generalized left derivation* dan *generalized Jordan left derivation* pada ring prima?

2. Apakah syarat yang harus dipenuhi agar *generalized Jordan left derivation* pada ring prima adalah *generalized left derivation* pada ring prima?

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini pembahasan dibatasi hanya pada *generalized Jordan left derivation* saja, karena perbedaan definisi *generalized Jordan right derivation* dengan *generalized Jordan left derivation* hanya perbedaan posisi *derivation*-nya.

1.4 Tujuan

Tujuan pembuatan dalam skripsi ini adalah:

1. Memahami pembahasan definisi *generalized left derivation* dan *generalized Jordan left derivation* pada ring prima.
2. Membahas syarat yang harus dipenuhi agar *generalized Jordan left derivation* pada ring prima adalah *generalized left derivation* pada ring prima.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contoh yang digunakan sebagai acuan dalam membahas permasalahan yang akan disampaikan pada bab selanjutnya.

2.1 Relasi, Pemetaan dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, elemen-elemen suatu himpunan yang tidak kosong dapat dikaitkan dengan operasi penjumlahan, pergandaan atau keduanya atau oleh beberapa operasi biner lainnya. Berikut ini akan diberikan definisi tentang relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Cartesian)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, disebut hasil kali cartesian (*cartesian product*) dari himpunan A dan B, atau dinotasikan sebagai berikut.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

(Bhattacharya, 1990)

Contoh 2.1.2

Misalkan $A = \{1,3,4\}$ dan $B = \{2,5\}$. Maka hasil kali cartesiannya adalah sebagai berikut.

a) $A \times B = \{(1,2), (1,5), (3,2), (3,5), (4,2), (4,5)\}$
b) $B \times A = \{(2,1), (2,3), (2,4), (5,1), (5,3), (5,4)\}$

Definisi 2.1.3 (Relasi)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong, dan R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

(Bhattacharya, 1990)

Contoh 2.1.4

Dari Contoh 2.1.2 maka contoh relasi dari A ke B dan B ke A adalah berturut-turut sebagai berikut.

a) $R = \{(1,2),(1,5),(4,2),(4,5)\}$
b) $R = \{(2,1),(2,4),(5,1),(5,3)\}$

Definisi 2.1.5 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk semua $a \in A$ terdapat satu $b \in B$ dengan $(a,b) \in f$. Selanjutnya dalam pemetaan dapat dituliskan $f(a) = b$.

Pada pemetaan f dari A ke B, himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dari f. Secara umum dikenal dua macam pemetaan yaitu:

(i) f disebut pemetaan satu-satu (injektif) jika untuk semua $a, b \in A$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.
(ii) f disebut pemetaan onto (surjektif) jika untuk semua $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$.

Jika f merupakan pemetaan injektif dan surjektif, maka f disebut pemetaan bijektif.

(Bhattacharya, 1990)

Contoh 2.1.6

Misalkan $A = B = \mathbb{R}$. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = \ln x$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Maka untuk sebarang $x \in \mathbb{R}$ pemetaan f injektif.

Bukti:
Pembuktian ini dilakukan dengan cara kontraposisi. Misalkan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2), \text{ maka} \\ \ln x_1 &= \ln x_2 \\ \Leftrightarrow e^{\ln x_1} &= e^{\ln x_2} \\ \Leftrightarrow x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa f injektif. ■

Definisi 2.1.7 (Operasi Biner)

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S, dinotasikan sebagai berikut.

$$*: S \times S \longrightarrow S.$$

Anggota di $S \times S$ merupakan pasangan terurut (a, b) dan dikawankan pada elemen S secara unik.

$$(a, b) \longmapsto * (a, b) = a * b = c \in S,$$

dengan kata lain, S harus tertutup atas operasi biner pada S.

(Bhattacharya, 1990)

Contoh 2.1.8

Didefinisikan operasi $*$ pada Z dengan syarat untuk setiap $a, b \in \mathrm{Z}$, $a * b = a + b$ maka operasi $*$ merupakan operasi biner.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ merupakan operasi yang tertutup dan terdefinisi. Sesuai dengan sifat bilangan bulat, penjumlahan dua bilangan bulat akan menghasilkan bilangan bulat juga. Sehingga $a * b = a + b \in \mathrm{Z}$. Jadi terbukti operasi $*$ merupakan operasi yang tertutup dan terdefinisi. Jadi operasi $*$ merupakan operasi biner. ■

Definisi 2.1.9 (Pemetaan Aditif)

Suatu pemetaan $f: A \to B$ disebut aditif jika:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ untuk semua } x, y \in A$$

(Liu dan Shiue,2007)

Contoh 2.1.10

Misalkan pemetaan $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan $f(a) = 12a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$ adalah sebarang konstanta. Maka f merupakan suatu pemetaan aditif.

Bukti:
Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$f(a+b) = 12(a+b) = 12a + 12b = f(a) + f(b). \qquad \blacksquare$$

2.2 Grup

Grup merupakan suatu himpunan tak kosong, beserta satu operasi biner seperti pergandaan atau penjumlahan yang memenuhi beberapa aksioma yang diuraikan di bawah ini.

Definisi 2.2.1 (Semigrup, Grup, Grup Komutatif)

Misalkan himpunan $G \neq \emptyset$ dengan operasi biner $G \times G \to G$ dinotasikan oleh $(x, y) \longmapsto x * y$, maka kondisi-kondisi berikut dapat dipenuhi oleh $(G,*)$.

i. $(x * y) * z = x * (y * z)$ untuk semua $x, y, z \in G$ (hukum assosiatif).
ii. Terdapat elemen netral (elemen identitas) $e \in G$ yang memenuhi $e * x = x * e = x$, untuk semua $x \in G$.
iii. Untuk semua $x \in G$ terdapat elemen invers $x^{-1} \in G$ yang memenuhi $x^{-1} * x = x * x^{-1} = e$.
iv. $x * y = y * x$, untuk semua $x, y \in G$ (hukum komutatif).

Jika memenuhi kondisi (i), maka $(G,*)$ disebut semigrup.
Jika memenuhi kondisi (i),(ii), dan (iii), maka $(G,*)$ disebut grup.
Jika memenuhi kondisi (i),(ii),(iii), dan (iv), maka $(G,*)$ disebut grup komutatif.

(Spindler,K. 1994)

Contoh 2.2.2

$(\mathbb{N}, +)$ adalah semigrup.

Bukti:
Untuk semua $x, y, z \in \mathbb{N}$,

i. Memenuhi sifat tertutup, $x + y \in \mathbb{N}$
ii. Hukum assosiatif penjumlahan berlaku menurut aksioma bilangan asli, $(x + y) + z = x + (y + z)$. $\blacksquare$

Contoh 2.2.3

$(\mathbb{Z}_5,\cdot)$ bukan merupakan grup sebab $\bar{0}$ tidak mempunyai invers, tetapi $(\mathbb{Z}_5,+)$ merupakan grup komutatif.

Bukti:

Diambil $\bar{x}\,, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$, berlaku

i. Sifat tertutup,
   operasi penjumlahan merupakan operasi biner sehingga pada $(\mathbb{Z}_5,+)$ berlaku sifat tertutup.

ii. Sifat assosiatif, yaitu
   Ambil $\bar{x} = \bar{3}$,
   $\bar{y} = \bar{2}$, dan
   $\bar{z} = \bar{1}$
   $(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z} = (\bar{3} + \bar{2}) + \bar{1} = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$.
   $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{3} + (\bar{2} + \bar{1}) = \bar{3} + \bar{3} = \bar{1}$.
   Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $\bar{x}\,, \bar{y}, \bar{z} \in \mathbb{Z}_5$.

iii. Terdapat elemen identitas, $\bar{e} = \bar{0} \in \mathbb{Z}_5$, sedemikian sehingga untuk semua $\bar{x} \in \mathbb{Z}_5$ berlaku $\bar{0} + \bar{x} = \overline{0 + x} = \bar{x}$

iv. Setiap elemen mempunyai invers, yaitu
   Invers $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$.
   Invers $\bar{1}$ adalah $\bar{4}$.
   Invers $\bar{2}$ adalah $\bar{3}$.
   Invers $\bar{3}$ adalah $\bar{2}$.
   Invers $\bar{4}$ adalah $\bar{1}$.

v. Sifat komutatif, yaitu
   Ambil $\bar{x} = \bar{3}$,
   $\bar{y} = \bar{2}$,
   $\bar{x} + \bar{y} = \bar{3}, +\bar{2} = \bar{0}$
   $\bar{y} + \bar{x} = \bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$.
   Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $\bar{x}\,, \bar{y} \in \mathbb{Z}_5$

Jadi terbukti bahwa $(\mathbb{Z}_{5,}\, +)$ adalah grup komutatif. ■

Contoh 2.2.4

Misalkan $K_2(\mathbb{Z})$ adalah himpunan matriks berordo 2×2 yang non-singular. Maka $(K_2(\mathbb{Z}),\cdot)$ adalah grup yang tidak komutatif.

Bukti:

Ambil matriks $A, B, C \in K_2(\mathbb{Z})$

Misal, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$.

Maka berlaku:

i. Sifat tertutup, $A.B \in K_2(\mathbb{Z})$

ii. Hukum assosiatif pergandaan berlaku pada sifat hitung matriks yaitu,

$$\begin{aligned}(AB)C &= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(BC) &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Jadi $(AB)C = A(BC)$ untuk semua $A, B, C \in K_2(\mathbb{Z})$.

iii. Memiliki elemen identitas.

$e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in K_2(\mathbb{Z})$ terdapat $Ae = eA = A$.

Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, untuk semua $A \in (K_2(\mathbb{Z}),\cdot)$.

$$eA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$Ae = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Jadi terdapat elemen identitas.

iv. Karena diketahui $K_2(\mathbb{Z})$ adalah himpunan matriks non-singular, jadi setiap elemen di $K_2(\mathbb{Z})$ memiliki invers.

v. Tidak memiliki sifat komutatif, untuk semua $A, B \in K_2(\mathbb{Z})$

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$

Jadi $(K_2(\mathbb{Z}),\cdot)$tidak komutatif.
Jadi $(K_2(\mathbb{Z}),\cdot)$ adalah grup yang tidak komutatif. ■

Contoh 2.2.5

$(M_2(\mathbb{Z})\ ,+)$ adalah matriks berordo 2×2 atas bilangn bulat dengan operasi penjumlahan merupakan grup komutatif.

Bukti:
Ambil $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$.
Misal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$
Maka berlaku:

i. Sifat tertutup, $A + B \in M_2(\mathbb{Z})$
ii. Sifat assosiatif penjumlahan berlaku pada sifat hitung matriks, yaitu:

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$
$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$
$$\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix}$$

iii. Memiliki elemen identitas,

misal $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$e + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$A + e = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Jadi terdapat elemen identitas $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M$ sedemikian sehingga $A + e = e + A = A$, untuk semua $A \in M$.

iv. Memiliki invers,

ambil $A^{-1} = -A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$,

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e$$

$A^{-1} + A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = e$

Jadi untuk semua $A \in M$ sedemikian sehingga $A^{-1} \in M$ terdapat $A + A^{-1} = A^{-1}A = e$.

v. Sifat komutatif penjumlahan berlaku pada sifat hitung matriks, yaitu:
$A + B = B + A$.
Jadi $(M_2(\mathbb{Z}), +)$ adalah grup komutatif. ■

2.3 Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner yaitu terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan ring diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 (Ring)

Misalkan R adalah himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan pergandaan, dinotasikan dengan $(R, +, \bullet)$. $(R, +, \bullet)$ disebut ring jika memenuhi aksioma sebagai berikut.

i. $(R, +)$ adalah grup komutatif.
ii. $(R, \bullet)$ adalah semigrup.
iii. $(R, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif yaitu untuk semua $a, b, c \in R$ berlaku:
$(a + b)c = (ac) + (bc)$ dan
$a(b + c) = (ab) + (ac)$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Contoh 2.3.2

Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah bilangan bulat modulo 4 dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang disajikan dalam Tabel 2.1 dan Tabel 2.2.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Tabel 2.2 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_4$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan suatu ring.

Bukti

Dengan menggunakan Tabel 2.1 dan Tabel 2.2, berikut ini dapat dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring.

- $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup komutatif.

  i. Tertutup

  Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup.

  ii. Assosiatif

  Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh.

  $$(a + b) + c = (\bar{0} + \bar{1}) + \bar{2} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}.$$
  $$a + (b + c) = \bar{0} + (\bar{1} + \bar{2}) = \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}.$$

  Jadi $(a + b) + c = a + (b + c) = \bar{3}$. Hal ini juga berlaku untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +)$ assosiatif.

  iii. Mempunyai elemen identitas $e = \bar{0}$ terhadap operasi penjumlahan, karena $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$, untuk semua $a \in \mathbb{Z}_4$.

  iv. Setiap elemen mempunyai invers

Berdasarkan Tabel 2.1 invers dari $\overline{0}$ adalah $\overline{0}$, invers dari $\overline{1}$ adalah $\overline{3}$, invers dari $\overline{2}$ adalah $\overline{2}$, invers dari $\overline{3}$ adalah $\overline{1}$. Jadi setiap elemen di $\mathbb{Z}_4$ mempunyai invers

v. Komutatif

Ambil $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \overline{0}$ dan $b = \overline{1}$. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh

$$a + b = \overline{0} + \overline{1} = \overline{1}$$
$$b + a = \overline{1} + \overline{0} = \overline{1}.$$

Jadi $a + b = b + a = \overline{1}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $a + b = b + a$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +)$ komutatif.

- $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup.

i. Tertutup

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ tertutup.

ii. Assosiatif

Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \overline{0}, b = \overline{1}$ dan $c = \overline{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh

$(ab)c = (\overline{0}.\overline{1})\overline{0} = \overline{0}.\overline{2} = \overline{0}.$

$a(bc) = \overline{0}(\overline{1}.\overline{2}) = \overline{0}.\overline{2} = \overline{0}.$

Jadi $(ab)c = a(bc) = \overline{0}$. Hal ini juga berlaku untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(ab)c = a(bc)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ assosiatif.

- $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif.

Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \overline{0}, b = \overline{1}$ dan $c = \overline{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh

- $(a + b)c = (\overline{0} + \overline{1})\overline{2} = \overline{1} + \overline{2} = \overline{2}$

  $(ac) + (bc) = (\overline{0}.\overline{2}) + (\overline{1}.\overline{2}) = \overline{0} + \overline{2} = \overline{2}$ dan
- $a(b + c) = \overline{0}(\overline{1} + \overline{2}) = \overline{0}.\overline{3} = \overline{0}.$

  $(ab) + (ac) = (\overline{0}.\overline{1}) + (\overline{0}.\overline{2}) = \overline{0}.\overline{0} = \overline{0}.$

Jadi,

$(a + b)c = (ac) + (bc) = \overline{2}$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac) = \overline{0}.$

Hal ini juga berlaku untuk semua $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(a + b)c = (ac) + (bc)$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif.

Karena $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring. ■

Contoh 2.3.3

Misalkan $R = \{0,1\}$, maka R bukan merupakan suatu ring karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan, misalkan diambil $1 + 1 = 2 \notin R$. Tetapi $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, $(\mathbb{Z}_2, +, \bullet)$ merupakan suatu ring karena memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring.

Definisi 2.3.4 (Ring Komutatif)

Misalkan $(R, +, \bullet)$ adalah ring. $(R, +, \bullet)$ disebut ring komutatif jika berlaku sifat $a * b = b * a$ untuk semua $a, b \in R$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Contoh 2.3.5

$(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring komutatif.

Bukti

Dari Contoh 2.3.2 telah ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring komutatif, yaitu memenuhi:

$$a.b = b.a \text{ untuk semua } a, b \in \mathbb{Z}_4.$$

Ambil nilai dari $\mathbb{Z}_4$ misalkan $2,3 \in \mathbb{Z}_4$ pada Tabel 2.2

$$2.3 = 3.2 = 2$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Karena ring $\mathbb{Z}_4$memenuhi sifat komutatif maka ring $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring komutatif.

Definisi 2.3.6 (Ring prima)

Suatu ring R disebut ring prima, jika $aRb = 0$ mengakibatkan $a = 0$ atau $b = 0$ untuk semua $a, b \in R$.

(Argac,2004)

Contoh 2.3.7

Ring R didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

R merupakan ring prima.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B, M \in R$, dengan

$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$, dan $M = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}$.

Akan dibuktikan bahwa R adalah ring prima. Pembuktian dilakukan dengan kontraposisi dari Definisi 2.3.6. Jika $A \neq 0$, dan $B \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} AMB &= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ca_1e & 0 \\ 0 & db_1f \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

untuk semua a_1, b_1, c, d, e, $f \in \mathbb{Z}$. Kontraposisi terpenuhi, sehingga R merupakan ring prima.

Definisi 2.3.8 (Ring 2-*Torsion Free*)

Ring R disebut ring 2-*torsion free*, jika $2a = 0$ mengakibatkan $a = 0$ untuk semua $a \in R$.

(Ali dan Kumar, 2007)

Contoh 2.3.9

Diberikan himpunan matriks segitiga atas yang didefinisikan oleh:

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Bedasarkan sifat-sifat operasi pada matrik, himpunan R terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan merupakan ring. Himpunan R merupakan suatu ring 2-*torsion free*. Dapat dengan dibuktikan dengan kontraposisi. Yaitu jika diambil $A \in R$ dan $A \neq 0$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$2A = 2\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2b_1 \\ 0 & 2c_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk semua $a_1,\ b_1,\ c_1 \in \mathbb{Z}$. Jadi, R merupakan ring *2-torsion free.*

Definisi 2.3.10 (Ring Prima 2-*Torsion Free*)

Ring prima R disebut ring prima *2-torsion free*, jika $2a = 0$ mengakibatkan $a = 0$ untuk semua $a \in R$.

(Ali dan Kumar, 2007)

Definisi 2.3.11 (Pembagi Nol Ring)

Suatu elemen tak nol a di ring R disebut pembagi nol kanan, jika terdapat elemen tak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ba = 0$. Selanjutnya suatu elemen tak nol a di ring R disebut pembagi nol kiri, jika terdapat elemen tak nol $b \in R$ sedemikian sehingga $ab = 0$. Suatu elemen a di ring R disebut pembagi nol jika merupakan pembagi nol kiri dan kanan.

(Bhattacharya, 1990)

Contoh 2.3.12

Pembagi nol pada $\mathbb{Z}_6$ adalah $\overline{2}, \overline{3}$, dan $\overline{4}$.

Bukti:

Diketahui $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$. Maka pembagi nol pada $\mathbb{Z}_6$ adalah

$\overline{2}.\overline{3} = \overline{3}.\overline{2} = \overline{0}$.

$\overline{4}.\overline{3} = \overline{3}.\overline{4} = \overline{0}$.

Jadi elemen pembagi nol pada $\mathbb{Z}_6$ adalah $\overline{2}, \overline{3}$, dan $\overline{4}$. ■

Contoh 2.3.13

Misalkan $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ring. Misalkan $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ adalah elemen dari M, maka pembagi nol dari A adalah $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Bukti:

Diketahui bahwa $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Akan dibuktikan bahwa B adalah pembagi nol kanan

$$A.B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka B adalah pembagi nol kanan. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa B adalah pembagi nol kiri

$$B.A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka B adalah pembagi nol kiri. Sehingga terbukti bahwa B adalah pembagi nol dari A. ■

Definisi 2.3.14 (Komutator)

Misalkan R adalah ring, $[a, b]$ disebut komutator dari R, jika memenuhi:

$$[a, b] = ab - ba, \text{ untuk semua } a, b \in R.$$

(Ali dan Kumar, 2007)

Proposisi 2.3.15

Dari Definisi 2.3.14 untuk semua $a, b, c \in R$, berlaku sifat:

i. $[a + b, c] = [a, c] + [b, c]$.

ii. $[a, b + c] = [a, b] + [a, c]$.

iii. $[a, bc] = b[a, c] + [a, b]c$.

iv. $[ab, c] = [b, c]a + a[b, c]$.

v. $[a, b] = -[b, a]$.

Bukti:

i. $[a + b, c] = (a + b)c - c(a + b)$
$= ac + bc - ca - cb$
$= ac - ca + bc - cb = [a, c] + [b, c]$.

ii. $[a, b + c] = a(b + c) - (b + c)a$
$= ab + ac - bc - ca$
$= ab - bc + ac - ca = [a, b] + [a, c]$.

$$
\begin{aligned}
\text{iii. } [a,bc] &= abc - bca \\
&= abc - bca + bac - bac \\
&= bac - bca + abc - bac \\
&= b(ac - ca) + (ab - ba)c \\
&= b[a,c] + [a,b]c. \\
\text{iv. } [ab,c] &= abc - cab \\
&= abc - cab + acb - acb \\
&= acb - cab + abc - acb \\
&= (ac - ca)b + a(bc - cb) \\
&= [a,c]b + a[b,c]. \\
\text{v. } [a,b] &= ab - ba \\
&= -(ba - ab) \\
&= -[b,a].
\end{aligned}
$$

■

Contoh 2.3.16

Misalkan $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ adalah matriks berordo 2×2 atas bilangan bulat. $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ adalah ring.
Ambil $A, B \in (M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$, misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$. Maka komutator dari $(M_2(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ adalah:

$$
\begin{aligned}
[A,B] &= AB - BA \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} br - qc & aq + bs - pb - qd \\ cp + dr - ra - sc & cq - rb \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

untuk semua $a, b, c, d, p, q, r, s \in \mathbb{Z}$.

Definisi 2.3.17 (Komutator yang Merupakan Pembagi Nol)

Misalkan terdapat Ring R, $[a,b]$ disebut komutator yang merupakan pembagi nol kanan apabila terdapat elemen tak nol $c \in R$ sedemikian sehingga $c[a,b] = 0$.

Selanjutnya $[a,b]$ disebut komutator yang merupakan pembagi nol kiri apabila terdapat elemen tak nol $c \in R$ sedemikian sehingga $[a,b]c = 0$. Suatu komutator $[a,b]$ di ring R disebut pembagi nol jika merupakan pembagi nol kiri dan kanan.

(M.Ashraf dan Shakir, 2004)

Contoh 2.3.18

$(M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ adalah matriks berordo 2×2 atas bilangan bulat.
$(M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ adalah ring.
Misalkan $U,V \in (M_2(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ dimana $U = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, dan $V = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,
Maka komutator dari matriks U dan V adalah

$$\begin{aligned}
[U,V] &= UV - VU \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Misalkan $X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, untuk semua $a, b \in \mathbb{Z}$ selain nol.

$$X[U,V] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena terdapat $X \neq 0, X \in R$ sedemikian sehingga $X[U,V] = 0$, maka $[U,V]$ adalah komutator yang merupakan pembagi nol kanan.

2.4 *R-module*

Definisi 2.4.1 (*Left R-module*)

Diberikan sebuah grup komutatif $(M,+)$ dan ring dengan elemen identitas $(R,+,.)$, serta diberikan pula operasi biner $R \times M \to M$. Himpunan M disebut *left module* atas R (dinotasikan *left R-module*) jika memenuhi aksioma-aksioma berikut.

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$,
2. $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$,
3. $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$,
4. $1m = m$,

Untuk semua $r, r_1, r_2 \in R$ dan untuk semua $m, m_1, m_2 \in$ M. *Module* tersebut adalah *left R-module,* sedangkan untuk *right R-module* dapat didefinisikan secara sama dimana elemen ring R dituliskan pada sebelah kanan.

Jika memenuhi *left R-module* dan *right R-module* maka dapat disebut sebagai *bi-module.*

Contoh 2.4.2

Setiap ring dengan elemen identitas R adalah left module atas dirinya sendiri dengan pergandaan skalar:

$$M \times R \to R$$
$$(a, m) \to a \cdot m\ ,$$

untuk semua $m \in R$ dan $a \in R$.

Bukti:

Diambil sebarang $m, n \in R$ dan $a, b \in R$

i. $(a \cdot b) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$ sebab pada ring berlaku hukum assosiatif pergandaan.

ii. $a \cdot (m + n) = (a \cdot m) + (a \cdot n)$ sebab pada ring berlaku hukum distributif kanan.

iii. $(a + b) \cdot m = (a \cdot m) + (b \cdot m)$ sebab pada ring berlaku hukum distributif kiri.

iv. $1 \cdot x = x$

Terbukti bahwa R adalah R-*left module*. ■

Contoh 2.4.3

Misal $M = Z_6$ adalah grup komutatif terhadap penjumlahan dan $R = Z_6$ adalah ring dengan operasi biner $R \times M \to M$ maka M adalah *left module*.

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa M adalah *left module*, maka harus memenuhi beberapa aksioma, yaitu

i. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$

Ambil $r \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$ dengan $r = \bar{2}$, $m_1 = \bar{2}$, dan $m_2 = \bar{3}$, maka

$$\begin{aligned} \bar{2}(\bar{2} + \bar{3}) &= \bar{2}.\bar{2} + \bar{2}.\bar{3} \\ \bar{2}.\bar{5} &= \bar{4} + \bar{0} \\ \bar{4} &= \bar{4} \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $r \in R$ dan $m_1, m_2 \in M$.

ii. $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$

Ambil $r_1, r_2 \in R$ dan $m \in M$ dengan $r_1 = \bar{3}$, $r_2 = \bar{4}$, dan $m = \bar{5}$, maka

$(\overline{3}+\overline{4})\overline{5} \quad = \overline{3}.\overline{5}+\overline{4}.\overline{5}$
$\overline{1}.\overline{5} \quad = \overline{3}+\overline{2}$
$\overline{5} \quad = \overline{5}$
Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $r_1, r_2 \in R$ dan $m \in M$.

iii. $(r_1.r_2)m = r_1(r_2.m)$
Ambil$r_1, r_2 \in R$ dan $m \in M$ dengan $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, dan $m = \overline{5}$, maka
$(\overline{3}.\overline{4})\overline{5} \quad = \overline{3}(\overline{4}.\overline{5})$
$\overline{0}.\overline{5} \quad = \overline{3}.\overline{2}$
$\overline{0} \quad = \overline{0}$
Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $r_1, r_2 \in R$ dan $m \in M$.

iv. $1.m = m$
Ambil $m \in M$ dengan $m = \overline{5}$, maka
$1.\overline{5} = \overline{5}$
Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $m \in M$. Jadi terbukti bahwa M adalah *left module.*

Definisi 2.4.4 (2-*Torsion Free Left R-Module*)

Misalkan X adalah *left R-module*, X disebut 2-*torsion free*, jika $2x = 0$ mengakibatkan $x = 0$ untuk semua $x \in X$.

(Woung dan Byung, 1996)

Contoh 2.4.5

Misal $X = Z_7$ adalah *module*. Maka X adalah 2- *torsion free left R-module.*

Bukti:
Untuk membuktikan bahwa Z_7 adalah 2- *torsion free left R-module* dapat dibuktikan dengan kontraposisi.
Ambil $x \in X$ dan $x \neq 0$, misal $x = 2$. Maka

$$2x = 2.2 = 4 \neq 0$$

Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $x \in X$.

2.5 *Multiplier*

Definisi 2.5.1 (*Left Multiplier*)

Misalkan R adalah ring. Didefinisikan suatu pemetaan aditif $H: R \to R$. Jika untuk semua $x, y \in R$ memenuhi

$$H(x, y) = H(x)y$$

maka H disebut *left multiplier*.

(Ali dan Kumar, 2007)

Definisi 2.5.2 (*Right Multiplier*)

Misalkan R adalah ring. Didefinisikan suatu pemetaan aditif $H: R \to R$. Jika untuk semua $x, y \in R$ memenuhi

$$H(x, y) = xH(y)$$

maka H disebut *right multiplier*.

(Ali dan Kumar, 2007)

Contoh 2.5.3

Diberikan ring R sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ambil $A \in R$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, p \in \mathbb{R}.$$

Suatu pemetaan aditif $H: R \to R$ didefinisikan oleh

$$H(x) = Ax \text{ untuk semua } A, x \in R$$

Maka H adalah *left multiplier*.

Bukti:

$x, y \in R$ ambil $X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{bmatrix}$.

Akan dibuktikan $H\,(XY) = H(X)Y$.

Dari ruas kiri diperoleh

$$H(XY) = \mathrm{H}\left(\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= H\left(\begin{bmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1y_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1y_1 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1y_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1y_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1y_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} px_1y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{p}x_1y_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{p}x_1y_1 \end{bmatrix}.$$

Dari ruas kanan diperoleh

$H(X)Y = AXY$

$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 \\ 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & y_1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} px_1y_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{p}x_1y_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{p}x_1y_1 \end{bmatrix}.$$

Terbukti bahwa $H\,(XY) = H(X)Y$, maka H adalah *left multiplier*. ■

2.6 *Jordan Multiplier*

Definisi 2.6.1 (*Jordan Left Multiplier*)

Misalkan R adalah ring. Didefinisikan suatu pemetaan aditif $H: R \to R$. Jika untuk semua $x \in R$ memenuhi

$$H(x^2) = H(x)x$$

maka H disebut *Jordan left multiplier*.

(Atsushi Nakajima, 2006)

Definisi 2.6.2 (*Jordan Right Multiplier*)

Misalkan R adalah ring. Didefinisikan suatu pemetaan aditif $H: R \to R$. Jika untuk semua $x \in R$ memenuhi

$$H(x^2) = xH(x)$$

maka H disebut *Jordan right multiplier*.

(Atsushi Nakajima, 2006)

Contoh 2.6.3

Diberikan ring R sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \middle| a \in \mathbb{Z}_2 \right\}.$$

Suatu pemetaan aditif $H: R \to R$ didefinisikan oleh

$$H(x) = Ax \text{ untuk semua } A, x \in R$$

Dengan $A \in R$. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Maka akan ditunjukkan:

$$H(x^2) = H(x)x.$$

H adalah *Jordan left multiplier*.

Bukti

Ambil $X, Y \in R$ maka $= X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dan $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Diketahui $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Maka akan ditunjukkan $H(X^2) = H(X)X$.

Untuk $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
H(X^2) &= H(X)X \\
H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{H}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
H\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{H}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Untuk $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{aligned}
H(Y^2) &= H(Y)Y \\
H\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{H}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
H\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) &= \mathrm{H}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa $H(X^2) = H(X)X, H$ adalah *Jordan left multiplier*. ■

2.7 *Derivation*

Definisi 2.7.1 (*Left Derivation*)

Misalkan R adalah ring. Sebuah Pemetaan aditif $\delta: R \longrightarrow R$ disebut *left derivation* pada R jika untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

$$\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x).$$

(M.Ashraf dan Shakir, 2004)

Definisi 2.7.2 (*Derivation*)

Misalkan R adalah *ring*. Sebuah pemetaan aditif $d: R \longrightarrow R$ disebut *derivation* pada R jika untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

$$d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

(Bell dan Mason, 1992)

Contoh 2.7.3

Misalkan $R = Z_4$ adalah ring dan terdapat pemetaan $d: R \longrightarrow R$ yang didefinisikian oleh $d(a) = xa - ax, a \in R$, maka d merupakan suatu *derivation*.

Bukti:

i. Akan dibuktikan d adalah pemetaan aditif.
   Ambil $a, b \in R$. Misal $a = \overline{1}$ dan $b = \overline{2}$, maka
   $d(a + b) = x(a + b) - (a + b)x$
   $d(\overline{1} + \overline{2}) = x\overline{1} + x\overline{2} - (\overline{1}x + \overline{2}x)$
   $= x\overline{1} - \overline{1}x + x\overline{2} - \overline{2}x$
   $= d(\overline{1}) + d(\overline{2}).$
   Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $a, b \in R$.

ii. Akan dibuktikan d adalah *derivation*.
   Ambil $a, b \in R$. Misal $a = \overline{1}$ dan $b = \overline{2}$, maka
   $d(ab) = xab - abx$
   $d(\overline{1}.2) = x.\overline{1}.2 - \overline{1}.2.x$
   $= x.\overline{1}.2 - \overline{1}.x.2 + \overline{1}.x.2 - \overline{1}.2.x$
   $= (x.\overline{1} - \overline{1}.x)2 + \overline{1}(x.2 - 2.x)$
   $= d(\overline{1})2 + \overline{1}d(2).$
   Dengan cara yang sama berlaku untuk semua $a, b \in R$. Jadi terbukti d adalah *derivation*. ■

Contoh 2.7.4

Misalkan R adalah ring yang beranggotakan semua-semua fungsi kontinu sebagai berikut:

$$R = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \in C\}$$

Pemetaan aditif d didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} d : R &\to R \\ f &\to d(f) = f' \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan d *derivation*.

Bukti:

Ambil $f, g \in R$. Dari definisi pemetaan d diperoleh

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)' \\ &= f'\mathrm{g} + \mathrm{f}g' \\ &= d(f)g + fd(g) \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa d adalah *derivation*. ■

BAB III

PEMBAHASAN

Bab ini membahas tentang definisi, lemma, teorema, serta bukti-bukti yang berkaitan dengan *generalized Jordan left derivation* pada ring dan ring prima

3.1 *Jordan Derivation*

Definisi 3.1.1 (*Jordan Derivation*)

Misalkan R adalah ring. Sebuah pemetaan aditif $d: R \longrightarrow R$ disebut *Jordan derivation* pada R jika untuk semua $x \in R$ berlaku:

$$d(x^2) = d(x)x + xd(x).$$

(M.Ashraf dan Shakir, 2004)

Contoh 3.1.2

Misalkan $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$.
Didefinisikan $d: R \longrightarrow R$ yang memenuhi:
$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, maka d adalah *Jordan derivation* yang bukan *derivation*.

Bukti:

Ambil $X, Y \in R$, misalkan $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$

i. Akan dibuktikan d adalah pemetaan aditif.

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c+r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(X) + d(Y) \end{aligned}$$

Jadi d adalah pemetaan aditif.

ii. Akan dibuktikan d adalah *Jordan derivation*.

$$d(X^2) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= d\left(\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cd+d^2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & ca+dc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk semua } a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ .$$

$$d(X)X + Xd(X) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c^2 & cd \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ac \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c^2 & cd+ac \\ 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & cd+ac \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ untuk semua } a,b,c,d \in \mathbb{Z}.$$

Karena pada operasi bilangan bulat berlaku sifat komutatif maka $d(X^2) = d(X)X + Xd(X)$

Jadi d adalah *Jordan derivation*.

iii. Akan ditunjukkan d bukan merupakan *derivation*.

$$d(XY) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right)$$

$$= d\left(\begin{bmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & cp+dr \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(X)Y + Xd(Y) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} cr & cs \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ar \\ 0 & cr \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cr & cs+ar \\ 0 & cr \end{bmatrix}$$

$$d(XY) \neq d(X)Y + Xd(Y)$$

Jadi d adalah *Jordan derivation* yang bukan *derivation*. ■

Definisi 3.1.3 (*Jordan Left Derivation*)

Misalkan R adalah ring. Sebuah Pemetaan aditif $\delta: R \longrightarrow R$ disebut *Jordan left derivation* pada R jika untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

$$\delta(x^2) = x\delta(x) + x\delta(x) = 2x\delta(x).$$

(M.Ashraf dan Shakir, 2004)

Contoh 3.1.4

Misalkan R adalah ring komutatif dan $a \in R$ sedemikian sehingga $xax = 0$, untuk semua $x \in R$. Tetapi $xay = 0$, dan $x \neq y$. Didefinisikan $\delta: R \to R$ dan $\delta(x) = xa + ax$. Maka δ adalah *Jordan left derivation* yang bukan *left derivation.*

Bukti:

i. Akan dibuktikan δ adalah pemetaan aditif.

$$\begin{aligned}\delta(x+y) &= (x+y)a + a(x+y)\\ &= xa + ya + ax + ay\\ &= xa + ax + ya + ay\\ &= \delta(x) + \delta(y).\end{aligned}$$

ii. Akan dibuktikan δ *Jordan left derivation.*

$\delta(x^2) = x\delta(x) + x\delta(x) = 2x\delta(x)$

Dari ruas kiri diperoleh $\delta(x^2) = x^2\text{a} + \text{a}x^2$.

Karena R ring komutatif sehingga $\delta(x^2) = 2x^2\text{a}$

Dan dari ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned}2x\delta(x) &= 2x(xa + ax)\\ &= 2x^2a + 2xax\\ &= 2x^2a + 0\\ &= 2x^2a.\end{aligned}$$

Jadi karena $\delta(x^2) = 2x\delta(x)$, δ adalah *Jordan left derivation.*

iii. Akan dibuktikan δ bukan *left derivation.*

$\delta(xy) = x\delta(y) + y\delta(x)$

Dari ruas kiri diperoleh $\delta(xy) = xya + axy$.

Dari ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned}x\delta(y) + y\delta(x) &= x(ya + ay) + y(xa + ax)\\ &= xya + xay + yxa + yax.\end{aligned}$$

Karena $\delta(xy) \neq x\delta(y) + y\delta(x)$ maka δ bukan *left derivation.*

Jadi terbukti bahwa δ adalah *Jordan left derivation* yang bukan *left derivation.*

Lemma 3.1.5

Misalkan R adalah ring dan X adalah *2-torsion free* R*-module*. Jika $\delta: R \to R$ adalah *Jordan left derivation* untuk semua $x, y, z \in R$ maka berlaku:

i. $\delta(xy + yx) = 2x\delta(y) + 2y\delta(x)$.
ii. $\delta(xyx) = x^2\delta\big(y + 3xy\delta(x) - yx\delta(x)\big)$.
iii. $\delta(xyz + zyx) = (xz + zx)\delta(y) + 3xy\delta(z) + 3zy\delta(x) - yx\delta(z) - yz\delta(x)$.
iv. $(xy - yx)x\delta(x) = x(xy - yx)\delta(x)$.
v. $(xy - yx)(\delta(xy) - x\delta(y) - y\delta(x)) = 0$.

Bukti:

i. Pembuktian bagian ini diperoleh dari definisi

$$\delta(x^2) = 2x\delta(x).$$

Dengan mensubstitusikan x dengan $x + y$ diperoleh

$$\delta((x + y)^2) = 2(x + y)\delta(x + y).$$

Dari ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned}\delta((x + y)^2) &= \delta(x^2 + y^2 + xy + yx). \\ &= \delta(x^2) + \delta(y^2) + \delta(xy + yx) \\ &= 2x\delta(x) + 2y\delta(y) + \delta(xy + yx).\end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned}2(x + y)\delta(x + y) &= 2(x + y)\delta(x) + 2(x + y)\delta(y) \\ &= 2x\delta(x) + 2y\delta(x) + 2x\delta(y) + 2y\delta(y).\end{aligned}$$

Sehingga dari ruas kiri dan kanan diperoleh

$\delta(xy + yx) = 2x\delta(y) + 2y\delta(x)$ untuk semua $x, y \in R$.

ii. Pembuktian bagian ini diperoleh dengan mensubstitusikan $y = xy + yx$ pada Lemma 3.1.5 bagian *i*.

Dari ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned}\delta(x(xy + yx) + (xy + yx)x) &= \delta(x^2y + yx^2) + 2\delta(\mathrm{xyx}) \\ &= 2x^2\delta(y) + 2y\delta(x^2) + 2\delta(xyx) \\ &= 2x^2\delta(y) + 4yx\delta(x) + 2\delta(xyx),\end{aligned}$$

dan dari ruas kanan diperoleh

$\delta(x(xy + yx\ ) + (xy + yx\ )x)$
$$= 2x\delta(xy + yx\ ) + 2(xy + yx\ )\delta(x)$$
$$= 2x\big(2x\delta(y) + 2y\delta(x)\big) + 2(xy + yx\ )\delta(x)$$
$$= 4x^2\delta(y) + 6xy\delta(x) + 2yx\delta(x).$$

Kemudian dengan membandingkan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$2\delta(xyx) = 2x^2\delta\big(y + 6xy\delta(x) - 2yx\delta(x)\big).$$

Karena X adalah *2-torsion free* maka

$\delta(xyx) = x^2\delta\big(y + 3xy\delta(x) - yx\delta(x)\big)$ untuk semua $x, y \in R$.

iii. Pembuktian bagian ini diperoleh dengan mensubstitusi $x = x + z$ pada Lemma 3.1.5 bagian *ii*. Maka dari ruas kiri diperoleh

$\delta\big((x + z)y(x + z)\big)$
$= \delta(xyx + xyz + zyx + zyz)$
$= \delta(xyx) + \delta(xyz + zyx) + \delta(zyz)$
$= x^2\delta\big(y + 3xy\delta(x) - yx\delta(x)\big) + \delta(xyz + zyx) +$
$z^2\delta\big(y + 3zy\delta(z) - yz\delta(z)\big).$

Dari ruas kanan diperoleh

$(x + z)^2\delta(y) + 3(x + z)y\delta(x + z) - y(x + z)\delta(x + z)$
$= (x^2 + xz + zx + z^2)\delta(y) + 3(xy + zy)\delta(x + z) -$
$(yx + yz)\ \delta(x + z)$
$= (x^2 + xz + zx + z^2)\delta(y) + 3(xy + zy)\delta(x) + 3(xy$
$+zy)\delta(z) - (yx + yz)\delta(x) - (yx + yz)\delta(z).$

Kemudian dengan menggabungkan ruas kiri dan kanan diperoleh

$\delta(xyz + zyx) = (xz + zx)\delta(y) + 3xy\delta(z) + 3zy\delta(x)$
$-yx\delta(z) - yz\delta(x)$ untuk semua $x, y, z \in R$

iv. Pembuktian bagian ini diperoleh mensubtitusikan $z = xy$ pada Lemma 3.1.5 bagian *iii*. Dari ruas kiri diperoleh

$\delta(xy(xy) + (xy)yx) = \ \delta((xy)^2 + xy^2x)$
$$= 2xy\delta(xy) + x^2\delta(y^2) + 3xy^2\delta(x)$$
$$-y^2x\delta(x)$$
$$= 2xy\delta(xy) + 2x^2y\delta(y) + 3xy^2\delta(x)$$
$$-y^2x\delta(x).$$

Dari ruas kanan diperoleh

$(xz + zy)\delta(y) + 3(xy)\delta(z) + 3zy\delta(x) - yx\delta(z) - yz\delta(x)$
$= (x(xy) + (xy)y)\delta(y) + 3(xy)\delta(xy) + 3(xy)y\delta(x)$

$-yx\delta(xy) - y(xy)\delta(x)$
$= x^2 y\delta(y) + xyx\delta(y) + 3xy\delta(xy) + 3xy^2\delta(x) - yx\delta(xy)$
$-yxy\delta(x).$

Kemudian dengan menggabungkan ruas kiri dan kanan diperoleh

$$2xy\delta(xy) + 2x^2y\delta(y) + 3xy^2\delta(x) - y^2x\delta(x) = x^2y\delta(y) + xyx\delta(y) + 3xy\delta(xy) + 3xy^2\delta(x) - yx\delta(xy) - yxy\delta(x).$$

$$xy\delta(xy) - yx\delta(xy) = -xyx\delta(y) + x^2y\delta(y) - y^2x\delta(x) + yxy\delta(x)$$

$$(xy - yx)\delta(xy) = x(xy - yx)\delta(y) + y(xy - yx)\delta(x).$$

Dengan mensubstitusikan y dengan $x + y$ diperoleh

$$(x(x+y) - (x+y)x)\delta\big(x(x+y)\big)$$
$$= x(x(x+y) - (x+y)x)\delta(x+y) + (x+y)(x(x+y) - (x+y)x)\delta(x).$$

Dari persamaan di atas pada ruas kiri diperoleh

$$(x(x+y) - (x+y)x)\delta\big(x(x+y)\big)$$
$$= (\,x^2 + xy - x^2 - yx)\delta(x^2 + xy)$$
$$= (xy - yx)\delta(x^2) + (xy - yx)\delta(xy)$$
$$= 2x(xy - yx)\delta(x) + y(xy - yx)\delta(x)x(xy - yx)\delta(y).$$

Dan pada ruas kanan diperoleh

$$x(x(x+y) - (x+y)x)\delta(x+y) + (x+y)(x(x+y) - (x+y)x)\delta(x)$$
$$= x(x^2 + xy - x^2 - yx)\delta(x+y) + (x+y)(x^2 + xy - x^2 - yx)\delta(x)$$
$$= x(xy - yx)\delta(x+y) + (x+y)(xy - yx)\delta(x)$$
$$= x(xy - yx)\delta(x+y) + x(xy - yx)\delta(x) + y(xy - yx)\delta(x).$$

Kemudian dengan menggabungkan ruas kiri dan kanan diperoleh persamaan

$(xy - yx)x\delta(x) = x(xy - yx)\delta(x)$ untuk semua $x, y \in R$.

v. Pembuktian bagian ini diperoleh dengan mensubstitusikan $x = x + y$ pada bagian *iv.*, diperoleh

$$\big((x+y)y - y(x+y)\big)(x+y)\delta\big((x+y)x\big)$$

$= (x+y)\big((x+y)y - y(x+y)\big)\delta\big((x+y)\big).$

Dari ruas kiri diperoleh

$\big((x+y)y - y(x+y)\big)(x+y)\delta\big((x+y)x\big)$

$= (xy + y^2 - yx - y^2)(x+y)\delta(x^2 + yx)$

$= (xy - yx)x\delta(x+y) + (xy - yx)y\delta(x+y).$

Dari ruas kanan diperoleh

$(x+y)\big((x+y)y - y(x+y)\big)\delta\big((x+y)\big)$

$= (x+y)(xy + y^2 - yx - y^2)\delta(x+y)$

$= x(xy - yx)\delta(x+y) + y(xy - yx)\delta(x+y).$

Kemudian dari ruas kiri dan kanan diperoleh

$(xy - yx)x\delta(x+y) + (xy - yx)y\delta(x+y)$

$= x(xy - yx)\delta(x+y) + y(xy - yx)\delta(x+y)$

Sehingga

$(xy - yx)\big(\delta(xy) - x\delta(y) - y\delta(x)\big) = 0$ untuk semua $x, y \in R$.

■

3.2 *Generalized Derivation*

Definisi 3.2.1 (*Generalized Derivation*)

Sebuah pemetaan aditif $F: R \to R$ disebut *generalized derivation* jika terdapat *derivation* $d: R \to R$ untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

$$F(xy) = F(x)y + xd(y).$$

(Hvala, 1998)

Contoh 3.2.2

Misalkan R adalah ring.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

Misal p adalah elemen tak nol dari $\mathbb{Z}$ dan terdapat pemetaan aditif d dan D yang didefinisakan sebagai berikut:

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa + pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diketahui d adalah *derivation* maka D adalah *generalized derivation*.

Bukti:
Diambil $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in R$. Misal

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

Akan dibuktikan bahwa $D(AB) = D(A)B + Ad(B)$.
Dari ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned} D(AB) &= D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= D\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1a_2 + pc_1c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned} & D(A)B + Ad(B) \\ &= D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & pa_2 - pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & c_2(pa_1 + pc_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1(pa_2 - pc_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1a_2 + pc_1c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan maka terbukti bahwa *D* adalah *generalized derivation*. ■

Definisi 3.2.3 (*Generalized Left Derivation*)

Sebuah pemetaan aditif $G: R \to R$ disebut *generalized left derivation* jika terdapat *Jordan left derivation* $\delta: R \to R$ untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

$$G(xy) = xG(y) + y\delta(x).$$

(M.Ashraf dan Shakir, 2004)

3.3 *Generalized Jordan Derivation*

Definisi 3.3.1 (*Generalized Jordan Derivation*)

Sebuah pemetaan aditif $F: R \to R$ disebut *generalized Jordan derivation* jika terdapat sebuah *Jordan derivation* $d: R \to R$ jika untuk semua $x \in R$ berlaku:

$$F(x^2) = F(x)x + xd(x).$$

(Hvala, 1998)

Definisi 3.3.2 (*Generalized Jordan left Derivation*)

Sebuah pemetaan aditif $G: R \to R$ disebut *generalized Jordan left derivation* jika terdapat *Jordan left derivation* $\delta: R \to R$ untuk semua $x \in R$ berlaku:

$$G(x^2) = xG(x) + x\delta(x).$$

(M.Ashraf dan Shakir, 2004)

Lemma 3.3.3

Misalkan R adalah ring *2-torsion free* dan $G: R \to R$ merupakan *generelized Jordan left derivation* yang berkaitan dengan *Jordan left derivation* $\delta: R \to R$ untuk semua $x, y \in R$ berlaku:

i. $G(xy + yx) = xG(y) + yG(x) + x\delta(y) + y\delta(x)$.
ii. $G(xyx) = xyG(x) + 2xy\delta(x) + \delta(y) - yx\delta(x)$.
iii. $G(xyz + zyx) = xyG(z) + zyG(x) + 2xy\delta(z) + 2zy\delta(x) + xz\delta(y) + zx\delta(y) - yx\delta(z) - yz\delta(x)$.

Bukti:

i. Diberikan G adalah *generalized Jordan left derivation* di R sedemikian sehingga $G(x^2) = xG(x) + x\delta(x)$ untuk semua $x \in R$.
Dengan mensubstitusikan x dengan $x + y$ pada persamaan di atas, pada ruas kiri diperoleh
$$\begin{aligned} G((x+y)^2) &= G(x^2 + xy + yx + y^2) \\ &= xG(x) + x\delta(x) + G(xy + yx) + yG(y) + y\delta(y). \end{aligned}$$
Pada ruas kanan diperoleh
$$\begin{aligned} G((x+y)^2) &= (x+y)G(x+y) + (x+y)\delta(x+y) \\ &= xG(x) + xG(y) + yG(x) + yG(y) + x\delta(x) + \\ &\quad\; x\delta(y) + y\delta(x) + y\delta(y). \end{aligned}$$
Kemudian, dengan menggabungkan ruas kiri dan kanan diperoleh
$$G(xy + yx) = xG(y) + yG(x) + x\,\delta(y) + y\delta(x)$$
untuk semua $x, y \in R$.

ii. Dengan mensubstitusi $y = xy + yx$ pada Lemma 3.3.3 bagian i pada ruas kiri diperoleh

$G(x(xy + yx) + (xy + yx)x)$
$= G(x^2y) + 2G(xyx) + G(yx^2)$
$= x^2G(y) + yxG(x) + yx + x^2\delta(y) + 2yx\delta(x) + 2G(xyx)$

Dari Lemma 3.1.5 bagian *i* didapatkan

$\delta(xy + yx) = 2x\delta(y) + 2y\delta(x)$,

sehingga dari ruas kanan diperoleh

$= xG(xy + yx) + (xy + yx)G(x) + x\delta(xy + yx) + (xy + yx)\delta(x)$
$= xG(xy) + xG(yx) + xyG(x) + yxG(x) + 2x\delta(y) + 2y\delta(x) + xy\delta(x) + yx\delta(x)$

Dengan menggabungkan ruas kiri dan kanan dan R adalah ring *2-torsion free* maka

$$G(xyx) = xyG(x) + 2xy\,\delta(x) + x^2\delta(y) - yx\delta(x).$$

untuk semua $x, y \in R$.

iii. Dengan mesubstitusi $x = x + z$ pada Lemma 3.3.3 bagian ii dari ruas kiri diperoleh

$G\big((x + z)y(x + z)\big)$
$= G(xyx) + G(zyx) + G(xyz + zyz)$
$= \big(xyG(x) + 2xy\,\delta\,(x) + x^2\delta\,(y) - yx\delta\,(x)\big) + (zyG(x) + 2zy\delta(z) + z^2\delta(y) - yz\delta(z)) + G(xyz + zyx).$

Sedangkan dari ruas kanan diperoleh

$G\big((x + z)y(x + z)\big)$
$= xyG(x) + xyG(z) + zyG(x) + zyG(z) + 2xy\,\delta\,(x) + 2xy\,\delta(z) + 2zy\delta\,(x) + 2zy\delta\,(z) + x^2\delta\,(y) + xz\delta\,(y) + zx\delta\,(y) + z^2\delta\,(y) - yx\delta\,(x) - yx\delta\,(z) - yz\delta\,(x) - yz\delta\,(x) - yz\delta\,(z).$

Dengan menggabungkan ruas kiri dan kanan diperoleh

$G(xyz + zyx)$
$= xyG(z) + zyG(x) + 2xy\delta(z) + 2zy\delta(x) + xz\delta(y) + zx\delta(y) - yx\delta(z) - yz\delta(x)$ untuk semua $x, y \in R$. ∎

Contoh 3.3.4

Misalkan R adalah ring.

Dan misalkan $R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} | a, b \in \mathbb{Z} \right\}$.

Didefinisikan sebuah pemetaan $G: R \to R$ yang memenuhi:

$$G \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Didefinisikan $\delta: R \longrightarrow R$ yang memenuhi:

$$\delta \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka G adalah *generalized Jordan left derivation* yang bukan *generalized left derivation.*

Bukti:

Ambil $X, Y \in R$, misalkan

$$X = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan Y=} \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

i. Akan dibuktikan G adalah pemetaan aditif.

$$\begin{aligned} G(X+Y) &= G\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= G\left(\begin{bmatrix} 0 & a+p & b+q \\ 0 & 0 & a+p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & b+q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= G(X) + G(Y). \end{aligned}$$

Jadi G adalah pemetaan aditif.

ii. Akan dibuktikan G adalah *generalized Jordan left derivation.*

$$G(X^2) = XG(X) + X\delta(X)$$

$$G(X^2) = G\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= G\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$XG(X) + X\delta(X)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$G(X^2) = XG(X) + X\delta(X)$$

Jadi G adalah *generalized Jordan left derivation.*

iii. Akan dibuktikan bahwa G bukan *generalized left derivation.*

$$G(XY) \neq XG(Y) + Y\delta(X)$$

Dari ruas kiri diperoleh

$$G(XY) = G\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= G\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & ap \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & ap \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dari ruas kanan diperoleh

$XG(Y) + Y\delta(X)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ap \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ap \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $G(XY) \neq XG(Y) + Y\delta(X)$, maka G bukan *generalized left derivation.*

Dari bukti $i, ii,$ dan iii dapat disimpulkan bahwa G adalah *generalized Jordan left derivation* yang bukan *generalized left derivation.* Dari contoh di atas terbukti bahwa tidak selalu *generalized Jordan left derivation* adalah *generalized left derivation.*

Selanjutnya dibahas beberapa lemma yang dapat membantu untuk pembuktian teorema utama pada skripsi ini, yaitu agar diketahui kondisi yang dapat membuat suatu *generalized Jordan left derivation* adalah *generalized left derivation*.

Lemma 3.3.5

Misalkan R adalah ring dan X adalah *2-torsion free left R-module*. Jika $\delta: R \to R$ adalah pemetaan aditif yang memenuhi $\delta(x^2) = 2x\delta(x)$ untuk semua $x, y \in R$, maka:

i. $\delta(x^2y) = x^2\delta(y) + (xy + yx)\delta(x) + x\delta(xy - yx)$
ii. $\delta(yx^2) = x^2\delta(y) + (3yx - xy)\delta(x) - x\delta(xy - yx)$
iii. $[\mathrm{x}, \mathrm{y}]\delta([\mathrm{x}, \mathrm{y}]) = 0.$
iv. $(x^2\mathrm{y} - 2\mathrm{xyx} + yx^2)\delta(y) = 0$

Bukti:

i. Pembuktian bagian ini diperoleh dari Lemma 3.1.5 bagian *i* yaitu

$$\delta(xy + yx) = 2x\delta(y) + 2y\delta(x) \quad (3.1)$$

Dengan mensubstitusikan y dengan yx diperoleh
$\delta(x(xy)+(xy)x)=2x\delta(xy)+2(xy)\delta(x)$
$\delta(x^2y+xyx)=2(x\delta(xy)+(xy)\delta(x)).$ (3.2)
Dengan mensubstitusikan y dengan xy diperoleh
$\delta(x(yx)+(yx)x)=2x\delta(yx)+2(yx)\delta(x)$
$\delta(xyx+yx^2)=2\big(x\delta(yx)+(yx)\delta(x)\big).$ (3.3)
Dengan mensubstitusikan x dengan x^2 diperoleh
$\delta(x^2y+yx^2)=2x^2\delta(y)+2y\delta(x^2).$ (3.4)
Dari persamaan (3.2) dikurangi persamaan (3.3) diperoleh
$\delta(x^2y-yx^2)$
$=2\big(x\delta(xy)+(xy)\delta(x)\big)-2\big(x\delta(yx)+(yx)\delta(x)\big)$
$=2\big(x\delta(xy-yx)+(xy-yx)\delta(x)\big).$ (3.5)
Kemudian persamaan (3.4) ditambahkan dengan persamaan (3.5) sehingga dari ruas kiri diperoleh

$$\delta(x^2y+yx^2)+\delta(x^2y-yx^2)=2\delta(x^2y),$$

dan dari ruas kanan diperoleh
$2\big(x^2\delta(y)+y\delta(x^2)\big)+2\big(x\delta(xy-yx)+(xy-yx)\delta(x)\big)$
$=2\big(x^2\delta(y)+2yx\delta(x)+x\delta(xy-yx)+(xy-yx)\delta(x)\big)$
$=2(x\delta(xy-yx)+x^2\delta(y)+(xy+yx)\delta(x)).$
Karena X adalah 2-*torsion free* maka
$2\delta(x^2y)=2(x\delta(xy-yx)+x^2\delta(y)+(xy+yx)\delta(x))$
$\delta(x^2y)\ =\big(x\delta(xy-yx)+x^2\delta(y)+(xy+yx)\delta(x)\big)$
untuk semua $x,y\in R$.

ii. Pembuktian bagian ini diperoleh dari pembuktian bagian sebelumnya, yaitu dengan cara persamaan (3.5) dikurangi persamaan (3.4) sehingga diperoleh
$2\delta(yx^2)$
$=2\big(x^2\delta(y)+2yx\delta(x)\big)-2(x\delta(xy-yx)+$
$(xy-yx)\delta(x))$
$=2x^2\delta(y)+4yx\delta(x)-2(xy-yx)\delta(x)-2x\delta(xy-yx)$
$=2x^2\delta(y)+6yx\delta(x)-2xy-2x\delta(xy-yx).$
Karena X adalah *2-torsion free*, maka
$\delta(yx^2)=x^2\delta(y)+3(yx-xy)\delta(x)-x\delta(xy-yx)$ untuk semua $x,y\in R$.

iii. Dari Lemma 3.1.5 bagian *v* diperoleh

$$(xy - yx)(\delta(xy) - x\delta(y) - x\delta(y)) = 0.$$

Kemudian dengan menggabungkan Lemma 3.15 bagian *i* dan *iii* diperoleh

$$(xy - yx)(\delta(yx) - x\delta(y) - y\delta(x)) = 0.$$

Dengan mengurangkan keduanya diperoleh

$$(xy - yx)\delta(xy - yx) = 0 \text{ untuk semua } x, y \in R.$$

iv. Bagian ini dibuktikan dari Lemma 3.3.5 bagian *i* dan *ii*, diperoleh $(xy - yx)\delta(xy - yx) = 0$, untuk semua $x, y \in R$.
Sehingga

$\delta(xy - yx)^2$
$= \delta(x(yxy) + (yxy)x) - \delta(xy^2x) - \delta(yx^2y)$
$= 2x\delta(yxy) + 2yxy\delta(x) - \delta(xy^2x) - \delta(yx^2y)$
$= -3(x^2y - 2xyx + yx^2)\delta(y) - (y^2x - 2yxy + xy^2)\delta(x)$

Disisi lain,

$\delta(xy - yx)^2 = 2(xy - yx)\delta(xy - yx) = 0$

Maka didapatkan

$$3(x^2y - 2xyx + yx^2)D\delta(y) + (y^2x - 2yxy + xy^2)\delta(x) = 0. \quad (3.6)$$

Dari Lemma 3.1.5 bagian *ii* didapatkan

$(xy - yx)x\delta(x) = x(xy - yx)\delta(x)$
$(xyx - yx^2)\delta(x) = (x^2y - xyx)\delta(x)$
$\left((xyx - yx^2) - (x^2y - xyx)\right)\delta(x) = 0$
$$(x^2y - 2xyx + yx^2)\delta(x) = 0. \quad (3.7)$$

Kemudian $x = x + y$ disubstitusikan pada persamaan (3.7) diperoleh

$((x + y)^2y - 2(x + y)y(x + y) + y(x + y)^2)\delta(x + y) = 0$
$[\left((x + y)^2y - (x + y)y(x + y)\right) - ((x + y)y(x + y)$
$+y(x + y)^2)](x + y) = 0$
$[(x + y)\left((x + y)y - y(x + y)\right) - ((x + y)y -$
$y(x + y))(x + y)]\delta(x + y) = 0$
$$(x + y)(xy - yx)\delta(x + y) - (xy - yx)(x + y)\delta(x + y) = 0. \quad (3.8)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh

$$(x^2y - 2xyx + yx^2)\delta(y) - (y^2x - 2yxy + xy^2)\delta(x) = 0 \quad (3.9)$$

Persamaan (3.6) dijumlahkan dengan persamaan (3.9) dan karena X adalah *2-torsion free* maka diperoleh

$$(x^2y - 2xyx + yx^2)\delta(y) = 0$$

Sehingga dari persamaan 3.9 diperoleh

$$(x^2y - 2xyx + yx^2)\delta(y) - (y^2x - 2yxy + xy^2)\delta(x) = 0$$
$$0 - (y^2x - 2yxy + xy^2)\delta(x) = 0$$
$$(y^2x - 2yxy + xy^2)\delta(x) = 0$$

untuk semua $x, y \in R$ ■

Lemma 3.3.6

Misalkan R adalah ring *2-torsion free* dan $G: R \to R$ merupakan *generalized Jordan left derivation* yang berkaitan dengan *Jordan left derivation* $\delta: R \longrightarrow R$ maka:

$$[x, y]H(x, y) = 0 \text{ untuk semua } x, y \in R.$$

Bukti:

Dengan mensubstitusikan $z = xy - yx$ pada Lemma 3.3.3 bagian *iii*, diperoleh

$$G(xy(xy - yx) + (xy - yx)yx)$$
$$= xyG(xy) - xyG(yx) + [x, y]yG(x) + [x, y]\delta([x, y]) + xy\delta([x, y]) + 2[x, y]y\,\delta(x) + x[x, y]\delta(y) + [x, y]x\delta(y) - y[x, y]\delta(x).$$

Kemudian dari aplikasi Lemma 3.3.5 bagian *ii* diperoleh

$$G(xy(xy - yx) + (xy - yx)yx)$$
$$= xyG(xy) - xyG(yx) + [x, y]yG(x) + xy\,\delta([x, y]) + 2[x, y]y\,\delta\,(x) + x[x, y]\,\delta(y) + [x, y]x\delta(y) - y[x, y]\delta(x). \quad (3.10)$$

Disisi lain,

$$G(xy(xy - yx) + (xy - yx)yx)$$
$$= G((xy)^2 - xy^2x + xy^2x - (yx)^2)$$
$$= G((xy)^2) - G((yx)^2)$$
$$= xyG(xy) + xy\delta(xy) - yxG(yx) - yx\delta(yx). \quad (3.11)$$

Dengan menggabungkan persamaan (3.10) dan (3.11) diperoleh

$$yxG(yx) - xyG(yx) + [x, y]yG(x) + 2[x, y]y\delta(x) + xy\delta([x, y]) + x[x, y]\delta(y) + [x, y]x\delta(y) - y[x, y]\delta(x) + yx\delta(yx) - xy\delta(xy) = 0.$$

Hal ini mengakibatkan
$[y,x]G(yx)+[x,y]yG(x)+[x,y]x\delta(y)+2[x,y]y\delta(x)-2y[x,y]\delta(x)+x[x,y]\delta(y)+y[x,y]\delta(x)+yx\delta(xy)-xy\delta(xy)=0.$ (3.12)

Dari Lemma 3.3.5 bagian *iv* diperoleh

$$x[x,y]\delta(y)+y[x,y]\delta(x)+yx\delta(xy)-xy\delta(xy)$$
$$=(x^2y-2xyx+yx^2)\delta(y)-(y^2x-2yxy+xy^2)\delta(x)=0. \quad (3.13)$$

Dan

$$2[x,y]y\delta(y)-2y[x,y]\delta(x)$$
$$=2(y^2x-2yxy+xy^2)\delta(x)$$
$$=0. \quad (3.14)$$

Sekarang dari (3.12), (3.13), dan (3.14) menjadi

$$[y,x]G(yx)+[x,y]yG(x)+[x,y]x\,\delta(y)=0.$$

Hal itu mengakibatkan

$$[x,y](G(xy)-xG(y)-y\,\delta(x))=0,$$

atau $[x,y]H(x,y)=0$ untuk semua $x,y\in R$ ■

Selanjutnya akan dibahas mengenai teorema yang berkaitan langsung dengan pokok pembahasan dalam skripsi ini.

Teorema 3.3.7

Misalkan R adalah ring *2-torsion free* sedemikian sehingga R memiliki komutator yang bukan pembagi nol kiri. Misalkan $G: R\to R$ adalah *generalized Jordan left derivation* yang berkaitan dengan *Jordan left derivation* $\delta: R\longrightarrow R$, maka setiap *generalized Jordan left derivation* pada R adalah *generalized left derivation* di R.

Bukti:

Karena R adalah ring *2-torsion free* dan R memiliki komutator yang bukan pembagi nol kiri maka terdapat $a,b\in R$ sedemikian sehingga $[a,b]c=0$ maka $c=0$. Jadi dari Lemma 3.3.6 diperoleh

$$[a,b]H(a,b)=0 \text{ maka } H(a,b)=0 \quad (3.15)$$

Dengan mensubstitusi $x=x+a$ pada Lemma 3.3.6 diperoleh

$(x+a\,,\mathrm{y})H(x+a\,,\mathrm{y}) = 0$
$([x,y]+[a,y])H(x+a,y) = 0$
$([x,y]+[a,y])\big(H(x,y)+H(a,y)\big) = 0$

$$[x,y]H(x,y)+[x,y]H(a,y)+[a,y]H(x,y)+[a,y]H(a,y)=0$$
$$[x,y]H(a,y)+[a,y]H(x,y)=0. \quad (3.16)$$

Kemudian dengan mensubstitusi $y=y+b$ pada persamaan (3.16) diperoleh

$$[x,y+b\,]H(a,y+b\,)+[a,y+b\,]H(x,y+b\,)=0$$
$$([x,y\,]+[x,b])\big(H(a,y)+H(a,b)\big)+([a,y]+[a,b])\big(H(x,y)+H(x,b)\big)=0$$

Karena $H(a,b)=0$ maka,

$$([x,y\,]+[x,b])H(a,y)+([a,y]+[a,b])\big(H(x,y)+H(x,b)\big)=0$$
$$[x,y\,]\,H(a,y)+[x,b]H(a,y)+[a,y]H(x,y)+[a,b]H(x,y)+[a,y]H(x,b)+[a,b]H(x,b)=0$$
$$[x,b]H(a,y)+[a,y]H(x,b)+[a,b]H(x,y)+[a,b]H(x,b)=0. \quad (3.17)$$

Selanjutnya $x=a$ disubstitusikan pada persamaan (3.17)

$$[a,b]H(a,y)+[a,y]H(a,b)+[a,b]H(a,y)+[a,b]H(a,b)=0$$

$2[a,b]H(a,y)=0$ untuk semua $x,y\in R$.

Karena R adalah ring *2-torsion free* sehingga

$$[a,b]H(a,y)=0.$$

maka,

$$H(a,y)=0.$$

Selanjutnya $y=b$ disubstitusikan pada persamaan (3.16) diperoleh

$[x,b]H(a,b)+[a,b]H(x,b)=0.$

Sehingga,

$$H(x,b)=0.$$

Oleh karena itu, persamaan (3.17) menjadi $[a,b]H(x,y)=0$, maka $H(x,y)=0$, yaitu $G(xy)=xG(y)+y\delta(x)$. Jadi Teorema 3.3.7 telah terbukti. ■

Contoh 3.3.8

Misalkan $S=Z_4$ adalah ring. Dan misalkan $R=\left\{\begin{bmatrix}\bar{0} & a\\ \bar{0} & b\end{bmatrix}, a,b\in S\right\}$.

Didefinisikan sebuah pemetaan $G\colon R\to R$ yang memenuhi:

$$G\begin{bmatrix}\bar{0} & a\\ \bar{0} & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{0} & 2a\\ \bar{0} & 2b\end{bmatrix}.$$

Didefinisikan sebuah pemetaan $\delta\colon R\to R$ yang memenuhi:

$$\delta\begin{bmatrix}\bar{0} & a\\ \bar{0} & b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.$$

Maka G adalah *generalized Jordan left derivation* yang merupakan *generalized left derivation.*

Bukti:

Ambil $X, Y \in R$, misalkan

$$X = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix} \text{dan } Y = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}.$$

i. Akan dibuktikan bahwa G adalah pemetaan aditif

$$\begin{aligned}G(X+Y) &= G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\right)\\ &= G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{3}\\ \bar{0} & \bar{5}\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{4}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{4}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{4}\end{bmatrix}\\ &= G(X) + G(Y).\end{aligned}$$

Jadi G adalah pemetaan aditif.

ii. Akan dibuktikan G adalah *generalized Jordan left derivation.*

$$G(X^2) = XG(X) + X\delta(X)$$

$$\begin{aligned}G(X^2) &= G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\right)\\ &= G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&XG(X) + X\delta(X)\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\right)\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{4}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{3}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$G(X^2) = XG(X) + X\delta(X)$$

Jadi G adalah *generalized Jordan left derivation*.

iii. Akan dibuktikan bahwa G adalah *generalized left derivation.*

$$G(XY) = XG(Y) + Y\delta(X)$$

Dari ruas kiri diperoleh

$$G(XY) = G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\right)$$
$$= G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{4}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.$$

Dari ruas kanan diperoleh

$XG(Y) + Y\delta(X)$

$$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{4}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{1}\\ \bar{0} & \bar{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{2} & \bar{3}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{2}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.$$

Karena $G(XY) = XG(Y) + Y\delta(X)$, maka G adalah *generalized left derivation.* Jadi terbukti bahwa G adalah *generalized Jordan left derivation* yang merupakan *generalized left derivation*

Kemudian akan dibahas proposisi, teorema serta pembuktian yang berkaitan dengan *generalized Jordan left derivation* pada ring prima.

Proposisi 3.3.9

Misalkan R adalah ring prima *2-torsion free*. Jika R merupakan *generalized left derivation* yang berkaitan dengan *Jordan left derivation* δ, maka $\delta = 0$ atau R adalah komutatif.

Bukti:

Misalkan $G: R \to R$ merupakan *generalized left derivation* yang berkaitan dengan *Jordan left derivation* $\delta: R \longrightarrow R$. Maka untuk semua $x, y \in R$ diperoleh

$$G(x^2y) = x^2G(y) + 2yx\delta(x). \qquad (3.18)$$

Di lain pihak diperoleh

$$G(x^2y) = G\big(x(xy)\big) = x^2G(y) + 2xy\delta(x). \tag{3.19}$$

Dari mengurangkan persamaan (3.19) dengan persamaan (3.18) diperoleh

$$\begin{aligned} x^2G(y) + 2yx\delta(x) - x^2G(y) + 2xy\delta(x) &= 0 \\ 2xy\delta(x) - 2yx\delta(x) &= 0 \\ 2[x,y]\delta(x) &= 0. \end{aligned}$$

Karena R merupakan ring prima *2-torsion free*, persamaan (3.19) menunjukkan bahwa

$$[x,y]\delta(x) = 0 \tag{3.20}$$

Dengan mensubstitusikan $y = yz$ pada persamaan (3.19), maka diperoleh

$$\begin{aligned} [x,yz]\delta(x) &= 0 \\ (y[x,z] + [x,y]z)\delta(x) &= 0 \\ [x,y]R\,\delta(x) &= \{0\} \text{ untuk semua } x,y \in R. \end{aligned}$$

Karena R adalah ring prima maka $[x,y] = 0$ atau $\delta(x) = 0$ untuk semua $y \in R$. ■

Akibat 3.3.10

Misalkan R adalah ring prima *2-torsion free*. Jika *Jordan left derivation* yang berkaitan adalah $\delta \neq 0$, maka R komutatif.

Bukti:

Bukti Akibat 3.3.10 diperoleh dari bukti Proposisi 3.3.9. Diketahui persamaan (3.20), yaitu

$$[x,y]\delta(x) = 0$$

Jika $\delta \neq 0$ sehingga

$$\begin{aligned} [x,y] &= 0 \\ xy - yx &= 0 \\ xy &= yx \end{aligned}$$

Maka R adalah komutatif. Jadi Akibat 3.3.10 telah terbukti. ■

Teorema 3.3.11

Misalkan R adalah ring prima *2-torsion free* dan $G: R \to R$ merupakan *generalized Jordan left derivation* yang berkaitan dengan *Jordan left derivation* $\delta: R \longrightarrow R$. Maka setiap *generalized Jordan left derivation* pada R adalah *generalized left derivation* di R.

Bukti:

Jika *Jordan left derivation* yang berkaitan adalah $\delta = 0$, maka G adalah *Jordan left multiplier*. Di sisi lain, anggap bahwa *Jordan left derivation* yang berkaitan adalah $\delta \neq 0$, maka dari Akibat 3.3.9 diketahui bahwa R adalah komutatif.

Dari jurnal yang berjudul *On Lie Ideals and Jordan Left Derivations of Prime Rings* pada tahun 2003 telah dibuktikan bahwa setiap *Jordan left derivation* pada ring prima *2-torsion free* adalah *left derivation*. Oleh karena itu dari Lemma 3.3.3 bagian *i* dan karena R merupakan ring prima 2-*torsion free*, diperoleh

$$\begin{aligned} G(xyz + zyx) &= G((xy)z + z(yx)) \\ &= xyG(z) + zG(yx) + xy\delta(z) + zy\delta(x) + zx\delta(y). \end{aligned}$$

Kemudian dengan menggabungkan dari Lemma 3.3.3 bagian *iii*, diperoleh

$$xyG(z) + zG(yx) + xy\delta(z) + zy\delta(x) + zx\delta(y) = xyG(z) + zyG(x) + 2xy\delta(z) + 2zy\delta(x) + xz\delta(y) + zx\delta(y) - yx\delta(z) - yz\delta(x)$$

Selanjutnya

$$zG(yx) = zyG(x) + xy\delta(z) + zy\delta(x) + xz\delta(y) - yx\delta(z) - yz\delta(x).$$

Karena R komutatif maka

$zG(yx) - zyG(x) - xz\delta(y) = 0$

$z\big(G(yx) - yG(x) - x\delta(y)\big) = 0$ untuk semua $x, y, z \in R$.

Selanjutnya

$\big(G(yx) - yG(x) - x\delta(y)\big)R\big(G(yx) - yG(x) - x\delta(y)\big) = \{0\}$.

Karena sifat prima dari R maka menyebabkan

$G(yx) - yG(x) - x\delta(y) = 0$.

$G(yx) = yG(x) + x\delta(y)$

Atau

$G(xy) = xG(y) + y\delta(x)$, G adalah *generalized left derivation* pada R. Jadi Teorema 3.3.10 telah terbukti. ■

Contoh 3.3.12

Misalkan R ring prima *2-torsion free*. $R = \left\{\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{a} & \bar{0} \end{bmatrix}, \bar{a} \in Z_2\right\}$.

Didefinisikan pemetaan aditif $G: R \to R$ yang memenuhi:

$$G\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{a} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{a} & \bar{0} \end{bmatrix}$$

Didefinisikan pemetaan aditif $\delta: R \to R$ yang memenuhi:

$$\delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{a} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$$

Maka R adalah *generalized Jordan left derivation* yang *generalized left derivation.*

Bukti:

Ambil $X, Y \in R$. Misalkan $X = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$.

i. Akan dibuktikan R adalah *generalized Jordan left derivation.*

$G(X^2) = XG(X) + X\delta(X)$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.$$

ii. Akan dibuktikan R adalah *generalized left derivation.*

$G(XY) = XG(Y) + Y\delta(X)$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.$$

Selanjutnya ambil $X, Y \in R$. Misalkan $X = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$ dan $Y = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}$.

i. Akan dibuktikan R adalah *generalized Jordan left derivation.*

$G(X^2) = XG(X) + X\delta(X)$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}.$$

ii. Akan dibuktikan R adalah *generalized left derivation.*

iii. $G(XY) = XG(Y) + Y\delta(X)$

$$G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix} G\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{1} & \bar{0}\end{bmatrix} \delta\left(\begin{bmatrix}\bar{0} & \bar{0}\\ \bar{0} & \bar{0}\end{bmatrix}\right)$$

$$G\left(\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix}.$$

Jadi terbukti bahwa R adalah *generalized Jordan left derivation* yang *generalized left derivation.*

BAB IV

KESIMPULAN

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan skripsi ini adalah:

i. Setiap *generalized Jordan left derivation* pada ring *R* merupakan *generalized left derivation* apabila memenuhi 2 syarat, yaitu:
   - *R* adalah ring *2-torsion free*
   - *R* memiliki komutator yang bukan pembagi nol kiri.

ii. Setiap *generalized Jordan left derivation* pada ring prima *R* merupakan *generalized left derivation* apabila memenuhi syarat *R* adalah ring prima *2-torsion free.*

DAFTAR PUSTAKA

Ali, A. dan Deepak Kumar. 2007. *Generalized Derivations which Acts as Homomorphism or as an Anti-homomorphism in a Prime Ring*. International Mathematical Forum. Volum 2. Nomor 23, Halaman 1105-1110.

Argac, N. 1997. *On Prime and Semiprime Near-rings with Derivations*. Department of Mathematics. Ege University. Turkey. Intenat. J. Math. and Math. Sci. Volum 20. Nomor 4. Halaman 737-740.

Ashraf,M. dan Shakir Ali. 2008. *On Generalized Jordan Left Derivation in Rings.* Bulletin of the Korean Mathematical Society. Vol. 45. No.2, Hlm. 253-261.

Bell, H. E. dan Mason, G., 1992, *On Derivation in Near-rings and Rings*, Math. J. Okayama University, Volum 34, Halaman 135-144.

Bhattacharya, P. B., dkk., 1990, *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press, New York, Halaman 29-23.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M., 2002, *Abstract Algebra Second Edition*, John Wiley and Sons, Inc., New York, Halaman 224-231.

Hvala, B. 1998. *Generalized Derivation in Rings*. Comm. Algebra. Volum 26. Halaman 1147-1166.

Liu, C. dan Wen-Kwei Shiue. 2007. *Generalized Jordan Triple (θ,ϕ)-Derivations on Semiprime Rings*. Taiwanese Journal of Mathemathics. Vol. 11, No. 5. Hlm. 1397-1406.

Nakajima, A. 2006. *Note on Generalized Jordan Derivations Associate with Hochschild 2-cocycles of Rings.* Halaman 410.

Spindler, K. 1994. *Abstract Algebra with Applications Volume 1*. Marcel Dekker Inc. New York.

Whitelaw, T. A., 1995, *Introduction to Abstract Algebra*, Department of Mathematics University of Glasgow, Blackie Academic and Professional, New York, Halaman 61-68.

Woung,K. dan Byung Do Kim. 1996. *A Note On Jordan Left Derivations.* Bulletin of the Korean Mathematical Society. Vol.33. No.2 , Hlm.. 221