BI-IDEAL MINIMAL DALAM *Γ*-SEMIGRUP

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
MIRANDA ELIYAN
0710943023-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2012

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

***BI-IDEAL* MINIMAL DALAM *Γ*-SEMIGRUP**

oleh :

MIRANDA ELIYAN

0710943023-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 23 Mei 2012
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, M.S	**Drs. Bambang Sugandi, M.Si**
NIP. 196105161987012001	**NIP. 195905151992031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP.196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**MIRANDA ELIYAN**
NIM	**:**	**0710943023-94**
Jurusan	**:**	**MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	***BI-IDEAL* MINIMAL DALAM *Γ*-SEMIGRUP**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri, dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 23 Mei 2012
Yang menyatakan,

(Miranda Eliyan)
NIM. 071094302

BI-IDEAL MINIMAL DALAM *Γ*-SEMIGRUP

ABSTRAK

Sebuah *Γ*-semigrup dibangun oleh dua himpunan tak kosong yang memenuhi sifat tertutup dan assosiatif. Misalkan M adalah *Γ*-semigrup dan B merupakan sub-Γ-semigrup dari M jika memenuhi sifat $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$, maka B disebut bi-ideal dalam M. Jika B merupakan bi-ideal yang tidak memuat bi-ideal lain dalam M, maka B disebut bi-ideal minimal/(0-)minimal. Jika M tidak memuat bi-ideal sejati, maka M disebut *B-simple*/*(0-)B-simple*. Dalam sebuah *Γ*-semigrup yang memiliki bi-ideal dikatakan memiliki karakteristik bi-ideal minimal/(0-)minimal jika bi-idealnya merupakan *B-simple*/ *(0-)B-simple*. Kemudian setiap irisan dua bi-ideal sejati yang berbeda dalam *Γ*-semigrup memiliki karakteristik bi-ideal minimal/(0-)minimal jika dan hanya jika irisannya merupakan himpunan kosong atau {0}.

Kata kunci : *bi-ideal*, *Γ-semigrup*, *B-simple*, *bi-ideal* minimal.

MINIMAL BI-IDEAL IN Γ-SEMIGROUPS

ABSTRACT

A Γ-semigroup built by two nonempty sets which satisfying properties closed and associative. Let M be a Γ-semigroup and B is a sub-Γ-semigroups of M if satisfy the properties $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$, then B is called bi-ideals of M. If B has no contain any bi-ideals in M, then B is called minimal/(0-)minimal bi-ideals. If M does not contain proper bi-ideals, then M is called B-simple/(0-)B-simple. In a Γ-semigroups with bi-ideals has characteristics of minimal/ (0-)minimal bi-ideal if B-simple/(0-)B-simple. Then, every intersection of two distinct proper bi-ideals in Γ-semigroups have characteristics minimal/(0-)minimal bi-ideals if and only if their intersection is empty or {0}.

Keyword : bi-ideal, Γ-semigroups, B-simple, minimal bi-ideal.

KATA PENGANTAR

Hamdanlillāh. Shalātan wasalāman 'ala Rasūlillāh. Betapa tak ada kata lain selain rasa syukur yang sangat mendalam kepada-Nya, Sang Maha Pemilik Ilmu, karena setetes ilmu-Nya telah mencerahkan penulis sehingga dapat menyelesaikan Skripsi yang berjudul ***BI-IDEAL* MINIMAL DALAM *Γ*-SEMIGRUP.**

Skripsi ini merupakan salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika di Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang.

Atas terselesaikannya skripsi ini, ungkapan terima kasih yang tulus penulis sampaikan kepada :

1. Dra. Ari Andari, MS selaku Dosen pembimbing 1 atas kesabaran dan arahan yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan Skripsi ini.
2. Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku Dosen pembimbing II sekaligus ketua KBI aljabar atas kesabaran dan arahan yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan Skripsi ini.
3. Drs. M. Muslikh, M.Si selaku dosen penguji yang telah banyak memberi nasehat, masukan, saran dan kritik untuk perbaikan Skripsi ini.
4. Syaiful Anam,S.Si,MT selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan saran selama penulis menempuh studi.
5. Dr. Sobri Abusini, MT selaku Ketua Program Studi Matematika atas bantuannya yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan Skripsi ini..
6. Dr.Abdul Rouf Alghofari, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika atas bantuannya yang telah diberikan kepada penulis selama penyusunan Skripsi ini.
7. Bapak dan Ibu Dosen Matematika atas didikannya selama kuliah hingga penulis dapat menyelesaikan kuliah.
8. Staff dan karyawan pengajaran Jurusan Matematika yang telah membantu atas terselesaikannya Skripsi ini.
9. Ayah dan Ibu yang senantiasa mendo’akan dan membantu untuk mencapai yang terbaik dalam hidup penulis.
10. Teman – teman di Jurusan Matematika, khususnya angkatan 2007 (resti, irma, nina, rani, maya, yayuk dan nirma) atas do’a,

bantuan, dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.

11. Teman-teman kosan (dini, ita, ifla, dan candi) atas do'a, bantuan,dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu yang telah banyak membantu dan memberikan dorongan selama penulisan Skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih terdapat kekurangan mengingat keterbatasan kemampuan penulis. Untuk itu dengan segala kerendahan hati penulis mengharap kritik dan saran yang membangun dari semua pihak untuk perbaikan penulisan selanjutnya. Akhirnya penulis berharap semoga Skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca umumnya.

Malang, 23 Mei 2012

(Penulis)

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\in$	Elemen (anggota)
$\notin$	Bukan elemen (bukan anggota)
$\subseteq$	Himpunan bagian (subset)
$\emptyset$	Himpunan kosong
$A = \{0\}$	Himpunan A yang elemennya nol saja
$\neq$	Tidak sama dengan
$S \times S$	Hasil kali kartesius S dan S
$S \times S \to S$	Pemetaan dari $S \times S$ ke S
$A \Rightarrow B$	Implikasi jika A maka B
$*$	Sebarang operasi biner
$+$	Operasi penjumlahan biasa
$\bullet$	Operasi pergandaan biasa
$\cap$	Irisan
$\cup$	Gabungan
$\forall$	Untuk setiap
S	Semigrup
M	Γ-Semigrup
$M\backslash\{0\}$	Himpunan M tidak memuat nol
$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$	Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri bilangan bulat
$B(a)$	Bi-ideal yang dibangun oleh elemen a
ASA	Bi-ideal dalam Semigrup didefinisikan $ASA = \{asa \mid a \in A, s \in S\}$
$B\Gamma M\Gamma B$	Bi-ideal dalam Γ-Semigrup didefinisikan $B\Gamma M\Gamma B = \{a\gamma m\gamma b \mid a, b \in B, \gamma \in \Gamma, m \in M\}$.
$\blacksquare$	Akhir dari sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong dilengkapi dengan suatu operasi biner tertentu dan memenuhi aksioma tertentu. Dengan kata lain struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen, yaitu himpunan, operasi dan aksioma. Banyaknya operasi atau banyaknya aksioma menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan yang lain, sebagai contoh grup, semigrup, ring, semiring, modul dan lain sebagainya.

Semigrup merupakan salah satu bentuk struktur aljabar dengan satu operasi biner yang bersifat tertutup dan asosiatif. Sebarang semigrup dapat digeneralisasi menjadi Γ-semigrup. Berbeda dengan semigrup, Γ-semigrup dibangun oleh dua himpunan tak kosong. Dalam sebuah Γ-semigrup terdapat bi-ideal. Konsep bi-ideal dalam Γ-semigrup dan karakteristiknya telah diperkenalkan oleh Aiyared Iampan pada tahun 2009 dalam jurnalnya yang berjudul *Bi-ideals in Γ-semigroups*. Karakteristik ini memberikan ciri khusus pada bi-idealnya menjadi bi-ideal minimal/(0-)minimal. Dalam skripsi ini akan dibahas mengenai definisi, lemma dan teorema yang berlaku pada bi-ideal minimal dalam Γ-semigrup.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini yaitu bagaimana definisi, lemma dan teorema berserta bukti-buktinya yang berlaku pada bi-ideal minimal dalam Γ-semigrup.

1.3 Tujuan

Tujuan pembahasan dalam skripsi ini yaitu mempelajari definisi, contoh, lemma dan teorema beserta bukti-buktinya yang berlaku pada bi-ideal minimal dalam Γ-semigrup.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contohnya, serta teorema dan buktinya sebagai acuan dalam membahas permasalahan.

2.1 Operasi Biner dan Operasi Ternari

Dalam struktur aljabar, suatu himpunan yang tak kosong dengan elemen-elemennya dapat dikaitkan dengan operasi penjumlahan, perkalian atau beberapa operasi biner lainnya. Berikut ini akan diberikan definisi tentang operasi biner dan operasi ternari.

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner)

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S, atau dinotasikan sebagai berikut.

$$*: S \times S \longrightarrow S$$
$$(a,b) \longmapsto a * b = c \in S.$$

Operasi-operasi dasar dalam objek aljabar seperti penjumlahan, pengurangan dan perkalian merupakan contoh dari operasi biner pada semua himpunan bilangan riil.

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.2 (Sifat Operasi Biner)

Operasi biner $*: S \times S \longrightarrow S$ pada himpunan S dikatakan:

(i) Komutatif jika $x * y = y * x, \forall x, y \in S$.

(ii) Assosiatif jika $x * (y * z) = (x * y) * z, \forall x, y, z \in S$.
Jika $\circ$ adalah operasi biner yang lain pada S maka operasi biner $*$ dikatakan;

(iii) Distributif kiri atas $\circ$ jika
$x * (y \circ z) = (x * y) \circ (x * z), \forall x, y, z \in S$.

(iv) Distributif kanan atas $\circ$ jika
$(y \circ z) * x = (y * x) \circ (z * x), \forall x, y, z \in S$.
Jika operasi $*$ adalah distributif kanan dan kiri atas operasi $\circ$ maka operasi $*$ dikatakan sebagai distributif atas $\circ$.

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.3 (Operasi Ternari)

Untuk suatu bilangan bulat positif n, pemetaan $f : S^n \to S$, di mana $S^n = S \times S \times \cdots \times S$ (n faktor) disebut operasi *n-ari* pada S. Ketika $n = 1$ maka pemetaan $u : S \to S$ disebut operasi unari dan ketika $n = 3$ maka pemetaan $w : S \times S \times S \to S$ disebut **operasi ternari.**

(Bhattacharya, 1990)

Definisi 2.1.4 (Pemetaan)

Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat satu $b \in B$ maka $f(a) = b$. Pada pemetaan f dari A ke B, himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dari f. Secara umum dikenal dua macam pemetaan yaitu:

(i) f disebut pemetaan satu-satu (injektif) jika untuk setiap $a, b \in A$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.

(ii) f disebut pemetaan onto (surjektif) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$.

Jika f merupakan pemetaan injektif dan surjektif, maka f disebut sebagai pemetaan bijektif.

(Bhattacharya, 1990)

2.2 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang sederhana dan dilengkapi dengan satu operasi biner. Semigrup merupakan suatu himpunan tidak kosong yang di dalamnya terdapat satu operasi biner. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Semigrup) Misalkan S adalah himpunan tak kosong yang didalamnya didefinisikan oleh operasi biner “$*$”, atau dinotasikan dengan $(S,*)$, maka S disebut sebagai semigrup jika bersifat:

(i) $(S,*)$ tertutup yaitu $(a * b) \in S$ untuk semua $a, b \in S$.

(ii) $(S,*)$ assosiatif yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk semua $a, b, c \in S$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.2

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli yang didalamnya didefinisikan operasi biner "$*$" terhadap perkalian dan penjumlahan biasa yaitu $a * b = a + b + ab$. Maka $(\mathbb{N},*)$ merupakan suatu semigrup.

Bukti:

(i) Tertutup

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$.

$a * b = a + b + ab \in \mathbb{N}$.

Jadi,terhadap operasi perkalian dan penjumlahan berlaku sifat tertutup pada bilangan asli.

(ii) Assosiatif

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= a + b + ab + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc \\ &= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc) \\ &= a + (b * c) + a(b * c) \\ &= a * (b * c)\end{aligned}$$

Jadi pada $(\mathbb{N},*)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{N},*)$ bersifat tertutup dan assosiatif terhadap operasi biner "$*$" dan $a * b = a + b + ab$, maka terbukti $(\mathbb{N},*)$ adalah semigrup.■

Contoh 2.2.3

Misalkan $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$, maka $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ dan $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ adalah semigrup.

Bukti:

Ambil matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$ dimana $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

❖ $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi penjumlahan:

(i) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ Tertutup.

$$A + B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{pmatrix}$$

karena $a+e \in \mathbb{Z}, b+f \in \mathbb{Z}, c+g \in \mathbb{Z},$ dan $d+h \in \mathbb{Z},$ maka $A+B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

(ii) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ Assosiatif.

$$\begin{aligned}(A+B)+C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{pmatrix} \\ &= A+(B+C)\end{aligned}$$

Karena $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ memenuhi (i) dan (ii), maka terbukti $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ adalah semigrup. ■

❖ $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian :

(i) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ Tertutup.

$$A \bullet B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}$$

karena $ae+bg \in \mathbb{Z}, af+bh \in \mathbb{Z}, ce+dg \in \mathbb{Z}, cf+dh \in \mathbb{Z}$, maka $A \bullet B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

(ii) $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ Assosiatif.

$$\begin{aligned}(A \bullet B) \bullet C &= \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (ae+bg)i+(af+bh)k & (ae+bg)j+(af+bh)l \\ (ce+dg)i+(cf+dh)k & (ce+dg)j+(cf+dh)l \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a(ei+fk)+b(gi+hk) & a(ej+fl)+b(gj+hl) \\ c(ei+fk)+d(gi+hk) & c(ej+fl)+d(gj+hl) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right] \\ &= A \bullet (B \bullet C)\end{aligned}$$

Karena $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ memenuhi (i) dan (ii), maka terbukti $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ adalah semigrup. ■

Contoh 2.2.4

Himpunan bilangan bulat modulo tiga yaitu $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ terhadap operasi penjumlahan dan pergandaan adalah semigrup.

Bukti:
Berikut merupakan tabel penjumlahan dan pergandaan dari $\mathbb{Z}_3$.

Tabel 2.2.1 Operasi penjumlahan pada $\mathbb{Z}_3$

$+$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

Tabel 2.2.2 Operasi pergandaan pada $\mathbb{Z}_3$

$\bullet$	$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{\mathbf{2}}$
$\bar{\mathbf{0}}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{\mathbf{1}}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{\mathbf{2}}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

❖ $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi penjumlahan:

(i) $(\mathbb{Z}_3, +)$ Tertutup.
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_3$.
Berdasarkan Tabel 2.2.1 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_3, +)$ tertutup, karena $a + b \in \mathbb{Z}_3$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$.
Jadi pada $(\mathbb{Z}_3, +)$ berlaku sifat tertutup.

(ii) $(\mathbb{Z}_3, +)$ Assosiatif.
Ambil $a = \bar{1}, b = \bar{0}$, dan $c = \bar{0}$.
$(\bar{1} + \bar{0}) + \bar{0} = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$
$\bar{1} + (\bar{0} + \bar{0}) = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ akan diperoleh $(a + b) + c = a + (b + c)$.
Jadi pada $(\mathbb{Z}_3, +)$ berlaku sifat assosiatif.

❖ $\mathbb{Z}_3$ terhadap operasi pergandaan:

(i) $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ Tertutup.
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_3$.

Berdasarkan Tabel 2.2.2 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ tertutup, karena $a \bullet b \in \mathbb{Z}_3$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$.
Jadi pada $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ berlaku sifat tertutup.

(ii) $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ Assosiatif.
Ambil $a = \bar{1}, b = \bar{0}$, dan $c = \bar{0}$.
$(\bar{1} \bullet \bar{0}) \bullet \bar{0} = \bar{0} \bullet \bar{0} = \bar{0}$
$\bar{1} \bullet (\bar{0} \bullet \bar{0}) = \bar{1} \bullet \bar{0} = \bar{0}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ akan diperoleh $(a \bullet b) \bullet c = a \bullet (b \bullet c)$.
Jadi pada $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

Karena $(\mathbb{Z}_3, +)$ dan $(\mathbb{Z}_3, \bullet)$ memenuhi sifat tertutup dan assosiatif, terbukti $\mathbb{Z}_3$ adalah semigrup. ■

Definisi 2.2.5 (Semigrup komutatif)

Misalkan $(S,*)$ adalah semigrup, maka $(S,*)$ disebut semigrup komutatif jika berlaku $a * b = b * a, \forall a, b, c \in S$.

(Golan, 1999)

Contoh 2.2.6

Misalkan $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup. $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Buktikan bahwa $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup komutatif.

Bukti:
Dari Contoh 2.2.2 diketahui $(\mathbb{N}, +)$ merupakan semigrup. Akan dibuktikan bahwa $(\mathbb{N}, +)$ semigrup komutatif.
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$, maka $a + b = b + a$ untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$. Karena $\mathbb{N}$ bersifat komutatif terhadap penjumlahan jadi
$a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.
Terbukti bahwa $(\mathbb{N}, +)$ semigrup komutatif. ■

Definisi 2.2.7 (Semigrup dengan elemen nol)

Misalkan S adalah suatu semigrup terhadap operasi perkalian. Suatu elemen a dalam S disebut elemen nol jika $xa = ax = a, \forall x \in S$.

(Iampan, 2008)

Contoh 2.2.8

Berdasarkan Contoh 2.2.4 terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan semigrup, selanjutnya buktikan $\mathbb{Z}_3$ memuat elemen nol.

Bukti:
Ambil $a \in \mathbb{Z}_3$ yaitu $a = \bar{0}$ yang merupakan elemen nol dalam M dan $x \in \mathbb{Z}_3$ yaitu $x = \bar{2}$ maka
$xa = \bar{2} \bullet \bar{0} = \bar{0}$
$ax = \bar{0} \cdot \bar{2} = \bar{0}$
untuk semua $x \in \mathbb{Z}_3$ memenuhi $xa = ax = a$. Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan semigrup dengan elemen nol. ■

Definisi 2.2.9 (Subsemigrup)

Misalkan $(S,*)$ adalah semigrup terhadap operasi biner tertentu dan A adalah himpunan bagian dari S. A disebut subsemigrup dari S jika $(A,*)$ merupakan semigrup.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.10

Misal $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian, maka $A = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan subsemigrup dari $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Bukti:
Berdasarkan Contoh 2.2.3 telah dibuktikan bahwa $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ merupakan semigrup, selanjutnya harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa A juga merupakan semigrup terhadap operasi perkalian yang sama.
Ambil sebarang matriks $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $Z = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dimana $X, Y, Z \in A$.

❖ A terhadap operasi perkalian:

(i) $(A, \bullet)$ Tertutup

$$X \bullet Y = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

karena $xy \in \mathbb{Z}$, maka $X \bullet Y \in A$.

(ii) Assosiatif

$$\begin{aligned}(X \bullet Y) \bullet Z &= \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \bullet \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (xy)z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x(yz) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} yz & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= X \bullet (Y \bullet Z)\end{aligned}$$

untuk sebarang $X, Y, Z \in A$ berlaku $(X \bullet Y) \bullet Z = X \bullet (Y \bullet Z)$.

Terbukti bahwa $(A, \bullet)$ merupakan semigrup. Karena $A \subseteq \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$dan $(A, \bullet)$ merupakan semigrup, maka $(A, \bullet)$ adalah subsemigrup dari $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$. ■

2.3 Ideal dalam Semigrup

Misalkan S adalah semigrup dan A adalah subsemigrup dari S.

(i) A disebut ideal kanan dari S apabila untuk semua $a \in A$ dan $s \in S$ berlaku $as \in A$ dapat ditulis $AS \subseteq A$.

(ii) A disebut ideal kiri dari S apabila untuk semua $a \in A$ dan $s \in S$, berlaku $sa \in A$ dapat ditulis $SA \subseteq A$.

(iii) A disebut Ideal dua sisi/ideal dalam semigrup S apabila A merupakan ideal kanan dan ideal kiri.

(Lallement,1979)

Contoh 2.3.1

Misalkan $\mathbb{Z}_{18}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian. Tentukan ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{18}$.

Bukti:

Berdasarkan Tabel 2.3.1 pada lampiran diperoleh $\mathbb{Z}_{18}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian karena memenuhi sifat tertutup dan assosiatif. Selanjutnya berdasarkan definisi 2.3 diperoleh ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{18}$ yaitu:

$A_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$

$A_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$
$A_3 = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$
$A_4 = \{\bar{0}, \bar{9}\}$
$A_5 = \{\bar{0}\}$
$A_6 = \mathbb{Z}_{18}$
untuk setiap $a \in A_i$ dengan i = {1,2,3,4,5,6}, $s \in \mathbb{Z}_{18}$ berlaku $as \in A_i$ dan $sa \in A_i$.

Definisi 2.3.2 (Ideal minimal dalam semigrup)

Misalkan S merupakan semigrup tanpa elemen nol dan A adalah ideal dalam S. A disebut ideal minimal jika untuk setiap ideal lain yaitu B dalam semigrup S tidak termuat dalam A, dengan kata lain A tidak memuat ideal lain selain dirinya sendiri.

(Lallement,1979)

Definisi 2.3.3 (Ideal (0-)minimal dalam semigrup)

Misalkan S merupakan semigrup dengan elemen nol dan A adalah ideal dalam S, maka A disebut ideal (0-)minimal jika:
(i) $A \neq \{0\}$
(ii) $(\forall B \subseteq S)$, $\{0\} \subseteq B \subseteq A$ maka $B = \{0\}$ atau $B = A$.
Artinya untuk setiap ideal lain B dalam semigrup S tidak termuat dalam A dimana A hanya memuat ideal terhadap dirinya sendiri dan $\{0\}$.

(Lallement,1979)

Contoh 2.3.4

Berdasarkan Contoh 2.3.1 $\mathbb{Z}_{18}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian dan ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_{18}$ yaitu
$A_1 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$
$A_2 = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$
$A_3 = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$
$A_4 = \{\bar{0}, \bar{9}\}$
$A_5 = \{\bar{0}\}$
$A_6 = \mathbb{Z}_{18}$
Tentukan ideal minimal dalam $\mathbb{Z}_{18}$.

Bukti:
Berdasarkan Definisi 2.3.3 dapat diketahui bahwa:
A_1 memuat ideal A_3 dan A_5
A_2 memuat ideal A_3, A_4 dan A_5
A_3 tidak memuat ideal selain dirinya sendiri dan $\{0\} \subseteq A_3$
A_4 tidak memuat ideal selain dirinya sendiri dan $\{0\} \subseteq A_4$
A_5 tidak memuat ideal selain dirinya sendiri
A_6 memuat ideal A_1, A_2, A_3, A_4 dan A_5
karena A_3, A_4 dan A_5 tidak memuat ideal lain dalam $\mathbb{Z}_{18}$ selain dirinya sendiri, maka A_3, A_4 dan A_5 adalah ideal minimal dalam $\mathbb{Z}_{18}$.

2.4 Bi-ideal dalam semigrup

Misalkan S merupakan semigrup dan A subsemigrup dari S, maka A disebut bi-ideal dalam S jika $ASA \subseteq A$.
Didefinisikan $ASA = \{asa: a \in A, s \in S\}$

(Chinram, 2007)

Contoh 2.4.1

Misalkan $\mathbb{N}$ adalah semigrups terhadap operasi perkalian dan $B = 2\mathbb{N}$ merupakan subsemigrup dari $\mathbb{N}$ maka B adalah bi-ideal dalam $\mathbb{N}$.

Bukti:
Diketahui $\mathbb{N}$ adalah semigrup operasi perkalian dan $B = 2\mathbb{N}$ merupakan subsemigrup dari $\mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa B adalah bi-ideal dalam $\mathbb{N}$. Ambil sebarang $n \in \mathbb{N}$ dan $2n \in 2\mathbb{N}$ berlaku $B\mathbb{N}B = (2n)(n)(2n) = (2nn)(2n) = (2n^2)(2n) = 2(2n^3)$ karena $n^3 \in \mathbb{N}$ maka dapat ditulis $B\mathbb{N}B = 2(2\mathbb{N}) \subseteq 2\mathbb{N} = B$. Terbukti bahwa $B\mathbb{N}B \subseteq B$ sehingga $B = 2\mathbb{N}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{N}$. ■

Contoh 2.4.2

Misalkan $S = \mathbb{Z}_3 - \{\overline{0}\}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian dan $A = \{\overline{1}, \overline{2}\}$ merupakan subsemigrup dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\overline{0}\}$, maka A adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\overline{0}\}$.

Bukti:
Diketahui $A = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ merupakan subsemigrup dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. Akan ditunjukkan bahwa A adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dan berlaku $ASA \subseteq A$ untuk setiap $a \in A$ dan $s \in S$.

Tabel 2.4.1 Operasi perkalian pada ASA

a	s	a	asa
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 2.4.1 diperoleh $ASA = \{\bar{1}, \bar{2}\} \subseteq A$, dengan demikian terbukti A adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. ■

Contoh 2.4.3

Misal $S = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian, maka
$A = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{Z}\right\}$ merupakan bi-ideal dari M.

Bukti:
Berdasarkan Contoh 2.2.10 telah dibuktikan bahwa A merupakan sub-semigrup dari S. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa berlaku sifat $ASA \subseteq A$, maka A merupakan bi-ideal dari S.
Ambil $A = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ maka

$$\begin{aligned} ASA &= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xax & xbx \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Karena $xax \in A$ dan $xbx \in A$, maka $ASA \subseteq A$. Terbukti bahwa A adalah bi-ideal dari S. ■

Definisi 2.4.4 (Bi-ideal sejati dalam semigrup)

Misalkan S merupakan semigrup dan A adalah bi-ideal dalam S. A disebut bi-ideal sejati dari S jika A merupakan himpunan bagian sejati dari S dan $A \neq S$. Dengan kata lain bi-ideal tak sejatinya yaitu A=S dan {0}.

(Lajos, 1969)

Contoh 2.4.5

Misalkan $S = \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian dan $A = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$.

Bukti:
Diketahui $S = \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ adalah semigrup terhadap operasi perkalian dan $A = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Karena $A = S$, maka A adalah bi-ideal tak sejati dari S. ■

2.5 Bi-ideal minimal dalam semigrup

Definisi 2.5.1 (Bi-ideal minimal dalam semigrup)

Misalkan S adalah semigrup tanpa elemen nol dan A merupakan suatu bi-ideal dalam S, maka A disebut bi-ideal minimal dalam S jika A tidak memuat bi-ideal B yang merupakan bi-ideal lain dalam S.

(Iampan, 2008)

Definisi 2.5.2 (Bi-ideal (0-)minimal dalam Semigrup)

Misalkan S adalah semigrup dengan elemen nol dan A adalah bi-ideal tak nol dalam S, maka A disebut bi-ideal (0-)minimal dalam S jika A tidak memuat bi-ideal tak nol B yang merupakan bi-ideal tak nol lain dalam S. Ekuivalen, jika untuk setiap bi-ideal B dalam S sedemikian sehingga $B \subset A$, maka $B = \{0\}$.

(Iampan, 2008)

Definisi 2.5.3 (*B-simple* Semigrup)

Misalkan S adalah semigrup tanpa elemen nol dan B adalah bi-ideal dalam S, maka S disebut *B-simple* jika tidak memiliki bi-ideal sejati.

(Iampan, 2008)

Definisi 2.5.4 (*(0-)B-simple* semigrup)

Misalkan S adalah semigrup dengan elemen nol dan B adalah bi-ideal dalam S, maka S disebut *(0-)B-simple* jika tidak memiliki bi-ideal sejati tak nol dan $S^2 \neq \{0\}$.

(Iampan, 2008)

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi, lemma, teorema dari bi-ideal dalam Γ-semigrup.

3.1 Γ-Semigrup

Definisi 3.1.1(Γ-Semigrup)

Misalkan M dan Γ adalah dua himpunan tak kosong. M disebut Γ-semigrup jika terdapat pemetaan $*: M \times \Gamma \times M \to M$ (memetakan $(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$) yang memenuhi sifat:
(i). Tertutup
$a\gamma b \in M, \forall a, b \in M$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$
(ii). Assosiatif
$(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c), \forall a, b, c \in M$ dan $\forall \gamma, \mu \in \Gamma$.
(Iampan, 2009)

Selanjutnya didefinisikan dahulu notasi yang akan digunakan. Misalkan A dan B adalah himpunan bagian tak kosong dalam Γ-semigrup M. Didefinisikan $A\Gamma B = \{a\gamma b | a \in A, \gamma \in \Gamma, b \in B\}$. Untuk $\{a\}\Gamma B$ ditulis $a\Gamma B$, $A\Gamma\{b\}$ ditulis $A\Gamma b$, dan $\{a\}\Gamma\{b\}$ ditulis $a\Gamma b$. Kemudian untuk $a \bullet b$ cukup ditulis ab.

Berikut ini contoh suatu semigrup yang merupakan Γ-semigrup:

Contoh 3.1.2

Misalkan $\mathbb{Z}_3$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian.
Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup untuk
(i) $\Gamma = \{\bar{1}\}$
(ii) $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$

Bukti:
Berdasarkan Contoh 2.2.4 telah dibuktikan $\mathbb{Z}_3$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian, selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup. Didefinisikan suatu pemetaan:

$$\bullet : \mathbb{Z}_3 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$$

$$(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$$

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_3$ dan setiap $\gamma \in \Gamma$.

(i) Untuk $\Gamma = \{\bar{1}\}$, lihat lampiran pada Tabel 3.1.1.
Berdasarkan Tabel 3.1.1 $a\gamma b \in \mathbb{Z}_3, \forall a, b \in \mathbb{Z}_3$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$ (Tertutup). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa
$(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ dan $\forall \gamma, \mu \in \Gamma$ (Assosiatif).
ambil $a = \bar{2}, b = \bar{2}, c = \bar{2}$ dan $\gamma = \bar{1}, \mu = \bar{1}$, diperoleh
$(a\gamma b)\mu c = (\bar{2} \bullet \bar{1} \bullet \bar{2}) \bullet \bar{1} \bullet \bar{2} = \bar{2}$
$a\gamma(b\mu c) = \bar{2} \bullet \bar{1} \bullet (\bar{2} \bullet \bar{1} \bullet \bar{2}) = \bar{2}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ dan setiap $\gamma, \mu \in \Gamma$ akan diperoleh $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$. Karena berlaku sifat tertutup dan assosiatif, maka terbukti $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup. ■

(ii) Untuk $\Gamma = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, lihat lampiran pada Tabel 3.1.2.
Berdasarkan Tabel 3.1.2 $a\gamma b \in \mathbb{Z}_3, \forall a, b \in \mathbb{Z}_3$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$ (Tertutup). Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa
$(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c), \forall a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ dan $\forall \gamma, \mu \in \Gamma$ (Assosiatif).
ambil $a = \bar{2}, b = \bar{2}, c = \bar{2}$ dan $\gamma = \bar{0}, \mu = \bar{2}$, akan diperoleh
$(a\gamma b)\mu c = (\bar{2} \bullet \bar{0} \bullet \bar{2}) \bullet \bar{2} \bullet \bar{2} = \bar{0}$
$a\gamma(b\mu c) = \bar{2} \bullet \bar{0} \bullet (\bar{2} \bullet \bar{2} \bullet \bar{2}) = \bar{0}$
Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_3$ dan setiap $\gamma, \mu \in \Gamma$ akan diperoleh $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$. Karena berlaku sifat tertutup dan assosiatif, maka terbukti $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup. ■

Berikut ini contoh suatu Γ-Semigrup yang bukan merupakan semigrup:

Contoh 3.1.3

Misalkan $M = \{-i, 0, i\}$ dan $\Gamma = M$. Buktikan bahwa M merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian tetapi M bukan semigrup terhadap operasi perkalian.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa $M = \{-i, 0, i\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap perkalian. Didefinisikan suatu pemetaan:

$$\bullet : M \times \Gamma \times M \to M$$
$$(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$$

Untuk membuktikan bahwa M adalah Γ-semigrup harus memenuhi sifat tertutup dan assosiatif.

(i) Tertutup

Misalkan diambil $a, b \in M$ yaitu $a = i, b = -i$ dan $\gamma \in \Gamma$ yaitu $\gamma = i$, maka diperoleh $a\gamma b = i \bullet i \bullet (-i) = i$. Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in M$ dan $\gamma \in \Gamma$, maka berlaku $a\gamma b \in M$.

(ii) Assosiatif

Misalkan diambil $a, b, c \in M$ yaitu $a = i, b = -i,\ c = i$ dan $\gamma \in \Gamma$ yaitu $\gamma = i$,$\mu = -i$, maka

$(a\gamma b)\mu c = \big(i \bullet i \bullet (-i)\big)(-i) \bullet i = (i) \bullet 1 = i$

$a\gamma(b\mu c) = i \bullet i \bullet \big((-i) \bullet (-i) \bullet i\big) = -1 \bullet (-i) = i$

diperoleh $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$. Dengan cara yang sama, untuk setiap $a, b, c \in M$ dan setiap $\gamma, \mu \in \Gamma$ akan diperoleh $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$, maka terbukti M bersifat assosiatif.

Karena M bersifat tertutup dan assosiatif maka M merupakan Γ-semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa M merupakan semigrup terhadap operasi perkalian.

Didefinisikan pemetaan:

$$\bullet : M \times M \to M$$
$$(a, b) \mapsto ab$$

Berikut ini tabel operasi perkalian pada M

Tabel 3.1.3 Operasi perkalian pada *M*

$\bullet$	$-i$	0	i
$-i$	-1	0	1
0	0	0	0
i	1	0	-1

Berdasarkan Tabel 3.1.3 dapat dilihat bahwa $-1 \notin M$ dan $1 \notin M$ sehingga $(M, \bullet)$ tidak bersifat tertutup dan tidak assosiatif sehingga $(M, \bullet)$ bukan merupakan semigrup. ■

Contoh 3.1.4

Misalkan $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$. Tunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\})$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian. Didefinisikan suatu pemetaan:

$$\bullet : (\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}) \times \Gamma \times (\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}) \rightarrow (\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\})$$
$$(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$$

(i) Tertutup

$\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ terhadap operasi perkalian bersifat tertutup. Misalkan diambil $a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dan $\gamma = \bar{2}$ akan diperlihatkan bahwa $a\gamma b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ pada tabel berikut:

Tabel 3.1.4 Operasi perkalian pada $a\gamma b$

a	γ	b	$a\gamma b$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.1.4 $\forall a, b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$, diperoleh $a\gamma b \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$.

(ii) Assosiatif

Pada Tabel berikut ini akan diperlihatkan bahwa $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ terhadap operasi perkalian bersifat assosiatif.

Tabel 3.1.5 Operasi perkalian terhadap $(a\gamma b)\mu c$ dan $a\gamma(b\mu c)$

a	b	c	γ	μ	$(a\gamma b)\mu c$	$a\gamma(b\mu c)$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.1.5 diperoleh $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$,

$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dan $\forall \gamma, \mu \in \Gamma$.

Karena bersifat tertutup dan assosiatif, maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian ■

Definisi 3.1.5 (Γ-semigrup dengan elemen nol)

Misal M adalah suatu Γ-semigrup. Suatu elemen a dalam M dimana M dengan paling sedikit dua elemen disebut elemen nol jika $x\gamma a = a\gamma x = a, \forall x \in M$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$, dan a diberi notasi 0.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.1.6

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3$ dengan $\Gamma = \{\bar{1}\}$ adalah Γ-semigrup. Buktikan bahwa $\mathbb{Z}_3$ adalah Γ-semigrup dengan elemen nol.

Bukti:

Berdasarkan Contoh 3.1.2 terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup, selanjutnya akan dibuktikan $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol. Misalkan diambil $a \in \mathbb{Z}_3$ yaitu $a = \bar{0}$ yang merupakan elemen nol dalam M, $x \in \mathbb{Z}_3$ yaitu $x = \bar{2}$, dan $\gamma \in \Gamma$ yaitu $\gamma = \bar{1}$, maka $x\gamma a = \bar{2} \bullet \bar{1} \bullet \bar{0} = \bar{0}$ dan $a\gamma x = \bar{0} \cdot \bar{1} \bullet \bar{2} = \bar{0}$. Dengan cara yang sama untuk semua $x \in \mathbb{Z}_3$ dan $\gamma \in \Gamma$ memenuhi $x\gamma a = a\gamma x = a$.Terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol. ■

Definisi 3.1.7 (sub-Γ-Semigrup)

Suatu subset tak kosong A dalam Γ-semigrup M disebut sub-Γ-semigrup dalam M jika $A\Gamma A \subseteq A$ berarti $a\gamma b \in A, \forall a, b \in A$ dan $\forall \gamma \in \Gamma$.

(Chinram, 2007)

Contoh 3.1.8

Misalkan $M = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup, maka $A = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah sub-Γ-semigrup dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian. Didefinisikan suatu pemetaan:

$$\bullet : \mathbb{Z}_4 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_4$$
$$(a, \gamma, b) \mapsto a\gamma b$$

(i) Tertutup
Misalkan diambil $a, b \in \mathbb{Z}_4$ yaitu $a = \bar{2}, b = \bar{1}$ dan $\gamma \in \Gamma$ yaitu $\gamma = \bar{2}$, maka $a\gamma b = \bar{2} \bullet \bar{2} \bullet \bar{1} = \bar{0}$. Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ dan $\gamma \in \Gamma$, maka berlaku $a\gamma b \in \mathbb{Z}_4$.

(ii) Assosiatif
Misalkan diambil $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ yaitu $a = \bar{2}, b = \bar{1}, c = \bar{3}$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ yaitu $\gamma = \bar{2}, \mu = \bar{2}$, maka
$(a\gamma b)\mu c = (\bar{2} \bullet \bar{2} \bullet \bar{1}) \bullet \bar{2} \bullet \bar{3} = \bar{0}$
$a\gamma(b\mu c) = \bar{2} \bullet \bar{2} \bullet (\bar{1} \bullet \bar{2} \bullet \bar{3}) = \bar{0}$
Dengan cara yang sama untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$, maka berlaku $(a\gamma b)\mu c = a\gamma(b\mu c)$.

Karena $\mathbb{Z}_4$ bersifat tertutup dan assosiatif, maka terbukti bahwa $\mathbb{Z}_4$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan sub- Γ-semigrup dari $\mathbb{Z}_4$ yang memenuhi $A\Gamma A \subseteq A$. Misalkan diambil $a, b \in A, \gamma \in \Gamma$ akan ditunjukkan $a\gamma b \in A$ pada tabel berikut:

Tabel 3.1.6 Operasi perkalian pada $A\Gamma A$

a	γ	b	$a\gamma b$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 3.1.6 diperoleh $A\Gamma A = \{\bar{0}\} \subseteq A$. Karena untuk setiap $a, b \in A$ dan $\gamma \in \Gamma$ diperoleh $a\gamma b \in A$, maka terbukti A merupakan sub- Γ-semigrup dari $\mathbb{Z}_4$ dan sub- Γ-semigrup ini merupakan sub- Γ-semigrup tak sejati dari $\mathbb{Z}_4$. ■

3.2 Ideal dalam Γ-Semigrup.

Definisi 3.2.1 (Ideal dalam Γ-Semigrup)

Misalkan $(M,*)$ merupakan Γ-semigrup dan A adalah sub-Γ-semigrup dari M. A disebut ideal dalam M jika memenuhi $M\Gamma A \subseteq A$ dan $A\Gamma M \subseteq A$. Didefinisikan
$M\Gamma A = \{m\gamma a | m \in M, \gamma \in \Gamma, a \in A\}$ dan
$A\Gamma M = \{a\gamma m | a \in A, \gamma \in \Gamma, m \in I\}$.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.2.2

Misalkan $\mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ adalah Γ-semigrup. Tentukan ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:

$\mathbb{Z}_4$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian karena memenuhi sifat tertutup dan assosiatif. Selanjutnya berdasarkan Definisi 3.2.1 diperoleh ideal-ideal dari $\mathbb{Z}_4$ yaitu:
$A_1 = \{\bar{0}\}$ (ideal tak sejati)
$A_2 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ (ideal sejati)
$A_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ (ideal sejati)
$A_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (ideal tak sejati)
Misalkan $A_2 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah ideal sejati dari $\mathbb{Z}_4$. Ambil $a \in A_2$, $m \in \mathbb{Z}_4$ dan $\gamma \in \Gamma$, akan ditunjukkan bahwa berlaku $m\gamma a \in A_2$ dan $a\gamma m \in A_2$ pada tabel berikut:

Tabel 3.2.1 Operasi pergandaan pada $M\Gamma A_2$

m	γ	a	$m\gamma a$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 3.2.1, jelas bahwa $M\Gamma A = \{\bar{0}\} \subseteq A_2$ karena untuk setiap $m \in \mathbb{Z}_4, \gamma \in \Gamma, a \in A_2$ diperoleh $m\gamma a \in A_2$.

Tabel 3.2.2 Operasi pergandaan pada $A_2\Gamma M$

a	γ	m	$a\gamma m$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 3.2.2 jelas bahwa $A_2\Gamma M = \{\bar{0}\} \subseteq A_2$ karena untuk setiap $m \in \mathbb{Z}_4, \gamma \in \Gamma, a \in A_2$ diperoleh $a\gamma m \in A_2$. Karena A_2 adalah sub Γ-semigrup dari $\mathbb{Z}_4$ yang memenuhi $M\Gamma A_2 \subseteq A_2$ dan $A_2\Gamma M \subseteq A_2$ maka terbukti A_2 adalah ideal dalam M. Dengan cara yang sama untuk setiap $a \in A_i$ dengan i = {1,2,3,4}, $m \in \mathbb{Z}_4$ dan $\gamma \in \Gamma$ berlaku $m\gamma a \in A_i$ dan $a\gamma m \in A_i$. ■

3.3 Bi-ideal dalam Γ-Semigrup

Pada sebuah Γ-semigrup terdapat himpunan bagian tak kosong yang disebut sub-Γ-semigrup. Seperti pada semigrup, dalam suatu Γ-semigrup juga terdapat bi-ideal.

Definisi 3.3.1 (Bi-ideal dalam Γ-Semigrup)

Misalkan M merupakan Γ-semigrup dan B adalah sub-Γ-semigrup dari M, maka B disebut bi-ideal dari M jika $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$.
Didefinisikan $B\Gamma M\Gamma B = \{a\gamma m\gamma b | a, b \in B, \gamma \in \Gamma, m \in M\}$.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.3.2

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3$ dengan $\Gamma=\{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian, maka $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ dan $B = \{\bar{0}\}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3$.

Bukti:

Menurut Contoh 3.1.2 telah terbukti bahwa $\mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ dan

$B = \{\bar{0}\}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3$, maka harus memenuhi $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$.

(i) Untuk $A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ diambil sebarang $a, b \in A$, $m \in \mathbb{Z}_3$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Operasi perkalian pada $A\Gamma M\Gamma A$ diberikan pada tabel berikut:

Tabel 3.3.1 Operasi perkalian pada $A\Gamma M\Gamma A$

a	γ	m	μ	b	$a\gamma m\mu b$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Dari Tabel 3.3.1 didapatkan $A\Gamma M\Gamma A = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} \subseteq A$, karena untuk setiap $a, b \in A$, $m \in \mathbb{Z}_3$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ diperoleh $a\gamma m\mu b \in A$, maka terbukti A adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3$. ■

(ii) Untuk $B = \{\bar{0}\}$ diambil sebarang $a, b \in B$, untuk setiap $m \in \mathbb{Z}_3$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$. Operasi perkalian pada $B\Gamma M\Gamma B$ diberikan pada tabel berikut:

Tabel 3.3.2 Operasi perkalian pada $B\Gamma M\Gamma B$

a	γ	m	μ	b	$a\gamma m\mu b$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 3.3.2, jelas bahwa $B\Gamma M\Gamma B = \{\bar{0}\} \subseteq B$ karena untuk setiap $a, b \in B$, $m \in \mathbb{Z}_3$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$ diperoleh $a\gamma m\mu b \in B$, maka terbukti B adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3$. ■

Definisi 3.3.3

Dalam sebuah Γ-semigrup dengan elemen nol yang memiliki bi-ideal, maka setiap bi-ideal didalamnya memuat elemen nol.

(Iampan, 2009)

3.4 Bi-ideal minimal dalam Γ-semigrup

Definisi 3.4.1 (Bi-ideal minimal dalam Γ-semigrup)

Misalkan M adalah Γ-semigrup tanpa elemen nol dan B merupakan bi-ideal dalam M. B disebut bi-ideal minimal dalam M jika B tidak memuat bi-ideal lain dalam M. Artinya jika terdapat A merupakan bi-ideal lain dalam M, maka $A \nsubseteq B$.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.4.2

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup dan $B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3$. Tunjukkan apakah B merupakan bi-ideal minimal dalam *M*.

Bukti:

Dari Contoh 3.1.4 telah ditunjukkan bahwa $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup tanpa elemen nol. Selanjutnya akan ditunjukkan $B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ yang memenuhi $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$.

Tabel 3.4.1 Operasi Perkalian terhadap $\alpha\gamma m\mu b$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{\mu}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a\gamma m\gamma b}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Berdasarkan Tabel 3.4.1 jelas bahwa berlaku $a\gamma m\mu b \in B$, untuk setiap $a, b \in B, \gamma, \mu \in \Gamma, m \in M$. Terbukti B adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. Karena B merupakan satu-satunya bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dan B tidak memuat bi-ideal lain selain B itu sendiri, maka B adalah bi-ideal minimal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. ■

Definisi 3.4.3 (Bi-ideal (0-)minimal dalam Γ-semigrup)

Misalkan M adalah Γ-semigrup dengan elemen nol dan B adalah bi-ideal tak nol dalam M. B disebut bi-ideal (0-)minimal dalam M jika untuk setiap B tidak memuat bi-ideal tak nol lain dalam M. Misalkan terdapat bi-ideal tak nol lain dalam M yaitu A, maka $A \nsubseteq B$. Ekuivalen, jika untuk setiap bi-ideal A dalam M sedemikian sehingga $A \nsubseteq B$, maka $B = \{0\}$.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.4.4

Misalkan $M = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup dan bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_4$ yaitu:

$A_1 = \{\bar{0}\}$ (bi-ideal nol dan bi-ideal tak sejati)
$A_2 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ (bi-ideal tak nol dan bi-ideal sejati)
$A_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ (bi-ideal tak nol dan bi-ideal sejati)
$A_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (bi-ideal tak nol dan bi-ideal tak sejati)
Tentukan bi-ideal (0-)minimal dalam $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:
Berdasarkan Definisi 3.4.2 dapat diketahui bahwa:
A_4 memuat bi-ideal tak nol A_2 dan A_3.
A_3 memuat bi-ideal tak nol A_2.
A_2 tidak memuat bi-ideal tak nol lainnya.
A_1 merupakan bi-ideal nol, tentu A_1 tidak memuat bi-ideal tak nol lainnya. Karena A_1 dan A_2 tidak memuat bi-ideal tak nol lain dalam $\mathbb{Z}_4$, maka A_1 dan A_2 adalah bi-ideal (0-)minimal dalam $\mathbb{Z}_4$. ■

Berikut ini akan dibahas beberapa definisi dan contoh mengenai *B-simple* dan *(0-)B-simple* dalam Γ-semigrup.

Definisi 3.4.5 *(B-simple)*

Misalkan M adalah Γ-semigrup tanpa elemen nol dan B adalah bi-ideal dalam M. M disebut *B-simple* jika tidak memiliki bi-ideal sejati. Berarti M tidak mempunyai bi-ideal lain selain dirinya sendiri.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.4.6

Misalkan $M = \mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian dengan $\Gamma = \{\bar{5}\}$, maka $\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{0\}$ adalah *B-simple*.

Bukti:
Terdapat pemetaan

$$(\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\}) \times \Gamma \times (\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\}) \to (\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\})$$
$$(a, \gamma, a) \mapsto a\gamma a$$

dengan operasi perkalian biasa sehingga diperoleh

Tabel 3.4.2 Operasi perkalian pada $\boldsymbol{a\gamma a}$

$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{\gamma}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a\gamma a}$
$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$

Jadi untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\}$ dan untuk setiap $\gamma \in \Gamma$ yang memenuhi pemetaan $(\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\}) \times \Gamma \times (\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\}) \to (\mathbb{Z}_{\mathbf{3}} - \{\bar{0}\})$.

maka $(\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\})\Gamma(\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}) = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Bi-ideal tak sejati dari $\mathbb{Z}_3$ adalah $B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Karena $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ tidak memiliki bi-ideal sejati, dan satu-satunya bi-ideal dari $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ yaitu B, maka $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ adalah *B-simple*. ∎

Definisi 3.4.7 *(0-B-simple)*

Misalkan M adalah Γ-semigrup dengan elemen nol dan B adalah bi-ideal dalam M. M disebut *(0-)B-simple* jika tidak memiliki bi-ideal sejati tak nol dan $M\Gamma M \neq \{0\}$.

(Iampan, 2009)

Contoh 3.4.8

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3$ dengan $\Gamma = \{\bar{1}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian, maka $\mathbb{Z}_3$ adalah *(0-)B-simple*.

Bukti:

Terdapat pemetaan: $\mathbb{Z}_3 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$

$$(a, \gamma, a) \mapsto a\gamma a$$

dengan operasi perkalian biasa sehingga diperoleh

Tabel 3.4.3 Operasi perkalian pada $a\gamma a$

a	γ	a	$a\gamma a$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Berdasarkan Tabel 3.4.3 untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_3$ dan untuk setiap $\gamma \in \Gamma$ memenuhi pemetaan $\mathbb{Z}_3 \times \Gamma \times \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3$. Sehingga $\mathbb{Z}_3\Gamma\mathbb{Z}_3 =$

$\{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\} \neq \{0\}$. Bi-ideal dari $\mathbb{Z}_3$ yaitu $A = \{\bar{0}\}$ dan $B = \{\bar{0},\bar{1},\bar{2}\}$. Karena $\mathbb{Z}_3$ tidak memiliki bi-ideal sejati tak nol, maka $\mathbb{Z}_3$adalah (0-)*B-simple*. ■

3.5 Konsep Bi-ideal dalam Γ-semigrup

Berikut ini diberikan beberapa lemma yang menjelaskan konsep suatu bi-ideal dalam sebuah Γ-semigrup.

Lemma 3.5.1

Misalkan M merupakan Γ-semigrup. Himpunan $a\Gamma M\Gamma a$ adalah bi-ideal dari M untuk semua $a \in M$.
Didefinisikan $a\Gamma M\Gamma a = \{a\gamma m\gamma a | a, m \in M, \gamma \in \Gamma\}$

(Iampan, 2009)

Bukti:
Misalkan M suatu Γ-semigrup dan himpunan $a\Gamma M\Gamma a$ untuk semua $a \in M$. Akan dibuktikan bahwa $a\Gamma M\Gamma a$ merupakan sub-Γ-semigrup dari M. Karena $a\Gamma M\Gamma a \subseteq M\Gamma M\Gamma M \subseteq M\Gamma M \subseteq M$ sedemikian sehingga $a\Gamma M\Gamma a \subseteq M$, maka

$$\begin{aligned}(a\Gamma M\Gamma a)\Gamma(a\Gamma M\Gamma a) &\subseteq (a\Gamma M\Gamma M)\Gamma(M\Gamma M\Gamma a)\\ &\subseteq (a\Gamma M)\Gamma(M\Gamma a)\\ &= a\Gamma(M\Gamma M)\Gamma a\\ &\subseteq a\Gamma M\Gamma a\end{aligned}$$

Terbukti $a\Gamma M\Gamma a$ merupakan sub- Γ-semigrup dari M. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $a\Gamma M\Gamma a$ memenuhi sifat bi-ideal sehingga $a\Gamma M\Gamma a$ merupakan bi-ideal dalam M.

$$\begin{aligned}(a\Gamma M\Gamma a)\Gamma M\Gamma(a\Gamma M\Gamma a) &\subseteq (a\Gamma M\Gamma M)\Gamma M\Gamma(M\Gamma M\Gamma a)\\ &\subseteq (a\Gamma M)\Gamma M\Gamma(M\Gamma a)\\ &= a\Gamma(M\Gamma M\Gamma M)\Gamma a\\ &\subseteq a\Gamma M\Gamma a\end{aligned}$$

Jadi,terbukti bahwa $a\Gamma M\Gamma a$ untuk semua $a \in M$ merupakan bi-ideal dalam M. ■

Contoh 3.5.2

Misalkan $M = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian, maka himpunan $a\Gamma M\Gamma a$ adalah bi-ideal dari M untuk semua $a \in M$.

Bukti:

Diketahui $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ merupakan Γ-semigrup. Selanjutnya berlaku $a\Gamma M\Gamma a$ untuk semua $a \in M$, sebagai berikut;

Untuk $a = \bar{0}$ diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = \{\bar{0}\}$

$a = \bar{1}$ diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = \{\bar{0}\}$

$a = \bar{2}$ diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = \{\bar{0}\}$

$a = \bar{3}$ diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = \{\bar{0}, \bar{2}\}$

Jadi, himpunan $a\Gamma M\Gamma a$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_4$. ■

Lemma 3.5.3

Misalkan M merupakan Γ-semigrup dan $B_i = \{B_1, B_2, \dots\}$ merupakan koleksi bi-ideal dalam M untuk setiap $i \in I$. Jika $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$, maka $\bigcap_{i \in I} B_i$ merupakan bi-ideal dalam M.

(Iampan, 2009)

Bukti:

Akan ditunjukkan $\bigcap_{i \in I} B_i$ adalah bi-ideal dalam M.

Harus dibuktikan terlebih dahulu $\bigcap_{i \in I} B_i$ adalah sub Γ-semigrup dalam M dan memenuhi $\bigcap_{i \in I} B_i \Gamma M \Gamma \bigcap_{i \in I} B_i \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$.

Diketahui M adalah Γ-semigrup dan B_i merupakan koleksi bi-ideal dalam M untuk setiap $i \in I$ dengan $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Diasumsikan $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$.

Jika $a, b \in \bigcap_{i \in I} B_i$,maka $a, b \in B_i$ untuk setiap $i \in I$.

Kemudian, diambil $m \in M$ dan $, \mu \in \Gamma$.

Karena B_i merupakan bi-ideal dalam M, maka B_i merupakan sub Γ-semigrup dalam M sehingga berlaku $a\gamma b \in B_i$ dan $a\gamma m\mu b \in B_i \Gamma M \Gamma B_i \subseteq B_i$ untuk setiap $i \in I$.

Karena $a\gamma b \in B_i$ untuk setiap $i \in I$ maka $a\gamma b \in \bigcap_{i \in I} B_i$.

Oleh karena $a\gamma m\mu b \in B_i\Gamma M\Gamma B_i \subseteq B_i$ untuk setiap $i \in I$ maka $a\gamma m\mu b \in \bigcap_{i\in I} B_i\Gamma M\Gamma \bigcap_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$, sedemikian sehingga diperoleh

$$\bigcap_{i\in I} B_i\Gamma M\Gamma \bigcap_{i\in I} B_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i .$$

Jadi, terbukti bahwa $\bigcap_{i\in I} B_i$ merupakan bi-ideal dalam M. ■

Contoh 3.5.4

Misal $M = \mathbb{Z}_4$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ dalam $\mathbb{Z}_4$ adalah Γ-semigrup. Kemudian $B_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $B_2 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ adalah bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_4$, maka $\bigcap_{i\in I} B_i$ dengan $I = \{1, 2\}$ adalah bi-ideal dari $\mathbb{Z}_4$.

Bukti:
Akan dibuktikan $\bigcap_{i\in I} B_i$ adalah bi-ideal dari dalam $\mathbb{Z}_4$. Diketahui $B_1 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dan $B_2 = \{\bar{0}, \bar{2}\}$, maka $B_1 \cap B_2 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} \cap \{\bar{0}, \bar{2}\} = \{\bar{0}, \bar{2}\} = B_2$. Karena B_2 adalah bi-ideal dari $\mathbb{Z}_4$ sehingga $\bigcap_{i\in I} B_i$ dengan $I = \{1, 2\}$ juga merupakan bi-ideal dari $\mathbb{Z}_4$. ■

Misalkan M adalah Γ-semigrup, B adalah sub-Γ-semigrup dari M dan A himpunan bagian tak kosong dari B. Jika $B = M$, maka gabungan semua bi-ideal dalam B yang dibangun oleh $A = \{a\}$ dinotasikan $B(a)$.

Lemma 3.5.5

Misalkan M merupakan Γ-semigrup dan $B(a)$ adalah bi-ideal dalam M yang dibangun oleh elemen a dimana
$B(a) = a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$, untuk setiap $a \in M$

(Iampan, 2009)

Bukti:
Diketahui M adalah Γ-semigrup. $B(a) = a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$ adalah bi-ideal yang dibangun oleh elemen A dan $A = \{a\}$. Akan ditunjukkan bahwa $B(a)$ merupakan bi-ideal dalam M. Harus dibuktikan dahulu bahwa $B(a)$ merupakan sub-Γ-semigrup dari M dimana untuk setiap $a \in M$, berlaku

$$
\begin{aligned}
B(a)\Gamma B(a) &= (a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\})\Gamma(a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}) \\
&\subseteq (a\Gamma M\Gamma a)\Gamma(a\Gamma M\Gamma a)\cup(a\Gamma a)\Gamma(a\Gamma a)\cup\{a\}\Gamma\{a\} \\
&\subseteq (a\Gamma M\Gamma a)\cup a\Gamma a\cup\{a\}\Gamma\{a\} \\
&\subseteq (a\Gamma M\Gamma a)\cup a\Gamma a \\
&\subseteq B(a)
\end{aligned}
$$

sedemikian sehingga diperoleh $B(a)\Gamma B(a) \subseteq B(a)$. Karena $B(a)$ merupakan himpunan yang dibangun oleh $A = \{a\}$ dan berlaku $B(a)\Gamma B(a) \subseteq B(a)$, maka terbukti $B(a)$ adalah sub Γ-semigrup dari M. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $B(a)$ merupakan bi-ideal dalam M, maka berlaku

$$
\begin{aligned}
B(a)\Gamma M\Gamma B(a) &= (a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma a\cup\{a\})\Gamma M\Gamma(a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma a\cup\{a\}) \\
&\subseteq a\Gamma M\Gamma a\Gamma M\Gamma a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma a\Gamma \mathrm{M}\Gamma a\Gamma a\cup a\Gamma M\Gamma a \\
&= (a\Gamma M)\Gamma(a\Gamma M)\Gamma(a\Gamma M)\Gamma a\cup a\Gamma a\Gamma \mathrm{M}\Gamma a\Gamma a\cup a\Gamma M\Gamma a \\
&\subseteq (a\Gamma M)\Gamma a\cup a\Gamma(M\Gamma \mathrm{M})\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma M\Gamma a, \text{ karena } a\in M \\
&= a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma(M\Gamma \mathrm{M}\Gamma M)\Gamma a\cup a\Gamma M\Gamma a \\
&\subseteq a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma M\Gamma a \\
&\subseteq a\Gamma M\Gamma a \\
&\subseteq B(a)
\end{aligned}
$$

sedemikian sehingga $B(a)\Gamma M\Gamma B(a) \subseteq a\Gamma M\Gamma a \subseteq B(a)$. Karena pada $B(a)$ berlaku $B(a)\Gamma M\Gamma B(a) \subseteq B(a)$, maka terbukti $B(a)$ adalah bi-ideal dalam M. Misalkan C adalah bi-ideal lain dalam M yang memuat himpunan A dengan $A = \{a\}$, maka $\{a\} \subseteq C$...(i). Selanjutnya C merupakan bi-ideal dalam M, maka C merupakan sub Γ-semigrup dari M dan $A \subseteq C$ sehingga $a\Gamma a \subseteq C\Gamma C \subseteq C$, jadi $a\Gamma a \subseteq C$...(ii). Karena C adalah bi-ideal dari M dan $A \subseteq C$ maka $a\Gamma M\Gamma a \subseteq C\Gamma M\Gamma C \subseteq C$, jadi $a\Gamma M\Gamma a \subseteq C$…(iii). Dari pernyataan (i), (ii), dan (iii) diperoleh $B(a) = a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma a\cup\{a\} \subseteq C$. Terbukti apabila terdapat bi-ideal lain dalam M yang memuat himpunan A, maka bi-ideal tersebut memuat $B(a)$, sehingga $B(a)$ adalah bi-ideal terkecil dari M yang memuat A. Jadi telah terbukti bahwa $B(a) = a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma a\cup\{a\}$. Dengan kata lain $B(a)$ adalah bi-ideal terkecil dalam M yang dibangun oleh elemen a. ■

Contoh 3.5.6

Misalkan $M = \mathbb{N}$ suatu himpunan bilangan bulat positif dan Γ={5} dan M adalah suatu Γ-semigrup terhadap penjumlahan. Ambil elemen a dari M, misalkan diambil $a = 2$, maka bi-ideal dalam M yang dibangun oleh elemen a yaitu $B(a) = a\Gamma M\Gamma a\cup a\Gamma a\cup\{a\}$

Tabel 3.5.1 Operasi penjumlahan pada $a\Gamma M\Gamma a$

a	γ	m	γ	a	$a\gamma m\gamma a$
2	5	1	5	2	15
2	5	2	5	2	16
2	5	3	5	2	17
2	5	4	5	2	18
2	5	5	5	2	19
: dst	:	:	:	:	:

Tabel 3.5.2 Operasi penjumlahan pada $a\Gamma a$

a	γ	a	$a\gamma a$
2	5	2	9

Berdasarkan Tabel 3.5.1 dan Tabel 3.5.2, diperoleh $a\gamma m\gamma a = \{15,16,17,18,19,\ldots\}$, $a\gamma a = \{9\}$ dan $a = \{2\}$ sedemikian sehingga $B(2) = \{15,16,17,18,19,\ldots\} \cup \{9\} \cup \{2\}$. ■

Contoh 3.5.7

Misal $M = \mathbb{Z}_6$ dengan $\Gamma = \{\overline{1}\}$ dalam $\mathbb{Z}_6$ adalah Γ-semigrup. Kemudian diambil himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $A = \{\overline{2}\}$, maka bi-ideal dalam $\mathbb{Z}_6$ yang dibangun oleh A dimana $a \in A$ yaitu $B(a) = a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$. Misal diambil $m \in \mathbb{Z}_6$, $\gamma \in \Gamma$ terhadap operasi perkalian pada $a\Gamma a$ dan $a\Gamma M\Gamma a$ ditunjukkan pada tabel-tabel berikut:

Tabel 3.5.3 Operasi perkalian pada $a\Gamma a$

a	γ	a	$a\gamma a$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$

Tabel 3.5.4 Operasi perkalian pada $a\Gamma M\Gamma a$

a	γ	m	γ	a	$a\gamma m\gamma a$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$

Dari Tabel 3.5.3 dan 3.5.4, diperoleh $a\gamma a = \bar{4}$ dan $a\gamma t\gamma a = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}_6, \gamma \in \Gamma, a \in A$, maka bi-ideal dari M yang dibangun oleh $A = \{2\}$ adalah $B(2) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\} \cup \{\bar{4}\} \cup \{\bar{2}\} = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$.

Berikut ini lemma yang menjelaskan tentang *B-simple/(0-)-B-simple* dalam sebuah Γ-semigrup yang dilihat dari bi-idealnya.

Lemma 3.5.8

Jika M merupakan Γ-semigrup tanpa elemen nol dan B adalah bi-ideal dari M, maka pernyataan berikut ekuivalen:
(i) M adalah *B-simple*.
(ii) $a\Gamma M\Gamma a = M$ untuk semua $a \in M$.
(iii) $B(a) = M$ untuk semua $a \in M$.

(Iampan, 2009)

Bukti:
$(i) \rightarrow (ii)$: Misalkan M adalah *B-simple*. Akan ditunjukkan bahwa $a\Gamma M\Gamma a = M$ untuk semua $a \in M$. Berdasarkan Lemma 3.5.4 himpunan $a\Gamma M\Gamma a$ merupakan bi-ideal dalam M untuk semua $a \in M$. Karena M adalah *B-simple* berarti M tidak memuat bi-ideal lain selain dirinya sendiri. Padahal, himpunan $a\Gamma M\Gamma a \subseteq M$. Sehingga $a\Gamma M\Gamma a = M$ untuk semua $a \in M$. ■

$(ii) \rightarrow (iii)$: Misalkan diketahui $a\Gamma M\Gamma a = M$ untuk semua $a \in M$. Akan ditunjukkan bahwa $B(a) = M$ untuk semua $a \in M$. Berdasarkan Lemma 3.5.1 diperoleh $B(a) = a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$ untuk semua $a \in M$ dan diketahui $a\Gamma M\Gamma a = M$, maka $B(a) =$

$M \cup a\Gamma a \cup \{a\}$ untuk semua $a \in M$. Selanjutnya untuk membuktikan bahwa $B(a) = M$, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa $B(a) \subseteq M$ dan $M \subseteq B(a)$.

a) Untuk $B(a) \subseteq M$

$$\begin{aligned} B(a) &= a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\} \\ &= M \cup a\Gamma a \cup \{a\} \\ &\subseteq M \cup M\Gamma M \cup M, \text{ karena } a \in M \\ &\subseteq M \cup M \cup M \text{ , karena } M\Gamma M \subseteq M \\ &\subseteq M \cup M \\ &\subseteq M \end{aligned}$$

b) Untuk $M \subseteq B(a)$

Karena $a\Gamma M\Gamma a \subseteq B(a)$, maka $M = a\Gamma M\Gamma a \subseteq B(a)$.

Berdasarkan pada pembuktian a) dan b) maka terbukti bahwa $B(a) = M$ untuk semua $a \in M$. ■

$(iii) \rightarrow (i)$: Misalkan diketahui $B(a) = M$ untuk semua $a \in M$. Kemudian B merupakan bi-ideal dalam M. Akan ditunjukkan bahwa M adalah *B-simple*. Ambil $a \in B$ dan $B(a)$ adalah bi-ideal dalam M yang dibangun oleh elemen a tersebut, maka $B(a) \subseteq B$. Karena $M = B(a) \subseteq B \subseteq M$ dengan demikian $B = M$. Selanjutnya untuk membuktikan $B = M$, harus dibuktikan terlebih dahulu bahwa $B \subseteq M$ dan $M \subseteq B$.

a) Untuk $B \subseteq M$

Karena B merupakan bi-ideal dalam M, maka pastilah $B \subseteq M$.

b) Untuk $M \subseteq B$

$$\begin{aligned} M = B(a) &= a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\} \\ &\subseteq B\Gamma M\Gamma B \cup a\Gamma a \cup \{a\}, \text{ karena } a \in B \\ &\subseteq B \cup a\Gamma a \cup \{a\} \text{ , karena } B\Gamma M\Gamma B \subseteq B \\ &\subseteq B \cup B\Gamma B \cup B, \text{ karena } a \in B \\ &\subseteq B \cup B \cup B \text{ , karena } B\Gamma B \subseteq B \\ &\subseteq B \end{aligned}$$

Dari pembuktian a) dan b) terbukti bahwa $B = M$. Hal ini berarti terdapat bi-ideal dalam M yaitu M itu sendiri. Berdasarkan Definisi *B-simple*, maka M adalah *B-simple*. ■

Contoh 3.5.9

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup. Selanjutnya berlaku $a\Gamma M\Gamma a$ untuk semua $a \in M$, sebagai berikut;

Untuk $a = \bar{1}$ diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = \{\bar{1}, \bar{2}\} = M$

$a = \bar{2}$ diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = \{\bar{1}, \bar{2}\} = M$

Sedemikian sehingga diperoleh $a\Gamma M\Gamma a = M$ untuk semua $a \in M$, maka M adalah B-simple. Selajutnya berlaku $B(a) = M$ untuk semua $a \in M$, sebagai berikut;

Untuk $a = \bar{1}$ diperoleh $B(\bar{1}) = \{\bar{1}, \bar{2}\} = M$

$a = \bar{2}$ diperoleh $B(\bar{2}\ ) = \{\bar{1}, \bar{2}\} = M$

Karena untuk semua $a \in M$ diperoleh $B(a) = M$, maka M adalah B-simple. ■

Lemma 3.5.10

Jika M merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol dan B adalah bi-ideal dari M, maka berlaku pernyataan berikut:

(i) Jika M adalah (*0-)B-simple* dan $B(a)$ adalah bi-ideal tak nol dari M, maka $B(a) = M$ untuk semua $a \in M \backslash \{0\}$.

(ii) Jika $B(a) = M$ untuk semua $a \in M \backslash \{0\}$, maka $M\Gamma M = \{0\}$ atau M adalah (*0-)B-simple*.

(Iampan, 2009)

Bukti :

(i) Misalkan M adalah (*0-)B-simple*. Kemudian $B(a)$ adalah adalah bi-ideal dari M yang dibangun oleh elemen a untuk semua $a \in M \backslash \{0\}$. Akan ditunjukkan bahwa $B(a) = M$ untuk semua $a \in M \backslash \{0\}$. Ambil $B(a)$ merupakan bi-ideal tak nol dari M. Selanjutnya untuk membuktikan $B(a) = M$, harus dibuktikan dahulu bahwa $B(a) \subseteq M$ dan $M \subseteq B(a)$.

a). Untuk $B(a) \subseteq M$

Karena $B(a)$merupakan bi-ideal tak nol dari M, maka pastilah $B(a) \subseteq M$.

b). Untuk $M \subseteq B(a)$

Berdasarkan Lemma 3.5.8 (ii) $a\Gamma M\Gamma a = M$ untuk semua $a \in M \backslash \{0\}$ dan Lemma 3.5.5 $B(a) = a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$, untuk setiap $a \in M \backslash \{0\}$. Karena $a\Gamma M\Gamma a \subseteq B(a)$, maka $M = a\Gamma M\Gamma a \subseteq B(a)$.

Dengan demikian berdasarkan pada pembuktian a) dan b), maka terbukti bahwa $B(a) = M$ untuk semua $a \in M \backslash \{0\}$. ■

(ii) Misalkan M adalah Γ-semigrup dengan elemen nol dimana $B(a)$merupakan bi-ideal dari M yang dibangun oleh elemen a

untuk semua $a \in M$ dan berlaku $B(a) = M$. Akan ditunjukkan bahwa $M\Gamma M = \{0\}$ atau M adalah (*0-)B-simple*. Misalkan diambil $a \in B(a)$ dan $B(a)\Gamma B(a) = \{0\}$. Karena $B(a) = M$, maka $M\Gamma M = \{0\}$ atau bila diambil $a \in B(a)\backslash\{0\}$ dan $B(a) = M$ untuk semua $a \in M\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga M adalah (*0-)B-simple*. ■

Contoh 3.5.11

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup dengan $\Gamma = \{\bar{1}\}$. Berdasarkan Contoh 3.4.7 M adalah (*0-)B-simple* sehingga berlaku $B(a) = M$ untuk semua $a \in M\backslash\{\bar{0}\}$, sebagai berikut;

Untuk $a = \bar{1}$ diperoleh $B(\bar{1}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$a = \bar{2}$ diperoleh $B(\bar{2}\ ) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

sehingga $B(a) = M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$. Karena $B(a) = M$ untuk semua $a \in M\backslash\{\bar{0}\}$, maka M adalah (*0-)B-simple.* ■

Lemma 3.5.12

Misalkan M merupakan Γ-semigrup, B adalah bi-ideal dalam M, dan K adalah sub-Γ-semigrup dalam M, maka berlaku pernyataan berikut:

(i) Jika K adalah *B-simple* sedemikian hingga $K \cap B \neq \emptyset$, maka $K \subseteq B$.

(ii) Jika K adalah *0-B-simple* sedemikian hingga $K\backslash\{0\} \cap B \neq \emptyset$, maka $K \subseteq B$.

(Iampan, 2009)

Bukti:

(i) Misalkan K adalah *B-simple* sedemikian sehingga $K \cap B \neq \emptyset$. Akan dibuktikan bahwa $K \subseteq B$. Ambil sebarang $a \in K \cap B$. Dengan lemma 3.5.1 diperoleh $a\Gamma K\Gamma a$ merupakan bi-ideal dalam K. Karena K adalah *B-simple*, maka berdasarkan Lemma 3.5.8 (ii) $a\Gamma K\Gamma a = K$ untuk semua $a \in K$, sedemikian sehingga $K = a\Gamma K\Gamma a \subseteq B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$, maka $K \subseteq B$. ■

(ii) Misalkan K adalah (*0-)B-simple* sedemikian sehingga $K\backslash\{0\} \cap B \neq \emptyset$ dan B adalah bi-ideal dari M. Ambil sebarang $a \in K\backslash\{0\} \cap B$. Dengan Lemma 3.5.1 dan Lemma 3.5.10 (i) didapatkan

$$K = a\Gamma K\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$$
$$\subseteq a\Gamma M\Gamma a \cup a\Gamma a \cup \{a\}$$

$= B(a)$
$\subseteq B$, sehingga $K \subseteq B$. ■

Contoh 3.5.13

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3$ merupakan Γ-semigrup dengan $\Gamma = \{\bar{1}\}$, $B = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ merupakan bi-ideal dari $\mathbb{Z}_3$ dan suatu sub-Γ-semigrup dari $\mathbb{Z}_3$ yaitu $K = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Berdasarkan Contoh 3.5.11 telah ditunjukkan bahwa K merupakan *B-simple*, sedemikian sehingga $K \cap B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$. Misalkan diambil sebarang $a \in K \cap B$ yaitu $a = \bar{2}$, maka diperoleh $a\Gamma K\Gamma a = \{\bar{1}, \bar{2}\} = K$ dan $B\Gamma M\Gamma B = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = B$ Karena $K = a\Gamma K\Gamma a \subseteq B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$, maka $K \subseteq B$. ■

3.6 Karakteristik Bi-ideal Minimal dalam Γ-semigrup

Pada sebuah Γ-semigrup yang memuat bi-ideal terdapat karakteristik bi-ideal minimal/(0-)minimal jika bi-ideal tersebut merupakan *B-simple/(0-)B-simple*. Berikut ini beberapa teorema yang menjelaskan karakteristik tersebut.

Teorema 3.6.1

Misalkan M merupakan Γ-semigrup dan B adalah bi-ideal dari M, maka berlaku pernyataan:

(i) M merupakan Γ-semigrup tanpa elemen nol dan B merupakan bi-ideal tanpa elemen nol dari M. B adalah bi-ideal minimal tanpa elemen nol dari M jika dan hanya jika B merupakan *B-simple*.

(ii) M merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol dan B merupakan bi-ideal dengan elemen nol dari M. B adalah bi-ideal minimal dengan elemen nol dari M, maka $B\Gamma B = \{0\}$ atau B adalah (*0-)B-simple*.

(Iampan, 2009)

Bukti:

(i) (⟹) Diketahui B adalah suatu bi-ideal minimal tanpa elemen nol dari M maka jelas B merupakan suatu sub-Γ-semigrup dari M. Misalkan A merupakan bi-ideal dari B, maka berlaku $A\Gamma B\Gamma A \subseteq A$. Kemudian didefinisikan $H \coloneqq \{h \in A | h =$

$a_1\gamma_1 b\gamma_2 a_2$ untuk beberapa $a_1, a_2 \in A, b \in B$ dan $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma\}$.
Asumsikan $H \subseteq A \subseteq B \neq \emptyset$.
Akan ditunjukkan H adalah suatu bi-ideal dari M.
Misalkan $h_1, h_2 \in H, x \in M$ dan $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.
Kemudian $h_1 = a_1\alpha_1 b_1\alpha_1' a_1'$ dan $h_2 = a_2\alpha_2 b_2\alpha_2' a_2'$ untuk beberapa $a_1, a_1', a_2, a_2' \in A, b_1, b_2 \in B$ dan $\alpha_1, \alpha_1', \alpha_2, \alpha_2' \in \Gamma$ sehingga $h_1\gamma_1 h_2 = a_1\alpha_1 b_1\alpha_1' a_1'\gamma_1 a_2\alpha_2\ b_2\alpha_2' a_2'$ dan $h_1\gamma_1 x\gamma_2 h_2 = a_1\alpha_1 b_1\alpha_1' a_1'\gamma_1 x\gamma_2 a_2\alpha_2\ b_2\alpha_2' a_2'$.
Karena $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B$, maka $b_1\alpha_1' a_1'\gamma_1 a_2\alpha_2\ b_2 \in B$ dan $b_1\alpha_1' a_1'\gamma_1 x\gamma_2 a_2\alpha_2\ b_2 \in B$. Karena $h_1\gamma_1 h_2 \in H\Gamma H \subseteq A\Gamma A \subseteq A$, didapatkan $h_1\gamma_1 h_2 \in H$. Demikian H adalah suatu sub-Γ-semigrup dari M. Karena $A\Gamma B\Gamma A \subseteq A$, Didapatkan $h_1\gamma_1 x\gamma_2 h_2 = a_1\alpha_1 b_1\alpha_1' a_1'\gamma_1 x\gamma_2 a_2\alpha_2\ b_2\alpha_2' a_2' \in$A. Karena itu $h_1\gamma_1 x\gamma_2 h_2 \in H$, sehingga $H\Gamma M\Gamma H \subseteq H$. Oleh karena itu H adalah suatu bi-ideal dari M. Karena B adalah bi-ideal minimal dari M, didapatkan *H*=*B*. Karena itu *A*=*B*, sehingga B adalah *B-simple*.
($\Longleftarrow$) Diketahui B adalah *B-simple*. Misal A suatu bi-ideal dari M sedemikian sehingga $A \subseteq B$. Kemudian $A \cap B \neq \emptyset$, hal ini mengikuti lemma 3.5.12 (i) bahwa $B \subseteq A$. Karena itu *A*=*B*, sehingga B adalah bi-ideal minimal dari M. ■

(ii) Diketahui bahwa B adalah bi-ideal minimal dengan elemen nol dari M. Misalkan *A* bi-ideal dalam M. Menurut Definisi bi-ideal minimal, maka B adalah bi-ideal minimal jika tidak terdapat $A \subseteq B$. Karena B adalah bi-ideal dalam M, maka B merupakan sub- Γ-semigrup dari M oleh karena itu $B\Gamma B = \{0\}$ atau dengan kata lain B adalah *0-B-simple*. ■

Contoh 3.6.2

Misalkan $M = \mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$ dengan $\Gamma = \{\bar{2}\}$ merupakan Γ-semigrup dan $B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ merupakan bi-ideal dari $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. Buktikan bahwa *B* adalah bi-ideal minimal dari $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$.

Bukti:
Berdasarkan Contoh 3.5.9 *M* merupakan B-simple. Akan dibuktikan bahwa $B = \{\bar{1}, \bar{2}\}$ adalah bi-ideal minimal dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. Berdasarkan definisi tentang B-simple, maka $B = M$. Dengan

demikian B merupakan B-simple. Karena B adalah satu-satunya bi-ideal tak nol dalam $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$, maka B adalah bi-ideal minimal dari $\mathbb{Z}_3 - \{\bar{0}\}$. ■

Dari teorema 3.6.1 (i) dan lemma 3.5.10 (ii), didapatkan teorema 3.6.3.

Teorema 3.6.3

Misalkan M merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol dan B adalah suatu bi-ideal tak nol dari M, berlaku pernyataan berikut:

(i) Jika B adalah bi-ideal (0-)minimal dari M, maka salah satu $A\Gamma B\Gamma A = \{0\}$ untuk beberapa bi-ideal tak nol A dari B atau B adalah *(0-)B-simple*.

(ii) Jika B adalah *(0-)B-simple*, maka B adalah suatu bi-ideal (0-)minimal dari M.

(Iampan, 2009)

Bukti:

(i) Misalkan B adalah bi-ideal (0-)minimal dari M berarti $B\Gamma M\Gamma B \subseteq B\Gamma B = \{0\}$. Apabila terdapat bi-ideal lain yaitu A dan $A \subseteq B$ maka $A\Gamma B\Gamma A \subseteq B\Gamma M\Gamma B = \{0\}$ sedemikian sehingga $A\Gamma B\Gamma A = \{0\}$. Karena menurut lemma 3.5.8, $B = M$ untuk semua $a \in M$, maka B adalah *(0-)B-simple*.

(ii) Diketahui B adalah *(0-)B-simple*. Akan ditunjukkan bahwa B adalah bi-ideal *(0-)minimal* dari M. Misalkan A adalah bi-ideal dari M dan A merupakan sub-Γ-semigrup dari M. Berdasarkan lemma 3.5.12 (ii) $B \cap A \neq \emptyset$, maka $A \subseteq B$. Oleh karena itu B adalah bi-ideal (0-)minimal dari M.

Karakteristik bi-ideal minimal/(0-)minimal dalam sebuah Γ-semigrup dapat diketahui dari irisan dua bi-ideal sejatinya. Berikut ini beberapa teorema yang menjelaskan karakteristik tersebut:

Teorema 3.6.4

Misalkan M merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol dan memiliki bi-ideal sejati tak nol. Setiap bi-ideal sejati tak nol dalam M adalah bi-ideal (0-)minimal jika dan hanya jika irisan dari dua bi-ideal sejati tak nol yang berbeda adalah {0}.

(Iampan, 2009)

Bukti:
($\Longrightarrow$) Misalkan M merupakan Γ-semigrup dengan elemen nol. Jika diketahui B_i dan B_j merupakan bi-ideal sejati tak nol dari M dan B_i dan B_j adalah bi-ideal (0-)minimal dari M, maka $B_i \cap B_j = \{0\}, \forall_{i \neq j}$. Akan dibuktikan bahwa $B_i \cap B_j = \{0\}, \forall_{i \neq j}$ untuk $i, j = \{1,2,3,..\}$. Andaikan $B_i \cap B_j \neq \{0\}, \forall_{i \neq j}$. Berdasarkan Lemma 3.5.3 $B_i \cap B_j$ adalah bi-ideal dalam M. Karena B_i dan B_j bi-ideal (0-)minimal dari M, maka $B_i = B_j$. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian yang diberikan, sebab $B_i \cap B_j = \{0\}$. Dengan demikian $B_i \cap B_j = \{0\}$, $\forall_{i \neq j}$. ■
($\Longleftarrow$)Misalkan M adalah Γ-semigrup dengan elemen nol dengan B_i dan B_j adalah bi-ideal sejati dalam M. Jika diketahui $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$ untuk $i, j = \{1,2,3,..\}$, maka B_i dan B_j adalah bi-ideal (0-)minimal dalam M. Akan dibuktikan bahwa B_i dan B_j adalah bi-ideal (0-)minimal dalam M. Andaikan B_i dan B_j adalah bukan bi-ideal (0-)minimal dalam M. Karena $B_i \cap B_j = \{0\}$, maka $B_i = B_j$ sedemikian sehingga B_i dan B_j adalah bi-ideal (0-)minimal dalam M. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian yang diberikan, sebab B_i dan B_j adalah bi-ideal (0-)minimal dari M. Dengan demikian B_i dan B_j adalah bi-ideal (0-)minimal dari M. ■

Contoh 3.6.5
Misalkan $\mathbb{Z}_{18}$ dengan $\Gamma = \{\overline{1}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian dan bi-ideal sejati dalam $\mathbb{Z}_{18}$ yaitu
$B_1 = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{6}, \overline{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$
$B_2 = \{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$
$B_3 = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\}$
$B_4 = \{\overline{0}, \overline{9}\}$
Tunjukkan bahwa bi-ideal sejati tersebut adalah bi-ideal (0)-minimal.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa biideal- biideal tersebut merupakan bi-ideal (0-)minimal dalam $\mathbb{Z}_{18}$. Berdasarkan Teorema 3.6.4 setiap bi-ideal sejati dalam $\mathbb{Z}_{18}$ adalah bi-ideal (0-)minimal jika $B_i \cap B_j = \{0\}, \forall_{i \neq j}$, maka
$B_1 \cap B_2 = B_2 \cap B_1 = \{\overline{0}, \overline{6}, \overline{12}\}$

$B_1 \cap B_3 = B_3 \cap B_1 = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$
$B_1 \cap B_4 = B_4 \cap B_1 = \{\bar{0}\}$
$B_2 \cap B_3 = B_3 \cap B_2 = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}\}$
$B_2 \cap B_4 = B_4 \cap B_2 = \{\bar{0}, \bar{9}\}$
$B_3 \cap B_4 = B_4 \cap B_3 = \{\bar{0}\}$
Berdasarkan perhitungan diatas dapat diketahui bahwa B_1, B_3, dan B_4 adalah bi-ideal (0-)minimal dari $\mathbb{Z}_{18}$. ■

Dengan pembuktian yang sama dari teorema 3.6.4, didapatkan teorema 3.6.6.

Teorema 3.6.6

Misalkan M merupakan Γ-semigrup tanpa elemen nol yang memiliki bi-ideal sejati. Setiap bi-ideal sejati dari M adalah bi-ideal minimal jika dan hanya jika irisan dari dua bi-ideal sejati yang berbeda adalah himpunan kosong.

(Iampan, 2009)

Bukti:
(⟹)Misalkan M merupakan Γ-semigrup tanpa elemen nol. Jika diketahui B_i dan B_j merupakan bi-ideal sejati dari M dan B_i dan B_j adalah bi-ideal minimal dari M, maka $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$. Akan dibuktikan bahwa $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$ untuk $i, j = \{1,2,3, ..\}$. Andaikan $B_i \cap B_j \neq \emptyset, \forall_{i \neq j}$. Berdasarkan Lemma 3.5.3 $B_i \cap B_j$ adalah bi-ideal dalam M. Karena B_i dan B_j bi-ideal minimal dari M, maka $B_i = B_j$. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian yang diberikan, sebab $B_i \cap B_j = \emptyset$. Dengan demikian $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$.

■

(⟸)Misalkan M adalah Γ-semigrup tanpa elemen nol dengan B_i dan B_j adalah bi-ideal sejati dalam M. Jika diketahui $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$, maka B_i dan B_j adalah bi-ideal minimal dalam M. Akan dibuktikan bahwa B_i dan B_j adalah bi-ideal minimal dalam M. Andaikan B_i dan B_j adalah bukan bi-ideal minimal dalam M. Karena $B_i \cap B_j = \emptyset$, maka $B_i = B_j$ sedemikian sehingga B_i dan B_j adalah bi-ideal minimal dalam M. Terjadi kontradiksi dengan pengandaian yang diberikan, sebab B_i dan B_j adalah bi-ideal minimal dari M . ■

Contoh 3.6.7

Misalkan $\mathbb{Z}_{18} - \{\bar{0}\}$ dengan $\Gamma = \{\bar{1}\}$ merupakan Γ-semigrup terhadap operasi perkalian dan bi-ideal sejati dalam $\mathbb{Z}_{18}$ yaitu
$B_1 = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{14}, \overline{16}\}$
$B_2 = \{\bar{3}, \bar{6}, \bar{9}, \overline{12}, \overline{15}\}$
$B_3 = \{\bar{6}, \overline{12}\}$
$B_4 = \{\bar{9}\}$
Tunjukkan bahwa bi-ideal sejati tersebut adalah bi-ideal minimal.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa biideal-biideal tersebut merupakan bi-ideal minimal dalam $\mathbb{Z}_{18} - \{\bar{0}\}$. Berdasarkan Teorema 3.6.6 setiap bi-ideal sejati dalam $\mathbb{Z}_{18} - \{\bar{0}\}$ adalah bi-ideal (0-)minimal jika $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall_{i \neq j}$, maka
$B_1 \cap B_2 = B_2 \cap B_1 = \{\bar{6}, \overline{12}\}$
$B_1 \cap B_3 = B_3 \cap B_1 = \{\bar{6}, \overline{12}\}$
$B_1 \cap B_4 = B_4 \cap B_1 = \emptyset$
$B_2 \cap B_3 = B_3 \cap B_2 = \{\bar{6}, \overline{12}\}$
$B_2 \cap B_4 = B_4 \cap B_2 = \{\bar{9}\}$
$B_3 \cap B_4 = B_4 \cap B_3 = \emptyset$
Berdasarkan perhitungan diatas dapat diketahui bahwa $B_1 \cap B_4 = B_4 \cap B_1 = \emptyset$ dan $B_3 \cap B_4 = B_4 \cap B_3 = \emptyset$, sehingga B_1, B_3, dan B_4 adalah bi-ideal (0-)minimal dari $\mathbb{Z}_{18} - \{\bar{0}\}$. ■

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan yaitu:

(i) Bi-ideal dalam sebuah Γ-semigrup memiliki karakteristik bi-ideal minimal/(0-)minimal jika bi-idealnya tersebut merupakan B-simple/(0-)B-simple.

(ii) Sebuah Γ-semigrup dengan elemen nol yang memua bi-ideal sejati tak nol memiliki karakteristik bi-ideal (0-)minimal jika dan hanya jika irisan dari dua bi-ideal sejati tak nol yang berbeda adalah $\{0\}$.

(iii) Sebuah Γ-semigrup tanpa elemen nol yang memuat bi-ideal sejati memiliki karakteristik bi-ideal minimal jika dan hanya jika irisan dari dua bi-ideal sejati yang berbeda adalah himpunan kosong.

4.2 Saran

Pada pembahasan lebih lanjut disarankan untuk membahas mengenai karakteristik bi-ideal maksimal dalam Γ-semigrup.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya,P.B., dkk.1990. *Basic Abstract Algebra*.Cambridge University Press, New York

Chinram,R and Jirojkul,C.2007. *On bi-Γ-ideals in Γ-semigroups*. Songklanakarin J.Sci.Technol,Vol.29,No.1, Hal.232-234

Golan,J.S. 1999. *Semirings and Their Applications*. Kluwer Academic Publisher, London

Iampan,A.2008. *On Bi-Ideal in Semigroups*. Lobachevskii Journal of Mathematics,Vol.29,No.2, Hal 68-72

Iampan,A.2009.*Note on Bi-Ideal in Γ-semigroups*. International Journal of Algebra,Vol.3,no.4,Hal.181-188

Lallement.G.1979. *Semigroups and combinatorial applications*, Wiley.

Lajos,S.1969.*On the bi-ideals in Semigroups*.Proc. Japan Acad. K.Marx University of Economics,Budapest,Hungary, Vol.45,Hal.710-712

Whitelaw,T.A.1995.*Introduction to Abstract Algebra*, Department of Mathematics University of Glasgow, Blackie Academic and Professional, New York

LAMPIRAN

Tabel 2.3.1 Operasi Perkalian terhadap $\mathbb{Z}_{18}$

$\bullet$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{12}$	$\overline{13}$	$\overline{14}$	$\overline{15}$	$\overline{16}$	$\overline{17}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{14}$	$\overline{16}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{12}$	$\overline{15}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$	$\overline{16}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{10}$	$\overline{14}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{15}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{14}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{16}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{13}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{12}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{14}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{17}$	$\overline{6}$	$\overline{13}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{16}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{15}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{16}$	$\overline{6}$	$\overline{14}$	$\overline{4}$	$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{10}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{12}$	$\overline{4}$	$\overline{14}$	$\overline{6}$	$\overline{16}$	$\overline{8}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{15}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{12}$	$\overline{5}$	$\overline{16}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{13}$	$\overline{6}$	$\overline{17}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{14}$	$\overline{7}$
$\overline{12}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{13}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{16}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{14}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{17}$	$\overline{12}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{15}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{14}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{14}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{16}$	$\overline{12}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{15}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{15}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{16}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{14}$	$\overline{12}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{17}$	$\overline{0}$	$\overline{17}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Tabel 3.1.1 Operasi Perkalian terhadap $(a\gamma b)\mu c$ dan $a\gamma(b\mu c)$

a	γ	b	$a\gamma b$	μ	c	μc	$(a\gamma b)\mu c$	$\gamma(b\mu c)$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$

Tabel 3.1.2 Operasi Perkalian terhadap $(a\gamma b)\mu c$ dan $a\gamma(b\mu c)$

a	γ	b	$a\gamma b$	μ	c	μc	$(a\gamma b)\mu c$	$a\gamma(b\mu c)$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{2}$