

DINAMIKA MODEL DIFUSI PADA POPULASI PLANKTON

SKRIPSI

Oleh:
APRILIA WULANSARI
0610940008-94



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

DINAMIKA MODEL DIFUSI PADA POPULASI PLANKTON

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

APRILIA WULANSARI

0610940008-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
DINAMIKA MODEL DIFUSI PADA POPULASI PLANKTON

Oleh:
APRILIA WULANSARI
0610940008-94

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 18 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

DOSEN PEMBIMBING I DOSEN PEMBIMBING II

Dr. Wuryansari M.K., M.Si.
NIP. 196607281993032001

Drs. Moh. Muslikh, M.Si.
NIP. 195910311989121001

MENGETAHUI
KETUA JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MIPA UNIVERSITAS BRAWIJAYA

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : APRILIA WULANSARI
NIM : 0610940008
Jurusan : MATEMATIKA
Judul Skripsi : DINAMIKA MODEL DIFUSI PADA
POPULASI PLANKTON

Dengan ini menyatakan bahwa :

- 1. isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka Skripsi ini,**
- 2. apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 18 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(APRILIA WULANSARI)
NIM. 0610940008

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

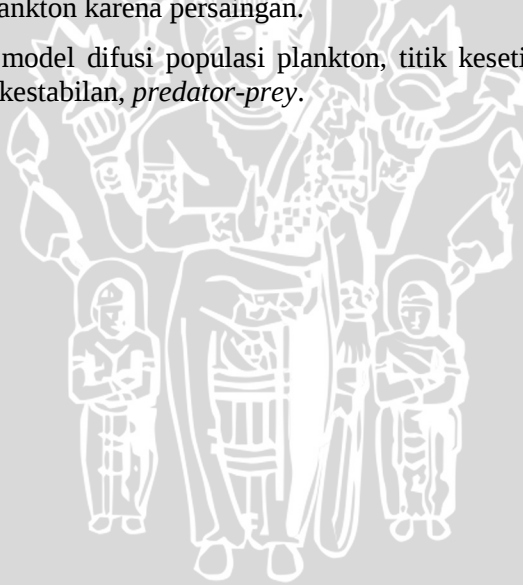


DINAMIKA MODEL DIFUSI PADA POPULASI PLANKTON

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis model populasi *predator-prey*, yaitu plankton, dengan zooplankton sebagai *predator* dan fitoplankton sebagai *prey*. Berbeda dari model predator prey biasa, pada konstruksi model, dipandang model *predator-prey* yang memuat fenomena difusi. Hal ini menunjukkan bahwa tidak hanya terjadi perubahan kepadatan plankton terhadap waktu tetapi juga perpindahan posisi plankton di perairan. Analisis model populasi plankton dibedakan menjadi model tanpa difusi dan model dengan difusi. Titik kesetimbangan model dipengaruhi oleh laju maksimum perubahan kepadatan populasi fitoplankton dan laju berkurangnya populasi zooplankton karena persaingan.

Kata kunci : model difusi populasi plankton, titik kesetimbangan, kestabilan, *predator-prey*.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICAL OF DIFFUSION MODEL AT PLANKTON POPULATION

ABSTRACT

This final project discusses construction and analysis model of predator prey population, namely plankton population. In this model, zooplankton acts predator and phytoplankton acts prey. Different from usual predator prey model, this model involves diffusive phenomenon, which shows that plankton density not only changes in time but also in position. Dynamical analysis on the model is divided into two cases, namely model without diffusion and model with diffusion. Equilibrium points of this model depend on the maximum rate of phytoplankton density change and reduced rate of zooplankton population because of competition.

Keyword : diffusive model of plankton population, equilibrium point, stability, predator-prey.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr.Wb,

Alhamdulillah Robbil 'alamin, segala puji dan syukur kepada Allah SWT Tuhan semesta alam. Atas rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“Dinamika Model Difusi pada Populasi Plankton”**. Skripsi ini merupakan sebagian persyaratan kelulusan dalam memperoleh gelar kesarjanaan di Fakultas MIPA Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.

Pada penyelesaian skripsi ini penulis banyak mendapat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak, karena itu pada kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Wuryansari Muharini K.,M.Si. dan Drs. M.Muslikh,M.Si, selaku dosen pembimbing yang telah meluangkan waktu untuk membimbing, memberikan masukan dan mendorong penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Drs. Hery Subagio, M.Kes. dan Dr. Wuryansari Muharini K.,M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan motivasi, arahan, dan bimbingan selama penulis menempuh kuliah.
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc, Drs. Marsudi, MS., dan Syaiful Anam, S.Si., M.T, selaku dosen penguji pada ujian skripsi.
4. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.
5. Seluruh dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staf administrasi Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Bapak Slamet Subagijo (Alm.) dan ibu Siti Nurhayati serta saudara penulis, Mohammad Rahman Hakim, Dewi Nurmalia dan Rahma Adiba yang senantiasa tanpa henti memberikan semangat dan dorongan serta doanya agar penulis dapat menyelesaikan skripsinya.
7. Keluarga besar Matematika 2006, teman-teman Kos Summersari 290C dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu. Terima kasih.

Semoga Allah SWT memberikan anugerah dan karunia-Nya kepada semua pihak yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih banyak kekurangan, sehingga kritik dan saran pembaca sangat penulis harapkan melalui email wulan.mub@gmail.com.

Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Wassalamualaikum Warohmatullahi Wabarokatuh.

Malang, 18 Agustus 2011

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
 BAB I PENDAHULUAN	 1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	1
1.3 Tujuan Penulisan	2
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	 3
2.1 Plankton	3
2.2 Model <i>Predator Prey</i>	3
2.3 Sistem Dinamik	3
2.3.1 Sistem Otonomous	4
2.3.2 Titik Keseimbangan	4
2.3.3 Sistem Otonomous Linier	4
2.3.4 Sistem Otonomous Nonlinier	8
2.3.5 Sistem Otonomous Nonlinier dengan Difusi	10
2.4 Persamaan Michaelis - Menten	12
 BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	 15
3.1 Pemodelan	15
3.2 Model Tanpa Difusi	17
3.2.1 Titik Keseimbangan Model Tanpa Difusi	17
3.2.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Model Tanpa Difusi	19
3.2.3 Simulasi Numerik Model Tanpa Difusi	23
3.3 Model dengan Difusi	26
3.3.1 Titik Keseimbangan Model dengan Difusi	26

3.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Model dengan Difusi	27
3.4 Interpretasi	36
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	39
4.1 Kesimpulan.....	39
4.2 Saran	39
DAFTAR PUSTAKA	41
LAMPIRAN	43



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Kurva kejenuhan suatu reaksi enzim yang menunjukkan relasi antara konsentrasi substrat (S) dengan kelajuan (v)	13
Gambar 3.1 Plot kasus $\gamma < \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon < 1$ dengan $\gamma = 1$ dan $\varepsilon = 0.5...$	23
Gambar 3.2 Plot kasus $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon < 1$ dengan $\gamma = 3$ dan $\varepsilon = 0.5 ..$	24
Gambar 3.3 Plot kasus $\gamma > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \varepsilon > 1$ dengan $\gamma = 1$ dan $\varepsilon = 4 ..$	25



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1.	Listing Program Titik Keseimbangan Model Tanpa Difusi dengan Metode Runge Kutta Orde Empat Menggunakan <i>Software</i> Maple 13	43
Lampiran 2.	Penurunan Persamaan (3.30) dari Persamaan (3.28) dan (3.29)	44
Lampiran 3.	Penurunan Kriteria Ketidakstabilan Model dengan Difusi	46



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Laut merupakan salah satu sumber kekayaan alam yang penting bagi kehidupan manusia. Di dalamnya terdapat banyak kehidupan, salah satunya adalah kehidupan plankton. Plankton merupakan spesies yang beragam dan dikelompokkan berdasarkan ukuran, habitat dan daur hidupnya.

Sebagai unsur penting dalam kehidupan laut, plankton memegang peranan utama dalam rantai makanan, sehingga keadaannya mampu mengubah kondisi perairan. Plankton terdiri dari dua jenis yaitu fitoplankton dan zooplankton. Fitoplankton mampu membuat makanan sendiri dari lingkungan sekitar dan zooplankton merupakan spesies penghubung rantai makanan dari fitoplankton ke organisme sekitar. Oleh karena itu, keberadaan plankton sangat mempengaruhi kehidupan di perairan. Jika keadaan lingkungan labil yaitu terjadi perubahan ketersediaan nutrisi secara drastis maka kematian organisme perairan dapat terjadi.

Jika suatu populasi plankton mendominasi suatu tempat maka akan terjadi proses penyebaran populasi ke lingkungan sekitar. Proses ini dinamakan difusi, yang menunjukkan bahwa pada populasi plankton tidak hanya terjadi perubahan terhadap waktu tetapi juga terjadi perpindahan posisi.

Pada skripsi ini dibahas interaksi antara fitoplankton dan zooplankton. Model interaksi plankton merupakan pengembangan dari model *predator-prey* dan Michaelis-Menten dengan memperhatikan faktor difusi. Jenis kestabilan titik kesetimbangan ditentukan dengan melakukan linierisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan. Dalam skripsi ini diperhatikan parameter ε yang menyatakan laju perubahan fitoplankton yang harus dipenuhi agar lingkungan tidak labil.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam skripsi ini adalah

1. bagaimana titik tetap dan kestabilan model tanpa difusi ?

2. bagaimana ketidakstabilan model dengan difusi ?
3. bagaimana laju perubahan fitoplankton ε untuk kondisi ketidakstabilan dengan difusi?

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah

1. memperoleh titik tetap dan kestabilan model tanpa difusi,
2. memperoleh ketidakstabilan model dengan difusi,
3. memperoleh laju perubahan fitoplankton ε untuk kondisi ketidakstabilan dengan difusi.



BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Plankton

Plankton meliputi biota yang terapung atau hanyut di perairan. Plankton merupakan komponen penting dalam rantai makanan pada ekosistem laut. Plankton terdiri dari fitoplankton, yaitu plankton tumbuhan atau plankton nabati dan zooplankton, yaitu plankton hewani (Trimaningsih, 2005).

Fitoplankton merupakan komponen autotrof, yaitu organisme yang mampu mensintesis makanannya sendiri dari bahan anorganik dengan bantuan energi matahari. Dalam rantai makanan, komponen autotrof berperan sebagai produsen.

Zooplankton adalah organisme heterotrof, yaitu organisme yang menggunakan fitoplankton sebagai sumber makanannya (Li, 2005). Selain itu zooplankton juga berguna dalam regenerasi nitrogen di lautan dengan proses penguraian nitrogen dengan bantuan zooplankton sehingga berguna bagi bakteri dan produktivitas fitoplankton di laut (Edwards dan Brindley, 1999).

2.2 Model *Predator Prey*

Persamaan diferensial biasa yang menggambarkan interaksi dua spesies *predator-prey* pertama kali digunakan oleh *Volterra* pada tahun 1926 dan dikenal dengan nama model *Volterra*. Model *Volterra* adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(\alpha - cy), \\ \dot{y} &= y(\gamma x - \delta),\end{aligned}\tag{2.1}$$

dengan α, c, γ dan δ adalah konstanta positif, x dan y berturut-turut menyatakan jumlah populasi *prey* dan *predator* pada saat t , sedangkan t adalah waktu dalam bulan atau tahun. Suku αx menyatakan pertumbuhan populasi *prey* tanpa adanya *predator*. Suku $-cxy$ dan γxy menyatakan interaksi spesies. Populasi *prey* berkurang sedangkan populasi *predator* bertambah karena diuntungkan dengan kondisi interaksi ini. Suku $-\delta y$ menunjukkan punahnya *predator* karena tidak adanya *prey* (Stephen, 2010).

2.3 Sistem Dinamik

2.3.1 Sistem Otonomous

Sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y),\end{aligned}\tag{2.2}$$

dengan F dan G tidak bergantung secara eksplisit pada variabel bebas t , tetapi hanya bergantung pada variabel x dan y disebut sistem otonomus (Boyce dan Di Prima, 2001).

2.3.2 Titik Keseimbangan

Jika memenuhi $f(x^*, y^*) = 0$ dan $g(x^*, y^*) = 0$ maka titik (x^*, y^*) disebut titik kritis sistem (2.2). Titik kritis (x^*, y^*) merupakan solusi sistem (2.2) yang bernilai konstan karena $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga (x^*, y^*) disebut juga *titik keseimbangan* atau titik tetap (Boyce dan Di Prima, 2001).

2.3.3 Sistem Otonomous Linier

Suatu sistem otonomus dikatakan linier jika tidak terdapat perkalian di antara variabel tak bebasnya. Sistem otonomus linier dua dimensi dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Persamaan (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

atau

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x}, \quad (2.4)$$

dengan $\bar{x} = (x, y)^T$ dan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ disebut matriks koefisien. Jika $\det(A) \neq 0$, maka titik $(0,0)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem otonomus linier tersebut (Boyce dan Di Prima, 2001).

Sifat kestabilan titik kesetimbangan (x^*, y^*) dibedakan menjadi tiga, yaitu titik (x^*, y^*) dikatakan

- i. stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$, maka berlaku $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon, \forall t > 0$,
- ii. tak-stabil apabila tidak memenuhi kriteria pertama,
- iii. stabil asimtotik jika stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ yang memenuhi $\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$ akan bersifat $\lim_{x \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$ (Boyce dan Di Prima, 2001).

Kestabilan titik kesetimbangan $(0,0)$ sistem 2.3 dapat ditentukan dengan menggunakan nilai eigen matriks A dan dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.1

Misalkan λ_1 dan λ_2 nilai-nilai eigen matriks A.

1. Jika $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$ dan $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ maka titik (0,0) stabil asimtotik.
2. Jika $\lambda_1 = i\beta$ dan $\lambda_2 = -i\beta, \beta \in \mathbb{R}$ maka titik (0,0) stabil.
3. Jika $\lambda_1 > 0$ atau $\lambda_2 > 0$ atau $\operatorname{Re}(\lambda_1) > 0$ dan $\operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$ maka titik (0,0) tidak stabil.

Bukti

Solusi umum persamaan (2.3) adalah

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

di mana $\vec{v}_1$ dan $\vec{v}_2$ masing-masing menyatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ_1 dan λ_2 , c_1 dan c_2 adalah sebarang konstanta. Dari solusi umum tersebut diperoleh beberapa kemungkinan berikut.

1. Jika λ_1 dan λ_2 bernilai negatif maka $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x} = \vec{0}$. Dengan kata lain, semakin besar nilai t , solusi akan menuju ke titik kritis (0,0). Menurut kriteria kestabilan, titik kritis (0,0) bersifat stabil asimtotik. Jika $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ dan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, dengan $\alpha < 0$ maka solusi dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \vec{x} &= c_1 \vec{v}_1 e^{(\alpha + \beta i)t} + c_2 \vec{v}_2 e^{(\alpha - \beta i)t} \\ &= c_1 \vec{v}_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin t) + c_2 \vec{v}_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin t). \end{aligned}$$

Karena terdapat suku eksponensial pangkat negatif, maka semakin besar nilai t , solusi akan berosilasi menuju ke titik kritis (0,0).

2. Jika $\lambda_1 = i\beta$ atau $\lambda_2 = -i\beta$, maka solusi dapat ditulis sebagai

$$\vec{x} = c_1 \vec{v}_1 (\cos \beta t + i \sin t) + c_2 \vec{v}_2 (\cos \beta t - i \sin t).$$

Karena $\cos \beta t$ dan $\sin t$ merupakan fungsi periodik, maka solusi akan terus berosilasi di sekitar titik kritis, sehingga menurut

kriteria kestabilan, titik kritis (0,0) bersifat stabil atau sering disebut stabil pusat.

3. Jika λ_1 atau λ_2 atau $\text{Re}(\lambda_1)$ dan $\text{Re}(\lambda_2)$ bernilai positif, maka $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x} = \infty$. Dengan kata lain, semakin besar nilai t , solusi akan menjauhi titik kritis (0,0). Menurut kriteria kestabilan, titik kritis (0,0) bersifat tidak stabil. Jika $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ dan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, dengan $\alpha > 0$, maka semakin besar nilai t , solusi akan berosilasi menjauhi titik kritis (0,0).

Untuk menentukan nilai eigen matriks A digunakan persamaan karakteristik

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$$

yang menghasilkan persamaan

$$\lambda^2 - \lambda(a + d) + (ad - bc) = 0. \quad (2.5)$$

Perhatikan bahwa

$$a + d = \text{trace}(A),$$

$$ad - bc = \det(A),$$

sehingga persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai

$$\lambda^2 - \text{trace}(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

Persamaan tersebut memiliki dua solusi, yaitu

$$\lambda_1 = \frac{\text{trace}(A) + \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}$$

dan

$$\lambda_2 = \frac{\text{trace}(A) - \sqrt{(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A)}}{2}.$$

(2.6)

Berdasarkan nilai $\text{trace}(A)$ dan $\det(A)$ diperoleh beberapa kemungkinan berikut.

1. Jika $\text{trace}(A) < 0$ dan $\det(A) > 0$ serta $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$ maka diperoleh $\lambda_1 < 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Sedangkan jika $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) < 0$ maka $\lambda_1 = p + iq$ dan $\lambda_2 = p - iq$ dengan $p < 0$. Jadi jika $\text{trace}(A) < 0$ dan $\det(A) > 0$ maka titik kesetimbangan $(0,0)$ stabil asimtotik.
2. Jika $\text{trace}(A) < 0$ dan $\det(A) < 0$ serta $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$ maka diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Jadi jika $\text{trace}(A) < 0$ dan $\det(A) < 0$ maka titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak stabil.
3. Jika $\text{trace}(A) > 0$ dan $\det(A) > 0$ serta $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) \geq 0$ maka diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 > 0$. Sedangkan jika $(\text{trace}(A))^2 - 4\det(A) < 0$ maka $\lambda_1 = p + iq$ dan $\lambda_2 = p - iq$ dengan $p > 0$. Jadi jika $\text{trace}(A) > 0$ dan $\det(A) > 0$ maka titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak stabil.
4. Jika $\text{trace}(A) > 0$ dan $\det(A) < 0$ maka diperoleh $\lambda_1 > 0$ dan $\lambda_2 < 0$. Titik kesetimbangan $(0,0)$ tidak stabil (Elaydi, 2005).

2.3.4 Sistem Otonomous Nonlinier

Sistem persamaan (2.2) dengan dua variabel tidak bebas x dan y merupakan sistem persamaan diferensial nonlinier jika variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu dan atau sistem memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Boyce dan Di Prima, 2001).

Misalkan F dan G mempunyai turunan parsial yang kontinu di (x^*, y^*) . Deret Taylor fungsi dua variabel F dan G di sekitar titik (x^*, y^*) adalah

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= F(x^*,y^*) + \frac{\partial F(x^*,y^*)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial F(x^*,y^*)}{\partial y}(y-y^*) \\
&\quad + \eta_1(x,y), \\
G(x,y) &= G(x^*,y^*) + \frac{\partial G(x^*,y^*)}{\partial x}(x-x^*) + \frac{\partial G(x^*,y^*)}{\partial y}(y-y^*) \\
&\quad + \eta_2(x,y),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

dengan $\eta_1(x,y)$ dan $\eta_2(x,y)$ adalah suku sisa.

Karena $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x-x^*)$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(y-y^*)$, maka persamaan (2.7) dapat ditulis dalam bentuk matriks, sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(x^*,y^*) \\ G(x^*,y^*) \end{bmatrix} + J(x^*,y^*) \begin{bmatrix} x-x^* \\ y-y^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x,y) \\ \eta_2(x,y) \end{bmatrix}, \tag{2.8}$$

$$\text{dengan } J(x^*,y^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{bmatrix} \bigg|_{(x^*,y^*)} \tag{2.9}$$

adalah matriks Jacobi atau *partial derivative matrix* (*derivative matrix*).

Jika dimisalkan $\hat{x} = x - x^*$, $\hat{y} = y - y^*$, dan karena $F(x^*,y^*) = G(x^*,y^*) = 0$, maka persamaan (2.8) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}}{dt} \\ \frac{d\hat{y}}{dt} \end{bmatrix} = J(x^*,y^*) \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}. \tag{2.10}$$

Bentuk (2.10) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = J\bar{w} + \bar{\eta}, \tag{2.11}$$

dengan $\bar{w} = (\hat{x}, \hat{y})$ dan $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$. Untuk hampiran orde satu, suku sisa memenuhi sifat

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_1(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x^*, y^*)} \frac{\eta_2(x, y)}{\|\vec{w}\|} = 0.$$

Bila titik (x, y) cukup dekat dengan (x^*, y^*) , maka $(\hat{x}, \hat{y})$ bernilai kecil yaitu $\hat{x} \rightarrow 0$ dan $\hat{y} \rightarrow 0$, sehingga $\|\vec{\eta}\| \ll \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta} \rightarrow 0$ sehingga $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan persamaan (2.2) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.12)$$

Untuk $x = x^*, y = y^*$ diperoleh $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$, sehingga sistem linier (2.12) memiliki titik kesetimbangan $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ dan J identik dengan A pada persamaan (2.4).

Teorema 2.2

- 1 Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan bersifat stabil asimtotik,
- 2 Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinearkan bersifat tak stabil,
- 3 Jika salah satu nilai eigen matriks bernilai nol dan yang lainnya mempunyai bagian riil negatif, maka titik kesetimbangannya bersifat stabil tetapi tidak stabil asimtotik (Robinson, 2004).

2.3.5 Sistem Otonomus Nonlinier dengan Difusi

Misalkan dua unsur kimia berdifusi dan bereaksi maka sistem otonomus nonlinier dua dimensi dengan difusi dapat ditulis sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_1}{\partial t} &= R_1(C_1, C_2) + D_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} &= R_2(C_1, C_2) + D_2 \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

dengan

$R_1(C_1, C_2)$ = tingkat produksi C_1 ,

$R_2(C_1, C_2)$ = tingkat produksi C_2 ,

D_1 = koefisien difusi unsur kimia 1,

D_2 = koefisien difusi unsur kimia 2.

Ketika kondisi *spatial uniform steady state* memenuhi definisi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{C}_i}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{C}_i}{\partial x^2} &= 0.\end{aligned}\quad (i = 1, 2)$$

Misalkan

$$C'_1(x, t) = C_1(x, t) - \bar{C}_1,$$

$$C'_2(x, t) = C_2(x, t) - \bar{C}_2,$$

diperoleh bentuk linierisasi dari sistem (2.13), yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial C'_1}{\partial t} &= a_{11}C'_1 + a_{12}C'_2 + D_1 \frac{\partial^2 C'_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial C'_2}{\partial t} &= a_{21}C'_1 + a_{22}C'_2 + D_2 \frac{\partial^2 C'_2}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (2.14)$$

di mana

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left. \frac{\partial R_1}{\partial C_1} \right|_{\bar{C}_1, \bar{C}_2}, & a_{12} &= \left. \frac{\partial R_1}{\partial C_2} \right|_{\bar{C}_1, \bar{C}_2}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial R_2}{\partial C_1} \right|_{\bar{C}_1, \bar{C}_2}, & a_{22} &= \left. \frac{\partial R_2}{\partial C_2} \right|_{\bar{C}_1, \bar{C}_2}.\end{aligned}$$

Solusi yang mungkin dari bentuk difusi adalah

$$C' = \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{(\omega t + ikx)},$$

sehingga bentuk (2.14) dapat ditulis menjadi

$$\alpha_1 \omega = a_{11} \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 - D_1 k^2 \alpha_1,$$

$$\alpha_2 \omega = a_{21} \alpha_1 + a_{22} \alpha_2 - D_2 k^2 \alpha_2,$$

atau

$$\alpha_1 (\omega - a_{11} + D_1 k^2) + \alpha_2 (-a_{12}) = 0, \quad (2.15)$$

$$\alpha_1 (-a_{21}) + (\omega - a_{22} + D_2 k^2) \alpha_2 = 0.$$

Persamaan karakteristik dengan difusi dari (2.15) sebagai berikut.

$$\omega^2 - \{(a_{11} + a_{22}) - (D_1 + D_2) k^2\} \omega + (a_{11} - k^2 D_1)(a_{22} - k^2 D_2) - a_{12} a_{21} = 0.$$

Syarat perlu dan cukup untuk ketidakstabilan sistem (2.13) dengan difusi dituliskan sebagai berikut.

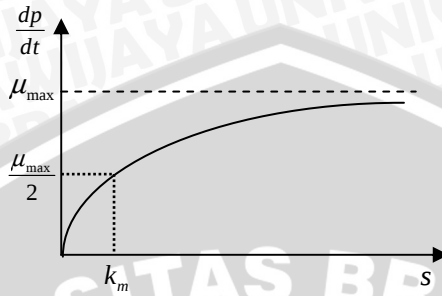
1. $a_{11} + a_{22} < 0$
 2. $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} > 0$
 3. $a_{11} D_2 + a_{22} D_1 > 2 \sqrt{D_1 D_2} (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21})^{\frac{1}{2}} > 0$ (2.16)
- (Edelstein dan Keshet, 1988).

2.4 Persamaan Michaelis-Menten

Persamaan Michaelis-Menten menyatakan hubungan antara konsentrasi substrat s dan kecepatan pembentukan produk $\frac{dp}{dt}$ yang menjadi dasar kinetika reaksi substrat-enzim (Lehninger, 1997). Secara matematis persamaan Michaelis-Menten dinyatakan sebagai

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\mu_{\max} s}{k_m + s}. \quad (2.17)$$

Tetapan Michaelis-Menten dinotasikan sebagai k_m , yaitu konsentrasi substrat pada saat kecepatan reaksi $\frac{dp}{dt}$ mencapai setengah kecepatan maksimum $\mu_{\max}$. Grafik hubungan antara laju reaksi enzim dan konsentrasi substrat menurut Michaelis-Menten dapat dilihat pada Gambar 2.2.



Gambar 2.1 Laju pembentukan enzim terhadap konsentrasi substrat.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Pemodelan

Pada bagian ini dibahas langkah-langkah konstruksi model *predator-prey* dengan difusi. Populasi plankton dibedakan menjadi dua, yaitu populasi fitoplankton sebagai *prey* dan zooplankton sebagai *predator*. Interaksi ini menyatakan dimangsanya *prey* oleh *predator*. Variabel yang digunakan adalah $N_1(x, t)$ dan $N_2(x, t)$ berturut-turut merupakan konsentrasi fitoplankton dan zooplankton pada posisi x dan waktu t .

1. *Prey* merupakan populasi makhluk hidup sehingga laju pertumbuhan dipengaruhi oleh interaksi antar *prey*. Semakin banyak jumlah *prey* maka proses perkembangbiakannya akan banyak dilakukan. Laju perubahan *prey* mengacu pada persamaan Michaelis-Menten dengan interaksi antar *prey* dan dapat dituliskan secara matematis sebagai berikut.

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = N_1 \frac{\varepsilon N_1}{1 + N_1},$$

dimana ε adalah laju perubahan maksimal *prey*.

2. Interaksi antara fitoplankton dan zooplankton mengakibatkan berkurangnya *prey*. Perubahan jumlah *prey* berbanding lurus dengan interaksi antara fitoplankton dengan zooplankton, yaitu

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = -N_1 N_2.$$

3. Selain adanya interaksi antara fitoplankton dan zooplankton terdapat faktor penambahan fitoplankton yang dipengaruhi oleh proses perpindahan tempat oleh *prey*. Oleh karena itu laju perubahan *prey* mengacu pada persamaan difusi sehingga dapat dinyatakan

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}.$$

Dari langkah 1,2 dan 3 diperoleh laju perubahan *prey* pada waktu t , yaitu

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = N_1 \left[\frac{\epsilon N_1}{1 + N_1} - N_2 \right] + D_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}.$$

4. Interaksi antara zooplankton dengan fitoplankton akan menambah jumlah *predator*, sehingga perubahan populasi *predator* berbanding lurus dengan bertambahnya jumlah *predator* akibat interaksi antara fitoplankton dan zooplankton. Laju tersebut dinyatakan dengan

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = N_2 N_1.$$

5. Jumlah populasi *predator* dapat berkurang karena kematian akibat persaingan antar *predator* dengan laju γ , yaitu

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = -\gamma N_2 N_2.$$

6. Terdapat faktor penambahan zooplankton sebagai akibat proses perpindahan tempat oleh *predator*. Oleh karena itu laju perubahan *predator* dinyatakan dengan

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}.$$

Dari langkah 4, 5 dan 6 diperoleh laju perubahan *predator* pada waktu t , yaitu

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = N_1 [N_1 - \gamma N_2] + D_2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}.$$

Dengan demikian model pertumbuhan populasi fitoplankton dan zooplankton memenuhi sistem persamaan otonomous non linier dengan difusi, yaitu

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = N_1 \left[\frac{\epsilon N_1}{1 + N_1} - N_2 \right] + D_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}, \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = N_2 [N_1 - \gamma N_2] + D_2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}. \quad (3.1b)$$

dengan

ε = laju perubahan maksimal *prey*,

γ = laju berkurangnya populasi zooplankton karena persaingan,

D_1 = koefisien difusi pada fitoplankton,

D_2 = koefisien difusi pada zooplankton.

Dalam skripsi ini dibahas analisis ketidakstabilan dari model dengan difusi. Pertama, akan dicari titik kesetimbangan dari sistem (3.1) dan selanjutnya titik kesetimbangan tersebut dianalisis.

3.2 Model Tanpa Difusi

3.2.1 Titik Kesetimbangan Model Tanpa Difusi

Bentuk model tanpa difusi, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= N_1 \left[\frac{\varepsilon N_1}{1 + N_1} - N_2 \right], \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= N_2 [N_1 - \gamma N_2]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Berdasarkan Subbab 2.3.2, titik kesetimbangan sistem (3.2) dapat diperoleh dengan cara membuat ruas kanan sistem (3.2) sama dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = 0 \text{ dan } \frac{\partial N_2}{\partial t} = 0.$$

sehingga titik kesetimbangan diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= N_1 \left[\frac{\varepsilon N_1}{1 + N_1} - N_2 \right] = 0 \\ N_1^* &= 0 \text{ atau } \left[\frac{\varepsilon N_1^*}{1 + N_1^*} - N_2^* \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.3a)$$

dan

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_2}{\partial t} &= N_2 [N_1 - \gamma N_2] = 0 \\ N_2^* &= 0 \text{ atau } [N_1^* - \gamma N_2^*] = 0.\end{aligned}\quad (3.3b)$$

Dengan demikian penyelesaian persamaan (3.3) menghasilkan titik kesetimbangan pertama adalah $E_1 = (0, 0)$.

Selanjutnya dengan melihat persamaan (3.3b), yaitu $[N_1^* - \gamma N_2^*] = 0$ dapat diperoleh

$$\begin{aligned}N_1^* - \gamma N_2^* &= 0 \\ N_1^* &= \gamma N_2^*.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Jika persamaan (3.4) disubstitusikan ke persamaan (3.3a), yaitu

$$\left[\frac{\varepsilon N_1^*}{1 + N_1^*} - N_2^* \right] = 0 \text{ maka}$$

$$\frac{\varepsilon N_1^*}{1 + N_1^*} - N_2^* = 0$$

$$\frac{\varepsilon (\gamma N_2^*)}{1 + (\gamma N_2^*)} - N_2^* = 0.$$

Jika kedua ruas dikalikan dengan $\frac{(1 + \gamma N_2^*)}{N_2^*}$, maka dapat

$$\varepsilon \gamma - (1 + \gamma N_2^*) = 0$$

$$\varepsilon \gamma = 1 + \gamma N_2^*$$

$$\begin{aligned}
N_2^* &= \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \\
N_1^* &= \gamma N_2^* \\
&= \gamma \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \\
&= \varepsilon\gamma - 1.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Berdasarkan persamaan (3.5) titik kesetimbangan ke dua adalah

$$E_2 = \left(\varepsilon\gamma - 1, \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \right).$$

Jadi diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu

$$E_1 = (0, 0) \text{ dan } E_2 = \left(\varepsilon\gamma - 1, \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \right).$$

Titik kesetimbangan dapat bernilai negatif tetapi untuk sistem ini tidak karena menyatakan jumlah *predator-prey* di perairan. Jadi titik kesetimbangan E_2 dijamin ada dan tak negatif jika memenuhi

$$\varepsilon\gamma > 1 \text{ atau } \gamma > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Jika $\varepsilon\gamma = 1$ maka sistem hanya mempunyai titik kesetimbangan tunggal, yaitu E_1 .

3.2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Tanpa Difusi

Misalkan

$$\begin{aligned}
x_1(x, t) &= N_1(x, t) - N_1^*, \\
x_2(x, t) &= N_2(x, t) - N_2^*.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

maka sistem (3.2) dapat dihipotesis oleh sistem linier $\frac{d\bar{x}}{dt} = J\bar{x}$, dengan $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$ dan

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon N_1^* + \varepsilon N_1^{*2}}{(1 + N_1^*)^2} - N_2^* & -N_1^* \\ N_2^* & N_1^* - 2\gamma N_2^* \end{bmatrix},$$

Bentuk linierisasi model tanpa difusi, yaitu

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \left(\frac{2\varepsilon N_1^* + \varepsilon N_1^{*2}}{(1 + N_1^*)^2} - N_2^* \right) x_1 - N_1^* x_2, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= N_2^* x_1 + (N_1^* - 2\gamma N_2^*) x_2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Untuk titik kesetimbangan $E_1 = (N_1^*, N_2^*) = (0, 0)$ maka

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sehingga sistem yang dilinierkan adalah $\frac{\partial x_1}{\partial t} = 0$ dan $\frac{\partial x_2}{\partial t} = 0$ dengan demikian nilai x_1 dan x_2 akan selalu konstan, yaitu

$$x_1 = x_1(0) \text{ dan } x_2 = x_2(0).$$

Jika diperhatikan, sistem pada (3.10) di sekitar (0,0) adalah sistem linier dengan $\det(J) = 0$, yang tidak memenuhi asumsi sistem linier (2.4). Dengan demikian jenis kestabilan E_1 tidak dapat ditentukan.

Untuk titik kesetimbangan $E_2 = \left(\varepsilon\gamma - 1, \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \right)$ diperoleh

$$J(N_1^*, N_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} & 1 - \varepsilon\gamma \\ \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma} & 1 - \varepsilon\gamma \end{bmatrix},$$

dengan

$$\text{trace}(J) = a + d = \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} + 1 - \varepsilon\gamma,$$

$$\det(J) = ad - bc = \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} (1\gamma - \varepsilon) - (1\gamma - \varepsilon) \left(\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma} \right).$$

Titik kesetimbangan E_2 stabil jika $\text{trace}(J) < 0$ dan $\det(J) > 0$.

1. Berdasarkan syarat pertama, yaitu $\text{trace}(J) < 0$ maka

$$\begin{aligned} \text{trace}(J) &= \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} + (1 - \varepsilon\gamma) \\ &= \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} - (\varepsilon\gamma - 1) \\ &= \frac{(\varepsilon\gamma - 1) - \varepsilon\gamma^2 (\varepsilon\gamma - 1)}{\varepsilon\gamma^2} \\ &= \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} (1 - \varepsilon\gamma^2) \end{aligned}$$

Salah satu kondisi kestabilan sistem adalah $\text{trace}(J) < 0$. Karena

$\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} > 0$ maka haruslah $1 - \varepsilon\gamma^2 < 0$ sehingga

$$\text{trace}(J) = \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} (1 - \varepsilon\gamma^2) < 0 \quad (3.9)$$

dari $1 - \varepsilon\gamma^2 < 0$ didapat

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon\gamma^2 &< 0 \\ \varepsilon\gamma^2 &> 1 \\ \gamma^2 &> \frac{1}{\varepsilon} \\ \gamma &> \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Di lain pihak, eksistensi E_2 dijamin apabila

$$\gamma > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.11)$$

Jika $\varepsilon < 1$, maka

$$\gamma > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.12)$$

Untuk memenuhi persamaan (3.10)-(3.11) maka haruslah $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}$.

Jika $\varepsilon > 1$, maka

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Agar $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}$ dan $\gamma > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ haruslah $\gamma > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

2. Syarat ke dua $\det(J) > 0$ menghasilkan kondisi berikut.

$$\begin{aligned} \det(J) &= \frac{\varepsilon\gamma-1}{\varepsilon\gamma^2}(1-\varepsilon\gamma) - (1-\varepsilon\gamma)\frac{\varepsilon\gamma-1}{\gamma} \\ &= -\frac{(\varepsilon\gamma-1)^2}{\varepsilon\gamma^2} + \frac{(\varepsilon\gamma-1)^2}{\gamma} \\ &= \frac{-(\varepsilon\gamma-1)^2 + \varepsilon\gamma(\varepsilon\gamma-1)^2}{\varepsilon\gamma^2} \\ &= \frac{(\varepsilon\gamma-1)^2}{\varepsilon\gamma^2}(\varepsilon\gamma-1) \\ &= \frac{(\varepsilon\gamma-1)^3}{\varepsilon\gamma^2} > 0 \end{aligned}$$

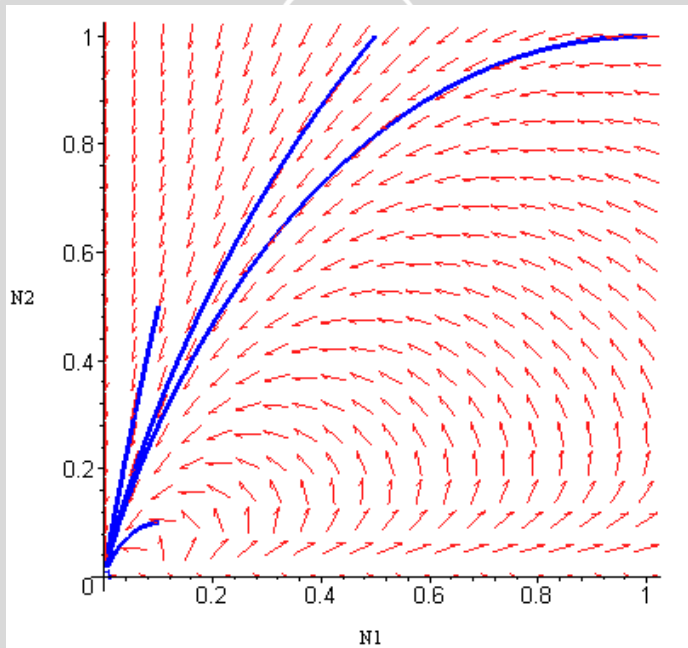
Berdasarkan ketaksamaan (3.6), yaitu $\varepsilon\gamma-1 > 0$ untuk eksistensi E_2 , maka

$$\det(J) = \frac{(\varepsilon\gamma-1)^3}{\varepsilon\gamma^2} > 0 \quad (3.13)$$

Jadi, jika $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}$ maka E_2 eksis dan stabil lokal, dengan $\varepsilon < 1$, tetapi jika $\gamma < \frac{1}{\varepsilon}$, E_2 tidak eksis dan E_1 stabil.

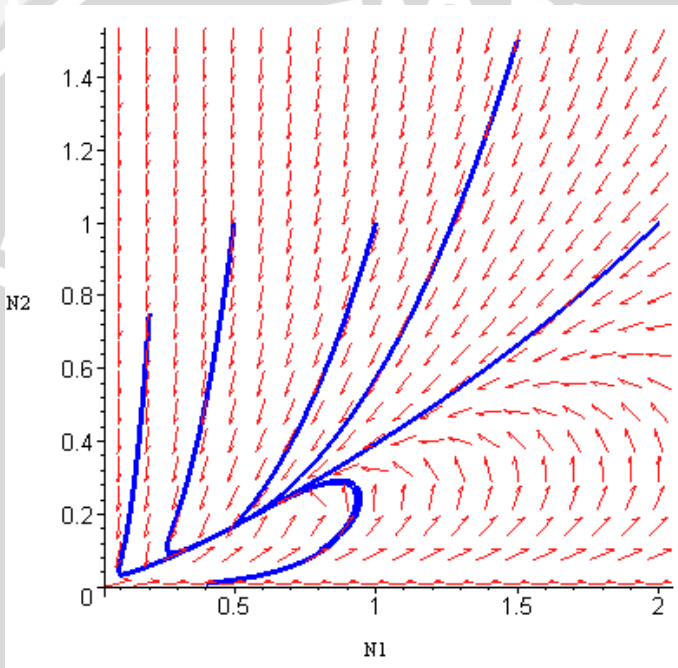
3.2.3 Simulasi Numerik Model Tanpa Difusi

Dalam simulasi numerik ini diperlihatkan tiga kasus, yaitu untuk $\varepsilon < 1$, diambil kasus $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}$ dan $\gamma < \frac{1}{\varepsilon}$, sedangkan untuk $\varepsilon > 1$, diambil $\gamma > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.



Gambar 3.1 Plot kasus $\gamma < \frac{1}{\varepsilon}$, $\varepsilon < 1$ dengan $\gamma = 1$ dan $\varepsilon = 0.5$.

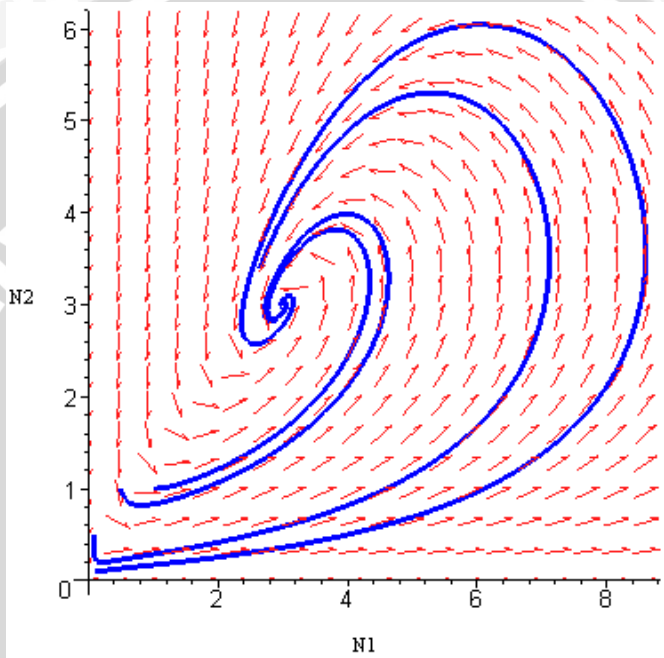
Untuk kasus pertama diambil $\gamma=1$ dan $\varepsilon=0.5$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $\varepsilon\gamma-1=-0.5$. Berdasarkan Gambar 3.1, titik kesetimbangan E_1 stabil secara lokal karena titik kesetimbangan menarik semua titik ke titik kesetimbangan $E_1=(0,0)$.



Gambar 3.2 Plot kasus $\gamma > \frac{1}{\varepsilon}, \varepsilon < 1$ dengan $\gamma=3$ dan $\varepsilon=0.5$.

Untuk kasus ke dua diambil $\gamma=3$ dan $\varepsilon=0.5$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $\varepsilon\gamma-1=0.5$. Hal ini sesuai dengan syarat kestabilan titik kesetimbangan E_2 , yaitu $\varepsilon\gamma-1>0$. Berdasarkan Gambar 3.2, titik kesetimbangan E_2 stabil karena titik

kesetimbangan menarik semua titik ke titik kesetimbangan $E_2 = (0.5, 0.167)$.



Gambar 3.3 Plot kasus $\gamma > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \varepsilon > 1$ dengan $\gamma=1$ dan $\varepsilon=4$.

Untuk kasus ke tiga diambil $\gamma=1$ dan $\varepsilon=4$. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh nilai $\varepsilon\gamma-1=3$. Hal ini sesuai dengan syarat kestabilan titik kesetimbangan E_2 , yaitu $\varepsilon\gamma-1 > 0$. Berdasarkan Gambar 3.3, titik kesetimbangan E_2 stabil karena titik kesetimbangan menarik semua titik ke titik kesetimbangan $E_2 = (3, 3)$.

3.3 Model dengan Difusi

3.3.1 Titik Keseimbangan Model dengan Difusi

Titik keseimbangan sistem (3.1) dapat diperoleh dengan cara sebagai berikut

$$\begin{aligned} N_1 \left[\frac{\varepsilon N_1}{1 + N_1} - N_2 \right] + D_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} &= 0, \\ N_2 [N_1 - \gamma N_2] + D_2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$N_1(x,t)$ dan $N_2(x,t)$ merupakan persamaan diferensial parsial. Jika N_1 dan N_2 tidak berubah terhadap waktu disebut dengan kondisi *steady state* karena

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{\partial N_2}{\partial t} = 0.$$

Sistem persamaan (3.14) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} D_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon N_1^2}{1 + N_1} - N_1 N_2 &= 0, \\ D_2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} + N_1 N_2 - \gamma N_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Titik keseimbangan model dengan difusi adalah fungsi $N_1(x)$ dan $N_2(x)$ yang memenuhi sistem persamaan (3.15). Namun sistem tersebut sulit ditentukan solusi umumnya.

Perhatikan bahwa

$$E_1 = (N_1, N_2) = (0, 0)$$

$$\text{dan } E_2 = (N_1, N_2) = \left(\varepsilon\gamma - 1, \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \right)$$

pasti memenuhi sistem persamaan (3.15). Oleh karena itu, pembahasan selanjutnya dibatasi pada analisis kestabilan kedua titik keseimbangan tersebut.

3.3.2 Kestabilan Titik Keseimbangan Model dengan Difusi

Misalkan sistem (3.1) ditulis sebagai

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} = F(N_1, N_2) + D_1 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial t} = G(N_1, N_2) + D_2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2},$$

dengan $F(N_1, N_2) = N_1 \left[\frac{\epsilon N_1}{1 + N_1} - N_2 \right]$

dan $G(N_1, N_2) = N_2 [N_1 - \gamma N_2]$.

Deret Taylor untuk $F(N_1, N_2)$ dan $G(N_1, N_2)$ di sekitar (N_1^*, N_2^*) adalah

$$\begin{aligned} F(N_1, N_2) &= F(N_1^*, N_2^*) + \frac{\partial F}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)(N_1 - N_1^*) \\ &\quad + \frac{\partial F}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)(N_2 - N_2^*) + \eta_1(N_1, N_2), \\ &= 0 + \frac{\partial F}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)x_1 + \frac{\partial F}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)x_2 + \eta_1(N_1, N_2), \\ &= \frac{\partial F}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)x_1 + \frac{\partial F}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)x_2 + \eta_1(N_1, N_2), \\ G(N_1, N_2) &= G(N_1^*, N_2^*) + \frac{\partial G}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)(N_1 - N_1^*) \\ &\quad + \frac{\partial G}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)(N_2 - N_2^*) + \eta_2(N_1, N_2), \\ &= 0 + \frac{\partial G}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)x_1 + \frac{\partial G}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)x_2 + \eta_2(N_1, N_2), \\ &= \frac{\partial G}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)x_1 + \frac{\partial G}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)x_2 + \eta_2(N_1, N_2). \end{aligned}$$

Jika (N_1, N_2) yang dekat dengan (N_1^*, N_2^*) maka $\eta_1(N_1, N_2)$ dan $\eta_2(N_1, N_2)$ dapat diabaikan karena nilainya sangat kecil sehingga

$$\begin{aligned} F(N_1, N_2) &= \frac{\partial F}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)x_1 + \frac{\partial F}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)x_2, \\ G(N_1, N_2) &= \frac{\partial G}{\partial N_1}(N_1^*, N_2^*)x_1 + \frac{\partial G}{\partial N_2}(N_1^*, N_2^*)x_2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 (N_1 - N_1^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 (N_2 - N_2^*)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dengan menggunakan (3.16) dan (3.17) maka untuk (N_1, N_2) yang dekat dengan (N_1^*, N_2^*) sistem (3.1) dapat dihampiri oleh persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial N_1}x_1 + \frac{\partial F}{\partial N_2}x_2 + D_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial N_1}x_1 + \frac{\partial G}{\partial N_2}x_2 + D_2 \frac{\partial^2 x_2}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Misalkan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} e^{(i\omega t + ikx)}, \quad (3.19)$$

dengan

k = bilangan gelombang

$i = \sqrt{-1}$

ω = tingkat pertumbuhan dalam waktu t

α = amplitude pada waktu t

x_j disubstitusikan ke suku difusi persamaan (3.18) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial N_1} x_1 + \frac{\partial F}{\partial N_2} x_2 - D_1 k^2 x_1 \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial N_1} - D_1 k^2 \right) x_1 + \frac{\partial F}{\partial N_2} x_2, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial N_1} x_1 + \frac{\partial G}{\partial N_2} x_2 - D_2 k^2 x_2 \\ &= \frac{\partial G}{\partial N_1} x_1 + \left(\frac{\partial G}{\partial N_2} - D_2 k^2 \right) x_2,\end{aligned}\quad (3.20)$$

dengan matriks Jacobinya adalah

$$B(F, G) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial N_1} - D_1 k^2 & \frac{\partial F}{\partial N_2} \\ \frac{\partial G}{\partial N_1} & \frac{\partial G}{\partial N_2} - D_2 k^2 \end{bmatrix}.$$

Untuk titik kesetimbangan $E_1 = (0,0)$ sistem persamaan (3.20) menjadi

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= -D_1 k^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -D_2 k^2 x_2.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Solusi umum untuk sistem (3.21) adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= -D_1 k^2 x_1 & \frac{\partial x_2}{\partial t} &= -D_2 k^2 x_2 \\ \ln x_1 &= -D_1 k^2 t + c_1 & \ln x_2 &= -D_2 k^2 t + c_2 \\ x_1 &= e^{-D_1 k^2 t + c_1} & x_2 &= e^{-D_2 k^2 t + c_2} \\ &= e^{-D_1 k^2 t} e^{c_1} & &= e^{-D_2 k^2 t} e^{c_2} \\ &= C_1 e^{-D_1 k^2 t} & &= C_2 e^{-D_2 k^2 t}.\end{aligned}\quad (3.22)$$

Semakin besar nilai t , solusi akan menuju ke titik kritis $(0,0)$. Menurut kriteria kestabilan, titik kesetimbangan $(0,0)$ bersifat stabil.

Untuk titik kesetimbangan E_2 persamaan (3.20) menjadi

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a - D_1 k^2 & b \\ c & d - D_2 k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$= B\bar{x}$$

dengan

$$a = \frac{2\varepsilon N_1^* + \varepsilon N_1^{*2}}{(1 + N_1^*)^2} - N_2^*, b = -N_1^*, c = N_2^*, d = N_1^* - 2\gamma N_2^*, \quad (3.23)$$

$$N_1^* = \varepsilon\gamma - 1, \text{ dan } N_2^* = \frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma}.$$

Persamaan karakteristik dari sistem (3.20) adalah

$$|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} a - k^2 D_1 - \lambda & b \\ c & d - k^2 D_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a - k^2 D_1 - \lambda)(d - k^2 D_2 - \lambda) - bc = 0$$

$$ad - ak^2 D_2 - a\lambda - dk^2 D_1 + k^4 D_1 D_2 + k^2 D_1 \lambda - d\lambda + k^2 D_2 \lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{a\lambda + k^2 D_1 \lambda - d\lambda + k^2 D_2 \lambda}_{+ad - ak^2 D_2 - dk^2 D_1 + k^4 D_1 D_2 - bc} = 0$$

$$\lambda^2 + \{(D_1 + D_2)k^2 - (a + d)\}\lambda + (a - k^2 D_1)(d - k^2 D_2) - bc = 0. \quad (3.24)$$

Persamaan karakteristik (3.24) dapat ditulis menjadi

$$\lambda^2 - \{(a + d) - (D_1 + D_2)k^2\}\lambda + (a - k^2 D_1)(d - k^2 D_2) - bc = 0.$$

di mana

$$\begin{aligned} \text{trace}(B) &= a + d - (D_1 + D_2)k^2, \\ \det(B) &= (a - k^2 D_1)(d - k^2 D_2) - bc \end{aligned} \quad (3.25)$$

D_1, D_2 dan k^2 adalah konstanta positif.

Titik kesetimbangan E_2 bersifat stabil jika memenuhi

$$\text{trace}(B) < 0 \text{ dan } \det(B) > 0. \quad (3.26)$$

Akan ditunjukkan titik kesetimbangan E_2 memenuhi syarat (2.16).

1. Akan ditentukan syarat yang membuat $\text{trace}(B) < 0$.

$$\text{trace}(B) = a + d - (D_1 + D_2)k^2 < 0$$

Karena $(D_1 + D_2)k^2$ bernilai positif, maka

$$a + d - (D_1 + D_2)k^2 < 0$$

jika

$$a + d < 0.$$

2. Akan diberikan syarat ke dua, yaitu $\det(B) > 0$,

$$\det(B) = (a - k^2 D_1)(d - k^2 D_2) - bc > 0$$

Syarat stabil ke dua (lihat hal. 22), yaitu $\det(B) > 0$ dapat ditulis menjadi

$$ad > bc.$$

Misalkan $q = \varepsilon\gamma - 1$ maka persamaan (3.23) menjadi

$$a = \frac{q}{\varepsilon\gamma^2}, b = -q, c = \frac{q}{\gamma}, d = -q,$$

sehingga $b = d$.

Karena $(a - k^2 D_1) < 0$ dan $(d - k^2 D_2) < 0$ maka

$$(a - k^2 D_1)(d - k^2 D_2) < 0.$$

Persamaan (3.25) dengan syarat (3.26) dapat ditulis menjadi

$$(a - k^2 D_1)(d - k^2 D_2) - bc < ad - bc. \quad (3.27)$$

Pertidaksamaan (3.27) jika ditulis menjadi $ad - bc > 0$ belum dapat dinyatakan benar sehingga bertolak belakang dengan syarat kestabilan berdasarkan Teorema 2.1 sistem tidak akan stabil jika setidaknya salah satu akar dari persamaan (3.23) bernilai positif sehingga memenuhi syarat ketidakstabilan (2.16).

3. Akan ditunjukkan bentuk

$$aD_2 + dD_1 > 2\sqrt{D_1D_2} (ad - bc)^{\frac{1}{2}} > 0$$

Kondisi ketidakstabilan dengan difusi dipenuhi jika $\det(B) < 0$.

Dimisalkan determinan persamaan (3.23) sama dengan H , yaitu

$$H = (a - k^2D_1)(d - k^2D_2) - bc < 0. \quad (3.28)$$

H dapat dipandang sebagai persamaan kuadratik dalam $k^2 = p$ sehingga pertidaksamaan (3.28) dapat ditulis sebagai

$$H(p) = (a - pD_1)(d - pD_2) - bc.$$

Mencari nilai minimum untuk $H(k^2)$ agar memenuhi bentuk ketidakstabilan difusi maka turunan pertama dari H sama dengan nol.

$$H_k' = 0$$

$$-2kD_1(d - k^2D_2) + (a - k^2D_1)(-2kD_2) = 0$$

atau

$$-2k(D_1(d - k^2D_2) + D_2(a - k^2D_1)) = 0.$$

Kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{-2k}$, maka diperoleh

$$dD_1 - k^2D_1D_2 + aD_2 - k^2D_1D_2 = 0$$

$$2k^2D_1D_2 = dD_1 + aD_2$$

$$k^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{D_2} + \frac{a}{D_1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2 D_1} + \frac{1 - \varepsilon\gamma}{D_2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2 D_1} + \frac{-\varepsilon\gamma^2(\varepsilon\gamma - 1)}{D_2 \varepsilon\gamma^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} \left(\frac{1}{D_1} - \frac{\varepsilon\gamma^2}{D_2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

$H(k^2)$ memiliki nilai minimum untuk nilai $k^2 = k_m^2$, sehingga $H(k_m^2) < 0$ dapat ditulis menjadi (lihat lampiran 2)

$$(D_2 + D_1 \varepsilon \gamma^2)^2 > 4D_1 D_2 \varepsilon^2 \gamma^3. \quad (3.30)$$

$H(k_m^2)$ akan negatif jika syarat (3.31) dipenuhi dan untuk bilangan gelombang yang mendekati k_m^2 , sehingga akar-akar λ persamaan (3.23) akan positif yang menyebabkan ketidakstabilan difusi.

Persamaan (3.30) dapat ditulis menjadi

$$D_2^2 + \varepsilon^2 \gamma^4 D_1^2 + 2D_1 D_2 \varepsilon \gamma^2 > 4D_1 D_2 \varepsilon^2 \gamma^3$$

$$D_2^2 + \varepsilon^2 \gamma^4 D_1^2 > 4D_1 D_2 \varepsilon^2 \gamma^3 - 2D_1 D_2 \varepsilon \gamma^2 \quad (3.31)$$

Diperoleh bentuk yang setara dari persamaan (3.31) dengan dimensi di syarat (2.13), yaitu

$$\beta^{\frac{1}{2}} - p\beta^{\frac{1}{2}} > 2(\xi + p)^{\frac{1}{2}} > 0 \quad (3.32)$$

di mana

$$\beta = \frac{D_2}{D_1}, p = \frac{d}{a} = -\varepsilon \gamma^2, \xi = \varepsilon^2 \gamma^3 \quad (3.33)$$

(lihat lampiran 3).

Kondisi (3.32) pasti akan dipenuhi ketika $\varepsilon \gamma^2 (\varepsilon \gamma - 1) > 0$ menjadi benar dengan melihat dari kondisi titik stasioner ke dua E_2 . Ketidakstabilan persamaan (3.32) memberikan kriteria ketidakstabilan difusi. Dari persamaan (3.33), didapatkan $D_2 = \beta D_1$. Untuk itu, persamaan (3.30) dapat ditulis menjadi

$$(\beta D_1 + D_1 \varepsilon \gamma^2)^2 > 4D_1 \beta D_1 \varepsilon^2 \gamma^3.$$

Kedua ruas dibagi D_1^2 memberikan

$$(\beta + \varepsilon \gamma^2)^2 > 4\beta \varepsilon^2 \gamma^3$$

atau

$$\beta^2 + 2\beta \varepsilon \gamma^2 + \varepsilon^2 \gamma^4 - 4\beta \varepsilon^2 \gamma^3 > 0 \quad (3.34)$$

Bentuk kuadrat β mempunyai kurva yang selalu positif dan tidak memotong sumbu x .

Dimisalkan

$$F(\beta, \varepsilon) = \beta^2 + 2\beta\varepsilon\gamma^2 + \varepsilon^2\gamma^4 - 4\beta\varepsilon^2\gamma^3$$

maka titik-titik kritis diperoleh dengan memecahkan persamaan simultan $F(\beta, \varepsilon) = 0$. Solusi yang mungkin dari persamaan (3.34) adalah

$$\begin{aligned} \beta^2 + 2\beta\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma) + \varepsilon^2\gamma^4 &= 0 \\ \beta &= \frac{-2\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma) \pm \sqrt{(2\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma))^2 - (4)(1)(\varepsilon\gamma^2)^2}}{(2)(1)} \\ &= \frac{-2\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma) \pm \sqrt{4(\varepsilon\gamma^2)^2(1-2\varepsilon\gamma)^2 - 4(\varepsilon\gamma^2)^2}}{2} \\ &= \frac{-2\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma) \pm \sqrt{4(\varepsilon\gamma^2)^2((1-2\varepsilon\gamma)^2 - 1)}}{2} \\ &= \frac{-2\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma) \pm 2\varepsilon\gamma^2\sqrt{(1-2\varepsilon\gamma)^2 - 1}}{2} \end{aligned}$$

diperoleh

$$\beta_{cr} = \varepsilon\gamma^2 \left(2\varepsilon\gamma - 1 \pm \sqrt{4\varepsilon^2\gamma^2 - 4\varepsilon\gamma} \right). \quad (3.35)$$

Karena β memiliki akar-akar sehingga kontradiksi dengan pertidaksamaan (3.34), maka sistem (3.1) akan stabil ketika

$$\varepsilon\gamma^2 \left(2\varepsilon\gamma - 1 - \sqrt{4\varepsilon^2\gamma^2 - 4\varepsilon\gamma} \right) < \frac{D_2}{D_1} < \varepsilon\gamma^2 \left(2\varepsilon\gamma - 1 + \sqrt{4\varepsilon^2\gamma^2 - 4\varepsilon\gamma} \right). \quad (3.36)$$

Selanjutnya, dicari titik-titik kritis ε . Kondisi ketidakstabilan difusi dapat ditulis sebagai berikut:

$$\beta^2 + 2\beta\varepsilon\gamma^2(1-2\varepsilon\gamma) + \varepsilon^2\gamma^4 > 0$$

Jika dikalikan dengan -1 maka

$$\begin{aligned}
 -\beta^2 - 2\beta\epsilon\gamma^2(1-2\epsilon\gamma) - \epsilon^2\gamma^4 &< 0 \\
 -\beta^2 - 2\beta\epsilon\gamma^2 + 4\beta\epsilon^2\gamma^3 - \epsilon^2\gamma^4 &< 0 \\
 \epsilon^2(4\beta\gamma^3 - \gamma^4) - 2\beta\epsilon\gamma^2 - \beta^2 &< 0
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Analisis pada bagian determinan menjadi bentuk ke ketidakstabilan difusi berguna agar diperoleh parameter ϵ yang menyatakan laju fitoplankton maksimum yang dicapai pada kondisi lingkungan labil. Nilai-nilai kritis di titik ϵ adalah

$$\begin{aligned}
 \epsilon^2(4\beta\gamma^3 - \gamma^4) - 2\beta\epsilon\gamma^2 - \beta^2 &= 0 \\
 \epsilon &= \frac{-(-2\beta\gamma^2) \pm \sqrt{(-2\beta\gamma^2)^2 - 4(4\beta\gamma^3 - \gamma^4)(-\beta^2)}}{2(4\beta\gamma^3 - \gamma^4)} \\
 &= \frac{2\beta\gamma^2 \pm \sqrt{4\beta^2\gamma^4 + 16\beta^3\gamma^3 - 4\beta^2\gamma^4}}{2(4\beta\gamma^3 - \gamma^4)} \\
 &= \frac{2\beta\gamma^2 \pm \sqrt{16\beta^3\gamma^3}}{2(4\beta\gamma^3 - \gamma^4)} \\
 &= \frac{2\beta\gamma^2 \pm 4\beta^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{3}{2}}}{2(4\beta\gamma^3 - \gamma^4)} \\
 &= \frac{\beta\gamma^2 \pm 2\beta^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{3}{2}}}{\gamma^3(4\beta - \gamma)} \\
 &= \frac{\beta\gamma(\gamma \pm 2\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^3(4\beta - \gamma)} \\
 &= \frac{\beta(\gamma \pm 2\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^2(4\beta - \gamma)}
 \end{aligned}$$

maka diperoleh

$$\frac{\beta(\gamma - 2\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^2(4\beta - \gamma)} < \varepsilon < \frac{\beta(\gamma + 2\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^2(4\beta - \gamma)}. \quad (3.38)$$

Jadi, adanya pertidaksamaan (3.38) diharapkan ε tidak berada pada selang tersebut agar titik kesetimbangan E_2 stabil, yang berarti fitoplankton dan zooplankton tetap ada dan hidup berdampingan untuk menjaga kelangsungan ekosistem perairan.

3.4 Interpretasi

Dalam Subbab 3.4 ini dibahas mengenai analisis kestabilan dengan mengacu pada laju perubahan pada fitoplankton dan zooplankton.

Kondisi 1 :

Pada kondisi titik tetap pertama menjelaskan bahwa kondisi ini menyatakan bahwa jumlah fitoplankton maupun zooplankton sama dengan 0. Hal ini menunjukkan tidak ada *predator-prey* di perairan sehingga tidak ada proses interaksi antara fitoplankton dengan zooplankton. Oleh karena itu jumlah *predator-prey* tidak akan pernah berkurang atau bertambah atau selalu bernilai tetap.

Kondisi 2 :

Titik kesetimbangan terjadi ketika adanya pertumbuhan *predator-prey* sehingga terdapat interaksi antara fitoplankton dan zooplankton. Pada kondisi titik tetap ke dua menjelaskan bahwa kondisi akan setimbang ketika populasi fitoplankton mencapai $\varepsilon\gamma - 1$ dan populasi zooplankton sebanyak $\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma}$. Hal ini menunjukkan adanya interaksi plankton.

Kondisi 3 :

Kestabilan titik kesetimbangan dianalisis di sekitar E_1 dan E_2 . Kondisi (Lihat Kondisi 1) model tanpa difusi pada titik kesetimbangan pertama diperoleh bahwa titik kesetimbangan pertama adalah tidak dapat ditentukan jenis kestabilannya sedangkan

jenis kestabilan titik kesetimbangan ke dua tanpa difusi adalah selalu stabil. Pada model dengan difusi dibentuk ke ketidakstabilan difusi. Diperoleh jenis kestabilan titik kesetimbangan pertama adalah stabil. Untuk titik kesetimbangan ke dua model dengan memperhatikan difusi diperoleh selang ε sehingga diharapkan jumlah plankton tidak

terdapat pada $\varepsilon \in \left(\frac{\beta(\gamma - 2\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^2(4\beta - \gamma)}, \frac{\beta(\gamma + 2\beta^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}})}{\gamma^2(4\beta - \gamma)} \right)$.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan sebelumnya diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Diperoleh dua titik kesetimbangan yang dipengaruhi oleh laju perubahan maksimal populasi fitoplankton ε . Kestabilan model tanpa difusi untuk titik kesetimbangan pertama tidak dapat ditentukan sedangkan titik kesetimbangan ke dua adalah stabil lokal untuk $\varepsilon < 1$.
2. Kondisi kestabilan dengan difusi untuk titik kesetimbangan pertama adalah stabil. Untuk titik kesetimbangan kedua, model dibentuk menjadi ketidakstabilan model dengan difusi.
3. Berdasarkan hasil analisis, diperoleh rentang ε untuk kondisi ketidakstabilan difusi.

4.2. Saran

Pada skripsi ini titik kesetimbangan persamaan difusi dibatasi pada titik kesetimbangan konstan. Untuk penelitian selanjutnya disarankan menentukan titik kesetimbangan persamaan difusi yang tak konstan, berupa $N_1(x)$ dan $N_2(x)$.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce, W. E. dan R. C., Di Prima. 2001. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Seventh Edition, John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Edelstein, L. dan Keshet. 1988. *Mathematical Models in Biology*. Random House. New York.
- Edwards, A.M. dan J., Brindley. 1999. Zooplankton Mortality and the Dynamical Behaviour of Plankton Population Models. *Bulletin of Mathematical Biology* 61, 303-339, <http://www.idealibrary.com>. Tanggal akses : 18 Oktober 2010
- Elaydi, S. 2005. *An Introduction to Difference Equations*. Third edition, Springer. New York.
- Gilvery, R.W. dan G.W., Goldstein. 1996. *Biokimia (Suatu Pendekatan Fungsional)*. Edisi ke tiga. Airlangga University press. Jakarta.
- Lehninger, A. L. 1997. *Dasar-Dasar Biokimia*, alih bahasa Maggy. T. Erlangga. Jakarta.
- Li, S. 2005. *Analysis of Plankton Populations*. United State of America.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems : Continuous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA.
- Stephen, L. 2010. *Dynamical Systems with Applications using Maple*. Second Edition. Birkhäuser. Boston.
- Trimaningsih. 2005. Pengertian tentang Plankton dan Sistem Pengelompokannya. *Warta Oseanografi*, Vol. XIX, No.4. Puslit Oseanografi-LIPI.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 1. Listing Program Titik Keseimbangan Model Tanpa Difusi dengan Metode Runge Kutta Orde Empat Menggunakan *Software Maple 13*

Listing Program

```
> restart;
> with(plots):
> with(DEtools):
> epsilon:=0.5;g:=1;
    ε := 0.5
    g := 1
> epsilon*g-1;(epsilon*g-1)/g;
    -0.5
    -0.5
> D(x)(t)=x(t)*(epsilon*x(t)/(1+x(t))-
y(t)),D(y)(t)=y(t)*(x(t)-g*y(t));

$$D(x)(t) = x(t) \left( \frac{0.5 x(t)}{1 + x(t)} - y(t) \right), D(y)(t) = y(t) (x(t) - y(t))$$

>
phaseportrait([D(x)(t)=x(t)*(epsilon*x(t)/(1+
x(t))-y(t)),D(y)(t)=y(t)*(x(t)-g*y(t))], \
[x(t),y(t)],t=0..75,[x(0)=0.5,y(0)=1],[x(0)=
0.1,y(0)=0.5],[x(0)=1,y(0)=1],[x(0)=0.1,y(0)=
0.1],[x(0)=0.01,y(0)=0],[x(0)=0.01,y(0)=0.01]
],stepsize=.09, \
scene=[x(t),y(t)],linecolour=blue,method=rkf4
5);
```

Lampiran 2. Penurunan Persamaan (3.30) dari Persamaan (3.28) dan (3.29)

Sehingga dengan mensubstitusikan k_m ke persamaan (3.28) diperoleh

$$H = (a - k_m^2 D_1) (d - k_m^2 D_2) - bc < 0$$

$$\left(a - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{D_2} + \frac{a}{D_1} \right] D_1 \right) \left(d - \frac{1}{2} \left[\frac{d}{D_2} + \frac{a}{D_1} \right] D_2 \right) - a_{12} a_{21} < 0$$

$$\left(a - \frac{d}{2} \frac{D_1}{D_2} - \frac{a}{2} \right) \left(d - \frac{d}{2} - \frac{a}{2} \frac{D_2}{D_1} \right) - bc < 0$$

$$\frac{1}{2} \left(a - d \frac{D_1}{D_2} \right) \frac{1}{2} \left(d - a \frac{D_2}{D_1} \right) - bc < 0$$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan $4D_1D_2$ maka dihasilkan

$$\begin{aligned} (aD_2 - dD_1)(dD_1 - aD_2) - 4bcD_1D_2 &< 0 \\ -(aD_2 - dD_1)^2 - 4bcD_1D_2 &< 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Substitusikan nilai-nilai (3.23) ke persamaan (9) maka diperoleh

$$-\left(\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} D_2 - (1 - \varepsilon\gamma) D_1 \right)^2 - 4(1 - \varepsilon\gamma) \left(\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \right) D_1 D_2 < 0$$

$$-\left(\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\varepsilon\gamma^2} D_2 + (\varepsilon\gamma - 1) D_1 \right)^2 + 4(\varepsilon\gamma - 1) \left(\frac{\varepsilon\gamma - 1}{\gamma} \right) D_1 D_2 < 0$$

$$-(\varepsilon\gamma - 1)^2 \left(\frac{D_2}{\varepsilon\gamma^2} + D_1 \right)^2 < -\frac{4}{\gamma} (\varepsilon\gamma - 1)^2 D_1 D_2.$$

Kedua ruas dikalikan dengan $-\frac{(\varepsilon\gamma^2)^2}{(\varepsilon\gamma - 1)^2}$ menjadi

$$\left(D_2 + D_1 \varepsilon \gamma^2\right)^2 > 4 D_1 D_2 \frac{\left(\varepsilon \gamma^2\right)^2}{\gamma}$$

sehingga diperoleh

$$\left(D_2 + D_1 \varepsilon \gamma^2\right)^2 > 4 D_1 D_2 \varepsilon^2 \gamma^3.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 3. Penurunan Kriteria Ketidakstabilan Model dengan Difusi

Sehingga kedua ruas persamaan (3.32) dibagi dengan D_2 menjadi

$$D_2 + \varepsilon^2 \gamma^4 \frac{D_1^2}{D_2} > 4D_1 \varepsilon^2 \gamma^3 - 2D_1 \varepsilon \gamma^2$$

$$\underbrace{D_2 + \left(\varepsilon \gamma^2\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{-1} D_1 - 2D_1 \varepsilon \gamma^2}_{\text{bentuk persamaan kuadrat}} > 4D_1 \varepsilon^2 \gamma^3 - 2D_1 \varepsilon \gamma^2$$

$$D_2 - 2D_1 \varepsilon \gamma^2 + \left(\varepsilon \gamma^2\right) \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{-\frac{1}{2}} D_1 > 4D_1 \varepsilon^2 \gamma^3 - 4D_1 \varepsilon \gamma^2$$

Ubah ke bentuk persamaan yang memuat variabel D_1 pada kedua ruas sehingga menjadi

$$\frac{D_2}{D_1} D_1 - 2D_1 \varepsilon \gamma^2 + \left(\varepsilon \gamma^2\right) \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{-\frac{1}{2}} D_1 > (4\varepsilon^2 \gamma^3 - 4\varepsilon \gamma^2) D_1$$

kemudian kedua ruas dikalikan dengan $\frac{1}{D_1}$ diperoleh

$$\frac{D_2}{D_1} - 2\varepsilon \gamma^2 + \left(\varepsilon \gamma^2\right) \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{-\frac{1}{2}} > 4\varepsilon^2 \gamma^3 - 4\varepsilon \gamma^2.$$

Untuk ruas kiri diubah ke bentuk kuadrat menjadi

$$\left(\left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 - 2\varepsilon \gamma^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\varepsilon \gamma^2\right) \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^{-\frac{1}{2}} > 4\varepsilon^2 \gamma^3 - 4\varepsilon \gamma^2$$

$$\left(\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon \gamma^2) \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)^2 > \left((4\varepsilon^2 \gamma^3 - 4\varepsilon \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2. \quad (10)$$

Ruas kanan dan ruas kiri persamaan (10) adalah positif maka persamaan (10) dapat ditulis sebagai berikut.

$$\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon \gamma^2) \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{-\frac{1}{2}} > (4\varepsilon^2 \gamma^3 - 4\varepsilon \gamma^2)^{\frac{1}{2}} > 0$$

$$\left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon \gamma^2) \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^{-\frac{1}{2}} > 2(\varepsilon^2 \gamma^3 - \varepsilon \gamma^2)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Diperoleh bentuk yang setara dengan dimensi di syarat (3.20) yaitu

$$\beta^{\frac{1}{2}} - p\beta^{-\frac{1}{2}} > 2(\xi + p)^{\frac{1}{2}} > 0$$

di mana

$$\beta = \frac{D_2}{D_1}, p = \frac{a_{22}}{a_{11}} = -\varepsilon \gamma^2, \xi = \varepsilon^2 \gamma^3.$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

