GENERALIZED DERIVATION PADA *NEAR-RING* PRIMA

SKRIPSI

oleh:
USYA CHUZAIMAH
0710940006-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

GENERALIZED DERIVATION PADA *NEAR-RING* PRIMA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:
USYA CHUZAIMAH
0710940006-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

***GENERALIZED DERIVATION* PADA *NEAR-RING* PRIMA**

oleh :
USYA CHUZAIMAH
0710940006-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 9 februari 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, M.S.	**Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc**
NIP. 196105161987012001	**NIP.196709071992031001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP.196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**USYA CHUZAIMAH**
NIM	**:**	**0710940006-94**
Jurusan	**:**	**MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	***GENERALIZED DERIVATION* PADA *NEAR-RING* PRIMA**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri, dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.**
2. **Apabila kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 9 Februari 2011
Yang menyatakan,

(Usya Chuzaimah)
NIM. 0710940006

GENERALIZED DERIVATION PADA _NEAR-RING_ PRIMA

ABSTRAK

Near-ring prima merupakan salah satu pengembangan dari konsep *near-ring*. Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring*, $\mathcal{N}$ dikatakan *near-ring* prima jika $a\mathcal{N}b = 0$ maka $a = 0$ atau $b = 0$, untuk setiap $a, b \in \mathcal{N}$. Dalam skripsi ini dibahas mengenai lemma dan teorema yang berkaitan dengan *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring* prima. Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima, sebuah *additive mapping* $f: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ adalah *generalized derivation* dengan *nonzero derivation* d. Jika $f(\mathcal{N})$ adalah himpunan bagian dari *center* C, maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.

Kata Kunci: *near-ring* prima, *additive mapping*, *derivation*, *generalized derivation*.

GENERALIZED DERIVATION OF PRIME NEAR-RING

ABSTRACT

Prime Near-Ring is one of developments from near-ring theory. Let $\mathcal{N}$ is near-ring, $\mathcal{N}$ is said to be prime near-ring if $a\mathcal{N}b = 0$ implies $a = 0$ or $b = 0$ for all $a, b \in \mathcal{N}$. In this thesis will be discussed about lemma and theorem that associate with derivation and generalized derivation of prime near-ring. Let $\mathcal{N}$ be a prime near-ring, an additive mapping $f: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ is generalized derivation associated with nonzero derivation d. If $f(\mathcal{N})$ is a subset of center C, then $(\mathcal{N}, +)$ is a commutative group. Moreover, if $\mathcal{N}$ is 2-torsion free prime near-ring, then $\mathcal{N}$ is a commutative ring.

Keyword: prime near-ring, additive mapping, derivation, generalized derivation.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Rabbil ‘Alamin, segala puji hanya bagi Allah SWT, Tuhan semesta alam. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW, keluarga, para sahabat dan pengikutnya yang setia sampai hari kiamat.

Atas izin Allah SWT penulis bisa menyelesaikan penulisan skripsi yang berjudul ***”Generalized Derivation* pada *Near-ring* Prima”**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya. Skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik atas dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Dra. Ari Andari, MS. selaku dosen pembimbing I atas segala ilmu dan waktu yang diberikan, pengarahan, perhatian, nasehat, kesabaran, bantuan dan bimbingannya selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc selaku dosen pembimbing II sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala ilmu dan waktu yang diberikan, pengarahan, perhatian, nasehat, kesabaran, bantuan dan bimbingannya selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika yang sudah memberikan banyak nasehat, dukungan dan saran selama proses penulisan skripsi ini.
4. Isnani Darti, S.Si, M.Si selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan saran selama penulis menempuh studi.
5. Dr. Ratno Bagus E.W., M.Si, Drs. M. Muslikh, M.Si, Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji yang telah banyak memberi nasehat, masukan, saran dan kritik untuk perbaikan skripsi ini.
6. Segenap dosen Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya atas ilmu yang diberikan, staf Tata Usaha dan NOC Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.

7. Ibunda Siti Alfiah dan Ayahanda Sukiran tercinta yang senantiasa memberikan do’a dan semua yang terbaik untuk kesuksesan putrinya, nenekku Saini, adik-adikku Miftahul Jannah dan Choirunnisa’, serta hubyku Anggi Permana Putra yang senantiasa memberikan do’a, dukungan, semangat saat suka maupun duka, dan pengorbanan yang diberikan kepada penulis.
8. Ireka Rizka D., Dewi Antika, Anita Rahmania T.M.S., Putu Darmayasa, teman-teman kos dan semua teman-teman jurusan Matematika, khusunya angkatan 2007 atas do’a, bantuan, dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari adanya kekurangan dalam penulisan skipsi ini. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik melalui email usyachuzaimah@yahoo.co.id dari para pembaca untuk perbaikan penulisan ke depan. Harapan penulis semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca pada umumnya.

Malang, 9 Februari 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{C}$	himpunan bilangan kompleks
$\mathbb{R}$	himpunan bilangan riil
$\mathbb{Q}$	himpunan bilangan rasional
$\mathbb{N}$	himpunan bilangan asli
$\mathbb{Z}$	himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}_n$	himpunan bilangan bulat modulo n
$\in$	elemen (anggota)
$\exists$	terdapat
$\subset$	himpunan bagian
$\emptyset$	himpunana kosong
$\forall$	untuk setiap
$\neq$	tidak sama dengan
$A \times B$	hasil kali cartesian A dan B
$f: A \to B$	pemetaan dari A ke B
I_A	pemetaan identitas pada A
$(\Rightarrow)$	jika
$(\Leftarrow)$	maka
$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$	himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya adalah bilangan bulat
$A_{n\times n}$	anggota himpunan matriks $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$
a_{ij}	entri-entri suatu matriks pada baris ke i dan kolom ke j
C	*center*
$\setminus$	selain dari
Z_r	pembagi nol kanan
Z_l	pembagi nol kiri
$(M,*)$	semigrup
$(P,*)$	subsemigrup
$(G,*)$	grup
$(H,*)$	subgrup
$(R,+,\bullet)$	ring
$(U,+,\bullet)$	subring

$\mathcal{N}$	*near-ring*
d	derivation
f	*generalized derivation*
$\langle x, y \rangle$	*additive group commutator*
$[x, y]$	commutator
$\blacksquare$	akhir dari sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Near-ring merupakan perluasan dari ring. Konsep *near-ring* sebenarnya hampir sama dengan ring, karena terhadap operasi penjumlahan, keduanya membentuk grup. Namun, ring harus merupakan grup komutatif, sedangkan *near-ring* tidak demikian. Terhadap operasi perkalian, *near-ring* maupun ring membentuk semigrup dan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian, pada *near-ring* maupun ring berlaku sifat distributif.

Konsep *near-ring* mengalami perkembangan antara lain *near-ring* prima. H. E. Bell dan G. Mason pada tahun 1987 dalam jurnalnya yang berjudul *On Derivation in Near-rings* telah memperkenalkan beberapa hasil dari *derivation* pada *near-ring* prima. Di sisi lain, M. Bresar pada tahun 1991 dalam jurnalnya yang berjudul *On the Distance of the Composition of Two Derivations to the Generalized Derivation* dan B. Hvala pada tahun 1998 dalam jurnalnya yang berjudul *Generalized Derivation in Rings* telah memperkenalkan beberapa hasil dari *generalized derivation* pada ring prima. Banyak penulis yang telah meneliti sifat-sifat ring prima dan ring semiprima dengan *derivation* atau *generalized derivation*. Hal ini merupakan suatu yang wajar untuk mencari hasil yang bisa dibandingkan pada *near-ring* prima.

Oznur Golbasi pada tahun 2006 dalam jurnalnya yang berjudul *Notes on Prime Near-rings with Generalized Derivation* dan *On Generalized Derivations of Prime Near-rings* memperkenalkan beberapa hasil mengenai definisi, lemma serta teorema yang berkaitan dengan *generalized derivation* pada *near-ring* prima. Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan dibahas mengenai lemma dan teorema yang berkaitan dengan *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring* prima.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini sebagai berikut.

1. Bagaimana definisi *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring*?
2. Bagaimana lemma dan teorema beserta bukti-buktinya yang berkaitan dengan *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring* prima?

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan yang dibahas hanya dibatasi pada satu *generalized derivation* pada *2-torsion free near-ring* prima.

1.4 Tujuan

Tujuan pembahasan dalam skripsi ini sebagai berikut.

1. Untuk menjelaskan definisi *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring*.
2. Untuk membuktikan lemma dan teorema yang berkaitan dengan *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring* prima.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan contohnya, serta teorema dan buktinya sebagai acuan dalam membahas permasalahan yang akan disampaikan.

2.1 Relasi, Pemetaan dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, elemen-elemen suatu himpunan yang tidak kosong dapat dikaitkan dengan operasi penjumlahan, perkalian atau keduanya atau oleh beberapa operasi biner lainnya. Berikut ini akan diberikan definisi tentang relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Cartesian)
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$, disebut sebagai hasil kali cartesian *(cartesian product)* dari himpunan A dan B, atau dinotasikan sebagai berikut.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}.$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.2 (Relasi)
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong, dan R adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Maka R disebut sebagai relasi dari A ke B.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.3 (Pemetaan)
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan f dari A ke B adalah suatu relasi sedemikian sehingga untuk setiap $a \in A$ terdapat satu $b \in B$ dengan $(a, b) \in f$. Selanjutnya dalam pemetaan dapat dituliskan sebagai $f(a) = b$.

Pada pemetaan f dari A ke B, himpunan A disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan B disebut daerah kawan (kodomain) dari f. Secara umum dikenal dua macam pemetaan yaitu:

(i) f disebut pemetaan satu-satu (injektif) jika untuk setiap $a, b \in A$ dengan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$.

(ii) f disebut pemetaan onto (surjektif) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$.

Jika f merupakan pemetaan injektif dan surjektif, maka f disebut sebagai pemetaan bijektif.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.4 (Operasi Biner)

Misalkan S adalah himpunan tidak kosong. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S, atau dinotasikan sebagai berikut.

$$*: S \times S \longrightarrow S$$
$$(a, b) \longmapsto * (a, b) = c \in S.$$

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.5 (Pemetaan Identitas)

Misalkan A adalah himpunan tidak kosong. Pemetaan $f: A \longrightarrow A$ sedemikian sehingga $f(a) = a$ untuk setiap $a \in A$ disebut sebagai pemetaan identitas pada A, atau dinotasikan dengan I_A.

(Bhattacharya, dkk., 1990)

Definisi 2.1.6 *(Additive Mapping)*

Sebuah pemetaan f atas ruang vektor X yang bernilai riil disebut sebagai *additive mapping* jika untuk setiap $a, b \in X$ memenuhi:

$$f(a + b) = f(a) + f(b).$$

(Kreyszig, 1978)

Contoh 2.1.7

Pemetaan $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ didefinisikan sebagai $f(a) = 5a$ dengan $a \in \mathbb{Z}$ adalah sebarang konstanta. Maka f merupakan suatu *additive mapping*.

Bukti:
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$.
$f(a+b) = 5(a+b) = 5a + 5b = f(a) + f(b)$. ∎

2.2 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang paling sederhana dan dilengkapi dengan satu operasi biner. Semigrup merupakan suatu himpunan tidak kosong yang di dalamnya terdapat satu opersi biner yang memenuhi syarat-syarat tertentu. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Semigrup)
Misalkan M adalah himpunan tidak kosong yang didalamnya didefinisikan operasi biner $*$, atau dinotasikan dengan $(M,*)$. $(M,*)$ disebut sebagai semigrup jika dan hanya jika:
(i) $(M,*)$ tertutup yaitu $(a * b) \in M$ untuk setiap $a, b \in M$.
(ii) $(M,*)$ assosiatif yaitu $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in M$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.2
Misalkan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli yang didalamnya didefinisikan operasi biner $a * b = a + b + ab$. Maka $(\mathbb{N},*)$ merupakan suatu semigrup.

Bukti:
(i) Tertutup
Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{N}$.
$a * b = a + b + ab \in \mathbb{N}$.
Jadi $a * b$ tertutup terhadap bilangan asli $\mathbb{N}$.
(ii) Assosiatif
Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + ab) * c \\ &= a + b + ab + c + (a + b + ab)c \\ &= a + b + ab + c + ac + bc + abc.\end{aligned}$$

$$a * (b * c) = a * (b + c + bc)$$
$$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc)$$
$$= a + b + c + bc + ab + ac + abc.$$

Maka untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Jadi, $(\mathbb{N},*)$ adalah semigrup yang didefinisikan sebagai operasi biner $a * b = a + b + ab$. ■

Teorema 2.2.3

Elemen identitas pada semigrup $(M,*)$ adalah tunggal.

(Whitelaw, 1995)

Bukti:

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup, dan $e, f \in M$ adalah elemen identitas. Akan ditunjukkan bahwa $e = f$. Karena f merupakan elemen identitas maka $f * e = e * f = e$. Karena e juga merupakan elemen identitas maka $e * f = f * e = f$. Dengan demikian $e = f$. Jadi terbukti bahwa suatu semigrup hanya mempunyai elemen identitas yang tunggal. ■

Definisi 2.2.4 (Subsemigrup)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan P adalah himpunan bagian dari M. Jika $(P,*)$ merupakan semigrup, maka $(P,*)$ disebut sebagai subsemigrup dari $(M,*)$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.2.5

$(\mathbb{N},\bullet)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{Z},\bullet)$, karena $\mathbb{N}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ dan $(\mathbb{N},\bullet)$ merupakan semigrup.

2.3 Grup

Grup merupakan struktur aljabar yang lebih sempit dari semigrup, karena suatu himpunan dapat disebut sebagai suatu grup harus bersifat semigrup, mempunyai elemen identitas dan setiap elemennya mempunyai invers. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan grup diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.1 (Grup)
Misalkan G adalah himpunan tidak kosong yang di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$, atau dinotasikan dengan $(G,*)$. $(G,*)$ disebut sebagai grup jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) Tertutup yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
(ii) Assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
(iii) Mempunyai elemen identitas yaitu terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$ sedemikian sehingga berlaku $e * a = a * e = a$.
(iv) Setiap elemen mempunyai invers yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

(Durbin, 1992)

Dari definisi grup di atas, dapat disimpulkan bahwa suatu grup pasti merupakan semigrup. Akan tetapi tidak berlaku sebaliknya, yaitu tidak semua semigrup merupakan suatu grup. Contohnya $(\mathbb{Z}^+, +)$ merupakan semigrup karena setiap elemen di $\mathbb{Z}^+$ tertutup dan assosiatif terhadap operasi penjumlahan. Namun $(\mathbb{Z}^+, +)$ bukan merupakan suatu grup karena elemen-elemen di $\mathbb{Z}^+$ tidak mempunyai invers. Untuk pembahasan selanjutnya perkalian dari a dan b hanya ditulis dengan ab.

Contoh 2.3.2
Bilangan bulat $\mathbb{Z}$, bilangan rasional $\mathbb{Q}$, bilangan riil $\mathbb{R}$ dan bilangan kompleks $\mathbb{C}$, merupakan suatu grup terhadap operasi penjumlahan, atau dalam bentuk notasi dinyatakan sebagai $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ berturut-turut. Elemen identitas dari grup tersebut adalah nol dan invers dari a adalah $-a$.

Contoh 2.3.3
Misalkan $G = \{-1,1\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang disajikan dalam Tabel 2.1 dibawah ini.

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan dan perkalian pada G

$+$	-1	1
-1	-2	0
1	0	2

$\bullet$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Maka $(G,\bullet)$ merupakan suatu grup, akan tetapi $(G,+)$ bukan merupakan suatu grup.

Bukti:
Akan dibuktikan bahwa $(G,\bullet)$ adalah grup sebagai berikut.
Dengan menggunakan Tabel 2.1, berikut ini dapat dibuktikan bahwa $(G,\bullet)$ adalah grup.

(i) Tertutup
Ambil sebarang $a, b \in G$. Berdasarkan Tabel 2.1 terlihat bahwa $(G,\bullet)$ tertutup, karena hasil dari $(G,\bullet)$ adalah $\{-1,1\}$. Jadi $(G,\bullet)$ tertutup.

(ii) Assosiatif
Ambil sebarang $a, b, c \in G$. Misalkan $a = -1, b = -1$ dan $c = 1 \in G$. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh
$(ab)c = \big((-1)(-1)\big)1 = (1)(1) = 1.$
$a(bc) = -1\big((-1)(1)\big) = (-1)(-1) = 1.$
Jadi $(ab)c = a(bc) = 1$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in G$ sedemikian sehingga diperoleh $(ab)c = a(bc)$. Jadi $(G,\bullet)$ berlaku sifat assosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas $e = 1$ terhadap operasi perkalian, karena $(1)(a) = (a)(1) = a$, untuk setiap $a \in G$.

(iv) Setiap elemen mempunyai invers
Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh bahwa $(-1)(-1) = 1 = e$ dan $(1)(1) = 1 = e$. Berarti $(-1)^{-1} = -1$ dan $(1)^{-1} = 1$. Jadi setiap elemen di G mempunyai invers.

Karena $(G,\bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu grup, jadi $(G,\bullet)$ adalah grup. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(G,+)$ bukan grup. Berdasarkan Tabel 2.1, operasi penjumlahan terhadap himpunan $G = \{-1,1\}$ menghasilkan $\{-2,0,2\}$. Karena $\{-2,0,2\}$ bukan anggota dari himpunan $G = \{-1,1\}$, maka $G = \{-1,1\}$ tidak tertutup terhadap himpunannya. Jadi $(G,+)$ bukan grup. ■

Definisi 2.3.4 (Grup Komutatif)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup. $(G,*)$ disebut sebagai grup komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G$.

(Isnarto, 2008)

Contoh 2.3.5
Misalkan $G = \{-1,1\}$ adalah himpunan. Maka $(G,\bullet)$ merupakan suatu grup komutatif.

Bukti:
Dari Contoh 2.3.3 sudah dibuktikan bahwa $(G,\bullet)$ adalah grup. Sehingga tinggal dibuktikan sifat komutatif dari grup tersebut. Ambil sebarang $a, b \in G$. Misalkan $a = -1$ dan $b = 1$. Berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh $ab = (-1)(1) = -1$ dan $ba = (1)(-1) = -1$. Sehingga $ab = ba = -1$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b \in G$ sedemikian sehingga diperoleh $ab = ba$. Karena grup tersebut memenuhi sifat komutatif, jadi $(G,\bullet)$ adalah grup komutatif. ■

Definisi 2.3.6 (Subgrup)
Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G. $(H,*)$ disebut subgrup dari $(G,*)$ jika $(H,*)$ juga merupakan suatu grup.

(Durbin, 1992)

Contoh 2.3.7
Misalkan $H = \{1\}$ adalah himpunan bagian dari $G = \{-1,1\}$. Maka $(H,\bullet)$ merupakan subgrup dari $(G,\bullet)$.

Bukti:
Dari Contoh 2.3.3 sudah dibuktikan bahwa $(G,\bullet)$ adalah grup, dan $H = \{1\}$ merupakan himpunan bagian dari $G = \{-1,1\}$, sekarang akan dibuktikan bahwa $(H,\bullet)$ memenuhi syarat-syarat dari suatu grup.

(i) Tertutup
Karena $1 \in H$ dan berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh
$(1)(1) = 1$. Jadi H tertutup.

(ii) Assosiatif

Karena $1 \in H$ dan berdasarkan Tabel 2.1 diperoleh

$(ab)c = \big((1)(1)\big)1 = (1)(1) = 1.$

$a(bc) = 1\big((1)(1)\big) = (1)(1) = 1.$

Sehingga $(ab)c = a(bc) = 1$. Jadi H assosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas $e = 1$ terhadap operasi perkalian, karena $(1)(1) = 1$.

(iv) Setiap elemen mempunyai invers

Karena $1 \in H$ dan berdasarkan Tabel 2.1 $(1)(1) = 1 = e$, berarti $(1)^{-1} = 1$. Jadi elemen di H mempunyai invers.

Jadi $H = \{1\}$ memenuhi syarat-syarat suatu grup, sehingga $(H,\bullet)$ adalah subgup dari $(G,\bullet)$. ■

Teorema 2.3.8

Misalkan $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G. $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$ jika dan hanya jika:

(i) $H \neq \emptyset$.

(ii) Jika $a \in H$ dan $b \in H$, maka $a * b \in H$.

(iii) Jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

(Durbin, 1992)

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Jika diketahui $(H,*)$ subgrup maka

1. Terdapat $e \in H$, sehingga terbukti bahwa $H \neq \emptyset$.
2. Karena $(H,*)$ subgrup, sehingga $(H,*)$ juga merupakan grup, maka $a * b \in H$ untuk setiap $a, b \in H$.
3. Untuk setiap $a \in H$, maka terdapat $b \in H$ sedemikian sehingga $a * b = b * a = e$ berdasarkan aksioma ke (iv) dari grup. Jadi $b = a^{-1} \in H$

Jadi terbukti (i), (ii), (iii) terpenuhi. ■

$(\Longleftarrow)$ Diketahui $(G,*)$ adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G yang memenuhi kondisi (i), (ii), (iii), akan dibuktikan bahwa $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$.

(i) Tertutup dipenuhi oleh kondisi (ii).

(ii) Ambil $a, b, c \in H$. Karena H adalah himpunan bagian dari G, maka untuk setiap $a, b, c \in G$, sehingga berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$. Sifat assosiatif tersebut juga berlaku untuk setiap elemen di H.

(iii) Misalkan $a \in H$, dari kondisi (iii) maka $a^{-1} \in H$. Kondisi (ii) mengakibatkan $a * a^{-1} \in H$. Tetapi $a * a^{-1} \in G$, sedangkan $a * a^{-1} = e$. Sehingga $e = a * a^{-1} \in H$. Terbukti bahwa setiap e adalah elemen identitas di H.

(iv) Setiap elemen di H mempunyai invers, terpenuhi pada kondisi (iii).

Karena H adalah himpunan bagian dari G, maka terbukti bahwa $(H,*)$ subgrup dari $(G,*)$. ■

2.4 Ring

Ring merupakan struktur aljabar yang terdiri dari himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner yaitu terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan ring diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.4.1 (Ring)
Misalkan R adalah himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian, atau dinotasikan dengan $(R, +,\bullet)$. $(R, +,\bullet)$ disebut sebagai ring jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) $(R, +)$ adalah grup komutatif.

(ii) $(R,\bullet)$ adalah semigrup.

(iii) $(R, +,\bullet)$ memenuhi hukum distributif yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku:
$(a + b)c = (ac) + (bc)$ dan
$a(b + c) = (ab) + (ac)$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Contoh 2.4.2

Misalkan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ adalah bilangan bulat modulo 4 dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang disajikan dalam Tabel 2.2 dibawah ini.

Tabel 2.2 Operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_4$

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Maka $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ merupakan suatu ring.

Bukti

Dengan menggunakan Tabel 2.2, berikut ini dapat dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring.

➢ $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah grup komutatif.

(i) Tertutup

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathbb{Z}_4, +)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup.

(ii) Assosiatif

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$, $b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh

$(a + b) + c = (\bar{0} + \bar{1}) + \bar{2} = \bar{1} + \bar{2} = \bar{3}$.

$a + (b + c) = \bar{0} + (\bar{1} + \bar{2}) = \bar{0} + \bar{3} = \bar{3}$.

Jadi $(a + b) + c = a + (b + c) = \bar{3}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +)$ assosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas $e = \bar{0}$ terhadap operasi penjumlahan, karena $a + \bar{0} = \bar{0} + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}_4$.

(iv) Setiap elemen mempunyai invers

Berdasarkan Tabel 2.2 invers dari $\bar{0}$ adalah $\bar{0}$, invers dari $\bar{1}$ adalah $\bar{3}$, invers dari $\bar{2}$ adalah $\bar{2}$, invers dari $\bar{3}$ adalah $\bar{1}$. Jadi setiap elemen di $\mathbb{Z}_4$ mempunyai invers.

(v) Komutatif

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}$ dan $b = \bar{1}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh

$a + b = \bar{0} + \bar{1} = \bar{1}$.

$b + a = \bar{1} + \bar{0} = \bar{1}$.

Jadi $a + b = b + a = \bar{1}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $a + b = b + a$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +)$ komutatif.

- $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah semigrup.

(i) Tertutup

Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}_4$. Berdasarkan Tabel 2.2 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ adalah $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ tertutup.

(ii) Assosiatif

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}, b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh

$(ab)c = \big((\bar{0})(\bar{1})\big)(\bar{2}) = (\bar{0})(\bar{2}) = \bar{0}$.

$a(bc) = (\bar{0})\big((\bar{1})(\bar{2})\big) = (\bar{0})(\bar{2}) = \bar{0}$.

Jadi $(ab)c = a(bc) = \bar{0}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(ab)c = a(bc)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, \bullet)$ assosiatif.

- $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif.

Ambil sebarang $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$. Misalkan $a = \bar{0}, b = \bar{1}$ dan $c = \bar{2}$. Berdasarkan Tabel 2.2 diperoleh

$(a + b)c = (\bar{0} + \bar{1})(\bar{2}) = \bar{1} + \bar{2} = \bar{2}$

$(ac) + (bc) = \big((\bar{0})(\bar{2})\big) + \big((\bar{1})(\bar{2})\big) = \bar{0} + \bar{2} = \bar{2}$ dan

$a(b + c) = (\bar{0})(\bar{1} + \bar{2}) = (\bar{0})(\bar{3}) = \bar{0}$.

$(ab) + (ac) = \big((\bar{0})(\bar{1})\big) + \big((\bar{0})(\bar{2})\big) = (\bar{0})(\bar{0}) = \bar{0}$.

Jadi,

$(a + b)c = (ac) + (bc) = \bar{2}$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac) = \bar{0}$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}_4$ sedemikian sehingga $(a + b)c = (ac) + (bc)$ dan $a(b + c) = (ab) + (ac)$. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif.

Karena $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring. Jadi $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$ adalah ring. ■

Contoh 2.4.3
Misalkan $R = \{0,1\}$, $(R, +,\bullet)$ bukan merupakan suatu ring karena tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan, misalkan diambil $1 + 1 = 2 \notin R$. Tetapi $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $(\mathbb{Z}_2, +,\bullet)$ merupakan suatu ring karena memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring.

Definisi 2.4.4 (Ring Komutatif)
Misalkan $(R, +,\bullet)$ adalah ring. $(R, +,\bullet)$ disebut sebagai ring komutatif jika berlaku sifat $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in R$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Definisi 2.4.5 (Ring Komutatif dengan Elemen Identitas)
Misalkan $(R, +,\bullet)$ adalah ring komutatif. $(R, +,\bullet)$ dikatakan mempunyai elemen identitas jika terdapat $1 \in R$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in R$ berlaku $(1)(a) = (a)(1) = a$.

(Dummit dan Foote, 2002)

Definisi 2.4.6 (Subring)
Misalkan $(R, +,\bullet)$ adalah ring dan U adalah himpunan bagian dari R. $U \neq \emptyset$, maka $(U, +,\bullet)$ disebut sebagai subring dari $(R, +,\bullet)$ jika $(U, +,\bullet)$ juga merupakan suatu ring.

(Hidayanto dan Irawati, 2000)

Teorema 2.4.7
Misalkan $(R, +,\bullet)$ adalah ring dan U adalah himpunan bagian dari R. $(U, +,\bullet)$ disebut sebagai subring dari $(R, +,\bullet)$ jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in U$ berlaku:

(i) $U \neq \emptyset$.
(ii) $a - b \in U$.
(iii) $ab \in U$.

(Hidayanto dan Irawati, 2000)

Bukti:
($\Longrightarrow$) Diketahui $(R, +,\bullet)$ adalah ring dan U adalah himpunan bagian dari R. Akan dibuktikan untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $U \neq \emptyset$, $a - b \in U$, dan $ab \in U$. Berdasarkan Definisi 2.4.6, $(U, +,\bullet)$ membentuk ring dengan operasi yang sama dengan opersai di $(R, +,\bullet)$. Karena $(U, +,\bullet)$ adalah ring, sehingga $U \neq \emptyset$, jadi (i)

terpenuhi. Sekarang ambil sebarang $a, b \in U$. $b \in U$ dan $(U, +,\bullet)$ adalah ring, berarti $-b \in U$. Karena $a, -b \in U$ dan $(U, +,\bullet)$ adalah ring, sehingga $a + (-b) = a - b \in U$, jadi (ii) terpenuhi. Selanjutnya, ambil sebarang $a, b \in U$. Karena $(U, +,\bullet)$ adalah ring, sehingga $ab \in U$, jadi (iii) terpenuhi. ■

($\Longleftarrow$) Sebaliknya diketahui $U \neq \emptyset$, $a - b \in U$, dan $ab \in U$ untuk setiap $a, b \in U$. Akan dibuktikan bahwa $(U, +,\bullet)$ adalah subring dari $(R, +,\bullet)$. $U \neq \emptyset$, untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $a - b \in U$ menunjukkan bahwa $(U, +)$ adalah subgrup dari grup $(R, +)$, oleh karena itu $(U, +)$ adalah grup. Karena U adalah himpunan bagian dari R, sehingga sifat komutatif yang berlaku di R juga berlaku di U. Selanjutnya untuk setiap $a, b \in U$ berlaku $ab \in U$ menunjukkan bahwa $(U,\bullet)$ adalah subsemigrup dari $(R,\bullet)$, oleh karena itu $(U,\bullet)$ adalah semigrup. Karena U adalah himpunan bagian dari R, sehingga sifat distributif yang berlaku di R juga berlaku di U. Jadi $(U, +,\bullet)$ adalah subring dari $(R, +,\bullet)$. ■

Contoh 2.4.8

Misalkan $U = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$. Maka $(U, +,\bullet)$ merupakan subring dari $(\mathbb{Z}_4, +,\bullet)$.

Bukti:

Dari Contoh 2.4.2 sudah dibuktikan bahwa $(\mathbb{Z}_4, +,\bullet)$ adalah ring, dan $U = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ adalah himpunan bagian dari $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$, sekarang akan dibuktikan bahwa $(U, +,\bullet)$ adalah subring dari $(\mathbb{Z}_4, +,\bullet)$ dengan menggunakan Teorema 2.4.7 sebagai berikut.

(i) $U \neq \emptyset$, syarat terpenuhi karena $U = \{\overline{0}, \overline{2}\}$.

(ii) $a - b \in U$.

Misalkan $\overline{0}, \overline{2} \in U$, maka:

$\overline{2} - \overline{0} = \overline{2}$

$\overline{2} - \overline{2} = \overline{0}$

$\overline{0} - \overline{2} = \overline{2}$

Sehingga $\overline{0}, \overline{2} \in U$.

(iii) $ab \in U$

Misalkan $\bar{0}, \bar{2} \in U$, maka:

$(\bar{2})(\bar{0}) = \bar{0}$

$(\bar{2})(\bar{2}) = \bar{0}$

$(\bar{0})(\bar{2}) = \bar{0}$

Sehingga $0{,}2 \in U$.

Karena syarat (i), (ii), (iii) terpenuhi, maka U adalah subring dari $\mathbb{Z}_4$.

Contoh 2.4.8 di atas juga dapat dibuktikan bahwa $U = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ dengan menunjukkan operasi yang sama pada $\mathbb{Z}_4$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sehingga $(U, +)$ adalah grup komutatif, $(U, \bullet)$ adalah semigrup dan $(U, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif. Karena $(U, +, \bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu ring, sehingga $(U, +, \bullet)$ adalah subring dari $(\mathbb{Z}_4, +, \bullet)$. ■

2.5 *Near-ring*

Near-ring merupakan salah satu struktur aljabar dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian. Perbedaannya dengan ring yaitu pada *near-ring* tidak harus grup komutatif terhadap operasi penjumlahan, bersifat semigrup terhadap operasi perkalian dan bersifat distributif terhadap kedua operasi tersebut. Berikut ini diberikan beberapa definisi dan contoh dari *near-ring*.

Definisi 2.5.1 *(Near-ring)*

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah himpunan tidak kosong dengan dua operasi biner penjumlahan dan perkalian, atau dinotasikan dengan $(\mathcal{N}, +, \bullet)$. $(\mathcal{N}, +, \bullet)$ disebut sebagai *near-ring* jika memenuhi aksioma-aksioma sebagai berikut.

(i) $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup (tidak harus grup komutatif).

(ii) $(\mathcal{N}, \bullet)$ adalah semigrup.

(iii) $(\mathcal{N}, +, \bullet)$ memenuhi hukum distributif kanan yaitu $(a + b)c = (ac) + (bc)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{N}$.

(Kandasamy, 2002)

Jika $(\mathcal{N}, +, \bullet)$ memenuhi ketiga aksioma di atas, maka $(\mathcal{N}, +, \bullet)$ disebut *near-ring* kanan. Jika pada aksioma ke (iii) berlaku hukum distributif kiri yaitu $a(b+c) = (ab) + (ac)$ untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{N}$, maka $(\mathcal{N}, +, \bullet)$ disebut sebagai *near-ring* kiri. Pada umumnya hanya dipenuhi satu hukum distributif saja. Untuk selanjutnya *near-ring* $(\mathcal{N}, +, \bullet)$ akan ditulis dengan $\mathcal{N}$ dan hanya digunakan *near-ring* kiri, sehingga *near-ring* kiri akan ditulis sebagai *near-ring*.

Contoh 2.5.2

Misalkan $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan semua matriks yang berukuran 2×2. Maka $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ merupakan suatu *near-ring*.

Bukti:

Ambil sebarang $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sebagai berikut.

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

$$B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

$$C_{2\times 2} = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}).$$

Akan dibuktikan bahwa $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +, \bullet)$ adalah *near-ring*.

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ adalah grup
  - (i) Tertutup

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dan $e, f, g, h \in \mathbb{Z}$, maka $a + e \in \mathbb{Z}$, $b + f \in \mathbb{Z}$, $c + g \in \mathbb{Z}$, $d + h \in \mathbb{Z}$, sehingga diperoleh $A + B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Jadi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ tertutup.

  - (ii) Assosiatif

$$(A + B) + C = A + (B + C)\ .$$

Dari ruas kiri diperoleh

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e+i & b+f+j \\ c+g+k & d+h+l \end{bmatrix}.$$

Dari ruas kanan diperoleh

$$A + (B + C) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} a + e + i & b + f + j \\ c + g + k & d + h + l \end{bmatrix}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga $(A + B) + C = A + (B + C)$. Jadi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +)$ assosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas $e = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ terhadap operasi penjumlahan, karena $A + e = e + A = A$, untuk setiap $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

(iv) Setiap elemen mempunyai invers
Untuk setiap $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ terdapat $A^{-1} = -A$ sedemikian sehingga $(-A) + A = A + (-A) = e$.

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ adalah semigrup

(i) Tertutup

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

Karena $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ dan $e, f, g, h \in \mathbb{Z}$, maka diperoleh $ae + bg \in \mathbb{Z}$, $af + bh \in \mathbb{Z}$, $ce + dg \in \mathbb{Z}$, $cf + dh \in \mathbb{Z}$, sehingga $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Jadi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), \bullet)$ tertutup.

(ii) Assosiatif

$$(AB)C = A(BC)$$

Dari ruas kiri diperoleh

$(AB)C$
$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix}.$$

Dari ruas kanan diperoleh

$A(BC)$
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afl + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga $(AB)C = A(BC)$. Jadi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\bullet)$ assosiatif.

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +,\bullet)$ berlaku sifat distributif kiri

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C).$$

Dari ruas kiri diperoleh

$$A * (B + C) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} aei + bgk & afj + bhl \\ cei + dgk & cfj + dhl \end{bmatrix}.$$

Dari ruas kanan diperoleh

$$(A * B) + (A * C) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ai + bk & aj + bl \\ ci + dk & cj + dl \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} aei + bgk & afj + bhl \\ cei + dgk & cfj + dhl \end{bmatrix}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$. Jadi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\bullet)$ memenuhi hukum distributif.

Karena $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +,\bullet)$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu *near-ring*. Jadi $(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}), +,\bullet)$ adalah *near-ring*. ■

Contoh 2.5.3

Misalkan $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian yang disajikan dalam Tabel 2.3 dan Tabel 2.4 dibawah ini merupakan suatu *near-ring*.

Tabel 2.3 Operasi penjumlahan pada $\mathcal{N}$

$+$	0	x	y	z	u	v
0	0	x	y	z	u	v
x	x	0	v	u	z	y
y	y	u	0	v	x	z
z	z	v	u	0	y	x
u	u	y	z	x	v	0
v	v	z	x	y	0	u

Tabel 2.4 Operasi perkalian pada $\mathcal{N}$

$\bullet$	0	x	y	z	u	v
0	0	0	0	0	0	0
x	0	x	x	x	0	0
y	0	x	x	x	0	0
z	0	x	x	x	0	0
u	0	0	0	0	0	0
v	0	0	0	0	0	0

Bukti:

Dengan menggunakan Tabel 2.3 dan Tabel 2.4, berikut ini dapat dibuktikan bahwa $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ adalah *near-ring*.

- $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup.
  - (i) Tertutup

    Ambil sebarang $a, b \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Tabel 2.3 terlihat bahwa $(\mathbb{Z}_4, +)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathcal{N}, +)$ adalah $\{0, x, y, z, u, v\}$. Jadi $(\mathcal{N}, +)$ tertutup.
  - (ii) Assosiatif

    Ambil sebarang $a, b, c \in \mathcal{N}$. Misalkan $a = 0, b = x$ dan $c = y$. Berdasarkan Tabel 2.3 diperoleh

    $(a + b) + c = (0 + x) + y = x + y = v$.

    $a + (b + c) = 0 + (x + y) = 0 + v = v$.

    Jadi $(a + b) + c = a + (b + c) = v$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi $(\mathcal{N}, +)$ assosiatif.
  - (iii) Mempunyai elemen identitas $e = 0$ terhadap operasi penjumlahan, karena $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathcal{N}$.
  - (vi) Setiap elemen mempunyai invers

    Berdasarkan Tabel 2.3 invers dari 0 adalah 0, invers dari x adalah x, invers dari y adalah y, invers dari z adalah z, invers dari u adalah v, dan invers dari v adalah u. Jadi setiap elemen di $\mathcal{N}$ mempunyai invers.

- $(\mathcal{N},\bullet)$ adalah semigrup.
  (i) Tertutup
  Ambil sebarang $a, b \in \mathcal{N}$. Berdasarkan Tabel 2.4 terlihat bahwa $(\mathcal{N},\bullet)$ tertutup, karena hasil dari $(\mathcal{N},\bullet)$ adalah $\{0, x\}$. Jadi $(\mathcal{N},\bullet)$ tertutup.
  (ii) Assosiatif
  Ambil sebarang $a, b, c \in \mathcal{N}$. Misalkan $a = 0, b = x$ dan $c = y$. Berdasarkan Tabel 2.4 diperoleh
  $(ab)c = \big((0)(x)\big)(y) = (0)(y) = 0.$
  $a(bc) = (0)\big((x\,)(y)\big) = (0)(x) = 0.$
  Jadi $(ab)c = a(bc) = 0$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $(ab)c = a(bc)$. Jadi $(\mathcal{N},\bullet)$ assosiatif.

- $(\mathcal{N}, +,\bullet)$ memenuhi hukum distributif kiri.
  Ambil sebarang $a, b, c \in \mathcal{N}$. Misalkan $a = 0, b = x$ dan $c = y$. Berdasarkan Tabel 2.3 dan Tabel 2.4 diperoleh
  $a(b + c) = (0)(x + y) = (0)(v) = 0.$
  $(ab) + (ac) = \big((0)(x)\big) + \big((0)(v)\big) = (0)(0) = 0.$
  Jadi $a(b + c) = (ab) + (ac) = 0$. Hal ini juga berlaku untuk setiap $a, b, c \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $a(b + c) = (ab) + (ac)$. Jadi $(\mathcal{N}, +,\bullet)$ memenuhi hukum distributif kiri.

Karena $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ memenuhi semua aksioma-aksioma dari suatu *near-ring*. Jadi $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ adalah *near-ring*. ■

Definisi 2.5.4 (Pembagi Nol *Near-ring*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring*. Suatu $a \in \mathcal{N}$ disebut pembagi nol kanan jika dan hanya jika terdapat $b \setminus \{0\} \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $ba = 0$. Selanjutnya Suatu $a \in \mathcal{N}$ disebut pembagi nol kiri jika dan hanya jika terdapat $b \setminus \{0\} \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $ab = 0$. Suatu $a \in \mathcal{N}$ disebut pembagi nol jika dan hanya jika a merupakan pembagi nol kanan dan pembagi nol kiri.

(Wendt, 2009)

Definisi 2.5.5 (*Center Near-ring*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring*, maka $C = \{a \in \mathcal{N} | ab = ba, \forall b \in \mathcal{N}\}$ disebut sebagai *center* dari *near-ring* $\mathcal{N}$.

(Park dan Jung, 2010)

Contoh 2.5.6
Dari Contoh 2.5.2 $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ adalah *near-ring*. Beberapa center dari *near-ring* $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ diantaranya adalah matriks identitas dan matriks nol yang berukuran 2×2.

Contoh 2.5.7
Dari Contoh 2.5.3 *center* dari $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ adalah $0, x, y, z, u$ dan v.

Definisi 2.5.8 (*Zero Symmetric Near-ring*)
Misalkan 0 adalah elemen identitas atas operasi penjumlahan pada $\mathcal{N}$. $\mathcal{N}$ disebut *zero symmetric near-ring* jika $a0 = 0a = 0$ untuk setiap $a \in \mathcal{N}$.

(Pilz, 1983)

Contoh 2.5.9
Dari Contoh 2.5.2, maka $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ merupakan suatu *zero symmetric near-ring*.

Bukti:
Ambil sebarang $A_{2\times2} = \{(a_{ij}) | a_{ij} \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ dan matriks nol yang berukuran 2×2, sedemikian sehingga

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ a_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

Karena $A0 = 0A = 0$, untuk setiap $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Berdasarkan Definisi 2.5.8, maka $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ adalah *zero symmetric near-ring*. ■

Contoh 2.5.10
Dari Contoh 2.5.3 $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ adalah *zero symmetric near-ring*, karena berlaku $a0 = 0a = 0$ untuk setiap $a \in \mathcal{N}$.

Definisi 2.5.11 (*2-torsion Free Near-ring*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring*. $\mathcal{N}$ disebut *2-torsion free near-ring* jika $2a = 0$ maka $a = 0$, untuk setiap $a \in \mathcal{N}$.

(Ozturk dan Ceven, 2008).

Contoh 2.5.12
Dari Contoh 2.5.3, maka $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ merupakan suatu *2-torsion free near-ring*.

Bukti:
Misalkan $A_{2\times 2} = \left((a_{ij})\middle| a_{ij} \in \mathbb{Z}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Untuk membuktikan bahwa $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ adalah *2-torsion free near-ring*, berdasarkan Definisi 2.5.11 harus dibuktikan jika $2A = 0$ maka $A = 0$. Pembuktian tersebut dilakukan dengan mengambil kontraposisinya yaitu jika diketahui $A \neq 0$ akan dibuktikan $2A \neq 0$. Sekarang Ambil sebarang $A_{2\times 2} = \left((a_{ij})\middle| a_{ij} \neq 0 \in \mathbb{Z}\right) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ sedemikian sehingga

$$2A = 2\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a_{ij} \neq 0 \in \mathbb{Z}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $A \neq 0$ sedemikian sehingga diperoleh $2A \neq 0$, jadi $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ adalah *2-torsion free near-ring*.

Definisi 2.5.13 (*Near-ring* Prima)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring*. $\mathcal{N}$ dikatakan *near-ring* prima jika $a\mathcal{N}b = 0$, maka $a = 0$ atau $b = 0$ untuk setiap $a, b \in \mathcal{N}$.

(Golbasi, 2006)

Contoh 2.5.14
Diberikan $\mathcal{M} = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0, b \neq 0\right\}$ adalah *near-ring* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Maka $\mathcal{M}$ merupakan suatu *near-ring* prima.

Bukti:
Untuk membuktikan bahwa $\mathcal{M}$ adalah *near-ring* prima, berdasarkan Definisi 2.5.13 harus dibuktikan jika $A\mathcal{M}B = 0$, maka $A = 0$ atau $B = 0$. Pembuktian tersebut dilakukan dengan mengambil

kontraposisinya yaitu jika diketahui $A \neq 0$ dan $B \neq 0$, akan dibuktikan bahwa $A\mathcal{M}B \neq 0$.
Ambil sebarang

$$A_{2\times2} = \left\{\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| c, d \in \mathbb{Z}, c \neq 0, d \neq 0\right\} \in \mathcal{M}.$$

$$B_{2\times2} = \left\{\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \middle| e, f \in \mathbb{Z}, e \neq 0, f \neq 0\right\} \in \mathcal{M}.$$

Sedemikian sehingga

$$A\mathcal{M}B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cae & 0 \\ 0 & dbf \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Di mana $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Karena dengan mengambil sebarang $A \neq 0$ dan $B \neq 0$ sedemikian sehingga diperoleh $A\mathcal{M}B \neq 0$, jadi $\mathcal{M}$ adalah *near-ring* prima.

Contoh 2.5.15
Dari Contoh 2.5.3 $\mathcal{N} = \{0, x, y, z, u, v\}$ bukan *near-ring* prima, karena jika di ambil $u \neq 0$ dan $v \neq 0$, maka $a\mathcal{N}b = 0$ yaitu:

$$\begin{aligned} u0v &= 0v = 0 \\ uav &= 0v = 0 \\ ubv &= 0v = 0 \\ ucv &= 0v = 0 \\ uuv &= 0v = 0 \\ uvv &= 0v = 0. \end{aligned}$$

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas mengenai definisi, lemma, teorema dari *derivation* dan *generalized derivation* pada *near-ring* prima beserta bukti-buktinya. Pembahasan pada skripsi ini hanya dibatasi pada satu *generalized derivation* pada *2-torsion free near-ring* prima.

3.1 *Derivation* pada *Near-ring* Prima

Definisi 3.1.1 (*Derivation*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring*. Sebuah *additive mapping* $d: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ disebut sebagai *derivation* pada $\mathcal{N}$ jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$d(xy) = xd(y) + d(x)y \text{ atau } d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

(Bell dan Mason, 1992)

Contoh 3.1.2
Diberikan *near-ring* $\mathcal{N}$ dan pemetaan $d: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ yang didefinisikan sebagai $d(x) = ax - xa$, $x \in \mathcal{N}$, $a \in C$. Maka d merupakan suatu *derivation*.

Bukti:
Untuk membuktikan bahwa d adalah *derivation*, maka pertama dibuktikan d adalah *additive mapping* dan selanjutnya dibuktikan d adalah *derivation*. Ambil sebarang $x, y \in \mathcal{N}$ dan $a \in C$, akan dibuktikan bahwa d adalah *additive mapping* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} d(x+y) &= a(x+y) - (x+y)a \\ &= ax + ay - xa - ya \\ &= ax - xa + ay - ya \\ &= d(x) + d(y). \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa d adalah *additive mapping*. Selanjutnya dibuktikan bahwa d adalah *derivation* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} d(xy) &= axy - xya \\ &= axy - xay + xay - xya \\ &= (ax - xa)y + x(ay - ya) \\ &= d(x)y + xd(y). \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa d adalah *derivation*. ■

Contoh 3.1.3

Misalkan $m, s, p \neq 0 \in \mathbb{Z}$. Diberikan *near-ring* yang didefinisikan sebagai $\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$ dan juga *additive mapping* $d: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dan $g: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & mx - mz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } g\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -ys \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka d dan g merupakan suatu *derivation* pada $\mathcal{N}$.

Bukti:

d dan g sudah didefinisikan dengan baik.

(i) Akan dibuktikan bahwa d adalah *derivation* pada $\mathcal{N}$. Ambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sebagai berikut.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \middle| x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \middle| x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dengan

$$d(X) = d\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & mx_1 - mz_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$d(Y) = d\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & mx_2 - mz_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sedemikian sehingga $d(XY) = Xd(Y) + d(X)Y$.

Dari ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned} d(XY) &= d\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 + y_1z_2 \\ 0 & z_1z_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & m(x_1x_2) - m(z_1z_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh

$$Xd(Y) + d(X)Y$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) + d\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & mx_2 - mz_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & mx_1 - mz_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & x_1(mx_2 - mz_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (mx_1 - mz_1)z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & x_1 m x_2 - x_1 m z_2 + m x_1 z_2 - m z_1 z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & m(x_1 x_2) - m(z_1 z_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga diperoleh $d(XY) = Xd(Y) + d(X)Y$. Berdasarkan Definisi 3.1.1, d adalah *derivation* pada $\mathcal{N}$. ■

(ii) Akan dibuktikan bahwa g adalah *derivation* pada $\mathcal{N}$. Ambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sebagai berikut.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \middle| x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$Y = \left\{ \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \middle| x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z} \right\}$$

dengan

$$g(X) = g\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -y_1 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$g(Y) = g\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -y_2 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga $g(XY) = g(X)Y + Xg(Y)$.

Dari ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned} g(XY) &= g\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= g\left(\begin{bmatrix} x_1 x_2 & x_1 y_2 + y_1 z_2 \\ 0 & z_1 z_2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -(x_1 y_2 + y_1 z_2)s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh

$g(X)Y + Xg(Y)$

$$= g\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} g\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -y_1 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -y_2 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (-y_1 s) z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_1(-y_2 s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & -(x_1 y_2 + y_1 z_2)s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga diperoleh $g(XY) = g(X)Y + Xg(Y)$. Berdasarkan Definisi 3.1.1, g adalah *derivation* pada $\mathcal{N}$. ■

Definisi 3.1.4 (*Additive-group Commutator* dan *Commutator*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring.* Untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$, maka
(i) $\langle x, y\rangle = x + y - x - y$ disebut sebagai *additive group commutator.*
(ii) $[x, y] = xy - yx$ disebut sebagai *commutator*.

(Golbasi, 2006)

Definisi 3.1.5 (Grup Komutatif dan Ring Komutatif)
Diberikan $\langle x, y\rangle = x + y - x - y$ adalah *additive group commutator* dan $[x, y] = xy - yx$ adalah *commutator*.
(i) Jika $\langle x, y\rangle = 0$, maka $\mathcal{N}$ disebut sebagai grup komutatif.
(ii) Jika $[x, y] = 0$, maka $\mathcal{N}$ disebut sebagai ring komutatif.

(Golbasi dan Aydin, 2004)

Definisi 3.1.6 (Homomorfisma dan Anti-homomorfisma)
Misalkan $\mathcal{N}'$ adalah himpunan bagian dari *near-ring* $\mathcal{N}$ dan d adalah *derivation* pada $\mathcal{N}$. Jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}'$ berlaku
(i) $d(xy) = d(x)d(y)$, maka d disebut sebagai homomorfisma *near-ring*.
(ii) $d(xy) = d(y)d(x)$,maka d disebut sebagai anti-homorfisma *near-ring*.

(Argac, 1997)

Lemma 3.1.7
Misalkan d adalah *derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$. Maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{N}$ berlaku sifat distributif sebagai berikut.
(i) $\{xd(y) + d(x)y\}z = xd(y)z + d(x)yz.$
(ii) $\{d(x)y + xd(y)\}z = d(x)yz + xd(y)z.$

(Wang, 1994)

Bukti:
(i) Karena d adalah *derivation,* maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} d\big((xy)z\big) &= xyd(z) + d(xy)z \\ &= xyd(z) + \{xd(y) + d(x)y\}z. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Di lain pihak diperoleh

$$\begin{aligned} d\big(x(yz)\big) &= xd(yz) + d(x)yz \\ &= x\{yd(z) + d(y)z\} + d(x)yz. \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$d\big(x(yz)\big) = xyd(z) + xd(y)z + d(x)yz. \quad (3.2)$$

Dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh

$$d\big((xy)z\big) = d\big(x(yz)\big)$$
$$xyd(z) + \{xd(y) + d(x)y\}z = xyd(z) + xd(y)z + d(x)yz.$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$\{xd(y) + d(x)y\}z = xd(y)z + d(x)yz. \qquad \blacksquare$$

(ii) Karena d adalah *derivation*, maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{N}$ berlaku

$$\begin{aligned} d\big((xy)z\big) &= d(xy)z + xyd(z) \\ &= \{d(x)y + xd(y)\}z + xyd(z). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Di lain pihak diperoleh

$$\begin{aligned} d\big(x(yz)\big) &= d(x)yz + xd(yz) \\ &= d(x)yz + x\{d(y)z + yd(z)\}. \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$d\big(x(yz)\big) = d(x)yz + xd(y)z + xyd(z). \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh

$$d\big((xy)z\big) = d\big(x(yz)\big)$$
$$\{d(x)y + xd(y)\}z + xyd(z) = d(x)yz + xd(y)z + xyd(z).$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$\{d(x)y + xd(y)\}z = d(x)yz + xd(y)z. \qquad \blacksquare$$

Lemma 3.1.8

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* dan d adalah *derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$. Jika $u \in \mathcal{N}$ bukan pembagi nol kiri dan jika $[u, d(u)] = 0$, maka $\langle u, x\rangle$ konstan $(d\langle u, x\rangle = 0)$ untuk setiap $x \in \mathcal{N}$.

(Bell dan Mason, 1987)

Bukti:

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$u(u+x) = u^2 + ux \text{ dan } d\{u(u+x)\} = d(u^2 + ux).$$

Karena d adalah *derivation* dan d adalah *additive mapping*, sehingga diperoleh

$$d(u)(u+x) + ud\{(u+x)\} = d(u^2) + d(ux).$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, d adalah *additive mapping* dan d adalah *derivation*, sehingga diperoleh

$$d(u)u + d(u)x + u\{d(u) + d(x)\} = d(u)u + ud(u) + d(u)x + ud(x)$$

$$d(u)u + d(u)x + ud(u) + ud(x) = d(u)u + ud(u) + d(u)x + ud(x).$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$d(u)u + ud(x) = d(u)u + ud(x)$$

$$d(u)u + ud(x) - d(u)u - ud(x) = 0. \qquad (3.5)$$

Karena diketahui $[u, d(u)] = ud(u) - d(u)u = 0$, sehingga diperoleh $d(u)u = ud(u)$.

Sehingga persamaan (3.5) menjadi

$$ud(u) + ud(x) - ud(u) - ud(x) = 0$$

$$u\{d(u) + d(x) - d(u) - d(x)\} = 0$$

$$u\{d(u + x - u - x)\} = 0. \qquad (3.6)$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (i), maka persamaan (3.6) menjadi

$$u(d\langle u, x\rangle) = 0$$

Karena u bukan pembagi nol kiri, sehingga diperoleh $d\langle u, x\rangle = 0$.

Dengan kata lain $\langle u, x\rangle$ konstan untuk setiap $x \in \mathcal{N}$. ■

Lemma 3.1.9

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima.

(i) Jika $z \in C \setminus \{0\}$, maka z bukan pembagi nol dari $\mathcal{N}$.

(ii) Jika $C \setminus \{0\}$ memuat sebuah elemen z, dimana $z + z \in C$, maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif.

(iii) Misalkan d adalah *nonzero derivation* pada $\mathcal{N}$.
Jika $ad(\mathcal{N}) = 0$ maka $a = 0$ dan jika $d(\mathcal{N})a = 0$ maka $a = 0$.

(iv) Jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free* dan d adalah *derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$ sedemikian sehingga $d^2 = 0$, maka $d = 0$.

(Bell dan Mason, 1987)

Bukti:

(i) Berdasarkan Definisi 2.5.4,untuk suatu $x \in \mathcal{N}, \exists z \in C \setminus \{0\}$, sedemikian sehingga $xz = 0$.

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima, sehingga diperoleh

$$x\mathcal{N}z = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.5.13, maka $x = 0$ atau $z = 0$. (3.7)

Karena $z \in C \setminus \{0\}$, maka $xz = zx = 0$. (3.8)

Dari persamaan (3.7) dan (3.8) diperoleh

Jika $xz = zx = 0$, maka $x = 0$ atau $z = 0$.

Jadi z bukan pembagi nol dari $\mathcal{N}$. ■

(ii) Jika $z \in C \setminus \{0\}$ dan berlaku $z + z \in C$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku sifat distributif kiri yaitu

$$\begin{aligned}(x+y)(z+z) &= (x+y)z + (x+y)z \\ &= xz + yz + xz + yz \\ &= (x+y+x+y)z. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Di lain pihak diperoleh

$$\begin{aligned}(x+y)(z+z) &= x(z+z) + y(z+z) \\ &= xz + xz + yz + yz \\ &= (x+x+y+y)z \qquad (3.10)\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.9) dan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned}(x+y+x+y)z &= (x+x+y+y)z \\ x+y+x+y &= x+x+y+y\,.\end{aligned}$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}x+y &= y+x \\ x+y-x-y &= 0 \\ \langle x, y\rangle &= 0\end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 3.1.5 (i), maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. ■

(iii) Akan dibuktikan jika $ad(\mathcal{N}) = 0$ maka $a = 0$.

Karena $ad(\mathcal{N}) = 0$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$ad(xy) = 0.$$

Karena d adalah *derivation,* sehingga diperoleh

$$a\{xd(y) + d(x)y\} = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$axd(y) + ad(x)y = 0. \qquad (3.11)$$

Karena $ad(\mathcal{N}) = 0$, maka $ad(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathcal{N}$. Sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$axd(y) = 0$$
$$a\mathcal{N}d(y) = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* $(d \neq 0)$, sehingga $a = 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan jika $d(\mathcal{N})a = 0$ maka $a = 0$.

Karena $d(\mathcal{N})a = 0$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$d(xy)a = 0.$$

Karena d adalah *derivation,* sehingga diperoleh

$$\{d(x)y + xd(y)\}a = 0. \qquad (3.12)$$

Dengan menggunakan Lemma 3.1.7 (ii), maka persamaan (3.12) menjadi

$$d(x)ya + xd(y)a = 0. \qquad (3.13)$$

Karena $d(\mathcal{N})a = 0$, maka $d(y)a = 0$ untuk setiap $y \in \mathcal{N}$. Sehingga persamaan (3.13) menjadi

$$d(x)ya = 0$$
$$d(x)\mathcal{N}a = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* $(d \neq 0)$, sehingga $a = 0$. ■

(iv) Karena $d^2(\mathcal{N}) = 0$. Untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$, maka berlaku

$$d^2(xy) = 0$$
$$d\{d(xy)\} = 0.$$

Karena d adalah *derivation,* sehingga diperoleh

$$d\{d(x)y + xd(y)\} = 0.$$

Karena d *additive mapping,* sehingga diperoleh

$$d\{d(x)y\} + d\{xd(y)\} = 0.$$

Karena d adalah *derivation*, sehingga diperoleh

$$d\{d(x)\}y + d(x)d(y) + d(x)d(y) + xd\{d(y)\} = 0$$
$$d^2(x)y + d(x)d(y) + d(x)d(y) + xd^2(y) = 0.$$

Karena $d^2 = 0$, sehingga diperoleh $2d(x)d(y) = 0$.

Karena $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free*, maka untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$d(x)d(y) = 0$$
$$d(x)d(\mathcal{N}) = 0.$$

Berdasarkan Lemma 3.1.9 (iii), maka $d = 0$. ■

Teorema 3.1.10

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dengan *nonzero derivation* d. Jika $d(\mathcal{N}) \subset C$, maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free*, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.

(Bell dan Mason, 1987)

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif, berdasarkan Definisi 3.1.5 (i) cukup dibuktikan bahwa $\langle x, y\rangle = 0$.

Misalkan $a \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $d(a) \neq 0$.

Jadi $d(a) \in C \setminus \{0\}$ dan $d(a) + d(a) \in C \setminus \{0\}$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$(x + y)\{d(a) + d(a)\} = \{d(a) + d(a)\}(x + y).$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$xd(a) + xd(a) + yd(a) + yd(a) = d(a)x + d(a)y + d(a)x + d(a)y.$$

Karena $d(a) \in C$, sehingga diperoleh

$$d(a)x + d(a)x + d(a)y + d(a)y = d(a)x + d(a)y + d(a)x + d(a)y.$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$d(a)x + d(a)y = d(a)y + d(a)x$$
$$d(a)x + d(a)y - d(a)y - d(a)x = 0$$
$$d(a)x + d(a)y - d(a)x - d(a)y = 0$$
$$d(a)(x + y - x - y) = 0. \qquad (3.14)$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (i), untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ maka persamaan (3.14) menjadi

$$d(a)\langle x, y\rangle = 0.$$

Karena $d(a) \in C \setminus \{0\}$, sehingga diperoleh $\langle x, y\rangle d(a) = 0$.
Dengan menggunakan Lemma 3.1.9 (iii), untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ maka $\langle x, y\rangle = 0$. Berdasarkan Definisi 3.1.5 (i), maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya akan dibuktikan jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.
Karena $d(\mathcal{N}) \subset C$, maka untuk setiap $a, b \in \mathcal{N}$ berlaku

$$cd(ab) = d(ab)c.$$

Karena d adalah *derivation*, sehingga diperoleh

$$c\{d(a)b + ad(b)\} = \{d(a)b + ad(b)\}c.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri dan dengan menggunakan Lemma 3.1.7 (ii), sehingga diperoleh

$$cd(a)b + cad(b) = d(a)bc + ad(b)c. \qquad (3.15)$$

Karena $d(\mathcal{N}) \subset C$, sehingga persamaan (3.15) menjadi

$$d(a)cb + cd(b)a = d(a)bc + d(b)ac$$
$$d(a)cb + d(b)ca = d(a)bc + d(b)ac. \qquad (3.16)$$

Dari persamaan (3.16) dan $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif, sehingga diperoleh

$$d(a)cb + d(b)ca - d(a)bc - d(b)ac = 0$$
$$d(a)cb - d(a)bc = d(b)ac - d(b)ca$$
$$d(a)\{(cb - bc)\} = d(b)\{(ac - ca)\} \quad (3.17)$$
$$d(a)[c, b] = d(b)[a, c].$$

Sekarang diandaikan bahwa $\mathcal{N}$ tidak komutatif.
Dari persamaan (3.17) dipilih $a, c \in \mathcal{N}$ dengan $[a, c] \neq 0$ dan misalkan $b = d(x) \in C$ diperoleh

$$d(a)\{cd(x) - d(x)c\} = d\{d(x)\}(ac - ca). \qquad (3.18)$$

Karena $d(\mathcal{N}) \subset C$, untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ maka $cd(x) - d(x)c = 0$. Sehingga persamaan (3.18) menjadi

$$0 = d^2(x)(ac - ca)$$
$$= d^2(x)[a, c].$$

Karena $[a, c] \neq 0$, untuk setiap $x \in N$ maka haruslah $d^2(x) = 0$. Jika $d^2(x) = 0$, menurut Lemma 3.1.9 (iv) maka $d(x) = 0$. Padahal d adalah *nonzero derivation* $(d \neq 0)$, sehingga terjadi suatu kontradiksi. Jadi yang benar adalah $[a, c] = 0$. Menurut Definisi 3.1.5 (ii), maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif. ∎

3.2 *Generalized Derivation* pada *Near-ring* Prima

Definisi 3.2.1 (*Generalized Derivation*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* dan didefinisikan $d: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ adalah *derivation* pada $\mathcal{N}$. Sebuah *additive mapping* $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ disebut sebagai

(i) *Generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$ jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku $f(xy) = f(x)y + xd(y)$.

(ii) *Generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$ jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku $f(xy) = d(x)y + xf(y)$.

Jika f merupakan *generalized derivation* kanan dan *generalized derivation* kiri, maka f disebut sebagai *generalized derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$.

(Golbasi, 2006)

Contoh 3.2.2
Diberikan *near-ring* $\mathcal{N}$ dan *derivation* $d: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ yang didefinisikan sebagai $d(x) = ax - xa$, $x \in \mathcal{N}$ dan $a \in C$. Selain itu juga diberikan sebuah pemetaan $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$ yang didefinisikan sebagai $f(y) = ay - ya$, $y \in \mathcal{N}$ dan $a \in C$. Maka f merupakan suatu *generalized derivation* kiri.

Bukti:
Dari Contoh 3.1.2 sudah dibuktikan bahwa d adalah *derivation.* Sekarang tinggal dibuktikan bahwa f adalah *generalized derivation* kiri. Untuk membuktikan bahwa f adalah *generalized derivation*, maka pertama dibuktikan f adalah *additive mapping* dan selanjutnya dibuktikan f adalah *generalized derivation* kiri. Ambil sebarang $x, y \in \mathcal{N}$ dan $a \in C$, akan dibuktikan bahwa f adalah *additive mapping* sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(x+y) - (x+y)a \\ &= ax + ay - xa - ya \\ &= ax - xa + ay - ya \\ &= f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa f adalah *additive mapping.* Selanjutnya dibuktikan bahwa f adalah *generalized derivation* kiri sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f(xy) &= axy - xya \\
&= axy - xay + xay - xya \\
&= (ax - xa)y + x(ay - ya) \\
&= d(x)y + xf(y).
\end{aligned}
$$

Jadi terbukti bahwa f adalah *generalized derivation* kiri. ■

Contoh 3.2.3

Dari contoh 3.1.3, diberikan *additive mapping* $D: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ dan $G: \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

$$D\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & mx + mz \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } G\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pz - ys \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka D merupakan suatu *generalized derivation* kanan yang dikaitkan dengan d dan G merupakan suatu *generalized derivation* kanan yang dikaitkan dengan g.

Bukti:

D dan G sudah didefinisikan dengan baik.

(i) Akan dibuktikan bahwa D adalah *generalized derivation* kanan yang dikaitkan dengan d. Ambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sebagai berikut.

$$X = \left\{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \middle| x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$Y = \left\{\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \middle| x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

dengan

$$D(X) = D\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & mx_1 + mz_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(Y) = d\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & mx_2 - mz_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga $D(XY) = D(X)Y + Xd(Y)$.

Dari ruas kiri diperoleh

$$
\begin{aligned}
D(XY) &= D\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= D\left(\begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 + y_1z_2 \\ 0 & z_1z_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & m(x_1x_2) + m(z_1z_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dari ruas kanan diperoleh

$D(X)Y + Xd(Y)$

$= D\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix} 0 & mx_1 + mz_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & mx_2 - mz_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & (mx_1 + mz_1)z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_1(mx_2 - mz_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & mx_1z_2 + mz_1z_2 + x_1mx_2 - x_1mz_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & m(x_1x_2) + m(z_1z_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Karena dengan mengambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga diperoleh $D(XY) = D(X)Y + Xd(Y)$. Berdasarkan Definisi 3.2.1 (i), D adalah *generalized derivation* kanan pada $\mathcal{N}$. ■

(ii) Akan dibuktikan bahwa G adalah *generalized derivation* kanan yang dikaitkan dengan g. Ambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sebagai berikut.

$$X = \left\{\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \middle| x_1, y_1, z_1 \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$Y = \left\{\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} \middle| x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}\right\}$$

dengan

$$G(X) = G\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pz_1 - y_1s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(Y) = g\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -y_2s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sedemikian sehingga $G(XY) = G(X)Y + Xg(Y)$.

Dari ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned} G(XY) &= G\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= G\left(\begin{bmatrix} x_1x_2 & x_1y_2 + y_1z_2 \\ 0 & z_1z_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & p(z_1z_2) - (x_1y_2 + y_1z_2)s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dari ruas kanan diperoleh

$G(X)Y + Xg(Y)$

$= G\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} g\left(\begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \begin{bmatrix} 0 & pz_1 - y_1 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -y_2 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (pz_1 - y_1 s)z_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x_1(-y_2 s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & pz_1 z_2 - y_1 s z_2 - x_1 y_2 s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & p(z_1 z_2) - (x_1 y_2 + y_1 z_2)s \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena dengan mengambil sebarang $X, Y \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga diperoleh $G(XY) = G(X)Y + Xg(Y)$. Berdasarkan Definisi 3.2.1 (i), G adalah *generalized derivation* kanan pada $\mathcal{N}$. ■

Lemma 3.2.4

(i) Jika f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku $f(xy) = xd(y) + f(x)y$.

(ii) Jika f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku $f(xy) = xf(y) + d(x)y$.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

(i) Karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f\{x(y+y)\} = f(x)(y+y) + xd(y+y).$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri dan d adalah *additive mapping*, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f\{x(y+y)\} &= f(x)y + f(x)y + x\{d(y) + d(y)\} \\ &= f(x)y + f(x)y + xd(y) + xd(y). \quad (3.19) \end{aligned}$$

Di lain pihak f adalah *additive mapping*, sehingga diperoleh

$$f(xy + xy) = f(xy) + f(xy).$$

Karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f(xy + xy) = f(x)y + xd(y) + f(x)y + xd(y) \quad (3.20)$$

Dari persamaan (3.19) dan (3.20) diperoleh

$$\begin{aligned} f\{x(y+y)\} &= f(xy + xy) \\ f(x)y + f(x)y + xd(y) + xd(y) &= f(x)y + xd(y) + \\ &\quad f(x)y + xd(y). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$f(x)y + xd(y) = xd(y) + f(x)y. \qquad (3.21)$$

Berdasarkan Definisi 3.2.2 (i), maka persamaan (3.21) menjadi

$$f(xy) = xd(y) + f(x)y. \qquad \blacksquare$$

(ii) Karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f\{x(y + y)\} = d(x)(y + y) + xf(y + y).$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri dan f adalah *additive mapping*, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f\{x(y + y)\} &= d(x)y + d(x)y + x\{f(y) + f(y)\} \\ &= d(x)y + d(x)y + xf(y) + xf(y). \qquad (3.22) \end{aligned}$$

Di lain pihak f adalah *additive mapping*, sehingga diperoleh

$$f(xy + xy) = f(xy) + f(xy).$$

Karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f(xy + xy) = d(x)y + xf(y) + d(x)y + xf(y). \qquad (3.23)$$

Dari persamaan (3.22) dan (3.23) diperoleh

$$\begin{aligned} f\{x(y + y)\} &= f(xy + xy) \\ d(x)y + d(x)y + xf(y) + xf(y) &= d(x)y + xf(y) + \\ &\quad d(x)y + xf(y). \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$d(x)y + xf(y) = xf(y) + d(x)y. \qquad (3.24)$$

Berdasarkan Definisi 3.2.2 (ii), maka persamaan (3.24) menjadi

$$f(xy) = xf(y) + d(x)y. \qquad \blacksquare$$

Lemma 3.2.5

(i) Jika f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku
$\{f(x)y + xd(y)\}z = f(x)yz + xd(y)z.$

(ii) Jika f *generalized derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku
$\{d(x)y + xf(y)\}z = d(x)yz + xf(y)z.$

(Golbasi, 2006)

Bukti:

(i) Karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} f\{(xy)z\} &= f(xy)z + xyd(z) \\ &= \{f(x)y + xd(y)\}z + xyd(z). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Di lain pihak karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f\{x(yz)\} = f(x)yz + xd(yz).$$

Karena d *derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f\{x(yz)\} = f(x)yz + x\{yd(z) + d(y)z\}.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$f\{x(yz)\} = f(x)yz + xyd(z) + xd(y)z. \quad (3.26)$$

Dari persamaan (3.25) dan (3.26) diperoleh

$$\begin{aligned} f\{(xy)z\} &= f\{x(yz)\} \\ \{f(x)y + xd(y)\}z + xyd(z) &= f(x)yz + xyd(z) + \\ &\quad xd(y)z \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$\{f(x)y + xd(y)\}z = f(x)yz + xd(y)z. \qquad \blacksquare$$

(ii) Karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f\{(xy)z\} = f(xy)z + xyd(z).$$

Karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f\{(xy)z\} = \{d(x)y + xf(y)\}z + xyd(z) \quad (3.27)$$

Di lain pihak karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f\{x(yz)\} = d(x)yz + xf(yz).$$

Karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f\{x(yz)\} = d(x)yz + x\{f(y)z + yd(z)\}.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$f\{x(yz)\} = d(x)yz + xf(y)z + xyd(z) \quad (3.28)$$

Dari persamaan (3.27) dan (3.28) diperoleh

$$f\{(xy)z\} = f\{x(yz)\}$$

$$\{d(x)y + xf(y)\}z + xyd(z) = d(x)yz + xf(y)z + xyd(z)$$

Dengan menngunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$\{d(x)y + xf(y)\}z = d(x)yz + xf(y)z. \quad \blacksquare$$

Lemma 3.2.6

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima, f adalah *generalized derivation* pada *near-ring* $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d dan $a \in \mathcal{N}$.

(i) Jika $af(\mathcal{N}) = 0$, maka $a = 0$.

(ii) Jika $f(\mathcal{N})a = 0$, maka $a = 0$.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

(i) Karena $af(\mathcal{N}) = 0$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$af(xy) = 0.$$

Karena f *generalized derivation* kanan pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$a\{f(x)y + xd(y)\} = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$af(x)y + axd(y) = 0. \quad (3.29)$$

Karena $af(\mathcal{N}) = 0$, maka $af(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathcal{N}$. Sehingga persamaan (3.29) menjadi

$$axd(y) = 0$$

$$a\mathcal{N}d(y) = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* ($d \neq 0$), sehingga diperoleh $a = 0$. $\blacksquare$

(ii) Karena $f(\mathcal{N})a = 0$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$f(xy)a = 0.$$

Karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$\{d(x)y + xf(y)\}a = 0. \quad (3.30)$$

Dengan menggunakan Lemma 3.2.5 (ii), maka persamaan (3.30) menjadi

$$d(x)ya + xf(y)a = 0 \tag{3.31}$$

Karena $f(\mathcal{N})a = 0$, maka $f(y)a = 0$ untuk setiap $y \in \mathcal{N}$. Sehingga persamaan (3.31) menjadi

$$d(x)ya = 0$$
$$d(x)\mathcal{N}a = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* ($d \neq 0$), sehingga diperoleh $a = 0$. ■

Lemma 3.2.7

Misalkan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d. Jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima dan $f^2 = 0$, maka $f = 0$.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Karena $f^2 = 0$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$f^2(xy) = 0$$
$$f\{f(xy)\} = 0.$$

Karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f\{d(x)y + xf(y)\} = 0.$$

Karena f adalah *additive mapping*, sehingga diperoleh

$$f\{d(x)y\} + f\{xf(y)\} = 0.$$

Karena f *generalized derivation* kiri pada *near-ring* $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$d\{d(x)\}y + d(x)f(y) + d(x)f(y) + xf\{f(y)\} = 0$$
$$d^2(x)y + d(x)f(y) + d(x)f(y) + xf^2(y) = 0$$
$$d^2(x)y + 2\,d(x)f(y) + xf^2(y) = 0. \tag{3.32}$$

Karena $f^2 = 0$, maka persamaan (3.32) menjadi

$$d^2(x)y + 2\,d(x)f(y) = 0. \tag{3.33}$$

Dengan mengganti $y = f(y)$ dalam persamaan (3.33), sehingga diperoleh

$$d^2(x)f(y) + 2d(x)f\{f(y)\} = 0$$
$$d^2(x)f(y) + 2d(x)f^2(y) = 0 \tag{3.34}$$

Karena $f^2 = 0$, maka $f^2(y) = 0$ untuk setiap $y \in \mathcal{N}$, sehingga persamaan (3.34) menjadi

$$d^2(x)f(y) = 0.$$
$$d^2(x)f(\mathcal{N}) = 0.$$

Dengan menggunakan Lemma 3.2.6 (i), maka $d^2 = 0$.

Karena $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima dan berdasarkan Lemma 3.1.9 (iv) maka $d = 0$ adalah sebuah kontradiksi, karena d adalah *nonzero derivation* ($d \neq 0$), sehingga diperoleh $f = 0$. ■

Lemma 3.2.8

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dengan *nonzero generalized derivation* f yang dikaitkan dengan *nonzero derivation* d. Jika $f(\mathcal{N}) \subset C$, maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif, berdasarkan Definisi 3.1.5 (i) dibuktikan bahwa $\langle x, y \rangle = 0$. Misalkan $a \in \mathcal{N}$ sedemikian sehingga $f(a) \neq 0$. Jadi $f(a) \in C \setminus \{0\}$ dan $f(a) + f(a) \in C \setminus \{0\}$. Untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$(x + y)\{f(a) + f(a)\} = \{f(a) + f(a)\}(x + y).$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$xf(a) + xf(a) + yf(a) + yf(a) = f(a)x + f(a)y + f(a)x + f(a)y.$$

Karena $f(a) \in C$, sehingga diperoleh

$$f(a)x + f(a)x + f(a)y + f(a)y = f(a)x + f(a)y + f(a)x + f(a)y.$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$f(a)x + f(a)y = f(a)y + f(a)x$$
$$f(a)x + f(a)y - f(a)x - f(a)y = 0$$
$$f(a)(x + y - x - y) = 0. \qquad (3.35)$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (i), maka untuk setiap $a \in \mathcal{N}$ persamaan (3.35) menjadi

$$f(a)\langle x, y\rangle = 0$$
$$f(\mathcal{N})\langle x, y\rangle = 0.$$

Karena $f(\mathcal{N}) \subset C$, sehingga diperoleh $\langle x, y\rangle f(\mathcal{N}) = 0$.
Dengan menggunakan Lemma 3.2.6 (i), maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh $\langle x, y\rangle = 0$. Berdasarkan Definisi 3.1.5 (i), maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya dibuktikan jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.
Karena $f(\mathcal{N}) \subset C$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$zf(xy) = f(xy)z.$$

Karena f *generalized derivation* kiri, sehingga diperoleh

$$z\{d(x)y + xf(y)\} = \{d(x)y + xf(y)\}z.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, dan berdasarkan Lemma 3.2.5(ii), sehingga diperoleh

$$zd(x)y + zxf(y) = d(x)yz + xf(y)z. \tag{3.36}$$

Karena $f(\mathcal{N}) \subset C$, maka $f(y) \in C$ untuk setiap $y \in \mathcal{N}$, sehingga persamaan (3.36) menjadi

$$zd(x)y + zxf(y) = d(x)yz + xzf(y)$$
$$zd(x)y - d(x)yz = xzf(y) - zxf(y)$$
$$= (xz - zx)f(y). \tag{3.37}$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (ii), maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{N}$ persamaan (3.37) menjadi

$$zd(x)y - d(x)yz = [x, z]f(y). \tag{3.38}$$

Dengan mengganti $z = f(z)$ pada persamaan (3.38), sehingga diperoleh

$$f(z)d(x)y - d(x)yf(z) = [x, f(z)]f(y)$$
$$f(z)\{d(x)y - yd(x)\} = [x, f(z)]f(y) \tag{3.39}$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (ii), maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{N}$ persamaan (3.39) menjadi

$$f(z)[d(x), y] = [x, f(z)]f(y). \tag{3.40}$$

Karena $f(\mathcal{N}) \subset C$, maka $f(z) \in C$ untuk setiap $z \in \mathcal{N}$, sehingga diperoleh $xf(z) = f(z)x$, jadi $[x, f(z)] = 0$. Sehingga persamaan (3.40) menjadi $f(z)[d(x), y] = 0$. Karena f adalah *nonzero generalized derivation* $(f \neq 0)$, maka haruslah $[d(x), y] = 0$. Sehingga dapat disimpulkan $d(\mathcal{N}) \subset C$. Menurut Teorema 3.1.10 jika $d(\mathcal{N}) \subset C$ dan N adalah *2-torsion free near-ring* prima, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif. ■

Teorema 3.2.9
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d. Jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku $f([x,y]) = 0$, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.

(Golbasi, 2006)

Bukti:
Karena $f([x,y]) = 0$ dan dengan mengganti $y = xy$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f([x,xy]) = 0 \tag{3.41}$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (ii), maka persamaan (3.41) menjadi

$$\begin{aligned} f\{x(xy) - (xy)x\} &= 0 \\ f\{x(xy) - x(yx)\} &= 0 \\ f\{x(xy - yx)\} &= 0 \\ f\{x[x,y]\} &= 0. \end{aligned}$$

Karena f *generalized derivation* kiri, sehingga diperoleh

$$d(x)[x,y] + xf([x,y]) = 0. \tag{3.42}$$

Karena $f([x,y]) = 0$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ persamaan (3.42) menjadi

$$\begin{aligned} d(x)[x,y] &= 0 \\ d(x)(xy - yx) &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x)xy - d(x)yx &= 0 \\ d(x)xy &= d(x)yx. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Dengan mengganti $y = yz$ kedalam persamaan (3.43), maka untuk setiap $x, z \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} d(x)xyz &= d(x)yzx \\ d(x)xyz - d(x)yzx &= 0 \\ d(x)(xyz - yzx) &= 0 \\ d(x)y(xz - zx) &= 0 \\ d(x)\mathcal{N}[x,z] &= 0 \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* $(d \neq 0)$, sehingga $[x,z] = 0$. Menurut Definisi 3.1.5 (ii), maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif. ■

Teorema 3.2.10

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d. Jika untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku $f([x,y]) = \pm[x,y]$, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Karena $f([x,y]) = \pm[x,y]$ dan dengan mengganti $y = xy$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$f([x,xy]) = \pm[x,xy] \tag{3.44}$$

Berdasarkan Definisi 3.1.4 (ii), maka persamaan (3.44) menjadi

$$\begin{aligned} f([x,xy]) &= \pm\{x(xy) - (xy)x\} \\ &= \pm\{(xx)y - x(yx)\} \\ &= \pm(x^2y - xyx) \\ &= \pm x(xy - yx) \\ &= \pm x[x,y]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Dilain pihak diperoleh

$$\begin{aligned} f([x,xy]) &= f\{x(xy) - (xy)x\} \\ &= f\{x(xy) - x(yx)\} \\ &= f\{x(xy - yx)\} \\ &= f\{x[x,y]\}. \end{aligned}$$

Karena f *generalized derivation* kiri, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f([x,xy]) &= f\{x[x,y]\} \\ &= d(x)[x,y] + xf([x,y]). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Karena $f([x,y]) = \pm[x,y]$, sehingga persamaan (3.46) menjadi

$$f([x,xy]) = d(x)[x,y] + x(\pm[x,y]). \tag{3.47}$$

Dari persamaan (3.45) dan (3.47) diperoleh

$$\begin{aligned} f([x,xy]) &= f([x,xy]) \\ \pm x[x,y] &= d(x)[x,y] + x(\pm[x,y]). \\ \pm x[x,y] &= d(x)[x,y] \pm x[x,y]. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= d(x)[x,y] \\ &= d(x)(xy - yx). \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ sehingga diperoleh

$$0 = d(x)xy - d(x)yx$$
$$d(x)xy = d(x)yx. \quad (3.48)$$

Dengan mengganti $y = yz$ dalam persamaan (3.48), maka untuk setiap $x, z \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$d(x)xyz = d(x)yzx$$
$$d(x)xyz - d(x)yzx = 0$$
$$d(x)(xyz - yzx) = 0$$
$$d(x)y(xz - zx) = 0$$
$$d(x)N[x, z] = 0$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* ($d \neq 0$), sehingga $[x, z] = 0$. Berdasarkan Definisi 3.1.5 (ii), maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif. ■

Teorema 3.2.11

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d. Jika f adalah homomorfisma pada $\mathcal{N}$, maka f adalah pemetaan identitas.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Karena f adalah homomorfisma pada $\mathcal{N}$, maka untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ berlaku

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

Karena f *generalized derivation* kiri, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$d(x)y + xf(y) = f(x)f(y). \quad (3.49)$$

Dengan mengganti $y = yz$ dalam persamaan (3.49), sehingga diperoleh

$$d(x)yz + xf(yz) = f(x)f(yz).$$

Karena f adalah *generalized derivation* kiri dan f adalah homomorfisma pada $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} d(x)yz + x\{d(y)z + yf(z)\} &= f(x)\{f(y)f(z)\} \\ &= \{f(x)f(y)\}f(z) \\ &= f(xy)f(z). \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$d(x)yz + xd(y)z + xyf(z) = f(xy)f(z).$$

Karena f adalah *generalized derivation* kiri, sehingga diperoleh

$$d(x)yz + xd(y)z + xyf(z) = \{d(x)y + xf(y)\}f(z). \quad (3.50)$$

Berdasarkan Lemma 3.2.5 (ii), maka persamaan (3.50) menjadi

$$\begin{aligned} d(x)yz + xd(y)z + xyf(z) &= d(x)yf(z) + xf(y)f(z). \\ &= d(x)yf(z) + xf(yz) \end{aligned}$$

Karena f adalah *generalized derivation* kiri, sehingga diperoleh

$$d(x)yz + xd(y)z + xyf(z) = d(x)yf(z) + x\{d(y)z + yf(z)\}.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri, sehingga diperoleh

$$d(x)yz + xd(y)z + xyf(z) = d(x)yf(z) + xd(y)z + xyf(z).$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, maka untuk setiap $x, y, z \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} d(x)yz &= d(x)yf(z) \\ d(x)yz - d(x)yf(z) &= 0 \\ d(x)\{y(z) - yf(z)\} &= 0 \\ d(x)y\{z - f(z)\} &= 0 \\ d(x)\mathcal{N}\{z - f(z)\} &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* ($d \neq 0$), maka untuk setiap $z \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} z - f(z) &= 0 \\ f(z) &= z. \end{aligned}$$

Jadi f adalah pemetaan identitas. ■

Teorema 3.2.12

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d. Jika f adalah anti-homomorfisma pada $\mathcal{N}$, maka f adalah pemetaan identitas.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Karena f adalah anti-homomorfisma pada $\mathcal{N}$, maka untuk setiap $x, y \in N$ berlaku

$$f(xy) = f(y)f(x).$$

Karena f *generalized derivation* kiri, sehingga untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$d(x)y + xf(y) = f(y)f(x). \tag{3.51}$$

Dengan mengganti $y = xy$ dalam persamaan (3.51), sehingga diperoleh

$$d(x)xy + xf(xy) = f(xy)f(x).$$

Karena f adalah *generalized derivation* kiri dan f adalah adalah anti-homomorfisma pada $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$d(x)xy + xf(y)f(x) = \{d(x)y + xf(y)\}f(x). \tag{3.52}$$

Berdasarkan Lemma 3.2.5 (ii), maka persamaan (3.52) menjadi

$$d(x)xy + xf(y)f(x) = d(x)yf(x) + xf(y)f(x).$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, maka untuk setiap $x, y \in N$ diperoleh

$$\begin{aligned} d(x)xy &= d(x)yf(x). \\ d(x)xy - d(x)yf(x) &= 0 \\ d(x)\{xy - yf(x)\} &= 0 \\ d(x)y\{x - f(x)\} &= 0 \\ d(x)\mathcal{N}\{x - f(x)\} &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* ($d \neq 0$), maka untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} x - f(x) &= 0 \\ f(x) &= x. \end{aligned}$$

Jadi f adalah pemetaan identitas. ■

Teorema 3.2.13

Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d sedemikian sehingga $d(C) \neq 0$, dan $a \in \mathcal{N}$. Jika untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ berlaku $[f(x), a] = 0$, maka $a \in C$.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Karena $d(C) \neq 0$, untuk setiap $c \in C$ maka $d(c) \neq 0$.
Karena d adalah derivation, maka jelas bahwa $d(c) \in C$.
Karena $[f(x), a] = 0$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} f(x)a - af(x) &= 0 \\ f(x)a &= af(x). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Dengan mengganti $x = cx$ dalam persamaan (3.54), sehingga diperoleh

$$f(cx)a = af(cx).$$

Karena f adalah *generalized derivation* kiri pada $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$\{d(c)x + cf(x)\}a = a\{d(c)x + cf(x)\}.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri dan dengan menggunakan Lemma 3.2.5 (ii), sehingga diperoleh

$$d(c)xa + cf(x)a = a\,d(c)x + acf(x)$$
$$d(c)xa + cf(x)a - ad(c)x - acf(x) = 0$$
$$d(c)xa - ad(c)x + cf(x)a - acf(x) = 0$$
$$d(c)xa - ad(c)x + c\{f(x)a - af(x)\} = 0$$
$$d(c)xa - ad(c)x + c[f(x), a] = 0. \quad (3.55)$$

Karena $[f(x), a] = 0$, maka persamaan (3.55) menjadi

$$d(c)xa - ad(c)x = 0. \quad (3.56)$$

Dengan mengganti $x = xy$ dalam persamaan (3.56), dan $d(c) \in C$ sehingga diperoleh

$$d(c)xya - ad(c)xy = 0$$
$$d(c)xya - d(c)axy = 0$$
$$d(c)x\{(ya - ay)\} = 0$$
$$d(c)x[y, a] = 0$$
$$d(c)\mathcal{N}[y, a] = 0$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan d adalah *nonzero derivation* $(d \neq 0)$, sehingga untuk setiap $y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$[y, a] = 0$$
$$ya - ay = 0$$
$$ya = ay.$$

Jadi $a \in C$. ■

Teorema 3.2.14 (*Generalized Derivation*)
Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d dan $a \in \mathcal{N}$. Jika untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ berlaku
$[f(x), a] = 0$, maka $d(a) \in C$.

(Golbasi, 2006)

Bukti:

Jika $a = 0$, maka tidak perlu dibuktikan. Selanjutnya $a \neq 0$ dan berlaku $[f(x), a] = 0$, sehingga diperoleh

$$f(x)a - af(x) = 0$$

$$f(x)a = af(x). \tag{3.57}$$

Dengan mengganti $x = ax$ dalam persamaan (3.57), sehingga diperoleh

$$f(ax)a = af(ax).$$

Karena f adalah *generalized derivation* kiri pada $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$\{d(a)x + af(x)\}a = a\{d(a)x + af(x)\}.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* maka berlaku sifat distributif kiri dan dengan menggunakan Lemma 3.2.5 (ii), sehingga diperoleh

$$d(a)xa + af(x)a = a\,d(a)x + aaf(x). \tag{3.58}$$

Karena $[f(x), a] = 0$, jadi $f(x)a = af(x)$, sehingga persamaan (3.58) menjadi

$$d(a)xa + aaf(x) = ad(a)x + aaf(x).$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi penjumlahan, maka untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$d(a)xa = ad(a)x. \tag{3.59}$$

Dengan mengganti $x = xy$ dalam persamaan (3.59), maka untuk setiap $y \in \mathcal{N}$ diperoleh

$$d(a)xya = ad(a)xy$$

$$d(a)xya - ad(a)xy = 0$$

$$d(a)x\{(ya - ay)\} = 0$$

$$d(a)\mathcal{N}[y, a] = 0.$$

Karena $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima maka $d(a) = 0$ atau $a \in C$. Jika $a \neq 0 \in C$ dan menurut Lemma 3.1.9 (ii) maka $(\mathcal{N}, +)$ grup adalah komutatif, jadi $f(xa) = f(ax)$.

Karena f adalah *generalized derivation* kanan dan kiri pada $\mathcal{N}$, sehingga diperoleh

$$f(x)a + xd(a) = d(a)x + af(x)$$

$$f(x)a + xd(a) - d(a)x - af(x) = 0$$

$$\{f(x)a - af(x)\} + \{xd(a) - d(a)x\} = 0$$

$$[f(x), a] + [x, d(a)] = 0. \tag{3.60}$$

Karena $[f(x), a] = 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{N}$ maka persamaan (3.60) menjadi

$$[x, d(a)] = 0$$
$$xd(a) - d(a)x = 0$$
$$xd(a) = d(a)x.$$

Jadi $d(a) \in C$. ■

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari pembahasan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dengan *nonzero derivation* d. Jika $d(\mathcal{N}) \subset C$, maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free*, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.
2. Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dengan *nonzero generalized derivation* f yang dikaitkan dengan *nonzero derivation* d. Jika $f(\mathcal{N}) \subset C$, maka $(\mathcal{N}, +)$ adalah grup komutatif. Selanjutnya jika $\mathcal{N}$ adalah *2-torsion free near-ring* prima, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif.
3. Misalkan $\mathcal{N}$ adalah *near-ring* prima dan f adalah *generalized derivation* pada $\mathcal{N}$ dengan *nonzero derivation* d. Jika $f([x,y]) = 0$ atau $f([x,y]) = \pm[x,y]$, untuk setiap $x, y \in \mathcal{N}$, maka $\mathcal{N}$ adalah ring komutatif. Selanjutnya jika $a \in \mathcal{N}$ dan $[f(x), a] = 0$, untuk setiap $x \in \mathcal{N}$, maka $a \in C$ atau $d(a) \in C$, di mana C adalah *center* pada $\mathcal{N}$.

4.2 Saran

Dalam skripsi isi hanya dibahas satu *generalized derivation* pada *2-torsion free near-ring* prima, selanjutnya skripsi ini dapat dikembangkan pada dua *generalized derivation* pada *2-torsion free near-ring* prima.

DAFTAR PUSTAKA

Argac, N., 1997, *On Prime and Semiprime Near-rings with Derivations*, Department of Mathematics, Ege University, Turkey, Intenat. J. Math. and Math. Sci., Volum 20, Nomor 4, Halaman 737-740.

Bell, H. E. and Mason, G., 1987, *On Derivations in Near-rings, Near-rings and Near-field*, North-Hollandn Mathematical Studies 137, Amsterdam, Halaman 31-35.

Bell, H. E. and Mason, G., 1992, *On Derivation in Near-rings and Rings*, Math. J. Okayama University, Volum 34, Halaman 135-144.

Bhattacharya, P. B., dkk., 1990, *Basic Abstract Algebra*, Cambridge University Press, New York, Halaman 29-23.

Bresar, M., 1991, *On the Distance of the Composition to the Generalized Derivations*, Glasgow Math. J., Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, University of Liubijana, Yugoslavia, Volum 33, Halaman 89-93.

Dummit, D. S. and Foote, R. M., 2002, *Abstract Algebra Second Edition*, John Wiley and Sons, Inc., New York, Halaman 224-231.

Durbin, J. R., 1992, *Modern Algebra an Introduction Third Edition*, John Wiley and Sons, Inc., New York, Halaman 34-37.

Golbasi O. and Aydin N., 2004, *Results on Prime Near-ring with* $(\sigma,\tau)-$ *Derivation*, Math. J. Okayama University, Volum 46, Halaman 1-7.

Golbasi, O., 2006, *Notes on Prime Near-rings with Generalized Derivation*, Department of Mathematics, Cumhuriyet University, Turkey, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, Volum 30, Halaman 49-54.

Golbasi, O., 2006, *On Genelized Derivations of Prime Near-rings*, Department of Mathematics, Cumhuriyet University, Turkey, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volum 35, Nomor 2, Halaman 173-180.

Hidayanto, E. dan Irawati S., 2000, *Struktur Aljabar II*, Jurusan Pendidikan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Malang, Malang, Halaman 27-30.

Hvala, B., 1998, *Generalized Derivation in Rings*, Comm. Algebra, Volum 26, Halaman 1147-1166.

Isnarto, 2008, *Pengantar Struktur Aljabar I*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Semarang, Semarang, Halaman 16.

Kandasamy, W. B. V., 2002, *Smarandache Near-rings*, Department of Mathematics Indian Institue of Technology, American Research Press, Madrass Chennai-600036, India, Halaman 19-20.

Kresyszig, E., 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, John Wiley and Sons, Inc, New York, Halaman 213-214.

Ozturk, M. A. dan Ceven, Y., 2008, *On* (σ, τ)*-Gamma-Derivations in Gamma-Near-rings*, Department of Mathematics, faculty of Arts and science, Cumhuriyet University, Turkey, Volum 1, Nomor 1, Halaman 1-10.

Park, K. H. dan Jung Y. S., *On Permuting 3-Derivations and Commutativity in Prime Near-rings*, 2010, Commun, Korean Math., Soc., Volum 25, Nomor 1, Halaman 1-9.

Pilz, G., 1983, *Near-rings Second Edition*, North Holland, Amsterdam, Halaman 10.

Wang, X. K., 1994, *Derivations in Prime Near-rings*, Department of Mathematics, Hubei University, China, Proceedings of the American Mathematical Society, Volum 121, Nomor 2, Halaman 361-366.

Wendt, G., 2009, *On Zero Divisors in Near-rings*, Institut Fur Algebra, Johannes Kepler Universitat Linz, International Journal of Algebra, Volum 3, Nomor 1, Halaman 21-32.

Whitelaw, T. A., 1995, *Introduction to Abstract Algebra*, Department of Mathematics University of Glasgow, Blackie Academic and Professional, New York, Halaman 61-68.