

**DINAMIK PERSAMAAN BEDA TAK STANDAR
UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS
DENGAN IMIGRAN TERINFEKSI**

SKRIPSI

Oleh:
NOVIANA HANNY RACHMAWATI
0610940042-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

**DINAMIK PERSAMAAN BEDA TAK STANDAR
UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS
DENGAN IMIGRAN TERINFEKSI**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

NOVIANA HANNY RACHMAWATI

0610940042-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
DINAMIK PERSAMAAN BEDA TAK STANDAR
UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS
DENGAN IMIGRAN TERINFEKSI

Oleh:
NOVIANA HANNY RACHMAWATI
0610940042-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 11 Februari 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

DOSEN PEMBIMBING I

DOSEN PEMBIMBING II

Dr. Agus Suryanto, M.Sc.
NIP. 196908071994121001

Dr. Wuryansari Muharini K, M.Si.
NIP. 196607281993032001

MENGETAHUI
KETUA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.
NIP. 196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : NOVIANA HANNY RACHMAWATI
NIM : 0610940042
Jurusan : MATEMATIKA
Judul Skripsi : DINAMIK PERSAMAAN BEDA TAK
STANDAR UNTUK MODEL EPIDEMIK
SIS DENGAN IMIGRAN TERINFEKSI

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 Februari 2011
Yang menyatakan,

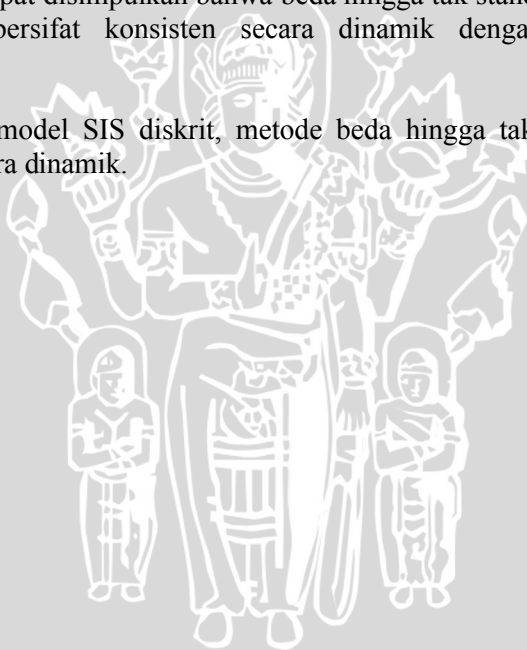
(NOVIANA HANNY RACHMAWATI)
NIM. 0610940042

DINAMIK PERSAMAAN BEDA TAK STANDAR UNTUK MODEL EPIDEMIK SIS DENGAN IMIGRAN TERINFEKSI

ABSTRAK

Model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*) merupakan persamaan diferensial tak linier yang memodelkan interaksi antara populasi rentan (*susceptible*) dan terinfeksi (*infected*). Pada skripsi ini dibahas model SIS diskrit yang solusinya dicari secara numerik menggunakan metode beda hingga tak standar. Setelah dilakukan diskritisasi, model dibandingkan dengan sistem dinamik kontinunya. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa beda hingga tak standar model SIS diskrit bersifat konsisten secara dinamik dengan model kontinunya.

Kata kunci: model SIS diskrit, metode beda hingga tak standar, konsisten secara dinamik.

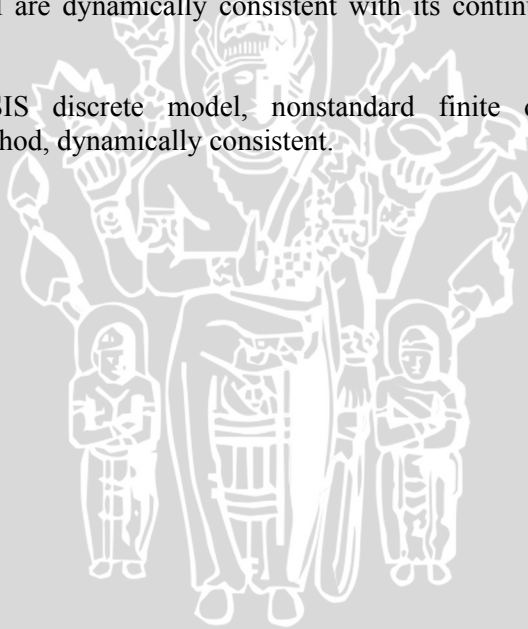


NONSTANDARD DINAMICAL DIFFERENCE EQUATION OF EPIDEMIC MODEL WITH INFECTIVES IMMIGRATION

ABSTRACT

SIS (Susceptible Infected Susceptible) model is a system of nonlinear differential equations which modeled an interaction between susceptible and infected population. This final project discusses discrete SIS model which its solution solved numerically by applying nonstandard finite difference method. The discrete model is compared with the continuous dynamic system. Furthermore, it can be concluded that nonstandard finite difference discrete model are dynamically consistent with its continuous-time model.

Keywords: SIS discrete model, nonstandard finite difference method, dynamically consistent.



KATA PENGANTAR

Segala puji, syukur, hormat dan kemuliaan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan judul **“Dinamik Persamaan Beda Tak Standar untuk Model Epidemik SIS dengan Imigran Terinfeksi”**. Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan kali ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc, selaku pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si, selaku pembimbing II sekaligus dosen penasehat akademik serta pembimbing akademik atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulis menempuh kuliah dan dalam penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc, selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus ketua penguji pada ujian skripsi.
4. Drs. Marsudi, M.S, dan Drs. M. Muslikh selaku dosen penguji pada ujian skripsi.
5. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Mama dan papa tercinta, serta kakak dan kedua adik tersayang yang senantiasa tanpa henti memberikan semangat dan dorongan serta doa sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
7. Keluarga besar Matematika 2006 dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terimakasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak

kekurangan, untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis noviana_hanny@yahoo.com.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, 11 Februari 2011

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1. Sistem Dinamik	3
2.2. Sistem Dinamik Kontinu	3
2.2.1. Sistem Otonomus	3
2.2.2. Titik Kesetimbangan	4
2.2.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan	4
2.3. Sistem Dinamik Diskrit	4
2.3.1. Sistem Dinamik Diskrit Tak Linier	5
2.3.2. Perilaku Pendekatan Solusi Persamaan Beda	6
2.4. Metode Beda Hingga Standar	8
2.5. Metode Beda Hingga Tak Standar	11
2.6. Konsistensi Secara Dinamik	11
2.7. Sistem Dinamik Kontinu Model SIS dengan Imigran Terinfeksi	12

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	15
3.1. Diskritisasi Model SIS dengan Imigran Terinfeksi	15
3.2. Kondisi $\beta=0$ dan $p>0$	16
3.2.1. Titik Keseimbangan	16
3.2.2. Kestabilan Titik Keseimbangan	17
3.3. Kondisi $\beta>0$ dan $p=0$	22
3.3.1. Titik Keseimbangan	22
3.3.2. Kestabilan Titik Keseimbangan	25
3.4. Kondisi $\beta>0$ dan $p>0$	36
3.4.1. Titik Keseimbangan	36
3.4.2. Kestabilan Titik Keseimbangan	38
3.5. Simulasi Numerik	45
3.5.1. Simulasi Numerik untuk Titik Keseimbangan Kondisi $\beta=0$	46
3.5.2. Simulasi Numerik untuk Titik Keseimbangan Kondisi $\beta>0$ dan $p=0$	47
3.5.3. Simulasi Numerik untuk Titik Keseimbangan Kondisi $\beta>0$ dan $p>0$	49
 BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	 51
4.1. Kesimpulan	51
4.2. Saran	51
 DAFTAR PUSTAKA	 53
 LAMPIRAN	 55

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1	Diagram Model Kompartemen SIS	12
Gambar 3.1	Solusi numerik model SIS saat $\beta = 0$	46
Gambar 3.2	Solusi numerik model SIS saat $\beta > 0$ dan $p = 0$ dengan $\sigma > 0$	47
Gambar 3.3	Solusi numerik model SIS saat $\beta > 0$ dan $p = 0$ dengan $\sigma < 0$	48
Gambar 3.4	Solusi numerik model SIS saat $\beta > 0$ dan $p > 0$	49



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

- Lampiran 1.** Bentuk umum persamaan $I_{n+1} = \delta I_n + b$ 55
- Lampiran 2.** Bentuk umum persamaan $S_{n+1} = \epsilon S_n + g_n$ 56
- Lampiran 3.** Listing Program Menggunakan Matlab 7.0 untuk
Solusi Numerik Model SIS dengan tiga kondisi ... 58

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Model matematika seringkali digunakan untuk menjelaskan fenomena dalam bidang biologi, ekologi, fisika, dan lain sebagainya. Fenomena-fenomena tersebut seringkali dimodelkan oleh persamaan diferensial dengan representasi proses waktu kontinu. Persamaan diferensial tak linier pada umumnya sulit diselesaikan secara analitik. Karena itu, penyelesaian secara numerik memainkan peranan penting untuk menghampiri solusi persamaan diferensial tersebut.

Secara umum, integrasi numerik dilakukan dengan mereduksi persamaan diferensial yang kontinu terhadap waktu menjadi model diskrit terhadap waktu. Salah satu metode yang sering diaplikasikan adalah menghampiri turunan yang terdapat dalam persamaan diferensial dengan beda hingga. Terdapat dua metode beda hingga (*finite difference method*), yaitu beda hingga standar (*standard finite difference*) dan beda hingga tak standar (*nonstandard finite difference*). Persamaan beda yang diperoleh dikatakan konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya jika kedua persamaan tersebut mempunyai titik tetap dengan kestabilan yang sama. Tetapi dalam aplikasinya, metode beda hingga standar memiliki banyak kekurangan dalam pencapaian konsistensi dinamiknya (Roeger, 2008). Untuk mengatasi permasalahan ini perlu digunakan metode lain, yaitu metode beda hingga tak standar.

Sistem persamaan diferensial model SIS (*Susceptible Infected Susceptible*) adalah contoh persamaan dengan penyelesaian analitik yang sulit didapat, sehingga perlu dilakukan pendekatan secara numerik melalui diskritisasi menggunakan metode beda hingga tak standar.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah

1. bagaimana melakukan diskritisasi sistem persamaan diferensial model SIS dengan menggunakan metode beda hingga tak standar,
2. bagaimana konsistensi dinamik model SIS diskrit yang didapatkan bila dibandingkan dengan persamaan diferensialnya.

1.3. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. melakukan diskritisasi sistem persamaan diferensial model SIS dengan menggunakan metode beda hingga tak standar,
2. menganalisis konsistensi dinamik model SIS diskrit yang didapatkan dengan persamaan diferensialnya.



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan suatu keadaan yang dipengaruhi oleh waktu (t). Dalam penerapannya, terdapat dua jenis sistem dinamik, yaitu sistem dinamik diskrit ($t \in Z$ atau N) dan sistem dinamik kontinu ($t \in R$). Bentuk sistem dinamik diskrit dinyatakan sebagai persamaan beda, yaitu

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad t \in Z \text{ atau } N.$$

Apabila t kontinu, bentuk sistem dinamik dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial, yaitu

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x} = \vec{X}(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n$$

(Arrowsmith dan Place, 1990).

Secara geometri, sistem dinamik menggambarkan pergerakan titik-titik di bidang fase sepanjang kurva penyelesaian sistem persamaan diferensialnya (Perko, 1996).

2.2. Sistem Dinamik Kontinu

2.2.1. Sistem Otonomus

Suatu sistem persamaan diferensial yang tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas t , yaitu

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

dengan f dan g merupakan fungsi bernilai real disebut *sistem otonomus* (Cronin, 1994).

2.2.2. Titik Kesetimbangan

Jika terdapat suatu sistem otonomus

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{2.1}$$

maka titik (x^*, y^*) yang memenuhi $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$ disebut *titik kritis* sistem (2.1). Titik kritis (x^*, y^*) adalah solusi sistem (2.1) yang bernilai konstan karena $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Oleh karena itu, titik kritis disebut juga *titik kesetimbangan*.

2.2.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Jenis kestabilan titik kesetimbangan (x^*, y^*) dibedakan menjadi tiga, yaitu

1) stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk

$$\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta \text{ berlaku } \|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon, \\ \forall t > 0,$$

2) tak stabil apabila tidak memenuhi kriteria pertama,

3) stabil asimtotik jika stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi

$$\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0 \text{ bersifat } \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$$

(Boyce dan DiPrima, 2001).

2.3. Sistem Dinamik Diskrit

Fenomena-fenomena yang berkaitan dengan waktu yang berjalan secara diskrit digambarkan dengan persamaan beda. Sebagai contoh, jika populasi tertentu berkembang secara diskrit, maka jumlah populasi ke- $(n + 1)$ merupakan fungsi dari populasi ke- n . Jika terdapat interaksi antara dua spesies, maka populasi keduanya

pada waktu ke- $(n + 1)$ dapat ditulis dalam bentuk sistem persamaan beda sebagai berikut

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n)\end{aligned}\tag{2.2}$$

(Elaydi, 2005).

2.3.1. Sistem Dinamik Diskrit Tak Linier

Titik (x^*, y^*) disebut titik kesetimbangan persamaan (2.2) jika $f(x^*, y^*) = x^*$ dan $g(x^*, y^*) = y^*$, di mana f dan g adalah fungsi pembangkit sistem.

Jika f dan g pada persamaan (2.2) memuat perkalian antara variabel tak bebas, maka sistem (2.2) disebut sistem dinamik diskrit tak linier. Misalkan titik (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sistem tak linier, untuk mengetahui jenis kestabilan titik kesetimbangan tersebut dapat dilakukan dengan menganalisis sistem hasil linierisasi. Proses linierisasi sistem tak linier dilakukan dengan melakukan ekspansi Taylor terhadap masing-masing fungsi f dan g yaitu

$$\begin{aligned}f(x_n, y_n) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) + \eta_1(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) + \eta_2(x_n, y_n)\end{aligned}$$

di mana $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ adalah suku sisa, yang memenuhi $\eta_1(x_n, y_n) / \left[(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0$ dan

$$\eta_2(x_n, y_n) / \left[(x_n - x^*)^2 + (y_n - y^*)^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0 \text{ untuk } (x_n, y_n) \rightarrow (x^*, y^*).$$

Oleh karena itu, $\eta_1(x_n, y_n)$ dan $\eta_2(x_n, y_n)$ dapat diabaikan.

Karena (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan, maka sistem (2.2) dapat didekati dengan

$$x_{n+1} = x^* + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)$$

$$y_{n+1} = y^* + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)$$

atau

$$x_{n+1} - x^* = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*)$$

$$y_{n+1} - y^* = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n}(x_n - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n}(y_n - y^*) \quad (2.3)$$

Dengan memisalkan $u_n = x_n - x^*$ dan $v_n = y_n - y^*$, maka sistem (2.3) menjadi

$$u_{n+1} = \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} u_n + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} v_n,$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x_n} & \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

(Elaydi, 2005).

2.3.2. Perilaku Pendekatan Solusi Persamaan Beda

Perhatikan persamaan beda orde k berikut

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \dots + p_k y(n) = 0. \quad (2.4)$$

Persamaan karakteristik untuk persamaan (2.4) adalah

$$\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + \dots + p_k \lambda^n = 0.$$

Misalkan $\lambda_i = 1, 2, \dots, k$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik untuk persamaan (2.4), maka berlaku semua solusi persamaan (2.4) konvergen menuju 0 (stabil asimtotik) jika dan hanya jika maksimum $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_k|\} < 1$.

Persamaan kuadrat $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda A + B = 0$ memiliki dua akar yang memenuhi $|\lambda_i| < 1$, $i=1, 2$ jika dan hanya jika kondisi berikut dipenuhi.

- (1) $f(1) = 1 - A + B > 0$,
- (2) $f(-1) = 1 + A + B > 0$,
- (3) $f(0) = B < 1$.

Misalkan matriks Jacobi sistem yang dilinierkan adalah

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

maka nilai eigen matriks Jacobinya adalah akar persamaan karakteristik

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

atau

$$\lambda^2 - \lambda A + B = 0,$$

dengan $A = \text{trace}(C)$ dan $B = \det(C)$.

Titik tetap sistem (2.2) akan bersifat stabil asimtotik jika dan hanya jika

$$1 - A + B > 0, 1 + A + B > 0, 1 - B > 0$$

atau secara ekuivalen

$$|A| < 1 + B < 2$$

(Elaydi, 2005).

2.4. Metode Beda Hingga Standar

Persamaan diferensial dapat didekati dengan metode beda hingga, dengan kata lain dilakukan pendekatan turunan pertama dengan beda maju, beda pusat, atau beda mundur. Pendekatan

turunan ke dua dapat menggunakan beda pusat. Metode beda hingga standar yang sering digunakan untuk pendekatan turunan pertama adalah Metode Euler.

Perhatikan ekspansi deret Taylor $x(t)$ pada titik t_n berikut di mana $h > 0$

$$x(t_n + h) = x(t_n) + h \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_{t_n} + \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_{t_n} + \dots \quad (2.5)$$

$$x(t_n - h) = x(t_n) - h \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_{t_n} - \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_{t_n} + \dots$$

Berdasarkan persamaan (2.5) pertama diperoleh

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} &= \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} - \frac{h}{2!} \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_{t_n} + \frac{h^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_{t_n} + \dots \\ \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} &= \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} + O(h). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama dengan beda maju fungsi x adalah

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} \approx \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h}.$$

Jika dituliskan $x_n \approx x(t_n)$ dan $x_{n+1} \approx x(t_n + h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan beda maju dapat dinyatakan sebagai

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_n}{h}.$$

Berdasarkan persamaan (2.5) ke dua diperoleh

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} + \frac{h}{2!} \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_{t_n} - \frac{h^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_{t_n} + \dots$$

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h} + O(h).$$

Oleh karena itu, pendekatan turunan pertama dengan beda mundur fungsi x adalah

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} \approx \frac{x(t_n) - x(t_n - h)}{h}.$$

Jika dituliskan $x_n \approx x(t_n)$ dan $x_{n-1} \approx x(t_n - h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan beda mundur dapat dinyatakan sebagai

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} \approx \frac{x_n - x_{n-1}}{h}.$$

Beda pusat didekati dengan operasi pengurangan persamaan (2.5) pertama dengan persamaan ke dua diperoleh

$$x(t_n + h) - x(t_n - h) = 2h \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} + 2 \frac{h^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_{t_n} + \dots,$$

sehingga

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} = \frac{x(t_n + h) - x(t_n - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \right|_{t_n} + \dots$$

$$= \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h} + O(h^2).$$

Jika dituliskan $x_{n-1} \approx x(t_n - h)$ dan $x_{n+1} \approx x(t_n + h)$, maka aproksimasi orde pertama dengan beda pusat dapat dinyatakan sebagai

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{t_n} \approx \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2h}$$

(Banagaaya, 2008).

Metode Euler maju adalah salah satu skema diskrit paling sederhana yang menggunakan pendekatan beda maju. Pada metode ini turunan pertama dx/dt digantikan oleh $[x(t_n + h) - x(t_n)]/h$ di mana h adalah ukuran langkah (Erjaee dkk, 2001).

Untuk sistem persamaan diferensial

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}$$

ruas kiri digantikan oleh pendekatan dengan beda maju, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{x(t_n + h) - x(t_n)}{h} &\approx f(x(t_n), y(t_n)), \\ \frac{y(t_n + h) - y(t_n)}{h} &\approx g(x(t_n), y(t_n)).\end{aligned}$$

Sehingga diskritisasi dengan metode Euler dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}x(t_n + h) &= x(t_n) + hf(x(t_n), y(t_n)), \\ y(t_n + h) &= y(t_n) + hg(x(t_n), y(t_n)),\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n, y_n).\end{aligned}$$

2.5. Metode Beda Hingga Tak Standar

Bentuk diferensial pada metode beda hingga standar, dx/dt diubah menjadi $\frac{x(t+h) - x(t)}{h}$, dengan $h > 0$ adalah lebar langkah.

Akan tetapi, pada metode beda hingga tak standar, bentuk diferensial tersebut diubah menjadi $\frac{x(t+h) - x(t)}{\varphi(h)}$, di mana $\varphi(h)$ adalah fungsi

kontinu yang memenuhi sifat $\varphi(h) = h + O(h^2)$. Bentuk tak linier seperti x^2 diubah menjadi $x(t)x(t+h)$, sedangkan untuk xy diubah

menjadi $x(t)y(t)$, $x(t)y(t+h)$, $x(t+h)y(t)$ atau $x(t+h)y(t+h)$ (Roeger, 2008).

$\varphi(h)$ sendiri merupakan suku sisa yang nilainya mendekati nol untuk $h \rightarrow 0$, sehingga dapat diabaikan. Contoh $\varphi(h)$ antara lain adalah h , $\sin(h)$, $\exp(h) - 1$, $\ln(h+1)$, dan lain sebagainya. Dapat dilihat pembuktian berikut untuk $\varphi(h) = 1 - \exp(-h)$ dengan menggunakan deret Mc Laurin.

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= 1 - \exp(-h) \\ &= 1 - \exp(0) + \frac{\exp(0)}{1!}h - \frac{\exp(0)}{2!}h^2 + \frac{\exp(0)}{3!}h^3 + \dots \\ &= 1 - 1 + (1)h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \dots \\ &= h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{6}h^3 + \dots \\ &= h + O(h^2).\end{aligned}$$

2.6. Konsistensi Secara Dinamik

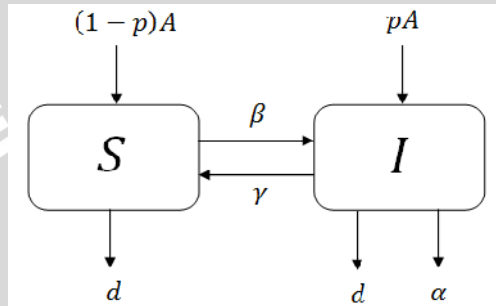
Solusi yang diberikan oleh sistem dinamik kontinu maupun diskrit dapat mendekati atau menjauhi titik kesetimbangan. Analisis sistem dinamik meliputi penyelidikan perilaku solusi di sekitar titik kesetimbangan atau kestabilan penyelesaian titik kesetimbangan.

Jika suatu skema numerik memiliki titik kesetimbangan dengan sifat kestabilan yang sama dengan sistem kontinunya, maka skema numerik tersebut dikatakan konsisten secara dinamik (Dimitrov dan Kojouharov, 2007).

2.7. Sistem Dinamik Kontinu Model SIS dengan Imigran Terinfeksi

Model epidemik SIS merupakan model epidemik dengan penyebaran penyakit tanpa kekebalan. Hal ini menyebabkan individu yang telah terinfeksi dapat terinfeksi kembali walaupun dia telah pulih dari infeksi sebelumnya. Tipe-tipe penyakit tersebut dapat dimodelkan dengan model kompartemen di mana S menunjukkan *Susceptible* dan I menunjukkan *Infective*. Pemodelan dinamik model SIS menggunakan beberapa asumsi sebagai berikut. Jumlah penduduk berupa imigran, kematian, serta jumlah individu yang berpindah dari satu kelas ke kelas yang lain tidak pernah bernilai

negatif. Setiap individu *infective* memiliki peluang yang sama untuk menularkan penyakit ke individu *susceptible* dalam populasi tersebut. Individu *susceptible* dapat terinfeksi menjadi individu *infective* jika melakukan kontak dengan individu *infective*. Arus perpindahan dari kompartemen-kompartemen tersebut secara skematis disajikan pada Gambar 2.1 berikut.



Gambar 2.1. Diagram Kompartemen Model SIS

Di mana

S adalah banyaknya individu *susceptible* pada waktu t

I adalah banyaknya individu *infective* pada waktu t

p adalah proporsi imigran yang terinfeksi ($0 \leq p \leq 1$)

A adalah banyaknya imigran

β adalah laju individu yang terinfeksi dari *susceptible* dalam satuan waktu ($\beta \geq 0$)

γ adalah laju individu yang sembuh dari *infective* dalam satuan waktu ($\gamma \geq 0$)

d adalah laju kematian alami perkapita ($d > 0$)

α adalah laju kematian karena terinfeksi ($\alpha > 0$)

Laju perubahan individu *susceptible* dan *infective* yang dikonstruksi pada Gambar 2.1 memenuhi sistem persamaan diferensial tak linier

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (1-p)A - \beta SI - dS + \gamma I \\ \dot{I} &= pA + \beta SI - (d + \gamma + \alpha)I. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Karena menyatakan populasi, maka $S(t)$ dan $I(t) \geq 0$ dengan jumlah total populasi diasumsikan bernilai konstan setiap saat, yaitu $N = S(t) + I(t)$.

Sistem dinamik kontinu model SIS seperti pada persamaan (2.6) memiliki titik kesetimbangan dan kestabilan yang berbeda untuk tiga macam kondisi. Jika $\beta = 0$ dan $p > 0$ adalah kondisi saat tidak ada individu rentan yang terinfeksi, maka diperoleh titik kesetimbangan tunggal, yaitu $E_0 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{(1-p)A}{d} + \frac{\gamma I_0^*}{d}, \frac{pA}{d+\gamma+\alpha} \right)$ yang bersifat stabil asimtotik global. Jika $\beta > 0$ dan $p = 0$ adalah saat tidak ada imigran terinfeksi, diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu $\left(\frac{A}{d}, 0 \right)$ sebagai titik bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik global saat $\sigma < 0$ dan bersifat tak stabil saat $\sigma > 0$, dan $\left(\frac{d+\gamma+\alpha}{\beta}, \frac{\beta A - d(d+\gamma+\alpha)}{(d+\alpha)\beta} \right)$ sebagai titik endemik yang bersifat stabil asimtotik lokal saat $\sigma > 0$, di mana $\sigma = \beta A - d(d+\gamma+\alpha)$. Untuk $\beta > 0$ dan $p > 0$, diperoleh satu titik kesetimbangan, yaitu $\left(\frac{(1-p)A + \gamma I}{\beta I + d}, \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\beta d p A (d+\alpha)}}{2\beta(d+\alpha)} \right)$ yang bersifat stabil asimtotik global.

Dapat diambil kesimpulan bahwa saat $p > 0$, maka penyakit pada model SIS ini akan terus ada. Jumlah individu terinfeksi dapat dikurangi dengan memperkecil jumlah individu terinfeksi yang berada pada populasi, atau dengan meningkatkan laju individu yang sembuh dari infeksi (Brauer dan Driesche, 2001).



BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Diskritisasi Model SIS dengan Imigran Terinfeksi

Secara umum relatif sulit mencari solusi eksak dengan mengintegrasikan persamaan diferensial SIS dengan bentuk

$$\begin{aligned} \dot{S} &= (1-p)A - \beta SI - dS + \gamma I \\ \dot{I} &= pA + \beta SI - (d + \gamma + \alpha)I \\ S(0), I(0) &\geq 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

sehingga perlu dilakukan diskritisasi secara numerik. Pada skripsi ini digunakan skema beda hingga tak standar, yaitu dengan menghampiri bentuk \dot{S} dan \dot{I} dengan beda maju, serta menghampiri bentuk tak linier SI dengan pendekatan tak lokal. Dengan mengubah $S = S_{n+1}$, $I = I_n$ pada \dot{S} , $I = I_{n+1}$ pada \dot{I} , $SI = S_{n+1}I_n$ pada \dot{S} , $SI = S_nI_n$ pada \dot{I} , serta $\dot{S} = (S_{n+1} - S_n)/\varphi_1(h)$ dan $\dot{I} = (I_{n+1} - I_n)/\varphi_2(h)$, maka persamaan SIS diskrit dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{S_{n+1} - S_n}{\varphi_1(h)} &= (1-p)A - \beta S_{n+1}I_n - dS_{n+1} + \gamma I_n \\ \frac{I_{n+1} - I_n}{\varphi_2(h)} &= pA + \beta S_nI_n - (d + \gamma + \alpha)I_{n+1}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Selanjutnya persamaan tersebut disederhanakan dengan menuliskan $\varphi_i(h)$ menjadi φ_i untuk $i = 1, 2$ di mana $\varphi_i \geq 0$, sehingga bentuk eksplisit persamaan (3.2) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= (1-p)\varphi_1 A - \beta\varphi_1 S_{n+1}I_n - d\varphi_1 S_{n+1} + \gamma\varphi_1 I_n \\ \Leftrightarrow S_{n+1} &= S_n + (1-p)\varphi_1 A - \beta\varphi_1 S_{n+1}I_n - d\varphi_1 S_{n+1} + \gamma\varphi_1 I_n \\ \Leftrightarrow S_{n+1} + \beta\varphi_1 S_{n+1}I_n + d\varphi_1 S_{n+1} &= S_n + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n \\ \Leftrightarrow S_{n+1}(1 + \beta\varphi_1 I_n + d\varphi_1) &= S_n + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n \\ \Leftrightarrow S_{n+1} &= \frac{S_n + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n}{1 + \beta\varphi_1 I_n + d\varphi_1} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S_n I_n - (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 I_{n+1} \\
 \Leftrightarrow I_{n+1} &= I_n + p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S_n I_n - (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 I_{n+1} \\
 \Leftrightarrow I_{n+1} + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 I_{n+1} &= I_n + p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S_n I_n \\
 \Leftrightarrow I_{n+1}[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2] &= I_n + p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S_n I_n \\
 \Leftrightarrow I_{n+1} &= \frac{I_n + p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S_n I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}
 \end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut, diperoleh persamaan SIS diskrit sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= \frac{S_n + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n}{1 + \beta\varphi_1 I_n + d\varphi_1} \\
 I_{n+1} &= \frac{I_n + \varphi_2 p A + \beta\varphi_2 S_n I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\
 S(0), I(0) &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Sistem dinamik kontinu model SIS dengan sifat-sifat dinamikanya telah dijelaskan pada subbab 2.7. Berikut ini akan diselidiki apakah persamaan diskrit dengan skema beda hingga tak standar dapat mempertahankan kekonsistenan terhadap persamaan diferensialnya.

3.2. Kondisi $\beta = 0$ dan $p > 0$

Persamaan model SIS dengan $\beta = 0$ dan $p > 0$ adalah kondisi saat tidak ada individu rentan yang terinfeksi. Bila $\beta = 0$ dan $p > 0$, maka persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= \frac{S_n + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n}{1 + d\varphi_1} \\
 I_{n+1} &= \frac{I_n + \varphi_2 p A}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2.1. Titik Kesetimbangan

Berikut akan ditunjukkan bahwa persamaan SIS diskrit mempunyai titik kesetimbangan yang sama dengan persamaan

diferensialnya. Berdasarkan subbab 2.3.1., titik kesetimbangan pada persamaan beda diperoleh dengan menentukan (S^*, I^*) yang memenuhi $S^* = f(S^*, I^*)$ dan $I^* = g(S^*, I^*)$, yaitu

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{S^* + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^*}{1 + d\varphi_1} \\ \Leftrightarrow S^*(1 + d\varphi_1) &= S^* + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^* \\ \Leftrightarrow S^*(1 + d\varphi_1 - 1) &= (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^* \\ \Leftrightarrow S^* &= \frac{[(1-p)A + \gamma I^*]\varphi_1}{d\varphi_1} \\ \Leftrightarrow S^* &= \frac{(1-p)A}{d} + \frac{\gamma}{d} I^* \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{I^* + \varphi_2 p A}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\ \Leftrightarrow I^*[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2] &= I^* + \varphi_2 p A \\ \Leftrightarrow I^*[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 - 1] &= \varphi_2 p A \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\varphi_2 p A}{(d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{p A}{d + \gamma + \alpha}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan SIS diskrit untuk $\beta = 0$ dan $p > 0$ mempunyai titik kesetimbangan tunggal yang sama dengan persamaan diferensialnya, yaitu

$$E_0 = (S_0^*, I_0^*) = \left(\frac{(1-p)A}{d} + \frac{\gamma}{d} I_0^*, \frac{pA}{d + \gamma + \alpha} \right).$$

3.2.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa titik kesetimbangan persamaan SIS diskrit dengan $\beta = 0$ dan $p > 0$ mempunyai kestabilan yang konsisten dengan persamaan diferensialnya, yaitu sama-sama bersifat stabil asimtotik global. Hal ini dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.1.

Setiap solusi persamaan (3.4) konvergen menuju titik E_0 .

Bukti:

Seperti yang telah dijelaskan pada subbab 2.2.3., titik kesetimbangan persamaan (3.4) akan bersifat stabil asimtotik jika memenuhi $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, I_n) = (S_0^*, I_0^*)$.

Dengan memisalkan $\delta = 1/[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2]$, di mana $0 < \delta < 1$, maka bentuk I_{n+1} pada persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \frac{I_n + p\varphi_2 A}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\ \Leftrightarrow I_{n+1} &= \delta(I_n + p\varphi_2 A) \\ \Leftrightarrow I_{n+1} &= \delta I_n + \delta\varphi_2 pA \end{aligned}$$

Persamaan $I_{n+1} = \delta I_n + \delta\varphi_2 pA$ mempunyai penyelesaian umum yang berbentuk

$$I_n = \delta^n I_0 + \left(\frac{1 - \delta^n}{1 - \delta} \right) \delta\varphi_2 pA \quad (3.5)$$

(lihat Lampiran 1). Karena $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^n = 0$, maka

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} I_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\delta^n I_0 + \left(\frac{1 - \delta^n}{1 - \delta} \right) \delta\varphi_2 pA \right] \\ &= \left(\frac{1}{1 - \delta} \right) \delta\varphi_2 pA \\ &= \frac{1}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \varphi_2 pA \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}} \varphi_2 pA \\ &= \frac{\left(\frac{1}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \right) \varphi_2 pA}{\frac{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 - 1}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varphi_2 p A}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \times \frac{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}{(d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\
&= \frac{p A}{(d + \gamma + \alpha)} \\
&= I_0^*.
\end{aligned}$$

Selanjutnya dengan memisalkan $\epsilon = 1/(1 + d\varphi_1)$, bentuk S_{n+1} pada persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{S_n + (1 - p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n}{1 + d\varphi_1} \\
&= \epsilon S_n + \epsilon(1 - p)\varphi_1 A + \epsilon\gamma\varphi_1 I_n \\
&= \epsilon S_n + \epsilon(1 - p)\varphi_1 A + \epsilon\gamma\varphi_1 \left[\delta^n I_0 + \left(\frac{1 - \delta^n}{1 - \delta} \right) \delta\varphi_2 p A \right],
\end{aligned}$$

dengan penyelesaian umum berbentuk

$$\begin{aligned}
S_n &= \epsilon^n S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \left[\epsilon(1 - p)\varphi_1 A \right. \\
&\quad \left. + \epsilon\gamma\varphi_1 \left\{ \delta^k I_0 + \left(\frac{1 - \delta^k}{1 - \delta} \right) \delta\varphi_2 p A \right\} \right]
\end{aligned}$$

(lihat Lampiran 2). Perhatikan bahwa untuk semua $n \rightarrow \infty$, berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n S_0 \rightarrow 0$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \delta^k I_0 \rightarrow 0$. Hal ini dapat ditunjukkan dengan cara sebagai berikut.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon^n S_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + d\varphi_1} \right)^n S_0 = 0$$

dan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} I_0 \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \delta^k &= I_0 [\epsilon^{n-1} \delta^0 + \epsilon^{n-2} \delta^1 + \epsilon^{n-3} \delta^2 + \dots \\
&\quad + \epsilon^0 \delta^{n-1}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= I_0 \left[\left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^0 \right. \\
&+ \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^1 \\
&+ \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^{n-3} \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^2 + \dots \\
&\left. + \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^0 \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^{n-1} \right] \\
&= I_0 \left[\left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^{n-1} \right. \\
&+ \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^{n-2} \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^1 \\
&+ \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right)^{n-3} \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^2 + \dots \\
&\left. + \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right)^{n-1} \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa S_n konvergen ke S_0^+ .
Sebelumnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
S_n = \epsilon^n S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} &\left[\epsilon(1-p)\varphi_1 A \right. \\
&\left. + \left\{ \epsilon\gamma\varphi_1 I_0 \delta^k + pA\delta\epsilon\gamma\varphi_1\varphi_2 \frac{1-\delta^k}{1-\delta} \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon^n S_0 + \epsilon(1-p)\varphi_1 A \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \\
&\quad + \epsilon\gamma\varphi_1 I_0 \sum_{k=0}^{n-1} \delta^k (\epsilon^{n-k-1}) \\
&\quad + pA\delta\epsilon\gamma\varphi_1\varphi_2 \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \left(\frac{1-\delta^k}{1-\delta} \right) \\
&= \epsilon(1-p)\varphi_1 A \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \\
&\quad + pA\delta\epsilon\gamma\varphi_1\varphi_2 \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \left(\frac{1-\delta^k}{1-\delta} \right).
\end{aligned}$$

Konvergensi S_n dapat dibuktikan dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \epsilon(1-p)\varphi_1 A \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \\
&\quad + pA\delta\epsilon\gamma\varphi_1\varphi_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \left(\frac{1-\delta^k}{1-\delta} \right) \\
&= \epsilon(1-p)\varphi_1 A \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \\
&\quad + pA\delta\epsilon\gamma\varphi_1\varphi_2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1-\delta^k}{1-\delta} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \\
&= \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right) (1-p)\varphi_1 A \left(\frac{1+d\varphi_1}{d\varphi_1} \right) \\
&\quad + \left[pA \left(\frac{1}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2} \right) \left(\frac{1}{1+d\varphi_1} \right) \right. \\
&\quad \left. \gamma\varphi_1\varphi_2 \left(\frac{1}{1-\delta} \right) \left(\frac{1+d\varphi_1}{d\varphi_1} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{1 + d\varphi_1} \right) (1 - p)\varphi_1 A \left(\frac{1 + d\varphi_1}{d\varphi_1} \right) \\
&+ \left[pA \left(\frac{1}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \right) \left(\frac{1}{1 + d\varphi_1} \right) \right. \\
&\left. \gamma\varphi_1\varphi_2 \left(\frac{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}{(d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \right) \left(\frac{1 + d\varphi_1}{d\varphi_1} \right) \right] \\
&= \frac{(1 - p)A}{d} + \frac{\gamma p A}{d(d + \gamma + \alpha)} \\
&= S_0^*
\end{aligned}$$

Berdasarkan hasil tersebut diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n, I_n) = (S_0^*, I_0^*)$, sehingga dapat disimpulkan untuk $\beta = 0$ dan $p > 0$, titik kesetimbangannya bersifat stabil asimtotik global.

Dengan demikian, persamaan SIS diskrit untuk $\beta = 0$ dan $p > 0$ dikatakan konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya karena memiliki titik kesetimbangan dengan kestabilan yang sama.

3.3. Kondisi $\beta > 0$ dan $p = 0$

Model SIS dengan $\beta > 0$ dan $p = 0$ adalah kondisi saat tidak ada imigran terinfeksi, maka persamaan (3.3) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= \frac{S_n + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I_n}{1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1} \\
I_{n+1} &= \frac{I_n + \beta \varphi_2 S_n I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\
S(0), I(0) &\geq 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3.1. Titik Kesetimbangan

Berdasarkan bentuk eksplisit model diskrit (3.6), diperoleh titik kesetimbangannya, yaitu

$$S^* = \frac{S^* + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I^*}{1 + \beta \varphi_1 I^* + d \varphi_1}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow S^*(1 + \beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1) &= S^* + \varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^* \\ \Leftrightarrow S^*[(1 + \beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1) - 1] &= \varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^* \\ \Leftrightarrow S^* &= \frac{\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^*}{\beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1} \\ \Leftrightarrow S^* &= \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} I^* &= \frac{I^* + \beta\varphi_2 S^* I^*}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\ \Leftrightarrow I^*[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2] &= I^* + \beta\varphi_2 S^* I^* \\ \Leftrightarrow I^*\{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2] - 1\} &= \beta\varphi_2 S^* I^* \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\beta\varphi_2 S^* I^*}{(d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \\ \Leftrightarrow I^* &= \frac{\beta S^* I^*}{d + \gamma + \alpha} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan $S^* = \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d}$ diperoleh

$$\begin{aligned} (d + \gamma + \alpha)I^* &= \beta I^* \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} \\ \Leftrightarrow I^* \left[(d + \gamma + \alpha) - \beta \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} \right] &= 0 \end{aligned}$$

dan dihasilkan solusi $I^* = 0$ atau $(d + \gamma + \alpha) - \beta \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} = 0$. Untuk $I^* = 0$, maka

$$S^* = \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} = \frac{A + \gamma(0)}{\beta(0) + d} = \frac{A}{d}$$

dan untuk $(d + \gamma + \alpha) - \beta \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} = 0$, maka

$$(d + \gamma + \alpha) = \beta \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (d + \gamma + \alpha)(\beta I^* + d) = \beta(A + \gamma I^*) \\
&\Leftrightarrow \beta I^*(d + \gamma + \alpha) - \beta \gamma I^* + d(d + \gamma + \alpha) - \beta A = 0 \\
&\Leftrightarrow I^*(\beta d + \beta \gamma + \beta \alpha - \beta \gamma) + d(d + \gamma + \alpha) - \beta A = 0 \\
&\Leftrightarrow I^*(\beta d + \beta \alpha) = \beta A - d(d + \gamma + \alpha) \\
&\Leftrightarrow I^* = \frac{\beta A - d(d + \gamma + \alpha)}{(d + \alpha)\beta},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
S^* &= \frac{A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} \\
&= \frac{A + \gamma \left[\frac{\beta A - d(d + \gamma + \alpha)}{(d + \alpha)\beta} \right]}{\beta \left[\frac{\beta A - d(d + \gamma + \alpha)}{(d + \alpha)\beta} \right] + d} \\
&= \frac{A(d + \alpha)\beta + \gamma \beta A - \gamma d(d + \gamma + \alpha)}{(d + \alpha)\beta} \\
&= \frac{\beta \beta A - \beta d(d + \gamma + \alpha) + d(d + \alpha)\beta}{(d + \alpha)\beta} \\
&= \frac{A\beta(d + \alpha) - \gamma d(d + \gamma + \alpha)}{\beta[\beta A - d(d + \gamma + \alpha - d - \alpha)]} \\
&= \frac{(A\beta - \gamma d)(d + \gamma + \alpha)}{\beta[\beta A - d\gamma]} \\
&= \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}.
\end{aligned}$$

Berdasarkan proses perhitungan di atas, diperoleh dua titik kesetimbangan untuk $\beta > 0$ dan $p = 0$, yaitu $(A/d, 0)$ dan $(S_2^*, I_2^*) = ((d + \gamma + \alpha)/\beta, [\beta A - d(d + \gamma + \alpha)]/(d + \alpha)\beta)$.

Titik $(A/d, 0)$ merupakan kondisi di mana tidak ada individu terinfeksi dalam populasi. Keadaan seperti ini disebut keadaan bebas penyakit dan titik kesetimbangannya disebut titik kesetimbangan bebas penyakit. Sedangkan titik (S_2^*, I_2^*) adalah kondisi di mana jumlah individu terinfeksi bernilai positif, yaitu terdapat individu terinfeksi dalam populasi, sehingga titik kesetimbangannya disebut titik kesetimbangan endemik.

Dengan demikian, persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p = 0$ menghasilkan titik kesetimbangan yang sama dengan persamaan diferensialnya.

Lemma 3.2

Jika $a = \max\left\{\frac{\gamma}{\beta}, \frac{A}{d}\right\}$, maka $\frac{\varphi_1 A + \gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} \leq a$ untuk setiap $x \geq 0$.

Bukti:

Dengan nilai $a = \max\left\{\frac{\gamma}{\beta}, \frac{A}{d}\right\}$, akan dibuktikan bahwa $\frac{\varphi_1 A + \gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} \leq a$ untuk setiap $x \geq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1 A + \gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} &= \frac{\varphi_1 A}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} + \frac{\gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} \\ &= \frac{\varphi_1 A}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} \left(\frac{1/d}{1/d}\right) + \frac{\gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} \left(\frac{1/\beta}{1/\beta}\right) \\ &= \frac{\varphi_1 \frac{A}{d}}{\frac{1}{d}(1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1)} + \frac{\frac{\gamma}{\beta} \varphi_1 x}{\frac{1}{\beta}(1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1)} \\ &= \frac{A}{d} \left(\frac{\varphi_1 A}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1}\right) + \frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{\gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1}\right) \\ &\leq a \left(\frac{\varphi_1 A}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1}\right) + a \left(\frac{\gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1}\right) \\ &\leq a \left(\frac{\varphi_1 A + \gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1}\right) \\ &\leq a. \end{aligned}$$

Hasil akhir menunjukkan bahwa untuk $a = \max\left\{\frac{\gamma}{\beta}, \frac{A}{d}\right\}$, maka terbukti $\frac{\varphi_1 A + \gamma \varphi_1 x}{1 + \beta \varphi_1 x + d \varphi_1} \leq a$.

3.3.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p = 0$ memiliki titik kesetimbangan yang stabil asimtotik global di titik $(A/d, 0)$ saat $\sigma < 0$. Sedangkan saat $\sigma > 0$, titik kesetimbangan (S_E^*, I_E^*) bersifat stabil asimtotik lokal dan $(A/d, 0)$ bersifat tak stabil, di mana $\sigma = \beta A - d(d + \gamma + a)$.

Teorema 3.3.

Jika $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma < 0$, maka setiap solusi persamaan (3.6) konvergen menuju $(A/d, 0)$ yang bersifat stabil asimtotik global.

Bukti:

Karena $\sigma < 0$, maka nilai $I_n^* < 0$, sehingga titik (S_n^*, I_n^*) tidak memenuhi syarat sebagai suatu populasi di mana $I(t) \geq 0$. Maka titik $(A/d, 0)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan untuk solusi persamaan (3.6). Untuk membuktikan bahwa $(A/d, 0)$ merupakan titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik global, perlu dilakukan pembuktian melalui pemisalan sederhana.

Jika $I_0 = 0$, maka $I_n = 0$ untuk $n \geq 0$. Akibatnya $S_n = A/d$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A/d$. Kemudian diasumsikan jika nilai $I_0 > 0$, maka $I_n > 0$ untuk $n \geq 0$. Jika terdapat $k = 0, 1, \dots$ di mana

$$S_k \leq \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}$$
$$\Leftrightarrow S_k \leq S_n,$$

dan pertaksamaan tersebut menghasilkan penyelesaian khusus sebagai berikut

$$\begin{aligned} S_{k+1} &\leq S_{n+1} \\ &= \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I_n \\ &\leq \frac{1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1}{1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1} \\ &\leq \frac{(d + \gamma + \alpha) + \beta \varphi_1 A + \beta \gamma \varphi_1 I_n}{\beta(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)} \\ &< \frac{(d + \gamma + \alpha) + \varphi_1 d(d + \gamma + \alpha) + \beta(d + \gamma + \alpha) \varphi_1 I_n}{\beta(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)} \\ &< \frac{(d + \gamma + \alpha)(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)}{\beta(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)} \\ &< \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Jika terdapat $n > k$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 S_n &< \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} \\
 \Leftrightarrow \beta S_n &< d + \gamma + \alpha \\
 \Leftrightarrow \beta \varphi_2 S_n &< (d + \gamma + \alpha) \varphi_2 \\
 \Leftrightarrow 1 + \beta \varphi_2 S_n &< 1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2 \\
 \Leftrightarrow (1 + \beta \varphi_2 S_n) I_n &< [1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2] I_n \\
 \Leftrightarrow \frac{(1 + \beta \varphi_2 S_n) I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} &< I_n \\
 \Leftrightarrow I_{n+1} &< I_n.
 \end{aligned}$$

dan mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \bar{I} \geq 0$. Saat $\bar{I} = 0$, maka dihasilkan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A/d$. Hal ini membuktikan bahwa jika diambil sebarang $S_n \geq 0$ dan $I_n = 0$ sebagai titik awal, maka solusi persamaan (3.6) selalu konvergen menuju titik kesetimbangan $(A/d, 0)$. Hal ini membuktikan bahwa Teorema 3.3 bernilai benar.

Selanjutnya adalah jika $\bar{I} > 0$, maka

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \beta \varphi_2 S_n) I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \beta \varphi_2 S_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \frac{1 + \varphi_2 S_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2}
 \end{aligned}$$

Agar persamaan di atas terpenuhi, maka nilai S_n haruslah sama dengan $(d + \gamma + \alpha)/\beta$. Berdasarkan nilai S_n yang diperoleh, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (d + \gamma + \alpha)/\beta$, sehingga disimpulkan bahwa jika diambil sebarang nilai $S_n \geq 0$ dan $I_n \geq 0$ sebagai titik awal, maka solusi persamaan (3.6) akan konvergen menuju titik (S_n^*, I_n^*) . Pada

kenyataannya $(A/d, 0)$ adalah satu-satunya titik tetap pada H sebagaimana telah dijelaskan pada teorema 3.3, maka kondisi $\bar{I} > 0$ menghasilkan kontradiksi.

Selanjutnya, dimisalkan terdapat $S_n > (d + \gamma + \alpha)/\beta$ untuk $n = 0, 1, \dots$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} S_n &> \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} \\ \Leftrightarrow \beta S_n &> d + \gamma + \alpha \\ \Leftrightarrow \beta \varphi_2 S_n &> (d + \gamma + \alpha) \varphi_2 \\ \Leftrightarrow 1 + \beta \varphi_2 S_n &> 1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2 \\ \Leftrightarrow (1 + \beta \varphi_2 S_n) I_n &> [1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2] I_n \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \beta \varphi_2 S_n) I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} &> I_n \\ \Leftrightarrow I_{n+1} &> I_n. \end{aligned}$$

dan mengakibatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \bar{I} > 0$.

Dengan menggunakan Lemma 3.2., yaitu $S_{n+1} \leq \frac{S_n}{1 + d\varphi_1} + a$ untuk $n \geq 0$ dengan $a = \max\left\{\frac{\gamma}{\beta}, \frac{A}{d}\right\}$, maka

$$\begin{aligned} S_n &\leq \frac{S_n}{1 + d\varphi_1} + a \\ \Leftrightarrow S_n(1 + d\varphi_1) &\leq S_n + a(1 + d\varphi_1) \\ \Leftrightarrow S_n &\leq \frac{a(1 + d\varphi_1)}{d\varphi_1} \end{aligned}$$

dan diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup S_n \leq \frac{a(1 + d\varphi_1)}{d\varphi_1}$. Untuk $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \infty$, dari persamaan (3.6) pertama diperoleh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I_n}{1 + \beta \varphi_1 I_n + d\varphi_1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S_n}{I_n} + \frac{\varphi_1 A}{I_n} + \frac{\gamma \varphi_1 I_n}{I_n}}{\frac{1}{I_n} + \frac{\beta \varphi_1 I_n}{I_n} + \frac{d \varphi_1}{I_n}} \\
 &= \frac{\gamma \varphi_1}{\beta \varphi_1} \\
 &= \frac{\gamma}{\beta}
 \end{aligned}$$

Dengan sifat konvergensi, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\gamma}{\beta}$. Sedangkan pada pemisalan awal mengatakan bahwa $S_n > (d + \gamma + \alpha)/\beta > \gamma/\beta$. Hal ini menyebabkan pernyataan bernilai kontradiksi.

Selanjutnya untuk $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \hat{I}$ di mana \hat{I} adalah bilangan real positif, maka dihasilkan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (d + \gamma + \alpha)/\beta$. Dengan ketentuan awal $\sigma < 0$, maka

$$\begin{aligned}
 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n+1}}{S_n} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} S_n} \\
 \Leftrightarrow 1 &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1}}{\frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}} \\
 \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} \\
 \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 \hat{I}}{1 + \beta \varphi_1 \hat{I} + d \varphi_1} \\
 \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 \hat{I}}{1 + \beta \varphi_1 \hat{I} + d \varphi_1} \\
 \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d + \gamma + \alpha) + \beta \varphi_1 A + \beta \gamma \varphi_1 \hat{I}}{\beta(1 + \beta \varphi_1 \hat{I} + d \varphi_1)} \\
 \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d + \gamma + \alpha) + \varphi_1 d(d + \gamma + \alpha) + \beta(d + \gamma + \alpha) \varphi_2 I_n}{\beta(1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d + \gamma + \alpha)(1 + d\varphi_1 + \beta\varphi_1 I_n)}{\beta(1 + \beta\varphi_1 I_n + d\varphi_1)} \\ \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} \\ \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &< \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}, \end{aligned}$$

dan dihasilkan kontradiksi karena pernyataan akhir bernilai salah, sehingga harus terdapat $S_{k_0} \leq (d + \gamma + \alpha)/\beta$ di mana $k_0 \geq 0$ (sebagaimana telah dimisalkan pada awal pembuktian) sehingga terbukti $(A/d, 0)$ bersifat stabil asimtotik global.

Dengan demikian dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit dengan $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma < 0$ memiliki kestabilan titik kesetimbangan yang sama dengan sistem persamaan diferensialnya.

Dapat disimpulkan bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma < 0$ konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya karena memiliki titik kesetimbangan dengan kestabilan yang sama dengan persamaan diferensialnya.

Teorema 3.4.

Jika $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma > 0$, maka $(A/d, 0)$ bersifat tak stabil dan titik kesetimbangan (S_s^*, I_s^*) bersifat stabil asimtotik lokal. Selain itu,

$$\frac{\gamma}{\beta} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \frac{A}{d}$$

untuk setiap solusi (S_n, I_n) pada persamaan (3.6) dengan $S_0, I_0 > 0$.

Bukti:

Karena $\sigma > 0$, maka nilai $I_s^* > 0$, sehingga titik (S_s^*, I_s^*) bersifat stabil asimtotik lokal. Pernyataan ini dapat dibuktikan melalui linierisasi persamaan (3.6) melalui matriks Jacobi sebagai berikut

$$J(1,1) = \frac{\partial S_{n+1}}{\partial S_n} = \frac{1}{1 + \beta\varphi_1 I_n + d\varphi_1}$$

$$J(1,2) = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial S_n} = \frac{\beta \varphi_2 I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2}$$

$$\begin{aligned} J(2,1) &= \frac{\partial S_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{(\gamma \varphi_2)(1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2)^2} \\ &\quad - \frac{(S_n + \varphi_2 A + \gamma \varphi_2 I_n)(\beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2)^2} \\ &= \frac{\varphi_2(\gamma + d \gamma \varphi_2 - S_n \beta - A \beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J(2,2) &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{(1 + \beta \varphi_2 S_n)[1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2]}{(1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2)^2} \\ &\quad - \frac{(0)(I_n + \beta \varphi_2 S_n I_n)}{(1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2)^2} \\ &= \frac{1 + \beta \varphi_2 S_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks Jacobi-nya adalah

$$J = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1} & \frac{\varphi_1(\gamma + d \gamma \varphi_1 - S_n \beta - A \beta \varphi_1)}{(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)^2} \\ \frac{\beta \varphi_2 I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} & \frac{1 + \beta \varphi_2 S_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan (S_n^*, I_n^*) ke dalam matriks di atas, maka diperoleh

$$J(S_n^*, I_n^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \beta \varphi_1 I_n^* + d \varphi_1} & \frac{\varphi_1(\gamma + d \gamma \varphi_1 - S_n^* \beta - A \beta \varphi_1)}{(1 + \beta \varphi_1 I_n^* + d \varphi_1)^2} \\ \frac{\beta \varphi_2 I_n^*}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} & 1 \end{pmatrix}$$

Matriks di atas menghasilkan determinan dan *trace* sebagai berikut

$$\det J = \frac{1}{1 + \beta \varphi_1 I_n^* + d \varphi_1} - \frac{(\beta \varphi_2 \varphi_2 I_n^*)(\gamma + d \gamma \varphi_1 - S_n^* \beta - A \beta \varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2](1 + \beta \varphi_1 I_n^* + d \varphi_1)^2} > 0$$

dan

$$\text{tr}J = 1 + \frac{1}{1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1} > 0.$$

Titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik jika nilai eigen λ dari matriks J memenuhi $|\lambda| < 1$ jika dan hanya jika $\det J < 1$ dan $\text{tr}J < 1 + \det J$.

$\text{tr}J < 1 + \det J$ dapat dibuktikan bernilai benar dengan langkah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \text{tr}J < 1 + \det J \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1} &< 1 + \frac{1}{1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1} \\ &\frac{(\beta\varphi_1\varphi_2 I_0^*)(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2](1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1)^2} \\ \Leftrightarrow 0 < -\frac{(\beta\varphi_1\varphi_2 I_0^*)(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2](1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1)^2} \end{aligned}$$

Dengan ketentuan

$$\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1 < 0, \quad (3.8)$$

maka $\text{tr}J < 1 + \det J$ terbukti benar. Berikutnya adalah membuktikan bahwa $\det J < 1$, yaitu

$$\begin{aligned} \det J < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1} - \frac{(\beta\varphi_1\varphi_2 I_0^*)(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2](1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1)^2} &< 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{(\beta\varphi_1\varphi_2 I_0^*)(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2](1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1)^2} &< 1 - \frac{1}{1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1} \\ \Leftrightarrow -\frac{(\beta\varphi_1\varphi_2 I_0^*)(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2](1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1)^2} &< \frac{\beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1}{1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1} \\ \Leftrightarrow -\frac{(\beta\varphi_1\varphi_2 I_0^*)(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2](1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1)} &< \varphi_1(\beta I_0^* + d) \\ \Leftrightarrow -\frac{\beta\varphi_1 I_0^*(\gamma + d\gamma\varphi_1 - S_0^*\beta - A\beta\varphi_1)}{[1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2][1 + \beta\varphi_1 I_0^* + d\varphi_1]} &< \beta I_0^* + d \end{aligned}$$

dengan

$$I_0^* = \frac{\beta A - d(d + \gamma + \alpha)}{(\alpha + d)\beta}$$

$$\Leftrightarrow A\beta = d^2 + d\gamma + d\alpha + (\alpha + d)\beta I_0^*$$

maka pertaksamaan dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
 & -\beta\varphi_2 I_0^* \gamma - \beta\varphi_2 I_0^* d\gamma\varphi_1 + \beta\varphi_2(d + \gamma + \alpha)I_0^* \\
 & \quad + \beta^2\varphi_2 I_0^{*2}(d + \gamma) + \beta\varphi_1\varphi_2(d + \gamma + \alpha)I_0^* \\
 & < \beta I_0^* + d + \beta I_0^*\varphi_2(d + \gamma + \alpha) + (\beta I_0^*)^2\varphi_1 \\
 & \quad + (\beta I_0^*)^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2 + \beta I_0^* d\varphi_1 \\
 & \quad + \beta I_0^*(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2 d + d(d + \gamma + \alpha)\varphi_2 \\
 & \quad + d\beta I_0^*\varphi_1 + \beta\varphi_1\varphi_2(d + \gamma + \alpha)I_0^* + d^2\varphi_1 \\
 & \quad + (d + \gamma + \alpha)d^2\varphi_1\varphi_2 \\
 \Leftrightarrow & -\beta\varphi_2 I_0^* \gamma < \beta I_0^* + d + (\beta I_0^*)^2\varphi_1 + (\beta I_0^*)^2\gamma\varphi_1\varphi_2 \\
 & \quad + \beta I_0^* d\varphi_1 + \beta I_0^*(d + 2\gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2 d + \\
 & \quad d(d + \gamma + \alpha)\varphi_2 + d\beta I_0^*\varphi_1 + d^2\varphi_1 + \\
 & \quad (d + \gamma + \alpha)d^2\varphi_1\varphi_2
 \end{aligned}$$

Pertaksamaan akhir bernilai benar dan memenuhi ketentuan $\det J < 1$ karena suku di sisi kiri bernilai negatif dan suku di sisi kanan bernilai positif. Maka dari itu terbukti bahwa titik kesetimbangan (S_0^*, I_0^*) bersifat stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya dibuktikan bahwa $(A/d, 0)$ tidak stabil. Dengan mensubstitusi titik kesetimbangan $(A/d, 0)$ ke dalam matriks Jacobi persamaan (3.6), maka diperoleh

$$J_0\left(\frac{A}{d}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 & \varphi_1\left(\gamma + \varphi_1 d\gamma - \frac{A}{d}\beta - A\beta\varphi_1\right) \\ \frac{1}{1 + d\varphi_1} & \frac{(1 + d\varphi_1)^2}{1 + \varphi_2\beta\frac{A}{d}} \\ 0 & \frac{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \end{pmatrix}$$

Untuk setiap matriks Jacobi, jenis titik kesetimbangannya dapat diketahui melalui nilai eigennya. Karena matriks Jacobi

$J_0 \left(\frac{A}{d}, 0 \right)$ merupakan matriks segitiga atas, maka nilai eigennya adalah entri-entri pada diagonal matriks tersebut, yaitu

$$\lambda_1 = \frac{1}{1+d\varphi_1} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{1+\beta\frac{A}{d}\varphi_2}{1+(d+\gamma+\alpha)\varphi_2}$$

Terbukti bahwa $|\lambda_1| < 1$. Sedangkan untuk $|\lambda_2|$, dengan $\sigma > 0$, maka

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1 + \beta \frac{A}{d} \varphi_2}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\ &> \frac{1 + \frac{d(d + \gamma + \alpha)}{d} \varphi_2}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\ &> \frac{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\ &> 1. \end{aligned}$$

Hal ini membuktikan bahwa titik kesetimbangan $(A/d, 0)$ bersifat tak stabil.

Dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma > 0$ memiliki kestabilan titik kesetimbangan yang sama dengan sistem persamaan diferensialnya.

Hal ini membuktikan bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma > 0$ bersifat konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya karena memiliki titik kesetimbangan dengan kestabilan yang sama dengan persamaan diferensialnya

Selanjutnya adalah membuktikan sisa dari pernyataan, yaitu $\gamma/\beta \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf S_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup S_n \leq A/d$. Pernyataan tersebut dapat dibuktikan melalui $\gamma/\beta < (d + \gamma + \alpha)/\beta < A/d$ dengan menggunakan kontradiksinya, yaitu saat $S_n < \gamma/\beta$ dan $S_n > A/d$.

Jika terdapat $S_n < \gamma/\beta$ untuk $n = 0, 1, \dots$, maka $I_{n+1} < I_n$ untuk $n \geq 0$, sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \bar{I} \geq 0$ ada. Untuk $\bar{I} = 0$, maka diperoleh $S_n = A/d$ sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf S_n \geq A/d$ dan dihasilkan

kontradiksi. Untuk $\hat{I} > 0$, maka diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (d + \gamma + \alpha) / \beta$ dan dihasilkan kontradiksi. Karena $S_n = (d + \gamma + \alpha) / \beta > \gamma / \beta$, sedangkan pemisalan awal $S_n < \gamma / \beta$ untuk $n \geq 0$.

Hal ini mengakibatkan bahwa harus terdapat $S_{n^*} \geq \gamma / \beta$ untuk beberapa $n^* \geq 0$, yaitu

$$\begin{aligned}
 S_{n^*+1} &= \frac{S_{n^*} + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I_{n^*}}{1 + \beta \varphi_1 I_{n^*} + d \varphi_1} \\
 &\geq \frac{\frac{\gamma}{\beta} + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I_{n^*}}{1 + \beta \varphi_1 I_{n^*} + d \varphi_1} \\
 &\geq \frac{\gamma + \beta \varphi_1 A + \beta \gamma \varphi_1 I_{n^*}}{\beta(1 + \beta \varphi_1 I_{n^*} + d \varphi_1)} \\
 &\geq \frac{\gamma + \varphi_1 \gamma d + \beta \gamma \varphi_1 I_{n^*}}{\beta(1 + \beta \varphi_1 I_{n^*} + d \varphi_1)} \\
 &\geq \frac{\gamma(1 + \beta \varphi_1 I_{n^*} + d \varphi_1)}{\beta(1 + \beta \varphi_1 I_{n^*} + d \varphi_1)} \\
 &\geq \frac{\gamma}{\beta}
 \end{aligned}$$

sehingga diperoleh nilai $S_n \geq \gamma / \beta$ untuk semua n besar dan menghasilkan $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf S_n \geq \gamma / \beta$ sehingga terbukti bahwa $\gamma / \beta < (d + \gamma + \alpha) / \beta$ bernilai benar.

Sebagaimana telah dibuktikan sebelumnya, untuk $S_n > \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta}$, maka diperoleh $I_{n+1} > I_n$. Untuk $\beta > 0$, $p = 0$, dan $\sigma > 0$, maka nilai S_n yang memenuhi adalah $(d + \gamma + \alpha) / \beta$. Jika terdapat $S_n > A/d$ untuk $n = 0, 1, \dots$, maka

$$\begin{aligned}
 S_n &> \frac{A}{d} \\
 \Leftrightarrow \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} &> \frac{A}{d'} \\
 \Leftrightarrow S_n &> \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} > \frac{A}{d}
 \end{aligned}$$

dan berlaku $I_{n+1} > I_n$ untuk $n \geq 0$, sehingga $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \bar{I} > 0$.
 Untuk $\bar{I} = \infty$, diperoleh

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n + \varphi_1 A + \gamma \varphi_1 I_n}{1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{S_n}{I_n} + \frac{\varphi_1 A}{I_n} + \frac{\gamma \varphi_1 I_n}{I_n}}{\frac{1}{I_n} + \frac{\beta \varphi_1 I_n}{I_n} + \frac{d \varphi_1}{I_n}} \\ &= \frac{\gamma \varphi_1}{\beta \varphi_1} \\ &= \frac{\gamma}{\beta}. \end{aligned}$$

Dengan sifat konvergensi, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \gamma/\beta$. Sedangkan pemisalan awal mengatakan bahwa $S_n > A/d$ yang menghasilkan $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n > A/d$. Hal ini menyebabkan kontradiksi. Untuk \bar{I} bilangan real, maka diperoleh $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (d + \gamma + a)/\beta$ di mana $S_n < A/d$. Dari hasil tersebut, pernyataan kembali bernilai kontradiksi karena pada pemisalan awal mengatakan $S_n > A/d$. Hal ini mengakibatkan harus terdapat $S_{k'} \leq A/d$ untuk beberapa $k' \geq 0$, yaitu

$$\begin{aligned} S_{k'+1} &= \frac{S_{k'} + A\varphi_1 + \gamma\varphi_1 I_{k'}}{1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1} \\ &\stackrel{A}{\leq} \frac{\frac{A}{d} + A\varphi_1 + \gamma\varphi_1 I_{k'}}{1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1} \\ &\stackrel{A}{\leq} \frac{A + dA\varphi_1 + \gamma d\varphi_1 I_{k'}}{d(1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1)} \\ &\stackrel{A}{\leq} \frac{A + d\varphi_1 A + d\gamma\varphi_1 I_{k'}}{d(1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1)} \\ &\stackrel{A}{\leq} \frac{A + d\varphi_1 A + \beta A\varphi_1 I_{k'}}{d(1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{A(1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1)}{d(1 + \beta\varphi_1 I_{k'} + d\varphi_1)} \\ &\leq \frac{A}{d} \end{aligned}$$

yang menghasilkan $S_n \leq A/d$ untuk semua n besar. Akibatnya $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup S_n \leq A/d$ di mana $A/d > (d + \gamma + \alpha)/\beta$. Dengan demikian, terbukti bahwa

$$\frac{\gamma}{\beta} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} S_n \leq \frac{A}{d} \Leftrightarrow \frac{\gamma}{\beta} < \frac{d + \gamma + \alpha}{\beta} < \frac{A}{d}.$$

3.4. Kondisi $\beta > 0$ dan $p > 0$

Model SIS dengan $\beta > 0$ dan $p > 0$ menghasilkan persamaan yang sama seperti pada (3.3), yaitu

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{S_n + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I_n}{1 + \beta\varphi_1 I_n + d\varphi_1} \\ I_{n+1} &= \frac{I_n + \varphi_2 p A + \beta\varphi_2 S_n I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2} \end{aligned}$$

3.4.1. Titik Kesetimbangan

Berikut akan ditunjukkan bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p > 0$ mempunyai titik kesetimbangan yang sama dengan persamaan diferensialnya. Berdasarkan bentuk eksplisit model diskrit (3.3), titik kesetimbangannya dapat dicari analog seperti saat $\beta > 0$ dan $p = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{S^* + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^*}{1 + \beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1} \\ \Leftrightarrow S^*(1 + \beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1) &= S^* + (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^* \\ \Leftrightarrow S^*[(1 + \beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1) - 1] &= (1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^* \\ \Leftrightarrow S^* &= \frac{(1-p)\varphi_1 A + \gamma\varphi_1 I^*}{\beta\varphi_1 I^* + d\varphi_1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow S^* = \frac{(1-p)A + \gamma I^*}{\beta I^* + d}$$

dan

$$I^* = \frac{I^* + p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S^* I^*}{1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2}$$

$$\Leftrightarrow I^* [1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2] = I^* + p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S^* I^*$$

$$\Leftrightarrow I^* \{ [1 + (d + \gamma + \alpha)\varphi_2] - 1 \} = p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S^* I^*$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{p\varphi_2 A + \beta\varphi_2 S^* I^*}{(d + \gamma + \alpha)\varphi_2}$$

$$\Leftrightarrow I^* = \frac{pA + \beta S^* I^*}{d + \gamma + \alpha}$$

Substitusikan $S^* = ((1-p)A + \gamma I^*) / (\beta I^* + d)$ ke I^* untuk memperoleh

$$I^*(d + \gamma + \alpha) = pA + \beta \left(\frac{(1-p)A + \gamma I^*}{\beta I^* + d} \right) I^*$$

$$\Leftrightarrow I^*(d + \gamma + \alpha) = \frac{pA(\beta I^* + d) + \beta I^* [(1-p)A + \gamma I^*]}{\beta I^* + d}$$

$$\Leftrightarrow I^{*2} d\beta + I^{*2} \gamma\beta + I^{*2} \alpha\beta + dI^*(d + \gamma + \alpha)$$

$$= pA\beta I^* + dpA + \beta I^* A - pA\beta I^* + I^{*2} \gamma\beta$$

$$\Leftrightarrow I^{*2} d\beta + I^{*2} \alpha\beta + dI^*(d + \gamma + \alpha) - dpA + \beta I^* A = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta(d + \alpha)I^{*2} - [\beta A - d(d + \gamma + \alpha)]I^* - dpA = 0.$$

Dengan mensubstitusikan $\sigma = \beta A - d(d + \gamma + \alpha)$, persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\beta(d + \alpha)I^{*2} - \sigma I^* - dpA = 0,$$

sehingga akar-akarnya dapat dicari dengan menggunakan pemisalan $aI^2 + bI + c = 0$ di mana $a = \beta(d + \alpha)$, $b = -\sigma$, dan $c = -dpA$, yaitu

$$\bar{I}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{-(-\sigma) \pm \sqrt{(-\sigma)^2 - 4(\beta(d + \alpha))(-dpA)}}{2(\beta(d + \alpha))} \\
 &= \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\beta dpA(d + \alpha)}}{2(\beta(d + \alpha))}.
 \end{aligned}$$

Diperoleh satu akar bernilai negatif, dan akar lainnya adalah

$$\bar{I}^* = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\beta dpA(d + \alpha)}}{2\beta(d + \alpha)}.$$

Dari titik tersebut dapat diketahui bahwa titik kesetimbangannya adalah tunggal, yaitu

$$(\bar{S}^*, \bar{I}^*) = \left(\frac{(1-p)A + \gamma \bar{I}^*}{\beta \bar{I}^* + d}, \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\beta dpA(d + \alpha)}}{2\beta(d + \alpha)} \right)$$

Dengan demikian, persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p > 0$ mempunyai titik kesetimbangan yang sama dengan persamaan diferensialnya.

3.4.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan ditunjukkan bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p > 0$ memiliki titik kesetimbangan yang bersifat stabil asimtotik lokal. Hal ini dapat dibuktikan dengan melinierisasi persamaan (3.3) melalui matriks Jacobi sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 J(1,1) &= \frac{\partial S_{n+1}}{\partial S_n} = \frac{1}{1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1} \\
 J(1,2) &= \frac{\partial I_{n+1}}{\partial S_n} = \frac{\beta \varphi_2 I_n}{1 + (d + \gamma + \alpha) \varphi_2} \\
 J(2,1) &= \frac{\partial S_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{u'v - v'u}{v^2} \\
 &= \frac{(\gamma \varphi_2)(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)}{(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)^2} - \frac{(S_n + (1-p)\varphi_2 A + \gamma \varphi_2 I_n)(\beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)^2} \\
 &= \frac{\varphi_2(\gamma + d\gamma \varphi_2 - \beta S_n - (1-p)A\beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_1 I_n + d \varphi_1)^2}
 \end{aligned}$$

$$J(2,2) = \frac{\partial I_{n+2}}{\partial I_n} = \frac{1 + \beta \varphi_2 S_n}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2}$$

dan diperoleh matriksnya sebagai berikut

$$J(S_n, I_n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2} & \frac{\varphi_2 (\gamma + d \gamma \varphi_2 - \beta S_n - (1-p) A \beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_2 I_n + d \varphi_2)^2} \\ \frac{\beta \varphi_2 I_n}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2} & \frac{1 + \beta \varphi_2 S_n}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2} \end{pmatrix}$$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan (\bar{S}^*, \bar{I}^*) ke dalam matriks Jacobi di atas, maka

$$J(\bar{S}^*, \bar{I}^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2} & \frac{\varphi_2 (\gamma + d \gamma \varphi_2 - \beta \bar{S}^* - (1-p) A \beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2)^2} \\ \frac{\beta \varphi_2 \bar{I}^*}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2} & \frac{1 + \beta \varphi_2 \bar{S}^*}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks tersebut, diperoleh

$$\det J = \left(\frac{1}{1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2} \right) \left(\frac{1 + \beta \varphi_2 \bar{S}^*}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2} \right) - \left(\frac{\varphi_2 (\gamma + d \gamma \varphi_2 - \beta \bar{S}^* - (1-p) A \beta \varphi_2)}{(1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2)^2} \right) \left(\frac{\beta \varphi_2 \bar{I}^*}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2} \right)$$

dan

$$\text{tr} J = \frac{1}{1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2} + \frac{1 + \beta \varphi_2 \bar{S}^*}{1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2}$$

Titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik jika $|\lambda| < 1$, yaitu jika dan hanya jika $\det J < 1$ dan $\text{tr} J < 1 + \det J < 2$.

$$\det J < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \beta \varphi_2 \bar{S}^*}{(1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2) [1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2]} - \frac{\beta \varphi_2 \varphi_2 \bar{I}^* [\gamma + d \gamma \varphi_2 - \beta \bar{S}^* - (1-p) A \beta \varphi_2]}{[1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2] (1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2)^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 + \beta \varphi_2 \bar{S}^*) (1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2)}{[1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2] (1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2) (1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2)} - \frac{(\beta \varphi_2 \varphi_2 \bar{I}^*) [\gamma + d \gamma \varphi_2 - \beta \bar{S}^* - (1-p) A \beta \varphi_2]}{[1 + (\alpha + \gamma + \alpha) \varphi_2] (1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2) (1 + \beta \varphi_2 \bar{I}^* + d \varphi_2)} < 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 1 + \beta\varphi_2\bar{S}^* + 2\beta^2\varphi_1\varphi_2\bar{S}^*\bar{I}^* + d\beta\varphi_1\varphi_2\bar{S}^* + \beta\varphi_1\bar{I}^* + d\varphi_1 \\
&\quad - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad + (1-p)A\beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad < 1 + (d+\gamma+\alpha)\varphi_2 + 2\beta\varphi_1\bar{I}^* \\
&\quad + 2\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} + 2d\varphi_1 \\
&\quad + 2d(d+\gamma+\alpha)\varphi_1\varphi_2 \\
&\quad + \beta^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} \\
&\quad + 2d\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
&\quad + d^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\Leftrightarrow \beta\varphi_2\bar{S}^* + 2\beta^2\varphi_1\varphi_2\bar{S}^*\bar{I}^* + d\beta\varphi_1\varphi_2\bar{S}^* - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + (1-p)A\beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad < (d+\gamma+\alpha)\varphi_2 + \beta\varphi_1\bar{I}^* \\
&\quad + 2\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} + d\varphi_1 \\
&\quad + 2d(d+\gamma+\alpha)\varphi_1\varphi_2 \\
&\quad + \beta^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} \\
&\quad + 2d\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
&\quad + d^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2.
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned}
\bar{I}^* &= \frac{pA + \beta\bar{S}^*\bar{I}^*}{d + \gamma + \alpha} \\
&\Leftrightarrow (d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* = pA + \beta\bar{S}^*\bar{I}^* \\
&\Leftrightarrow \beta\bar{S}^*\bar{I}^* = (d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* - pA < (d + \gamma + \alpha)\bar{I}^*. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan pertaksamaan (3.10) dan mensubstitusikan nilai $(1-p)A = \beta\bar{S}^*\bar{I}^* + d\bar{S}^* - \gamma\bar{I}^*$, maka pertaksamaan (3.9) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
& \frac{\varphi_2[(d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* - pA]}{\bar{I}^*} + 2\beta\varphi_1\varphi_2[(d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* - pA] \\
& + \frac{d\varphi_1\varphi_2[(d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* - pA]}{\bar{I}^*} - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* \\
& - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + (1-p)A\beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
& \leq (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 + \beta\varphi_1\bar{I}^* \\
& + 2\beta(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} + d\varphi_1 \\
& + 2d(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2 \\
& + \beta^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} \\
& + 2d\beta(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
& + d^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \varphi_2(d + \gamma + \alpha) - \frac{\varphi_2 pA}{\bar{I}^*} + 2\beta\varphi_1\varphi_2(d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* \\
& - 2\beta\varphi_1\varphi_2 pA + d\varphi_1\varphi_2(d + \gamma + \alpha)\bar{I}^* \\
& - \frac{d\varphi_1\varphi_2 pA}{\bar{I}^*} - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
& + (1-p)A\beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
& \leq (d + \gamma + \alpha)\varphi_2 + \beta\varphi_1\bar{I}^* \\
& + 2\beta(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} + d\varphi_1 \\
& + 2d(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2 \\
& + \beta^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} \\
& + 2d\beta(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
& + d^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2 \\
\Rightarrow & - \frac{\varphi_2 pA}{\bar{I}^*} - 2\beta\varphi_1\varphi_2 pA - \frac{d\varphi_1\varphi_2 pA}{\bar{I}^*} - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* \\
& - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + (1-p)A\beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
& \leq \beta\varphi_1\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} + d\varphi_1 \\
& + d(d + \gamma + \alpha)\varphi_1\varphi_2 \\
& + \beta^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} \\
& + 2d\beta(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
& + d^2(d + \gamma + \alpha)\varphi_1^2\varphi_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow -2\beta\varphi_1\varphi_2pA - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad + (1-p)A\beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad < \beta\varphi_1\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} \\
&\quad + \beta^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} + 2d\beta\varphi_1^2\bar{I}^* \\
&\quad + 2d\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
&\quad + d^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\Leftrightarrow -2\beta\varphi_1\varphi_2pA - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\varphi_2\bar{S}^*\bar{I}^{*4} \\
&\quad + d\bar{S}^*\bar{I}^*\beta^2\varphi_1^2\varphi_2 - \gamma\bar{I}^{*2}\beta^2\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad < \beta\varphi_1\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} \\
&\quad + \beta^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} + 2d\beta\varphi_1^2\bar{I}^* \\
&\quad + 2d\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
&\quad + d^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\Leftrightarrow -2\beta\varphi_1\varphi_2pA - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* \\
&\quad + \beta^2\varphi_1^2\varphi_2(d+\gamma+\alpha)\bar{I}^{*2} - \beta^2\varphi_1^2\varphi_2pA \\
&\quad + d\beta\bar{I}^*\varphi_1^2\varphi_2(d+\gamma+\alpha) - d\beta pA\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad - \gamma\bar{I}^{*2}\beta^2\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad < \beta\varphi_1\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} \\
&\quad + \beta^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^{*2} + 2d\beta\varphi_1^2\bar{I}^* \\
&\quad + 2d\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
&\quad + d^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\Leftrightarrow -2\beta\varphi_1\varphi_2pA - \beta\gamma\varphi_1\varphi_2\bar{I}^* - \beta d\gamma\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* - \beta^2\varphi_1^2\varphi_2pA \\
&\quad - d\beta\varphi_1^2\varphi_2pA - \gamma\bar{I}^{*2}\beta^2\varphi_1^2\varphi_2 \\
&\quad < \beta\varphi_1\bar{I}^* + \beta^2\varphi_1^2\bar{I}^{*2} + 2d\beta\varphi_1^2\bar{I}^* \\
&\quad + d\beta(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2\bar{I}^* + d^2\varphi_1^2 \\
&\quad + d^2(d+\gamma+\alpha)\varphi_1^2\varphi_2.
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\det J < 1$ bernilai benar karena keseluruhan suku di sisi kiri pada pertaksamaan bernilai negatif dan suku di sisi kanan bernilai positif. Selanjutnya dibuktikan $\text{tr} J < 1 + \det J$, yaitu

$$|trJ| < 1 + \det J$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \beta^2 \varphi_1 \varphi_2 \bar{S}^* \bar{I}^* + \beta^3 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{S}^* \bar{I}^{*2} + d \beta \varphi_1 \varphi_2 \bar{S}^* \\ & + 2d \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{S}^* \bar{I}^* + \beta d^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{S}^* \\ & \leq \beta(d + \gamma + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\ & + \beta^2(d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^{*2} \\ & + d(d + \gamma + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \\ & + 2d\beta(d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\ & + d^2(d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 - \beta\gamma \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\ & - d\gamma\beta \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* + (1-p)A\beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^*. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dengan mensubstitusikan (3.10) pada pertaksamaan (3.12), maka pertaksamaan tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} & \beta \varphi_1 \varphi_2 [(d + \gamma + \alpha) \bar{I}^* - pA] \\ & + \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* [(d + \gamma + \alpha) \bar{I}^* - pA] \\ & + \frac{d \varphi_1 \varphi_2 [(d + \gamma + \alpha) \bar{I}^* - pA]}{\bar{I}^*} \\ & + 2d\beta \varphi_1^2 \varphi_2 [(d + \gamma + \alpha) \bar{I}^* - pA] \\ & + \frac{d^2 \varphi_1^2 \varphi_2 [(d + \gamma + \alpha) \bar{I}^* - pA]}{\bar{I}^*} \\ & \leq \beta(d + \gamma + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\ & + \beta^2(d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^{*2} \\ & + d(d + \gamma + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \\ & + 2d\beta(d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\ & + d^2(d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 - \beta\gamma \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\ & - d\gamma\beta \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* + (1-p)A\beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \beta \varphi_1 \varphi_2 (d + \gamma + \alpha) \bar{I}^* - \beta \varphi_1 \varphi_2 pA \\
&\quad + \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^{*2} (d + \gamma + \alpha) - \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* pA \\
&\quad + d \varphi_1 \varphi_2 (d + \gamma + \alpha) - \frac{d \varphi_1 \varphi_2 pA}{\bar{I}^*} \\
&\quad + 2d \beta \varphi_1^2 \varphi_2 (d + \gamma + \alpha) - 2d \beta \varphi_1^2 \varphi_2 pA \\
&\quad + d^2 \varphi_1^2 \varphi_2 (d + \gamma + \alpha) - \frac{d^2 \varphi_1^2 \varphi_2 pA}{\bar{I}^*} \\
&\leq \beta (d + \gamma + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\quad + \beta^2 (d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^{*2} \\
&\quad + d (d + \gamma + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \\
&\quad + 2d \beta (d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\quad + d^2 (d + \gamma + \alpha) \varphi_1^2 \varphi_2 - \beta \gamma \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\quad - d \gamma \beta \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* + A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* - p A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\Leftrightarrow -\beta \varphi_1 \varphi_2 pA - \frac{d \varphi_1 \varphi_2 pA}{\bar{I}^*} + 2d \beta \varphi_1^2 \varphi_2 (d + \gamma + \alpha) \\
&\quad - 2d \beta \varphi_1^2 \varphi_2 pA - \frac{d^2 \varphi_1^2 \varphi_2 pA}{\bar{I}^*} \\
&\leq -\beta \gamma \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* - d \gamma \beta \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* + A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\Leftrightarrow \beta d \gamma \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* - 2d \beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 \\
&\leq \beta (d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* + A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^*.
\end{aligned}$$

Karena di sisi kiri masih terdapat suku bernilai positif, maka diperoleh dua kemungkinan. Pertama, titik kesetimbangan (\bar{S}^*, \bar{I}^*) dikatakan stabil asimtotik lokal jika nilai $d\gamma \leq A\beta$. Kedua, (\bar{S}^*, \bar{I}^*) juga bersifat stabil asimtotik lokal saat nilai $d\gamma > A\beta$ dengan syarat $\varphi_1 < (d + \alpha) / (d\gamma - A\beta)$.

Jika $d\gamma \leq A\beta$, maka pertaksamaan bernilai benar, yaitu

$$\begin{aligned}
&\beta d \gamma \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* - 2d \beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 \leq \beta (d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* + A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\Leftrightarrow A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* - 2d \beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 \leq \beta (d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* + A \beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\Leftrightarrow -2d \beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 \leq \beta (d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\
&\Leftrightarrow -2d p A \varphi_1 < (d + \alpha) \bar{I}^*.
\end{aligned}$$

Jika $d\gamma > A\beta$, maka pertaksamaan menjadi benar jika nilai $\varphi_1 < (d + \alpha)/(d\gamma - A\beta)$, yaitu

$$\begin{aligned} \beta d\gamma \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* - 2d\beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 &< \beta(d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* + A\beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\ \Leftrightarrow A\beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* - 2d\beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 &< \beta(d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* + A\beta^2 \varphi_1^2 \varphi_2 \bar{I}^* \\ \Leftrightarrow -2d\beta p A \varphi_1^2 \varphi_2 &< \beta(d + \alpha) \varphi_1 \varphi_2 \bar{I}^* \\ \Leftrightarrow -2d p A \varphi_1 &< (d + \alpha) \bar{I}^* \\ \Leftrightarrow -2d p A \left(\frac{d + \alpha}{d\gamma - A\beta} \right) &< (d + \alpha) \bar{I}^* \\ \Leftrightarrow -2d p A &< (d\gamma - A\beta) \bar{I}^* \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa titik kesetimbangan (\bar{S}^*, \bar{I}^*) bersifat stabil asimtotik lokal saat $d\gamma \leq A\beta$ dan saat $d\gamma > A\beta$ dengan syarat $\varphi_1 < (d + \alpha)/(d\gamma - A\beta)$.

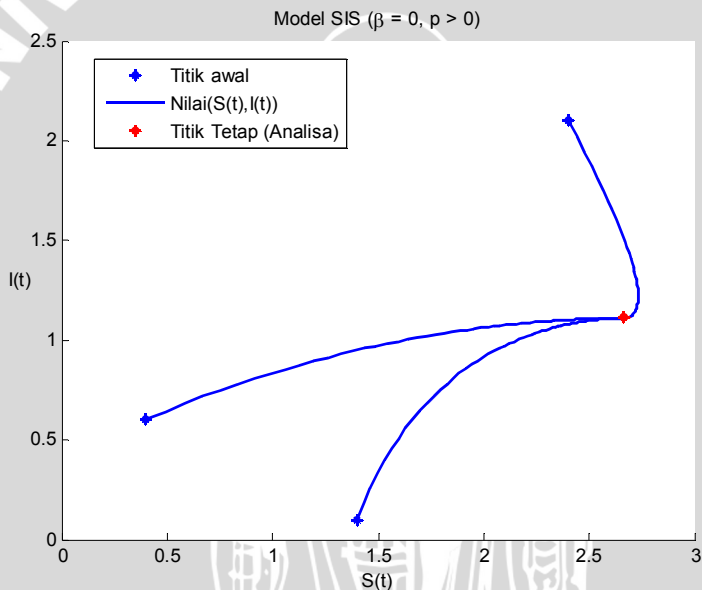
Dapat dilihat bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p > 0$ memiliki kestabilan titik kesetimbangan yang sama dengan sistem persamaan diferensialnya. Hal ini membuktikan bahwa persamaan SIS diskrit untuk $\beta > 0$ dan $p > 0$ konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya karena memiliki titik kesetimbangan dengan kestabilan yang sama dengan persamaan diferensialnya.

3.5. Simulasi Numerik

Pada bagian ini ditunjukkan solusi persamaan SIS diskrit dengan ilustrasi sebagaimana hasil dari pembahasan sebelumnya. Kemudian solusi tersebut dibandingkan dengan persamaan diferensialnya untuk melihat konsistensi dinamikanya.

3.5.1. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $\beta = 0$ dan $p > 0$

Pada Gambar 3.1 ditunjukkan solusi dari persamaan SIS diskrit dengan nilai parameter $A = 2$, $p = 0.5$, $\beta = 0$, $d = 0.5$, $\gamma = 0.3$, $\alpha = 0.1$, $h = 0.1$ dengan (S_0, I_0) adalah syarat awal, yaitu berada di titik $(0.4, 0.6)$, $(1.4, 0.1)$, $(2.4, 2.1)$ untuk $n = 2000$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa seluruh titik sebarang pada persamaan SIS diskrit mempunyai solusi yang konvergen menuju titik kesetimbangan yang sama (di titik $(2.66, 1.11)$).

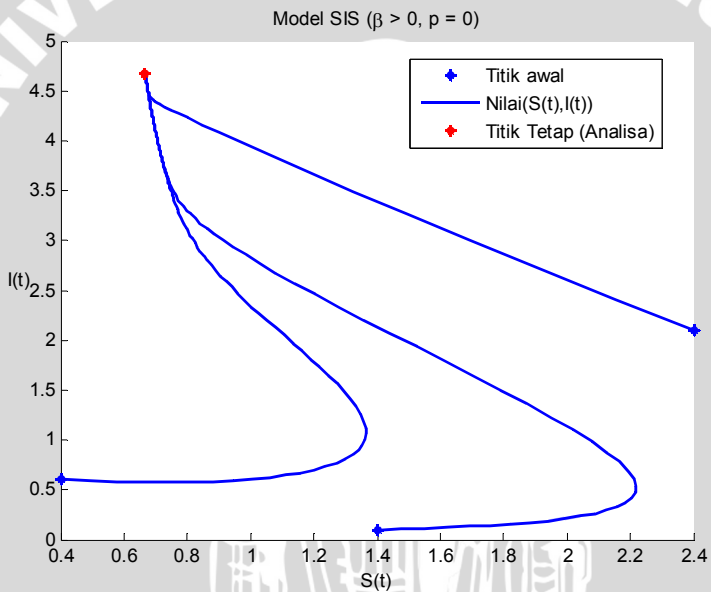


Gambar 3.1. Solusi numerik model SIS saat $\beta = 0$ dan $p > 0$.

3.5.2. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi

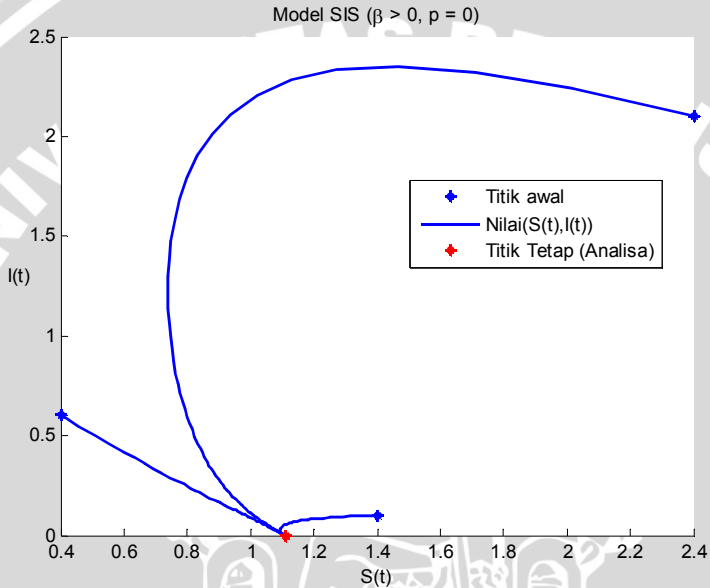
$$\beta > 0 \text{ dan } p = 0$$

Pada Gambar 3.2 ditunjukkan solusi dari persamaan SIS diskrit untuk nilai parameter $A = 1$, $p = 0$, $\beta = 0.9$, $d = 0.1$, $\gamma = 0.4$, $\alpha = 0.1$, $h = 0.1$ dengan (S_0, I_0) adalah syarat awal, yaitu berada di titik $(0.4, 0.6)$, $(1.4, 0.1)$, $(2.4, 2.1)$ untuk $n = 1000$. Berdasarkan hasil tersebut dapat dilihat bahwa seluruh titik awal persamaan SIS diskrit mempunyai solusi titik kesetimbangan yang sama, yaitu menuju ke titik $(0.66, 4.66)$.



Gambar 3.2. Solusi numerik model SIS saat $\beta > 0$ dan $p = 0$ dengan $\sigma > 0$.

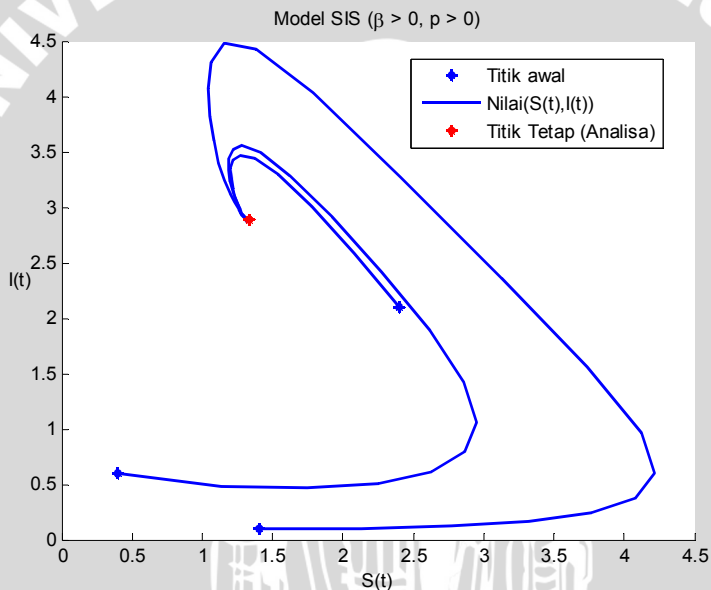
Pada Gambar 3.3 ditunjukkan solusi dari persamaan SIS diskrit untuk nilai parameter $A = 1$, $p = 0$, $\beta = 0.9$, $d = 0.9$, $\gamma = 0.4$, $\alpha = 0.1$, $h = 0.1$ dengan (S_0, I_0) adalah syarat awal, yaitu berada di titik $(0.4, 0.6)$, $(1.4, 0.1)$, $(2.4, 2.1)$ untuk $n = 1000$. Pada gambar dapat dilihat bahwa semua solusi persamaan SIS diskrit konvergen menuju titik kesetimbangan di titik $(1.11, 0)$.



Gambar 3.3. Solusi numerik model SIS saat $\beta > 0$ dan $p = 0$ dengan $\sigma < 0$.

3.5.3. Simulasi Numerik untuk Titik Kesetimbangan Kondisi $\beta > 0$ dan $p > 0$

Pada Gambar 3.4 ditunjukkan solusi dari persamaan SIS diskrit untuk nilai parameter $A = 10$, $p = 0.005$, $\beta = 3$, $d = 1$, $\gamma = 1$, $\alpha = 2$, $h = 0.1$ dengan (S_0, I_0) adalah syarat awal, yaitu berada di titik $(0.4, 0.6)$, $(1.4, 0.1)$, $(2.4, 2.1)$ untuk $n = 2000$. Pada gambar diketahui bahwa ketiga titik awal berbeda memiliki solusi persamaan SIS diskrit yang konvergen menuju titik kesetimbangan yang sama di titik $(1.32, 2.89)$.



Gambar 3.4. Solusi numerik model SIS saat $\beta > 0$ dan $p > 0$.

BAB IV

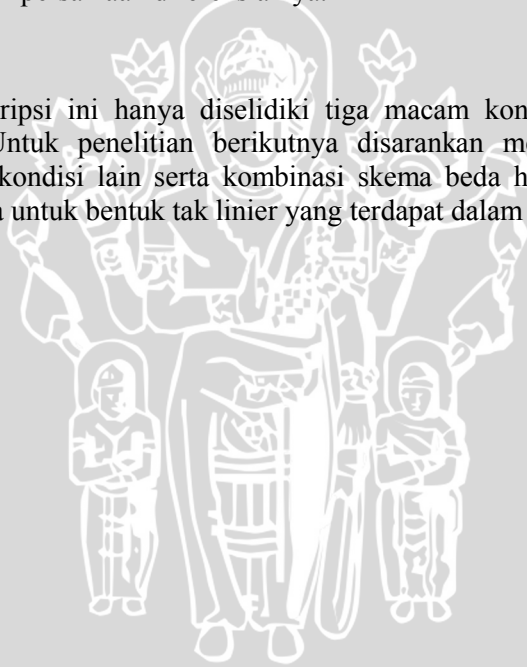
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Pada skripsi ini telah dibahas tentang diskritisasi persamaan diferensial model SIS menggunakan pendekatan metode beda hingga tak standar dengan tiga macam kondisi. Berdasarkan pembahasan yang telah diuraikan, ketiga kondisi tersebut mempunyai titik kesetimbangan dengan kestabilan yang sama dengan persamaan diferensialnya. Dari hasil tersebut disimpulkan bahwa persamaan model SIS diskrit dengan tiga macam kondisi adalah konsisten secara dinamik dengan persamaan diferensialnya.

4.2. Saran

Pada skripsi ini hanya diselidiki tiga macam kondisi pada model SIS. Untuk penelitian berikutnya disarankan menyelidiki kemungkinan kondisi lain serta kombinasi skema beda hingga tak standar lainnya untuk bentuk tak linier yang terdapat dalam model.



DAFTAR PUSTAKA

- Arrowsmith, D.K dan C.M Place. 1990. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. USA.
- Banagaaya, N. 2008. *Nonstandard Finite Difference Method: Definitions and Implementation*, Thesis. African Institute for Mathematical Sciences (AIMS).
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Brauer, F., Van den Driessche, P. 2001. *Models for Transmission of Disease with Immigration of Infectives*. 171, 143-54.
- Cronin, J. 1994. *Differential Equations Introduction and Qualitative Theory*. Second edition, Marcell Dekker, Inc. New York.
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third edition, Springer. New York.
- Erjaee G.H., M. Alnasr, dan S. Momani. 2001. Non-Standard Discretization of Fractional Differential Equations. Qatar University Interior Research Under Grant QUUG-CAS-MATH-08-03.
- Jang, S dan S.N. Elaydi. 2004. *Difference Equations from Discretization of a Continuous Epidemic Model with Immigration of Infectives*. Trinity University. Texas.
- Perko, L. 1996. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Third edition, Springer-Verlag. New York.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. USA: Prentice Hall Education.

Roeger, L-I W. 2008. Dynamically Consistent Discrete Lotka-Volterra Competition Models Derived from Nonstandard Finite-difference Schemes. *Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B*. 9. 415-429.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Bentuk umum persamaan $I_{n+1} = \delta I_n + b$.

Dengan menggunakan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa $I_{n+1} = \delta I_n + b$ mempunyai solusi umum $I_n = \delta^n I_0 + \left(\frac{1-\delta^n}{1-\delta}\right) b$.

1. Akan dibuktikan I_1 benar

$$\begin{aligned} I_1 &= \delta^1 I_0 + \left[\frac{1-\delta^1}{1-\delta} \right] b \\ &= \delta I_0 + b \quad (\text{benar}) \end{aligned}$$

2. Anggap $n = p$ bernilai benar, yaitu

$$I_p = \delta^p I_0 + \left[\frac{1-\delta^p}{1-\delta} \right] b$$

maka pernyataan juga bernilai benar untuk $n = p + 1$

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \delta I_p + b, \quad I(0) = I_0 \\ &= \delta \left\{ \delta^p I_0 + \left[\frac{1-\delta^p}{1-\delta} \right] b \right\} + b \\ &= \delta^{p+1} I_0 + \delta \left[\frac{1-\delta^p}{1-\delta} \right] b + b \\ &= \delta^{p+1} I_0 + \left\{ \delta \left[\frac{1-\delta^p}{1-\delta} \right] + 1 \right\} b \\ &= \delta^{p+1} I_0 + \left[\frac{\delta - \delta^{p+1}}{1-\delta} + \frac{1-\delta}{1-\delta} \right] b \\ &= \delta^{p+1} I_0 + \left[\frac{1-\delta^{p+1}}{1-\delta} \right] b. \end{aligned}$$

Dari langkah-langkah pembuktian tersebut dapat disimpulkan bahwa

$$I_{n+1} = \delta I_n + \delta \Phi_{2pA}$$

mempunyai bentuk umum

$$I_n = \delta^n I_0 + \left(\frac{1-\delta^n}{1-\delta} \right) \delta \Phi_{2pA}.$$

Lampiran 2. Bentuk umum persamaan $S_{n+1} = \epsilon S_n + g_n$.

Dengan menggunakan induksi matematika, akan dibuktikan bahwa $S_{n+1} = \epsilon S_n + g_n$ mempunyai solusi umum $S_n = \epsilon^n S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} g_k$.

1. Akan dibuktikan S_1 benar

$$\begin{aligned} S_1 &= \epsilon^1 S_0 + \sum_{k=0}^{1-1} \epsilon^{1-0-1} g_k \\ &= \epsilon S_0 + \sum_{k=0}^0 \epsilon^0 g_k \\ &= \epsilon S_0 + g_k \quad (\text{benar}) \end{aligned}$$

2. Anggap $n = p$ bernilai benar, yaitu

$$S_p = \epsilon^p S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \epsilon^{p-k-1} g_k$$

maka pernyataan juga bernilai benar untuk $n = p + 1$

$$\begin{aligned} S_{p+1} &= \epsilon S_p + g_p, \quad S(0) = S_0 \\ &= \epsilon \left(\epsilon^p S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \epsilon^{p-k-1} g_k \right) + g_p \\ &= \epsilon^{p+1} S_0 + \sum_{k=0}^{p-1} \epsilon^{(p+1)-k-1} g_k + g_p \\ &= \epsilon^{p+1} S_0 + \sum_{k=0}^p \epsilon^{(p+1)-k-1} g_k. \end{aligned}$$

Dari langkah-langkah pembuktian tersebut, dapat disimpulkan bahwa

$$S_{n+1} = \epsilon S_n + \epsilon(1-p)\phi_1 A + \epsilon \gamma \phi_1 \left[\delta^n I_0 + \left(\frac{1-\delta^n}{1-\delta} \right) \delta \phi_2 p A \right]$$

mempunyai bentuk umum

$$S_n = \epsilon^n S_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \epsilon^{n-k-1} \epsilon(1-p)\phi_1 A + \epsilon \gamma \phi_1 \left[\delta^k I_0 + \left(\frac{1-\delta^k}{1-\delta} \right) \delta \phi_2 p A \right].$$



Lampiran 3. Listing Program Menggunakan Matlab 7.0 untuk Solusi Numerik Model SIS dengan tiga kondisi.

```
clear all;
clc;

%nilai awal
S0=0.4;
I0=0.6;

%parameter yang ditetapkan selain beta dan p
n=2000;
A = 10;
p = 0.005;
beta = 3;
d = 1;
gamma = 1;
alpha = 2;
h = 0.1;

fprintf('MODEL SIS Lotka-Volterra');fprintf('\n');
fprintf('\n');
fprintf('Pilihan Kasus :');fprintf('\n');
fprintf('1. beta = 0 dan p > 0');fprintf('\n');
fprintf('2. beta > 0 dan p = 0');fprintf('\n');
fprintf('3. beta > 0 dan p > 0');fprintf('\n');
fprintf('\n');
pilihcase = input('Pilihan Anda : ');

switch pilihcase
    case 1
        %%%----- Case 1. beta = 0, p > 0 -----
        %%%
        % Steady state (S0*,I0*)
        beta = 0;
        p = input('masukkan nilai p (p>0) : ');
        I0s = (p*A)/(d+gamma+alpha);
        S0s = (1-p)*A/d+gamma/d*I0s;
        judul_grafik = 'Model SIS (beta = 0, p > 0)';
    case 2
        %%%----- Case 2. beta > 0, p = 0 -----
        %%%
        % Steady state (S0*,I0*)
```

```

beta = input('masukkan nilai beta (beta>0) :
');
p = 0;
eta = beta*A - d*(d+gamma+alpha);
if eta < 0
    I0s = 0;
    S0s = A/d;
else
    I0s = eta/((d+alpha)*beta);
    S0s = (d+gamma+alpha)/beta;
end
fprintf('\n');
fprintf('Nilai eta = %8.10f\n',eta);
fprintf('\n');
judul_grafik = 'Model SIS (beta > 0, p = 0)';
case 3
    %%%----- Case 3. beta > 0, p > 0 -----
    %%%
    %% Steady state (S0*,I0*)
    beta = input('masukkan nilai beta (beta>0) :
');
    p = input('masukkan nilai p (p>0) : ');
    eta = beta*A - d*(d+gamma+alpha);
    I0s = (eta +
sqrt(eta^2+4*beta*d*p*A*(d+alpha)))/(2*beta*(d+alpha)
);
    S0s = ((1-p)*A+gamma*I0s)/(beta*I0s+d);
    judul_grafik = 'Model SIS (beta > 0, p > 0)';
end

%inialisasi
S1(1)=S0;
I1(1)=I0;

%skema beda hingga tak standar
for i=1:n-1,
    S1(i+1) = (S1(i) + (1-p)*h*A + gamma*h*I1(i))/(1
+ beta*h*I1(i) + d*h);
    I1(i+1) = (I1(i) + h*p*A + beta*h*S1(i)*I1(i))/(1
+ (d+gamma+alpha)*h);
end;
In = I1(n);
Sn = S1(n);

```

```

fprintf('\n');
fprintf('Hasil Iterasi');
fprintf('\n');
fprintf('Titik tetap yang dihasilkan dari analisa
numerik :'); fprintf('\n');
fprintf('    S* = %8.10f\n', S0s);
fprintf('    I* = %8.10f\n', I0s);
fprintf('\n');
fprintf('Titik tetap yang dihasilkan dari iterasi
:'); fprintf('\n');
fprintf('    S* = %8.10f\n', Sn);
fprintf('    I* = %8.10f\n', In);

```

```

figure(1)
hold on
plot(S0,I0,'*',S1,I1,'-
b',S0s,I0s,'*r','linewidth',1.5);
title(judul_grafik);
xlabel('S(t)');
ylabel('I(t)');
legend('Titik awal','Nilai(S(t),I(t))','Titik Tetap
(Analisa)',0);

```

```

figure(2)
hold on
plot(1:n,S1(:),'-r',1:n,I1(:),'-b','linewidth',1.5);
legend('S(t)','I(t)',0)
title('Pergerakan nilai S dan I untuk mencapai titik
tetap')
xlabel('waktu/iterasi');
ylabel('Nilai S(t)/I(t)');

```