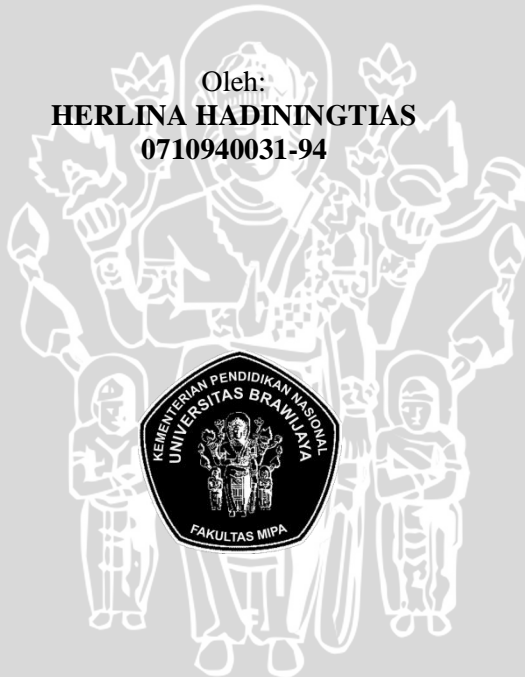


**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN *NONLINEAR INCIDENCE RATE*
DAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

Oleh:
HERLINA HADININGTIAS
0710940031-94



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN *NONLINEAR INCIDENCE RATE*
DAN WAKTU TUNDA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

HERLINA HADININGTIAS

0710940031-94



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR
DENGAN *NONLINEAR INCIDENCE RATE*
DAN WAKTU TUNDA**

Oleh:
HERLINA HADININGTIAS
0710940031-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 8 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I

Pembimbing II

Kwardiniya A., S.Si, M.Si
NIP. 197006221998022001

Drs. M. Muslikh, M.Si
NIP. 195910311989121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf A., M.Sc
NIP. 196709071992031001

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Herlina Hadiningtias
NIM : 0710940031-94
Jurusan : Matematika
Penulis Tugas Akhir berjudul : ANALISIS KESTABILAN
MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN *NONLINEAR INCIDENCE
RATE* DAN WAKTU TUNDA

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri, dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.
2. Apabila kemudian hari diketahui isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 8 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(Herlina Hadiningtias)
NIM. 0710940031

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji hanyalah milik Allah Tuhan semesta alam dimana hanya dengan limpahan karunia dan kasih sayang-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **Analisis Kestabilan Model Epidemik SIR dengan *Nonlinear Incidence Rate* dan Waktu Tunda** dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Allah SWT, Sang Maha Sempurna, yang selalu memberikan berkah yang tidak ternilai dan selalu memberikan kekuatan kepada penulis untuk menyelesaikan hambatan yang dihadapi.
2. Ibu Kwardiniya A., S.Si, M.Si dan Bapak Drs. M. Muslikh, M.Si selaku pembimbing yang telah banyak memberikan bimbingan dan arahan selama penulisan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., Bapak Dr. Agus Suryanto, M.Sc., dan Ibu Dra. Endang Wahyu H., M.Si., selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Kedua orang tua dan saudara-saudara penulis yang selalu memberikan dorongan semangat, kasih sayang serta doa yang tiada henti.
6. Sahabat yang telah banyak membantu dan memberikan semangat, serta semua teman yang telah membantu selama penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini jauh dari sempurna. Oleh karena itu penulis sangat mengharapkan saran dan masukan guna perbaikan di masa yang akan datang. Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat bagi pembaca semua dan seluruh kegiatan dalam penyusunan skripsi ini diridhoi oleh Allah Yang Maha Kuasa.

Malang, 8 Agustus 2011

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK SIR DENGAN *NONLINEAR INCIDENCE RATE* DAN WAKTU TUNDA

ABSTRAK

Skripsi ini membahas model penyebaran penyakit SIR dengan memodifikasi interaksi antara populasi *Susceptibles* (S) dan populasi *Infective* (I). Interaksi antara populasi *Susceptibles* (S) dan populasi *Infective* (I) dapat diasumsikan sebagai $\beta(SI/(1 + \alpha S))$, dengan β adalah laju interaksi antara populasi S dan I , serta α adalah tingkat *incidence*. Analisis kestabilan dilakukan dengan linearisasi sistem di sekitar titik kesetimbangan.

Penambahan waktu tunda (τ) pada model SIR dengan tingkat *incidence* nonlinear dapat menyebabkan perubahan kestabilan pada model. Adanya waktu tunda tidak berpengaruh terhadap kestabilan titik kesetimbangan bebas epidemik, namun mengakibatkan terjadinya perubahan terhadap kestabilan *limit cycle* di sekitar titik kesetimbangan epidemik. Jika besar waktu tunda melebihi titik kritis tundaan (τ^*), maka tidak terbentuk *limit cycle* di sekitar titik kesetimbangan epidemik. Dengan kata lain, untuk $\tau < \tau^*$, terbentuk *limit cycle* yang stabil di sekitar titik kesetimbangan epidemik.

Kata kunci : Model SIR, tingkat *incidence*, waktu tunda (τ), titik kritis tundaan (τ^*), kestabilan, titik kesetimbangan, *limit cycle*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



ANALYSIS STABILITY OF EPIDEMIC SIR MODEL WITH NONLINEAR INCIDENCE RATE AND TIME DELAY

ABSTRACT

This final project discusses a disease spread SIR model which constructed by modifying interaction between population of Susceptibles (S) and Infective (I). Interaction between population of Susceptibles (S) and Infective (I) can be expressed by $\beta(SI/(1 + \alpha S))$, where β is interaction rate between S and I , and α is incidence rate. Stability analysis can be done by linearizing system around the equilibrium points.

Time delay (τ) addition on the SIR model with nonlinear incidence rate influence to stability of the model. The time delay does not influence to the free epidemic equilibrium, but it causes the changing on limit cycle stability around the epidemic equilibrium of SIR model. If the time delay increase exceed critical value of delay (τ^*), then there isn't stable limit cycle around epidemic equilibrium. In other words, when $\tau < \tau^*$, there is stable limit cycle around epidemic equilibrium.

Keywords : SIR model, incidence rate, time delay (τ), critical value of delay (τ^*), stability, equilibrium, limit cycle.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
KATA PENGANTAR	vii
ABSTRAK	ix
ABSTRACT	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
DAFTAR NOTASI	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Batasan Masalah	2
1.4. Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1. Persamaan Diferensial	3
2.1.1. Persamaan Diferensial Linear	3
2.1.2. Persamaan Diferensial Nonlinear	3
2.2. Sistem Persamaan Diferensial	4
2.3. Sistem Autonomous	4
2.4. Titik Keseimbangan	5
2.5. Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Autonomous Linear	5
2.6. Deret Taylor	6
2.7. Linierisasi Sistem Autonomous Nonlinear	7
2.8. Kestabilan Titik Keseimbangan Sistem Autonomous Nonlinear	9
2.9. <i>Limit Cycle</i>	11
2.10. Persamaan Diferensial Tundaan	11
2.11. Eksistensi Nilai Kritis Tundaan	12
2.12. Kondisi Transversal	14
2.13. Model Kompartemen Epidemik SIR	17

2.14. Bilangan Reproduksi Dasar	18
BAB III PEMBAHASAN	19
3.1. Model SIR dengan <i>Nonlinear Incidence Rate</i> dan Waktu Tunda	19
3.2. Titik Keseimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar	20
3.3. Analisis Kestabilan Model SIR tanpa Waktu Tunda	23
3.3.1. Kestabilan Titik Keseimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$	25
3.3.2. Kestabilan Titik Keseimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$	25
3.3.3. Kestabilan Titik Keseimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$	26
3.4. Analisis Kestabilan Model SIR dengan Waktu Tunda ...	28
3.4.1. Kestabilan Titik Keseimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$	28
3.4.2. Kestabilan Titik Keseimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$	29
3.4.3. Kestabilan Titik Keseimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$	31
3.4.3.1. Eksistensi Titik Tunda Kritis	31
3.4.3.2. Kondisi Transversal	34
3.5. Pengaruh Waktu Tunda pada Model SIR dengan <i>Nonlinear Incidence Rate</i>	37
BAB IV PENUTUP	41
4.1. Kesimpulan	41
4.2. Saran	41
DAFTAR PUSTAKA	43

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Model SIR	17
Gambar 3.1 Model SIR dengan <i>nonlinear incidence rate</i>	19
Gambar 3.2 (a) Perilaku kelas <i>Infective</i> , (b) Plot sistem dengan parameter $r = 0.1, K = 80, \alpha = 0.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.1$, dengan nilai awal $(28, 3, 7)$ dan $(30, 24, 9)$	37
Gambar 3.3 (a) Perilaku kelas <i>Infective</i> , (b) Plot sistem dengan parameter $r = 0.1, K = 80, \alpha = 0.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.1, \tau = 0.1$, dengan nilai awal $(28, 3, 7)$ dan $(30, 24, 9)$	38
Gambar 3.4 (a) Perilaku kelas <i>Infective</i> , (b) Plot sistem dengan parameter $r = 0.1, K = 80, \alpha = 0.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.1, \tau = 30$, dengan nilai awal $(28, 3, 7)$ dan $(30, 24, 9)$	39



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous linear	6
Tabel 2.2 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous nonlinear.....	10

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1.	Program Matlab untuk Menentukan Titik Setimbang, Bilangan Reproduksi Dasar, dan Titik Kritis	45
Lampiran 2.	Program Matlab Grafik SIR tanpa Waktu Tunda	47
Lampiran 3.	Program Matlab Grafik SIR dengan Waktu Tunda	49



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR NOTASI

<u>Simbol</u>	<u>Keterangan</u>
I	Individu yang telah terinfeksi penyakit (<i>Infective</i>)
K	<i>Carrying Capacity</i>
N	Jumlah populasi total
R	Individu yang sembuh dan kebal (<i>Recovery</i>)
S	Individu yang rentan terhadap infeksi penyakit (<i>Susceptibles</i>),
r	Laju pertumbuhan populasi
α	Parameter yang mengukur efek jenuh <i>incidence</i>
β	Laju perpindahan <i>Susceptibles</i> menjadi <i>Infective</i>
γ	Laju perpindahan <i>Infective</i> menjadi <i>Recovery</i>
μ	Laju kematian <i>Susceptibles</i>
μ_1	Laju kematian <i>Infective</i>
μ_2	Laju kematian <i>Recovery</i>
τ	Waktu tunda (waktu inkubasi penyakit)



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Salah satu penerapan matematika dalam bidang epidemiologi adalah pemodelan penyebaran epidemik penyakit. Penggunaan model akan sangat membantu dalam merepresentasikan terjadinya wabah penyakit dan penyebarannya. Salah satu model epidemik penyakit adalah SIR (*Susceptibles–Infective–Recovery*).

Pemodelan epidemik penyakit merupakan penerapan persamaan diferensial (PD). Pada umumnya solusi persamaan diferensial digunakan untuk menganalisis jenis kestabilan yang terjadi. Ada dua kestabilan pada sistem persamaan diferensial, yaitu kestabilan titik kesetimbangan dan kestabilan *limit cycle*. Persamaan diferensial dengan menambahkan waktu tunda disebut dengan persamaan diferensial tundaan (PDT). Penambahan waktu tunda pada persamaan diferensial akan menyebabkan terjadinya perubahan jenis kestabilan. Perubahan tersebut dapat dianalisis dengan melihat adanya titik kritis waktu tunda dan kondisi transversal. Menurut Forde (2005), kondisi transversal adalah suatu kondisi dimana

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} > 0$$

dengan λ adalah akar persamaan karakteristik dan τ adalah waktu tunda.

Pada skripsi ini dibahas model epidemik SIR dengan *nonlinear incidence rate* dan waktu tunda. Pada model SIR dengan waktu tunda penularan penyakit tidak langsung membuat populasi *Susceptibles* (S) menjadi populasi *Infective* (I), sehingga interaksi antara S dan I dinyatakan dalam $\beta S(t)I(t - \tau)$ dimana β adalah laju interaksi antara S dan I . Sementara itu, interaksi antara S dan I dengan tingkat *incidence* (α), dinyatakan dalam bentuk nonlinear sebagai $\beta(SI/(1 + \alpha S))$, sehingga interaksi antara S dan I dengan tingkat *incidence* (α) dan waktu tunda (τ), dinyatakan sebagai,

$$\beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t - \tau).$$

Waktu tunda pada model SIR merupakan masa inkubasi yaitu interval waktu antara kontak awal dengan bibit penyakit dan awal

munculnya gejala penyakit yang dikaitkan dengan infeksi tersebut. Jenis kestabilan pada model SIR dengan waktu tunda perlu dianalisis untuk melihat ada tidaknya perubahan jenis kestabilan yang diakibatkan oleh penambahan waktu tunda. Jika terjadi perubahan jenis kestabilan maka dapat ditentukan kondisi yang mengubah kestabilan tersebut.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, dapat dirumuskan masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana model SIR dengan *nonlinier incidence rate* dan waktu tunda?
2. Bagaimana pengaruh penambahan waktu tunda terhadap kestabilan model SIR dengan *nonlinier incidence rate*?

1.3. Batasan Masalah

Pembahasan dalam skripsi ini dibatasi pada

1. model SIR pada populasi tertutup sehingga hanya ada laju kematian dan laju kelahiran, dan
2. penularan hanya terjadi secara horizontal.

1.4. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan yang ingin dicapai adalah

1. Mengetahui model SIR dengan *nonlinier incidence rate* dan waktu tunda.
2. Menganalisis pengaruh penambahan waktu tunda terhadap kestabilan model SIR dengan *nonlinier incidence rate*.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Teschl (2011) menyebutkan bahwa Persamaan Diferensial Biasa (PDB) adalah suatu persamaan yang berbentuk

$$F\left(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k)}(t)\right) = 0 \quad (2.1)$$

untuk suatu fungsi yang tidak diketahui $x \in C^k(J)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ dan

$$x^{(j)}(t) = \frac{d^j x}{dt^j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, k$$

dimana $F \in C(U)$ dengan $U \subset \mathbb{R}^{k+2}$ dan variabel bebas $t \in \mathbb{R}$. Turunan tertinggi dari F disebut orde persamaan diferensial. Suatu solusi persamaan diferensial biasa adalah fungsi $\theta \in C^k(I)$ dimana $I \subseteq J$ adalah suatu interval, sedemikian sehingga

$$F\left(t, \theta(t), \theta'(t), \dots, \theta^{(k)}(t)\right) = 0.$$

Persamaan (2.1) akan menjadi Persamaan Diferensial Parsial (PDP) jika $t = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.

Terdapat dua jenis persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial nonlinear.

2.1.1. Persamaan Diferensial Linear

Purcell, Varberg, dan Rigdon (2003) mengatakan bahwa sebuah persamaan diferensial termasuk persamaan diferensial linear jika tidak mengandung bentuk perkalian antarfungsi $x(t)$, atau turunan yang satu dengan turunan lainnya, atau fungsi $x(t)$ dengan turunan. Bentuk umum persamaan differensial linear orde k adalah

$$f(t) = g_k(t)x^{(k)}(t) + \dots + g_1(t)x'(t) + g_0(t)x(t).$$

2.1.2. Persamaan Diferensial Nonlinear

Persamaan diferensial nonlinear adalah persamaan diferensial yang bukan persamaan diferensial linear. Grigorian (2009) mengatakan persamaan diferensial $F\left(t, x(t), x'(t) \dots, x^{(k)}(t)\right) = 0$

adalah persamaan diferensial nonlinear, jika salah satu dari berikut ini dipenuhi oleh F .

- F tidak berbentuk persamaan linear dalam $x(t), x'(t) \dots, x^{(k)}(t)$.
- Terdapat perkalian antarfungsi $x(t), x'(t) \dots, x^{(k)}(t)$ dalam F .

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Teschl (2011) menyebutkan bahwa $x^{(k)}(t)$ dapat dinyatakan dalam suatu fungsi dari turunan yang kurang dari k . Oleh karena itu persamaan (2.1) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$x^{(k)}(t) = f_1(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t)).$$

Jika $x : R \rightarrow R^n$ dengan $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ maka $x^{(k)}(t) = (x_1^{(k)}(t), \dots, x_n^{(k)}(t))$ dan akan diperoleh sistem persamaan diferensial sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x_1^{(k)}(t) &= f_1(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \\ &\vdots \\ x_n^{(k)}(t) &= f_n(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(k-1)}(t)) \end{aligned}$$

2.3. Sistem Autonomous

Grigorian (2009) menyebutkan bahwa sistem autonomous adalah sistem dimana variabel bebas tidak dinyatakan secara eksplisit. Misal diberikan persamaan diferensial biasa orde satu yang terdiri dari dua fungsi dengan bentuk umum

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(x(t), y(t)) \\ y'(t) &= g(x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sistem (2.2) disebut sistem autonomous karena masing-masing ruas kanan persamaan tidak bergantung pada variabel bebas t .

Sistem (2.2) mempunyai penyelesaian jika fungsi f dan g adalah fungsi kontinu. Penyelesaian tersebut tunggal jika diberikan nilai awal

$$x(0) = x_0 \text{ dan } y(0) = y_0$$

dimana $(x_0, y_0) \in T = \{ (x, y) \in R^2 \mid a < x < b, c < y < d \}$. T disebut bidang fase. Kurva yang dibentuk oleh penyelesaian $(x(t), y(t))$ yang disajikan dalam bidang fase T disebut trayektori.

2.4. Titik Kesetimbangan

Panfilov (2004) menyebutkan bahwa titik kesetimbangan sistem merupakan titik dimana sistem tersebut tidak mengalami perubahan sepanjang waktu. Secara matematis, definisi titik kesetimbangan dapat dituliskan dalam Definisi 2.1.

Definisi 2.1

Suatu titik (x^*, y^*) disebut titik kesetimbangan sistem (2.2) jika

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x^*, y^*) = 0, \\y'(t) &= g(x^*, y^*) = 0.\end{aligned}$$

2.5. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous Linear

Kestabilan titik kesetimbangan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2

Titik kesetimbangan (x^*, y^*) disebut

(a) stabil jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk

$$\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta$$

berlaku

$$\|(x(t), y(t)) - (x^*, y^*)\| < \varepsilon, \quad t > 0$$

(b) tak stabil apabila titik tersebut tidak stabil atau tidak memenuhi kriteria (a)

(c) stabil asimtotik jika (x^*, y^*) stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$ sedemikian sehingga sebuah solusi $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t)$ yang memenuhi

$$\|(x(0), y(0)) - (x^*, y^*)\| < \delta_0$$

bersifat

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (x^*, y^*)$$

(Robinson, 2004).

Grigorian (2009) menyebutkan bahwa suatu sistem autonomous dikatakan linear jika tidak ada perkalian di antara variabel tak bebasnya. Sebagai contoh, perhatikan sistem autonomous linear berikut.

$$\begin{aligned}x'(t) &= ax + by \\y'(t) &= cx + dy\end{aligned} \tag{2.3}$$

dimana $a, b, c, d \in R$. Sistem (2.3) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dengan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Apabila $|A| \neq 0$ maka titik $(0, 0)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem autonomous linear tersebut.

Akar persamaan karakteristik merupakan solusi dari $|A - \lambda I| = 0$. Akar persamaan karakteristik yang diperoleh, digunakan untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem. Adapun kriteria jenis kestabilan sistem autonomous linear berdasarkan akar persamaan karakteristik menurut Panfilov (2004) dan Hereman (2007) adalah sebagai berikut.

Tabel 2.1 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous linear

Nilai Karakteristik	Bentuk	Kestabilan
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	Garis	Tidak stabil
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadel	Tidak stabil pelana
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	Garis	Stabil netral
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadel	Tidak stabil pelana
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \alpha < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \alpha > 0$	Spiral	Tidak stabil
$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$	Elips/Lingkaran	Stabil pusat

2.6. Deret Taylor

Pada umumnya suatu fungsi dapat disederhanakan menjadi fungsi hampiran dalam bentuk fungsi polinomial yang lebih sederhana. Suatu fungsi dapat dihampiri dengan deret Taylor. Deret Taylor dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3

Jika fungsi $f(x)$ dapat diturunkan tak hingga kali secara kontinu pada selang $[a, b]$, dan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai x di sekitar x_0 , $f(x)$ dapat diekspansikan ke dalam deret Taylor sebagai

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \dots \quad (2.4)$$

Apabila $h = x - x_0$ atau $x = h + x_0$, persamaan (2.4) dapat dinyatakan sebagai,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^m}{m!} f^m(x_0) + \dots$$

(Purcell, Varberg, dan Rigdon, 2003).

2.7. Linearisasi Sistem Autonomous Nonlinear

Misal sistem persamaan (2.2) adalah sistem persamaan autonomous nonlinear. Jika (x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan sistem, maka dapat diselidiki perilaku sistem di sekitar titik kesetimbangan. Misal (x, y) merupakan titik di sekitar titik kesetimbangan, maka $(\Delta x, \Delta y)$ dapat dinyatakan sebagai

$$(\Delta x, \Delta y) = (x - x^*, y - y^*).$$

Sistem persamaan diferensial (2.2) dapat didekati dengan melakukan ekspansi deret Taylor di sekitar titik kesetimbangan,

$$\left\{ \begin{aligned}
 f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} (y - y^*) \\
 &+ \frac{\frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x^2} (x - x^*)^2}{2} + \frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial x \partial y} (x - x^*)(y - y^*) \\
 &+ \frac{\frac{\partial^2 f(x^*, y^*)}{\partial y^2} (y - y^*)^2}{2} + \dots \\
 g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} (x - x^*) + \frac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} (y - y^*) \\
 &+ \frac{\frac{\partial^2 g(x^*, y^*)}{\partial x^2} (x - x^*)^2}{2} + \frac{\partial^2 g(x^*, y^*)}{\partial x \partial y} (x - x^*)(y - y^*) \\
 &+ \frac{\frac{\partial^2 g(x^*, y^*)}{\partial y^2} (y - y^*)^2}{2} + \dots
 \end{aligned} \right.$$

atau

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} x - x^* & y - y^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix} \\
 &+ \dots \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

Karena $(x - x^*)$ dan $(y - y^*)$ cukup kecil, maka perkalian antara $(x - x^*)$ dan $(y - y^*)$ akan semakin kecil, sehingga suku ke tiga dan suku-suku selanjutnya pada persamaan (2.5) dapat diabaikan

$$\begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x^*, y^*) \\ g(x^*, y^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}_{(x^*, y^*)} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix}.$$

(x^*, y^*) adalah titik kesetimbangan, sehingga nilai $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$. Dengan demikian sistem persamaan (2.2) dapat didekati oleh

$$\begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

atau

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix},$$

dengan

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi (Khamsi, 2004).

2.8. Kestabilan Titik Kesetimbangan Sistem Autonomous Nonlinear

Khamsi (2004) menyebutkan bahwa jenis kestabilan sistem (2.2) dapat dianalisis dengan menentukan nilai eigen matriks Jacobi sistem yang dilinearkan dan dapat dihitung dengan menyelesaikan $|J - \lambda I| = 0$ atau dapat ditulis sebagai

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) - \lambda & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) menyatakan polinomial berderajat 2 dengan variabel λ

$$P(\lambda) = \sum_{j=0}^2 a_j \lambda^j = 0. \quad (2.7)$$

Dari persamaan (2.7) akan diperoleh akar-akar persamaan karakteristik, dimana akar-akar tersebut akan menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan sistem. Teorema berikut menjelaskan kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomous nonlinear.

Teorema 2.1: Kestabilan sistem nonlinear

Misal λ_1 dan λ_2 adalah akar persamaan karakteristik sistem linear yang berhubungan dengan linearisasi sistem nonlinear.

- Jika $\lambda_1 = \lambda_2$ adalah akar riil yang sama, maka trayektori pada sistem nonlinear berbentuk simpul dan bersifat stabil jika $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, tidak stabil jika $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.
- Jika λ_1 dan λ_2 adalah imajiner murni, maka trayektori pada sistem nonlinear berbentuk lingkaran atau elips, dan mungkin stabil asimtotik, stabil, atau tidak stabil.
- Selain (a) dan (b), titik kritis pada sistem nonlinear memiliki tipe dan jenis kestabilan yang sama dengan titik kritis $(0, 0)$ pada sistem linear yang berhubungan dengan linearisasi sistem nonlinear.

(Edward dan Penney, 1996).

Jenis kestabilan titik kesetimbangan berdasarkan nilai karakteristik matriks Jacobi sesuai Teorema 2.1 dapat diringkaskan dalam Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Kriteria kestabilan titik kesetimbangan sistem autonomus nonlinear

Nilai Karakteristik	Bentuk	Kestabilan
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$	Simpul	Tidak stabil
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$	Garis	Tidak stabil
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$	Sadel	Tidak stabil pelana
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$	Simpul	Stabil asimtotik
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 = 0$	Garis	Stabil netral
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$	Sadel	Tidak stabil pelana
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \alpha < 0$	Spiral	Stabil asimtotik
$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega, \alpha > 0$	Spiral	Tidak stabil
$\lambda_{1,2} = \pm i\omega$	Elips/Lingkaran	Tidak dapat ditentukan

2.9. Limit Cycle

Definisi *limit cycle* sebagaimana yang dijelaskan oleh Panfilov, disajikan dalam Definisi 2.3.

Definisi 2.4

Diberikan sistem (2.2). Suatu trayektori tertutup yang didekati secara spiral dari dalam atau dari luar oleh trayektori tak tertutup sistem (2.2) untuk $t \rightarrow \infty$ atau $t \rightarrow -\infty$ dinamakan *limit cycle* sistem (2.2).

Limit cycle yang stabil terjadi jika trayektori dari dalam *limit cycle* mengalami peningkatan amplitudo pada osilasinya. Sementara itu besarnya amplitudo osilasi trayektori dari luar akan mengalami penurunan hingga mencapai *limit cycle*. *Limit cycle* dapat terjadi sebagai hasil dari bifurkasi Hopf dimana terdapat perubahan tanda pada bagian riil akar persamaan karakteristik pada bidang kompleks.

2.10. Persamaan Diferensial Tundaan

Menurut Kuang (1993), persamaan diferensial dengan tundaan dinyatakan dalam bentuk:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) + \sum_{k=0}^m b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t - \tau) = 0 \quad (2.8)$$

dimana τ adalah waktu tunda dan $\frac{d^0}{dt^0} x(t) = x(t)$. Misal $x(t) = e^{\lambda t}$, maka

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k e^{\lambda t} + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{\lambda(t-\tau)} &= 0, \\ e^{\lambda t} \left(\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Karena $e^{\lambda t} \neq 0$, maka

$$\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k e^{-\lambda \tau} = 0. \quad (2.9)$$

Persamaan (2.9) disebut sebagai persamaan karakteristik dari persamaan (2.8). Misal

$$P_1(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \text{ dan } P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^m b_k \lambda^k,$$

maka persamaan (2.9) dapat ditulis kembali sebagai

$$P_1(\lambda) + P_2(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (2.10)$$

Menurut Forde (2005), sistem persamaan diferensial dengan waktu tunda dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= f_1(x(t), x(t-\tau)) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= f_n(x(t), x(t-\tau)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.11. Eksistensi Nilai Kritis Tundaan

Jika $\tau = 0$, maka sistem persamaan (2.11) akan menjadi persamaan diferensial biasa yang jenis kestabilannya dapat dianalisis menggunakan kriteria pada Tabel 2.2. Menurut Forde (2005), untuk $\tau \neq 0$, akar karakteristik (λ) akan mengalami perubahan. Misal $\lambda = \alpha \pm i\omega$. Dari kriteria kestabilan pada Tabel 2.2, sistem (2.11) bersifat stabil jika $\alpha < 0$ dan tidak stabil jika $\alpha > 0$. Penambahan waktu tunda pada sistem (2.11) yang mengakibatkan adanya nilai kritis tundaan akan menyebabkan terjadinya transisi dari $\alpha < 0$ ke $\alpha > 0$. Dengan demikian untuk mengamati terjadinya perubahan tersebut dipilih $\alpha = 0$. Oleh karena itu, akar persamaan karakteristik untuk sistem (2.11) adalah akar karakteristik kompleks murni dimana bagian riil dari akar persamaan adalah nol. Berdasarkan Tabel 2.2, maka jenis kestabilan pada sistem (2.11) tidak dapat ditentukan. Namun kestabilan tersebut masih dapat dianalisis.

Misal akar persamaan (2.10) adalah $\lambda = i\omega, \omega \in R$, dimana $\omega > 0$, persamaan (2.10) menjadi

$$P_1(i\omega) + P_2(i\omega)e^{-i\omega\tau} = 0.$$

Jika bagian polinomialnya dipecah menjadi bagian riil dan imajiner, serta suku eksponennya diubah dalam bentuk trigonometri, maka diperoleh

$$R_1(\omega) + iQ_1(\omega) + (R_2(\omega) + iQ_2(\omega))(\cos(\omega\tau) - i \sin(\omega\tau)) = 0 \quad (2.12)$$

dengan

$$R_1(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} a_j \omega^{2j} ; Q_1(\omega) = \sum_j (-1)^j a_{j+1} \omega^{2j+1} ;$$

$$R_2(\omega) = \sum_j (-1)^{j+1} b_j \omega^{2j} ; Q_2(\omega) = \sum_j (-1)^j b_{j+1} \omega^{2j+1}.$$

Agar persamaan (2.12) berlaku, bagian riil dan imajiner harus sama dengan nol.

$$R_1(\omega) + R_2(\omega) \cos(\omega\tau) + Q_2(\omega) \sin(\omega\tau) = 0,$$

$$Q_1(\omega) - R_2(\omega) \sin(\omega\tau) + Q_2(\omega) \cos(\omega\tau) = 0,$$

atau

$$\begin{aligned} -R_1(\omega) &= R_2(\omega) \cos(\omega\tau) + Q_2(\omega) \sin(\omega\tau), \\ Q_1(\omega) &= R_2(\omega) \sin(\omega\tau) - Q_2(\omega) \cos(\omega\tau). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Jika persamaan (2.13 dikuadratkan, maka

$$\begin{aligned} R_1(\omega)^2 &= R_2(\omega)^2 \cos(\omega\tau)^2 + Q_2(\omega)^2 \sin(\omega\tau)^2 \\ &\quad + 2R_2(\omega)Q_2(\omega) \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau), \\ Q_1(\omega)^2 &= R_2(\omega)^2 \sin(\omega\tau)^2 + Q_2(\omega)^2 \cos(\omega\tau)^2 \\ &\quad - 2R_2(\omega)Q_2(\omega) \cos(\omega\tau) \sin(\omega\tau). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Selanjutnya kedua persamaan (2.14) dijumlahkan dan diperoleh

$$R_1(\omega)^2 + Q_1(\omega)^2 = R_2(\omega)^2 + Q_2(\omega)^2. \quad (2.15)$$

Misal ω^* memenuhi persamaan (2.15) dan $d = \sqrt{R_2(\omega^*)^2 + Q_2(\omega^*)^2}$, maka persamaan (2.13) dapat ditulis kembali dalam ω^*

$$\begin{aligned} -R_1(\omega^*) &= d \left(\frac{R_2(\omega^*)}{d} \cos(\omega^*\tau) + \frac{Q_2(\omega^*)}{d} \sin(\omega^*\tau) \right), \\ Q_1(\omega^*) &= d \left(\frac{R_2(\omega^*)}{d} \sin(\omega^*\tau) - \frac{Q_2(\omega^*)}{d} \cos(\omega^*\tau) \right). \end{aligned}$$

Misal $\frac{R_2(\omega^*)}{d} = \cos \beta$ dan $\frac{Q_2(\omega^*)}{d} = \sin \beta$, maka:

$$\begin{aligned} -R_1(\omega^*) &= d (\cos \beta \cos(\omega^*\tau) + \sin \beta \sin(\omega^*\tau)), \\ Q_1(\omega^*) &= d (\cos \beta \sin(\omega^*\tau) - \sin \beta \cos(\omega^*\tau)). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat trigonometri, diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(\omega^*) &= d \cos(\omega^* \tau - \beta), \\ Q_1(\omega^*) &= d \sin(\omega^* \tau - \beta). \end{aligned}$$

Nilai τ^* dapat diperoleh dari persamaan (2.16), yaitu mengalikan baris pertama persamaan (2.16) dengan $\cos \beta$ dan baris kedua persamaan (2.16) dengan $\sin \beta$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -R_1(\omega^*) \cos \beta &= d \cos \beta \cos \beta \cos(\omega^* \tau) + d \cos \beta \sin \beta \sin(\omega^* \tau) \\ Q_1(\omega^*) \sin \beta &= d \sin \beta \cos \beta \sin(\omega^* \tau) - d \sin \beta \sin \beta \cos(\omega^* \tau) \\ \hline -R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta &= d \cos \beta \cos \beta \cos(\omega^* \tau) \\ &\quad + d \sin \beta \sin \beta \cos(\omega^* \tau) \\ -R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta &= d \cos(\omega^* \tau) (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \\ -R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta &= d \cos(\omega^* \tau) \\ \omega^* \tau &= \arccos \left\{ \frac{-R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta}{d} \right\} + 2n\pi, \\ &\quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \tau_n^* &= \frac{1}{\omega^*} \arccos \left\{ \frac{-R_1(\omega^*) \cos \beta - Q_1(\omega^*) \sin \beta}{d} \right\} + \frac{2n\pi}{\omega^*}, \\ &\quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{2.17}$$

Dari persamaan (2.17) dapat dilihat bahwa terdapat beberapa τ^* yang memenuhi persamaan (2.12). Karena terdapat banyak τ^* maka dipilih yang terkecil agar lebih efektif. Setelah ditemukan titik kritis tundaan, selanjutnya akan ditentukan apakah kondisi ini memenuhi kondisi transversal.

2.12. Kondisi Transversal

Perlu diselidiki kondisi yang dapat menyebabkan perubahan kestabilan dari titik tetap ketika waktu tunda berubah. Untuk itu perlu dibuktikan bahwa bagian riil akar karakteristik bergerak menuju bagian positif pada bidang kompleks ketika waktu tunda τ membesar melebihi τ^* , dengan kriteria

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} > 0$$

atau ekuivalen dengan

$$\left. \frac{d}{d\tau} Re(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} \neq 0.$$

Kondisi di atas disebut kondisi transversal atau *nondegeneracy*. Jika kondisi ini dipenuhi maka untuk $\tau < \tau^*$, λ mempunyai bagian riil negatif (Forde, 2005).

Berikut lemma yang menjamin kondisi transversal atau *nondegeneracy* akan terpenuhi.

Lemma 2.1 (Forde, 2005)

Jika $\lambda = i\omega^*$ dan $\tau = \tau^*$ memenuhi persamaan karakteristik (2.10) maka $\left. \frac{d}{d\tau} Re(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} > 0$ jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \\ \neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q_2'(\omega^*). \end{aligned}$$

Bukti:

Persamaan karakteristik (2.10) dapat ditulis sebagai

$$e^{-\lambda\tau} = -\frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)}$$

sehingga

$$-\lambda\tau = \ln\left(-\frac{P_1(\lambda)}{P_2(\lambda)}\right).$$

Misal λ adalah $\lambda(\tau)$. Jika λ diturunkan terhadap τ akan diperoleh

$$-\lambda - \tau \frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{P_1(\lambda)P_2'(\lambda) - P_1'(\lambda)P_2(\lambda)}{P_1(\lambda)P_2(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau}$$

dimana $' = \frac{d}{d\lambda}$. Untuk $\lambda = i\omega^*$ dan $\tau = \tau^*$, maka ruas kiri persamaan adalah $-i\omega^* - \tau^* \frac{d\lambda}{d\tau}$. Karena $i\omega^*$ imajiner dan τ^* adalah riil, maka $\frac{d\lambda}{d\tau}$ imajiner jika dan hanya jika

$$\frac{P_1(i\omega^*)P_2'(i\omega^*) - P_1'(i\omega^*)P_2(i\omega^*)}{P_1(i\omega^*)P_2(i\omega^*)} \quad (2.18)$$

bernilai riil. Selanjutnya harus ditunjukkan bahwa persamaan (2.18) bernilai riil. Persamaan (2.18) akan dipisah bagian riil dan imajinernya,

$$\begin{aligned} & \frac{P_1(i\omega^*)P_2'(i\omega^*) - P_1'(i\omega^*)P_2(i\omega^*)}{P_1(i\omega^*)P_2(i\omega^*)} \\ &= \frac{(Q_1' - iR_1')(R_2 + iQ_2) - (R_1 + iQ_1)(Q_2' - iR_2')}{(R_1 + iQ_1)(R_2 + iQ_2)} \\ &= \frac{(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'R_2 - R_2'Q_2) + (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'Q_1 - Q_1'R_1)}{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2^2 + Q_2^2)} \\ &+ i \frac{(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'Q_2 + R_2'R_2) - (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1)}{(R_1^2 + Q_1^2)(R_2^2 + Q_2^2)}. \end{aligned}$$

Agar persamaan (2.18) bernilai riil maka

$$(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'Q_2 + R_2'R_2) - (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1) = 0$$

atau

$$(R_1^2 + Q_1^2)(Q_2'Q_2 + R_2'R_2) = (R_2^2 + Q_2^2)(R_1'R_1 + Q_1'Q_1).$$

Karena persamaan (2.15) maka

$$R_1R_1' + Q_1Q_1' = R_2R_2' + Q_2Q_2'. \quad (2.19)$$

Agar persamaan (2.19) terpenuhi,

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} = 0.$$

Dengan kata lain,

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} \neq 0$$

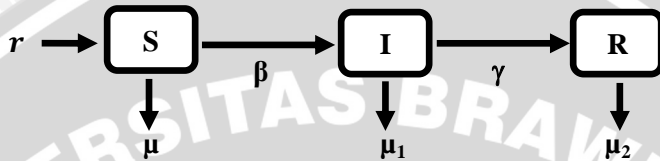
jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} & R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \\ & \neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q_2'(\omega^*). \end{aligned}$$

Jika terdapat akar karakteristik dari persamaan (2.10), akan ditemukan suatu titik kritis tundaan τ^* . Dengan demikian bagian riil

akar karakteristik dari sistem (2.11) akan menuju bagian positif bidang kompleks.

2.13. Model Kompartemen Epidemik SIR



Gambar 2.1 Model SIR

Heesterbeek dan Diekmann (2000) menjelaskan bahwa untuk memodelkan epidemik penyakit, total populasi N dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas rentan S , kelas terinfeksi I , dan kelas sembuh R . Laju penularan dan pemulihan dinyatakan dalam β dan γ . Sementara itu laju pertumbuhan dan kematian dinyatakan dalam r dan μ . Laju-laju tersebut bersifat konstan. Laju perubahan antara S dan I memiliki model khusus dengan mengasumsikan laju penularan penyakit proporsional dengan laju pertemuan kelas yang rentan terserang infeksi dan yang terjangkit, sehingga dijelaskan dalam bentuk βSI .

Berdasarkan penjelasan dan asumsi yang ada, Gambar 2.1. dapat dikonstruksi model berikut.

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= rN - \mu S - \beta SI \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \mu_1 I - \gamma I \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I - \mu_2 R \\
 N(t) &= S(t) + I(t) + R(t)
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

dengan σ , μ , μ_1 , μ_2 , β , dan γ adalah konstanta positif.

2.14. Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar (R_0) merupakan parameter penting dalam matematika epidemiologi yang merupakan ambang batas (*threshold*) terjadinya penyebaran penyakit. Menurut Berihun (2009) bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menyatakan bertambahnya jumlah individu *Infective* terhadap berkurangnya jumlah individu *Susceptibles* ketika satu individu *Infective* dimasukkan ke dalam populasi yang sepenuhnya *Susceptibles*.

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari laju perubahan *Infective*. Baris ke dua persamaan (2.20) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dI}{dt} = (\mu_1 + \gamma)I \left(\frac{\beta S}{\mu_1 + \gamma} - 1 \right). \quad (2.21)$$

Dari persamaan (2.21) diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 = \frac{\beta S}{\mu_1 + \gamma}$. Populasi awal *Susceptibles* sama dengan jumlah total populasi ($N = S$) karena populasi tersebut masih belum terinfeksi, sehingga persamaan (2.21) dapat ditulis kembali menjadi

$$\frac{dI}{dt} = (\mu_1 + \gamma)I \left(\frac{\beta N}{\mu_1 + \gamma} - 1 \right)$$

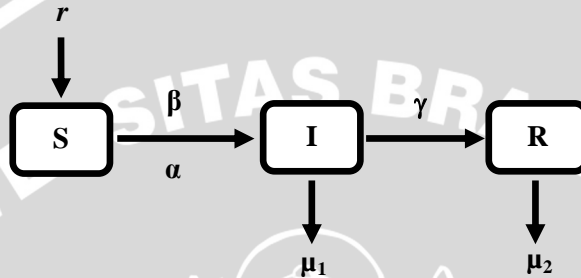
atau

$$\frac{dI}{dt} = (\mu_1 + \gamma)I(R_0 - 1).$$

Selanjutnya jika $R_0 < 1$ maka $\frac{dI}{dt} < 0$ berarti jumlah individu *Infective* menurun dan berangsur-angsur menghilang. Sebaliknya jika $R_0 > 1$ maka $\frac{dI}{dt} > 0$ berarti jumlah individu *Infective* meningkat dan kondisi ini akan menyebabkan terjadinya kondisi epidemik.

BAB III PEMBAHASAN

3.1. Model SIR dengan *Nonlinear Incidence Rate* dan Waktu Tunda



Gambar 3.1 Model SIR dengan *nonlinear incidence rate*

Berdasarkan Gambar 3.1 dapat dilihat bahwa suatu populasi total N dibagi menjadi tiga kelas yaitu kelas rentan S , kelas terinfeksi I , dan kelas sembuh R . Laju pertumbuhan populasi dinyatakan dalam r . Suatu populasi yang bebas penyakit akan tumbuh mengikuti model pertumbuhan logistik yaitu populasi akan terus tumbuh sampai batas kapasitas tertentu dan dinyatakan sebagai

$$S'(t) = r \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) S(t).$$

Suatu populasi yang terinfeksi penyakit, memiliki laju penularan dan pemulihan dinyatakan dalam β dan γ . Dalam interaksi antara S dan I dapat ditambahkan tingkat *incidence* (α), sehingga interaksi antara S dan I dinyatakan dalam bentuk nonlinear sebagai $\beta(SI/(1 + \alpha S))$. Laju kematian kelas terinfeksi I , dan kelas sembuh R dinyatakan dalam μ_1 dan μ_2 .

Pada model SIR dengan waktu tunda penularan penyakit tidak langsung membuat individu S menjadi I . Beberapa penyakit memerlukan waktu inkubasi, yaitu interval waktu antara kontak awal dengan bibit penyakit dan awal munculnya gejala penyakit yang dikaitkan dengan infeksi tersebut. Waktu inkubasi merupakan perlambatan atau tundaan untuk model SIR. Lama waktu inkubasi dinotasikan sebagai τ .

Secara matematis model SIR dapat ditulis dalam sistem persamaan berikut.

$$\begin{aligned} S'(t) &= r \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) S(t) - \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t - \tau) \\ I'(t) &= \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t - \tau) - (\mu_1 + \gamma) I(t) \\ R'(t) &= \gamma I(t) - \mu_2 R(t) \\ N(t) &= S(t) + I(t) + R(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

dengan r , α , β , γ , μ_1 , μ_2 , dan K adalah konstanta positif (Zhang dkk, 2008).

3.2. Titik Kesetimbangan dan Bilangan Reproduksi Dasar

Titik kesetimbangan dan bilangan reproduksi dasar diperoleh pada saat tidak terjadi masa inkubasi atau $\tau = 0$. Sesuai yang dikatakan Panfilov (2004), titik kesetimbangan pada suatu sistem akan terjadi jika tidak ada perubahan lagi pada sistem. Dengan kata lain, laju perubahan pada sistem bernilai nol, sehingga model SIR akan mengalami kesetimbangan jika

$$0 = r \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) S(t) - \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t), \quad (3.2)$$

$$0 = \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t) - (\mu_1 + \gamma) I(t), \quad (3.3)$$

$$0 = \gamma I(t) - \mu_2 R(t). \quad (3.4)$$

Dari persamaan (3.3) diperoleh

$$\left(\beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} - (\mu_1 + \gamma) \right) I(t) = 0.$$

Misalkan $I(t) \neq 0$ maka

$$\beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} - (\mu_1 + \gamma) = 0$$

$$\begin{aligned}\beta S(t) - (\mu_1 + \gamma)(1 + \alpha S(t)) &= 0 \\ \beta S(t) - (\mu_1 + \gamma) - (\mu_1 + \gamma)\alpha S(t) &= 0 \\ (\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma))S(t) &= (\mu_1 + \gamma) \\ S(t) &= \frac{(\mu_1 + \gamma)}{(\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma))}.\end{aligned}$$

Jadi

$$\hat{S} = \frac{(\mu_1 + \gamma)}{(\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma))}.$$

Jika persamaan (3.2) dan (3.3) dijumlahkan, diperoleh

$$\begin{aligned}r \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t) - (\mu_1 + \gamma)I(t) &= 0 \\ (\mu_1 + \gamma)I(t) &= r \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t) \\ I(t) &= \frac{rS(t)}{(\mu_1 + \gamma)} \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right)\end{aligned}$$

atau

$$\hat{I} = \frac{r\hat{S}}{(\mu_1 + \gamma)} \left(1 - \frac{\hat{S}}{K}\right). \quad (3.5)$$

Selanjutnya dari persamaan (3.4) diperoleh

$$R(t) = \frac{\gamma I(t)}{\mu_2} \quad \text{atau} \quad \hat{R} = \frac{\gamma \hat{I}}{\mu_2}.$$

Dengan demikian jika nilai setiap parameternya diketahui maka dapat ditemukan titik kesetimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$.

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dari laju perubahan *Infective*. Persamaan ke dua pada sistem (3.1) dapat ditulis kembali menjadi

$$I'(t) = (\mu_1 + \gamma)I(t) \left(\beta \frac{S(t)}{(1 + \alpha S(t))(\mu_1 + \gamma)} - 1 \right).$$

Karena populasi S menuju K , diperoleh

$$I'(t) = (\mu_1 + \gamma)I(t) \left(\beta \frac{K}{(1 + \alpha K)(\mu_1 + \gamma)} - 1 \right)$$

atau

$$I'(t) = (\mu_1 + \gamma)I(t) \left(K \frac{\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma)}{(\mu_1 + \gamma)} - 1 \right).$$

Bilangan reproduksi dasar sesuai dengan Berihun (2009), yaitu

$$R_0 = \frac{K(\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma))}{(\mu_1 + \gamma)}. \quad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.6), maka persamaan (3.5) dapat ditulis kembali sebagai

$$\hat{I} = \frac{r\hat{S}}{(\mu_1 + \gamma)} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right). \quad (3.7)$$

Dua jenis titik kesetimbangan lain pada model epidemik, yaitu

a. Titik kesetimbangan bebas epidemik

Titik kesetimbangan bebas epidemik berarti $I(t) = 0$ atau $\hat{I} = 0$ pada saat waktu menuju tak hingga. Selanjutnya dapat ditemukan \hat{S} dari persamaan (3.7) yaitu

$$0 = \frac{r\hat{S}}{(\mu_1 + \gamma)} \left(1 - \frac{\hat{S}}{K} \right),$$

Artinya $\frac{r\hat{S}}{(\mu_1 + \gamma)} = 0$ atau $1 - \frac{\hat{S}}{K} = 0$. Untuk $\frac{r\hat{S}}{(\mu_1 + \gamma)} = 0$, diperoleh $\hat{S} = 0$. Sementara itu, untuk $1 - \frac{\hat{S}}{K} = 0$, diperoleh $\frac{\hat{S}}{K} = 1$ atau $\hat{S} = K$. Selain itu, $\hat{R} = 0$ diperoleh dari persamaan (3.4). Dengan demikian titik kesetimbangan bebas epidemik pada model adalah $(0, 0, 0)$ atau $(K, 0, 0)$.

b. Titik kesetimbangan epidemik

Titik kesetimbangan epidemik menandakan bahwa terdapat epidemik pada suatu populasi. Artinya $I(t) \neq 0$ atau $\hat{I} \neq 0$ pada saat waktu menuju tak hingga, sehingga didapat $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ dimana

$$\hat{S} = \frac{(\mu_1 + \gamma)}{(\beta - \alpha(\mu_1 + \gamma))}, \hat{I} = \frac{r\hat{S}}{(\mu_1 + \gamma)} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right), \text{ dan } \hat{R} = \frac{\gamma\hat{I}}{\mu_2}.$$

Titik kesetimbangan epidemik $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ akan terjadi jika besarnya bilangan reproduksi $R_0 > 1$. Jika bilangan reproduksi dasar $R_0 = 1$, maka akan terjadi titik kesetimbangan bebas epidemik, karena dengan mensubstitusikan $R_0 = 1$ ke dalam persamaan (3.7) akan diperoleh $\hat{I} = 0$. Sementara itu, jika besarnya bilangan bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$, maka titik kesetimbangan epidemik tidak akan terjadi karena dengan mensubstitusikan $R_0 < 1$ ke dalam persamaan (3.7) akan diperoleh populasi \hat{I} bernilai negatif.

3.3. Analisis Kestabilan Model SIR tanpa Waktu Tunda

Sistem (3.1) akan menjadi model SIR tanpa waktu tunda jika $\tau = 0$. Perubahan $R(t)$ tidak memiliki pengaruh terhadap variabel yang lainnya sehingga sistem (3.1) dapat direduksi menjadi dua persamaan berikut.

$$\begin{aligned} S'(t) &= r \left(1 - \frac{S(t)}{K}\right) S(t) - \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t) \\ I'(t) &= \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t) - (\mu_1 + \gamma) I(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sistem (3.8) dapat disederhanakan dengan melakukan linearisasi. Linearisasi sistem dilakukan dengan menggunakan ekspansi deret Taylor hingga suku ke dua di sekitar titik kesetimbangan.

Misal titik-titik di sekitar titik kesetimbangan adalah $(S(t), I(t))$ maka $(x(t), y(t))$ dapat dinyatakan dalam $S(t) = \hat{S} + x(t)$ dan $I(t) = \hat{I} + y(t)$. Oleh karena itu, sistem (3.8) dapat dilinearisasi sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \frac{2rS(t)}{K} - \beta \frac{I(t)}{(1 + \alpha S(t))^2} & -\beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} \\ \beta \frac{I(t)}{(1 + \alpha S(t))^2} & \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} - (\mu_1 + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S(t) - \hat{S} \\ I(t) - \hat{I} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} & -\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} \\ \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} & \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} - (\mu_1 + \gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

diperoleh

$$x'(t) = \left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} \right) x(t) - \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} y(t)$$

$$y'(t) = \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} x(t) + \left(\beta \frac{\hat{I}}{1 + \alpha\hat{S}} - (\mu_1 + \gamma) \right) y(t)$$

Selanjutnya untuk membentuk persamaan karakteristik dapat digunakan matriks Jacobi dari persamaan (3.9). Dengan demikian persamaan karakteristik dari persamaan (3.8) adalah

$$\begin{vmatrix} r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} - \lambda & -\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} \\ \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} & \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Persamaan karakteristik dalam polinomial λ adalah

$$\left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} - \lambda \right) \left(\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda \right) + \beta^2 \frac{\hat{I}\hat{S}}{(1 + \alpha\hat{S})^3} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \left[-r + \frac{2r\hat{S}}{K} + \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} - \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} + (\mu_1 + \gamma) \right] \\ + \left(\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} - (\mu_1 + \gamma) \right) \left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} \right) \\ + \beta^2 \frac{\hat{I}\hat{S}}{(1 + \alpha\hat{S})^3} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \left[-r + \frac{2r\hat{S}}{K} + \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} - \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} + (\mu_1 + \gamma) \right] \\ + \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} \left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} \right) \\ - (\mu_1 + \gamma) \left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} \right) = 0. \quad (3.10)$$

3.3.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan nilai $(0, 0, 0)$ ke dalam persamaan (3.10) akan diperoleh persamaan karakteristik

$$(r - \lambda)(-\mu_1 + \gamma) - \lambda = 0.$$

Diperoleh akar persamaan karakteristik $\lambda = -(\mu_1 + \gamma)$ atau $\lambda = r$. Karena r, μ_1, γ adalah konstanta positif, maka $\lambda = -(\mu_1 + \gamma)$ bernilai negatif dan $\lambda = r$ bernilai positif. Dengan demikian titik $(0, 0, 0)$ tidak stabil pelana (sadel).

3.3.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan nilai $(K, 0, 0)$ ke dalam persamaan (3.10) akan diperoleh persamaan karakteristik

$$(-r - \lambda) \left(\beta \frac{K}{1 + \alpha K} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda \right) = 0$$

atau

$$(r + \lambda) \left(\left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \right) (\mu_1 + \gamma) + \lambda \right) = 0. \quad (3.11)$$

Dari persamaan (3.11) diperoleh akar-akar persamaan karakteristik $\lambda = -r$ atau $\lambda = -\left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K}\right)(\mu_1 + \gamma)$. Jenis kestabilan titik kesetimbangan dapat dibagi dalam 3 kasus.

- Jika $R_0 > 1$ maka titik $(K, 0, 0)$ tidak stabil pelana (sadel) karena terdapat dua akar persamaan karakteristik yang berlawanan tanda.
- Jika $R_0 = 1$, akan diperoleh $\lambda = -r$ atau $\lambda = 0$. Sesuai Tabel 2.2, maka titik kesetimbangan $(K, 0, 0)$ bersifat stabil netral.
- Jika $R_0 < 1$ maka titik $(K, 0, 0)$ stabil asimtotik karena semua λ bernilai negatif.

Berdasarkan ketiga kasus kestabilan titik $(K, 0, 0)$ maka dapat dikatakan bahwa titik kesetimbangan $(K, 0, 0)$ stabil jika $R_0 \leq 1$.

3.3.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ ke dalam persamaan (3.2) dan (3.3), diperoleh $\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha \hat{S}} = \mu_1 + \gamma$ dan $\beta \frac{\hat{I}}{1 + \alpha \hat{S}} = 1 - \frac{1}{R_0}$, sehingga didapat

$$\begin{vmatrix} r\left(1 - \frac{2}{R_0}\right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - \lambda & -(\mu_1 + \gamma) \\ \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda \left[-r\left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right] + (\mu_1 + \gamma) \left[\frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right] = 0.$$

Dengan demikian nilai akar persamaan karakteristik dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\lambda_{1,2} = \frac{r\left(1 - \frac{2}{R_0}\right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{2}$$

$$\pm \sqrt{\frac{\left[-r\left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right]^2 - 4(\mu_1 + \gamma) \left[\frac{r}{1 + \alpha \hat{S}}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right]}{2}}$$

Dari akar persamaan karakteristik λ , dapat ditentukan jenis kestabilan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$. Karena $R_0 > 1$ maka

$$r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) < 0 \quad (3.12)$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.12), jenis kestabilan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ dapat dibagi menjadi tiga kasus, yaitu

i. $\left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]^2 > 4(\mu_1 + \gamma) \left[\frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]$

maka

$$\frac{-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)}{\sqrt{\left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]^2 - 4(\mu_1 + \gamma) \left[\frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]}}$$

Oleh karena itu terdapat dua akar riil negatif yang berbeda sehingga titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik.

ii. $\left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]^2 < 4(\mu_1 + \gamma) \left[\frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]$

maka terdapat sepasang akar kompleks dengan bagian riil bertanda negatif, sehingga titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik berbentuk spiral.

iii. $\left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]^2 = 4(\mu_1 + \gamma) \left[\frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\right]$

maka terdapat akar riil negatif kembar, sehingga titik kesetimbangan bersifat stabil asimtotik.

Dari ketiga kasus jenis kestabilan titik $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$, dapat dikatakan bahwa titik $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ bersifat stabil jika $R_0 > 1$.

3.4. Analisis Kestabilan Model SIR dengan Waktu Tunda

Sebagaimana metode linierisasi model SIR tanpa waktu tunda yang telah diuraikan di atas maka model SIR dengan waktu tunda juga akan direduksi, sehingga proses linearisasi dapat dilakukan. Sistem (3.1) akan direduksi menjadi dua persamaan, yaitu

$$\begin{aligned} S'(t) &= r \left(1 - \frac{S(t)}{K} \right) S(t) - \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t - \tau), \\ I'(t) &= \beta \frac{S(t)}{1 + \alpha S(t)} I(t - \tau) - (\mu_1 + \gamma) I(t). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dengan metode linearisasi, sistem persamaan (3.13) akan diubah menjadi sistem linear

$$\begin{aligned} x'(t) &= \left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} \right) x(t) - \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} y(t - \tau), \\ y'(t) &= \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} x(t) - \beta \frac{\hat{I}}{1 + \alpha\hat{S}} y(t - \tau) - (\mu_1 + \gamma) y(t), \end{aligned}$$

dengan $S(t) = \hat{S} + x(t)$ dan $I(t) = \hat{I} + y(t)$. Selanjutnya didapat persamaan karakteristik

$$\begin{vmatrix} r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} - \lambda & -\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} e^{-\lambda\tau} \\ \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} & \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) &= \lambda^2 + \lambda \left[-r + \frac{2r\hat{S}}{K} + \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} + (\mu_1 + \gamma) \right] \\ &\quad - (\mu_1 + \gamma) \left[r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \beta \frac{\hat{I}}{(1 + \alpha\hat{S})^2} \right] \\ &\quad + \left(r - \frac{2r\hat{S}}{K} - \lambda \right) \beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha\hat{S}} e^{-\lambda\tau} = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.4.1. Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_0 = (0, 0, 0)$

Persamaan karakteristik pada titik ini adalah

$$(r - \lambda)(-(\mu_1 + \gamma) - \lambda) = 0.$$

Dapat dilihat bahwa akar persamaan karakteristik pada titik kesetimbangan $(0, 0, 0)$ adalah $\lambda = -(\mu_1 + \gamma)$ atau $\lambda = r$. Karena r, μ_1, γ adalah konstanta positif, maka $\lambda = -(\mu_1 + \gamma)$ bernilai negatif dan $\lambda = r$ bernilai positif. Oleh karena itu titik kesetimbangan $(0, 0, 0)$ tidak stabil pelana (sadel). Nilai τ tidak berpengaruh untuk titik kesetimbangan $(0, 0, 0)$ karena variabel yang mengandung τ bernilai nol.

3.4.2. Kestabilan Titik Kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $(K, 0, 0)$ ke dalam persamaan (3.14) diperoleh persamaan karakteristik berikut.

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda, \tau) &= \lambda^2 + \lambda[r + (\mu_1 + \gamma)] - (\mu_1 + \gamma)r \\ &\quad + (r - \lambda)\beta \frac{K}{1 + \alpha K} e^{-\lambda\tau} = 0 \\ (r + \lambda) \left(\lambda - \beta \frac{K}{1 + \alpha K} e^{-\lambda\tau} + (\mu_1 + \gamma) \right) &= 0 \end{aligned}$$

atau

$$(r + \lambda) \left(\lambda + \left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} e^{-\lambda\tau} \right) (\mu_1 + \gamma) \right) = 0. \quad (3.15)$$

Dari persamaan (3.15) dapat dilihat bahwa ada akar karakteristik yang bernilai negatif yaitu $\lambda = -r$.

Selanjutnya akan dilihat apakah untuk $R_0 \leq 1$ dengan $\tau > 0$ maka titik $(K, 0, 0)$ akan tetap stabil. Dengan memisalkan $\lambda = i\omega$ dan mensubstitusikannya pada faktor persamaan yang kedua dari persamaan (3.14) yaitu

$$\lambda + \left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} e^{-\lambda\tau} \right) (\mu_1 + \gamma) = 0,$$

akan diperoleh

$$i\omega + \left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} e^{-i\omega\tau} \right) (\mu_1 + \gamma) = 0.$$

Suku eksponennya diubah dalam bentuk trigonometri, serta dipisah bagian imajiner dan bagian riilnya.

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} (\cos \omega \tau - i \sin \omega \tau) \right) + i \omega &= 0 \\
 (\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \cos \omega \tau \right) \\
 + i \left(\omega + (\mu_1 + \gamma) \left(\frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \sin \omega \tau \right) \right) &= 0. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Agar memenuhi persamaan (3.16) maka

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \cos \omega \tau \right) &= 0, \\
 \omega + (\mu_1 + \gamma) \left(\frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \sin \omega \tau \right) &= 0.
 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Persamaan (3.17) dapat ditulis kembali sebagai

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \gamma) &= (\mu_1 + \gamma) \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \cos \omega \tau, \\
 \omega &= -(\mu_1 + \gamma) \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \sin \omega \tau.
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Kedua ruas pada persamaan (3.18) dikuadratkan dan dijumlahkan.

$$\begin{aligned}
 (\mu_1 + \gamma)^2 &= \left((\mu_1 + \gamma) \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \cos \omega \tau \right)^2 \\
 \omega^2 &= \left((\mu_1 + \gamma) \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \sin \omega \tau \right)^2 \\
 \hline
 \omega^2 + (\mu_1 + \gamma)^2 &= \left((\mu_1 + \gamma) \frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \right)^2 + \\
 \omega^2 + (\mu_1 + \gamma)^2 \left(1 - \left(\frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \right)^2 \right) &= 0 \\
 \omega^2 &= -(\mu_1 + \gamma)^2 \left(1 - \left(\frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \right)^2 \right).
 \end{aligned}$$

Karena $R_0 \leq 1$ maka $(\mu_1 + \gamma)^2 \left(1 - \left(\frac{R_0 + \alpha K}{1 + \alpha K} \right)^2 \right) > 0$. Dengan demikian, tidak ditemukan bilangan riil ω^* yang memenuhi faktor

kedua dari persamaan (3.15), sehingga adanya waktu tunda τ tidak berpengaruh terhadap kestabilan titik kesetimbangan $E_1 = (K, 0, 0)$.

3.4.3. Kestabilan Titik Kesetimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$

4 Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ ke dalam persamaan (3.2) dan (3.3), diperoleh $\beta \frac{\hat{S}}{1 + \alpha \hat{S}} = \mu_1 + \gamma$ dan $\beta \frac{\hat{I}}{1 + \alpha \hat{S}} = 1 - \frac{1}{R_0}$, sehingga didapat persamaan karakteristik di titik $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ adalah

$$\begin{vmatrix} r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) - \lambda & -(\mu_1 + \gamma)e^{-\lambda\tau} \\ \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) & (\mu_1 + \gamma)e^{-\lambda\tau} - (\mu_1 + \gamma) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Persamaan karakteristik dalam polinomial λ dan τ adalah

$$P_1(\lambda, \tau) + P_2(\lambda, \tau)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (3.19)$$

dimana

$$P_1(\lambda, \tau) = \lambda^2 + \lambda \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + (\mu_1 + \gamma) \right] + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) \right],$$

$$P_2(\lambda, \tau) = -\lambda(\mu_1 + \gamma) + r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0}\right).$$

Persamaan karakteristik untuk titik $(\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ memuat waktu tunda, sehingga adanya waktu tunda memungkinkan terjadinya perubahan kestabilan. Dengan demikian perlu ditunjukkan adanya titik kritis tundaan dan kondisi transversal terpenuhi.

3.4.3.1. Eksistensi Waktu Tunda Kritis

Misal $\lambda = i\omega$ dengan $\omega > 0$ dan λ memenuhi persamaan (3.19), maka persamaan tersebut ekuivalen dengan

$$-\omega^2 + i\omega \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0}\right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) + (\mu_1 + \gamma) \right]$$

$$\begin{aligned}
& +(\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \\
& + \left[-i\omega(\mu_1 + \gamma) + r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right] (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) = 0.
\end{aligned}$$

Selanjutnya dipisahkan bagian riil dan imajinerinya.

$$\begin{aligned}
R(\omega) = & -\omega^2 + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \\
& -\omega(\mu_1 + \gamma) \sin \omega\tau + r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \cos \omega\tau,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q(\omega) = & \omega \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] \\
& -\omega(\mu_1 + \gamma) \cos \omega\tau - r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \sin \omega\tau.
\end{aligned}$$

Agar terpenuhi persamaan (3.19), maka bagian riil dan imajiner harus sama dengan nol.

$$\begin{aligned}
-\omega^2 + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] & = \omega(\mu_1 + \gamma) \sin \omega\tau \\
& -r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \cos \omega\tau, \\
\omega \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] & = \omega(\mu_1 + \gamma) \cos \omega\tau \\
& + r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \sin \omega\tau.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Kedua ruas pada persamaan (3.20) dikuadratkan lalu dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
\omega^4 + \omega^2 \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right]^2 & \\
+ \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) (\mu_1 + \gamma)^2 \left[-2r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right. & \\
\left. + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] & = 0.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Misal

$$p = \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right]^2, \text{ dan}$$

$$q = \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) (\mu_1 + \gamma)^2 \left[-2r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right].$$

Dapat dilihat bahwa p akan selalu positif. Jika $q \geq 0$ maka tidak ada bilangan riil positif yang memenuhi persamaan (3.21), sehingga nilai λ pada persamaan (3.19) tidak berada pada sumbu imajiner untuk setiap $\tau > 0$. Untuk kasus ini adanya waktu tunda tidak menyebabkan perubahan kestabilan.

Sebaliknya untuk $q < 0$, terdapat bilangan positif ω^* yang memenuhi persamaan (3.21). Dengan demikian persamaan tersebut mempunyai akar imajiner $\pm i\omega^*$. Dengan mensubstitusikan ω^* ke persamaan (3.20), diperoleh τ_n^*

$$-\omega^{*2} + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] = \omega^* (\mu_1 + \gamma) \sin \omega^* \tau$$

$$-r (\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \cos \omega^* \tau, \tag{3.22}$$

$$\omega^* \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] = \omega^* (\mu_1 + \gamma) \cos \omega^* \tau$$

$$+ r (\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \sin \omega^* \tau.$$

Baris pertama persamaan (3.22) dikali dengan $r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right)$ dan baris kedua persamaan (3.22) dikali dengan ω^* , kemudian keduanya dikurangkan.

$$r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \left[-\omega^{*2} + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \right]$$

$$-\omega^{*2} \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right]$$

$$= - \left[\omega^{*2} + \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right]^2 \right] (\mu_1 + \gamma) \cos \omega^* \tau$$

$$+ (\mu_1 + \gamma) r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\omega^{*2} \left[\frac{r}{1 + \alpha \delta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] \\
 & = - \left[\omega^{*2} + \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right]^2 \right] (\mu_1 + \gamma) \cos \omega^* \tau.
 \end{aligned}$$

Misalkan $A = \left[\frac{r}{1 + \alpha \delta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right]$ dan

$B = \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \delta} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right]$, maka

$$\begin{aligned}
 & \left[\omega^{*2} + \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right]^2 \right] (\mu_1 + \gamma) \cos \omega^* \tau \\
 & = \omega^{*2} A - (\mu_1 + \gamma) r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) B \\
 \cos \omega^* \tau & = \frac{\omega^{*2} A - (\mu_1 + \gamma) r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) B}{\left[\omega^{*2} + \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right]^2 \right] (\mu_1 + \gamma)} \\
 \omega^* \tau & = \arccos \left\{ \frac{\omega^{*2} A - (\mu_1 + \gamma) r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) B}{\left[\omega^{*2} + \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right]^2 \right] (\mu_1 + \gamma)} \right\} + 2n\pi, \\
 & \quad n = 0, 1, 2, \dots \\
 \tau_n^* & = \frac{1}{\omega^*} \arccos \left\{ \frac{\omega^{*2} A - (\mu_1 + \gamma) r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) B}{\left[\omega^{*2} + \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) \right]^2 \right] (\mu_1 + \gamma)} \right\} + \frac{2n\pi}{\omega^*}, \\
 & \quad n = 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Jadi dapat ditemukan suatu nilai τ_n^* yang memenuhi persamaan (3.20).

3.4.3.2. Kondisi Transversal

Setelah ditemukan titik kritis tundaan, akan ditentukan apakah sistem persamaan (3.1) memenuhi kondisi transversal, yaitu kondisi dimana

$$\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} > 0.$$

Untuk menunjukkan bahwa kondisi transversal terpenuhi, akan digunakan Lemma 2.1 yaitu dengan menunjukkan bahwa

$$\begin{aligned} R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \\ \neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q_2'(\omega^*). \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.20) akan diperoleh

$$\begin{aligned} R_1(\omega) = -\omega \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right. \\ \left. + (\mu_1 + \gamma) \right], \end{aligned}$$

$$Q_1(\omega) = -\omega^2 + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right],$$

$$R_2(\omega) = \omega(\mu_1 + \gamma), \text{ dan}$$

$$Q_2(\omega) = r(\mu_1 + \gamma) \left(1 - \frac{2}{R_0} \right).$$

Ditentukan turunan pertama $R_1(\omega)$, $Q_1(\omega)$, $R_2(\omega)$, dan $Q_2(\omega)$ terhadap ω .

$$R_1'(\omega) = \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right],$$

$$Q_1'(\omega) = -2\omega,$$

$$R_2'(\omega) = (\mu_1 + \gamma), \text{ dan}$$

$$Q_2'(\omega) = 0.$$

Dihitung $R_1(\omega)R_1'(\omega) + Q_1(\omega)Q_1'(\omega)$ dan $R_2(\omega)R_2'(\omega) + Q_2(\omega)Q_2'(\omega)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} R_1(\omega)R_1'(\omega) + Q_1(\omega)Q_1'(\omega) \\ = \left(-\omega^2 + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \right) (-2\omega) \\ + \left(-\omega \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] \\
& = \left(2\omega^3 - 2\omega(\mu_1 + \gamma) \times \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \right) \\
& \quad - \omega \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right]^2, \\
& R_2(\omega)R_2'(\omega) + Q_2(\omega)Q_2'(\omega) = \omega(\mu_1 + \gamma)^2.
\end{aligned}$$

Jika nilai ω diganti dengan ω^* maka diperoleh

$$\begin{aligned}
& R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \\
& = \left(-\omega^{*2} + (\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \right) (-2\omega^*) \\
& \quad + \left(-\omega^* \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] \right) \\
& \quad \times \left[r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) - \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right] \\
& = \left(2\omega^{*3} - 2\omega(\mu_1 + \gamma) \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) \right] \right) \\
& \quad - \omega^* \left[-r \left(1 - \frac{2}{R_0} \right) + \frac{r}{1 + \alpha \hat{S}} \left(1 - \frac{1}{R_0} \right) + (\mu_1 + \gamma) \right]^2, \quad (3.23)
\end{aligned}$$

$$R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q_2'(\omega^*) = \omega^*(\mu_1 + \gamma)^2. \quad (3.24)$$

Dari persamaan (3.23) dan (3.24) dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned}
& R_1(\omega^*)R_1'(\omega^*) + Q_1(\omega^*)Q_1'(\omega^*) \\
& \quad \neq R_2(\omega^*)R_2'(\omega^*) + Q_2(\omega^*)Q_2'(\omega^*).
\end{aligned}$$

Dengan demikian sistem persamaan (3.1) memenuhi kondisi transversal, yaitu nilai $\left. \frac{d}{d\tau} \operatorname{Re}(\lambda) \right|_{\lambda=i\omega^*, \tau=\tau^*} > 0$, sehingga bagian riil dari akar karakteristik akan bergerak menuju bagian positif dari bidang kompleks seiring dengan bertambahnya waktu tunda. Karena $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ memiliki waktu tunda kritis τ^* dan $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ memenuhi kondisi transversal, maka terbentuk *limit cycle* yang stabil di sekitar $\hat{E} = (\hat{S}, \hat{I}, \hat{R})$ untuk $\tau \in [0, \tau^*)$.

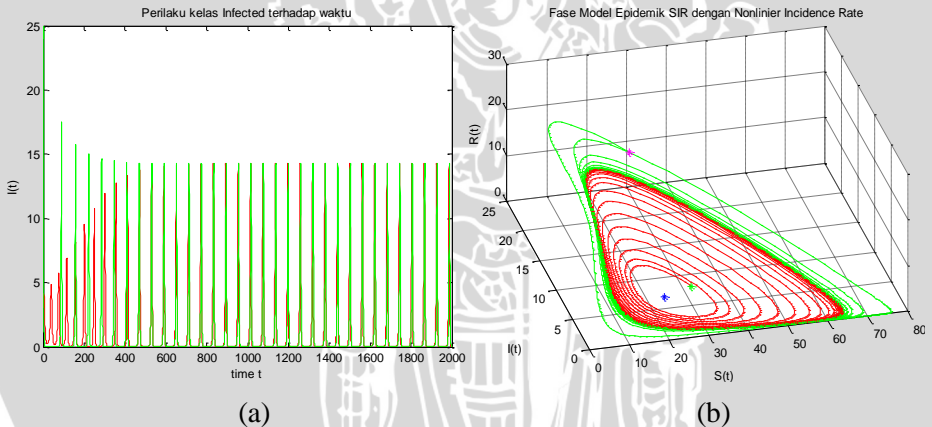
3.5. Pengaruh Waktu Tunda pada Model SIR dengan *Nonlinear Incidence Rate*

Misal diberikan suatu sistem epidemik SIR

$$\begin{aligned} S'(t) &= 0.1 \left(1 - \frac{S(t)}{80} \right) S(t) - 0.1 \frac{S(t)}{1 + 0.05 S(t)} I(t - \tau) \\ I'(t) &= 0.1 \frac{S(t)}{1 + 0.05 S(t)} I(t - \tau) - I(t) \\ R'(t) &= 0.5 I(t) - 0.1 R(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Sistem (3.25) mempunyai titik kesetimbangan epidemik $(20, 1.5, 7.5)$ dengan bilangan reproduksi dasar $R_0 = 4$. Dengan melakukan perhitungan, diperoleh waktu tunda kritis $\tau^* = 0.23$.

Sistem (3.25) akan menjadi model SIR tanpa waktu tunda jika $\tau = 0$. Perilaku sistem tanpa waktu tunda dapat diilustrasikan oleh Gambar 3.2.

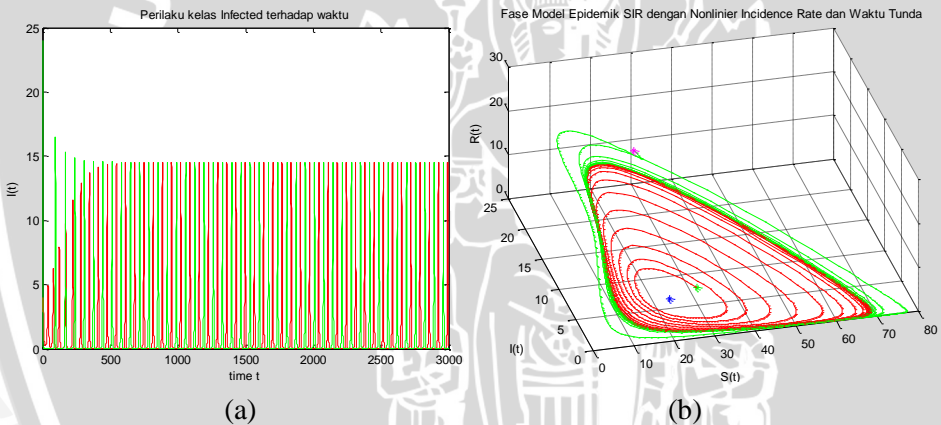


Gambar 3.2 (a) Perilaku kelas *Infective*, (b) Plot sistem dengan parameter $r = 0.1, K = 80, \alpha = 0.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.1$, dengan nilai awal $(28, 3, 7)$ dan $(30, 24, 9)$.

Dari Gambar 3.2 (a) dapat dilihat bahwa kelas *Infective* mengalami osilasi. Jika diambil nilai awal yang dekat dengan titik kesetimbangan, maka osilasi kelas *Infective* akan terus naik hingga mencapai amplitudo yang sama. Jika diambil nilai awal yang jauh

dari titik kesetimbangan, maka osilasi kelas *Infective* akan terus turun hingga mencapai amplitudo yang sama. Dari Gambar 3.2 (b) terlihat bahwa sistem (3.25) memiliki *limit cycle* yang stabil karena trayektori dari dalam *limit cycle* mengalami peningkatan amplitudo pada osilasinya. Sementara itu besarnya amplitudo osilasi trayektori dari luar akan mengalami penurunan hingga mencapai *limit cycle*.

Sesuai teori, sistem (3.25) memiliki *limit cycle* yang stabil jika lama waktu tunda τ kurang dari waktu tunda kritis (τ^*). Sebaliknya jika lama waktu tunda lebih besar atau sama dengan waktu tunda kritis (τ^*), sistem (3.25) tidak memiliki *limit cycle*. Untuk melihat ada tidaknya pengaruh waktu tunda terhadap sistem (3.25), perlu disimulasikan model guna mendeskripsikan perilaku sistem tersebut di sekitar titik kesetimbangan. Misal waktu tunda pada sistem (3.25) adalah 0.1, maka perilaku sistem tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.3.

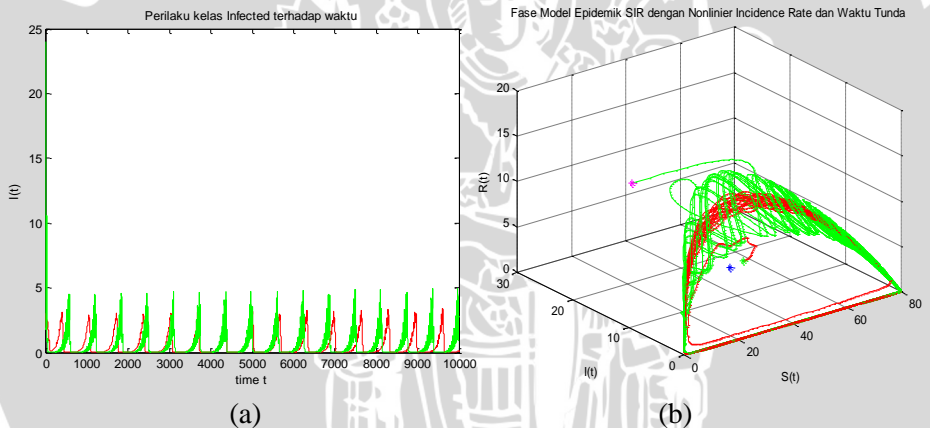


Gambar 3.3 (a) Perilaku kelas *Infective*, (b) Plot sistem dengan parameter $r = 0.1, K = 80, \alpha = 0.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.1, \tau = 0.1$, dengan nilai awal $(28, 3, 7)$ dan $(30, 24, 9)$.

Dari Gambar 3.3 (a) dapat dilihat bahwa kelas *Infective* mengalami osilasi. Jika diambil nilai awal yang dekat dengan titik kesetimbangan, maka osilasi kelas *Infective* akan terus naik hingga mencapai amplitudo yang sama. Jika diambil nilai awal yang jauh dari titik kesetimbangan, maka osilasi kelas *Infective* akan terus turun hingga mencapai amplitudo yang sama. Adanya waktu tunda

mengakibatkan berkurangnya waktu yang diperlukan kelas *Infective* mencapai amplitudo yang sama. Oleh karena itu, dengan fungsi yang sama $I(t)$, jumlah individu pada kelas *Infective* akan menjadi lebih sedikit dibandingkan dengan jumlah individu *Infective* pada model SIR tanpa masa inkubasi. Dari Gambar 3.3 (b) terlihat bahwa sistem (3.25) memiliki *limit cycle* yang stabil karena trayektori dari dalam *limit cycle* mengalami peningkatan amplitudo pada osilasinya. Sementara itu besarnya amplitudo osilasi trayektori dari luar akan mengalami penurunan hingga mencapai *limit cycle*. Dengan demikian penambahan waktu tunda pada model SIR, dimana waktu tunda kurang dari waktu tunda kritis, tidak mengubah kestabilan *limit cycle* pada sistem (3.25)

Selanjutnya, dengan mengambil waktu tunda yang lebih besar dari waktu tunda kritis, misal $\tau = 30$, trayektori di sekitar titik kesetimbangan akan mengalami perubahan. Perilaku tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.4.



Gambar 3.4 (a) Perilaku kelas *Infective*, (b) Plot sistem dengan parameter $r = 0.1, K = 80, \alpha = 0.05, \beta = 0.1, \gamma = 0.5, \mu_1 = 0.5, \mu_2 = 0.1, \tau = 30$, dengan nilai awal $(28, 3, 7)$ dan $(30, 24, 9)$.

Dari Gambar 3.4 (a) terlihat bahwa tidak terdapat solusi periodik pada kelas *Infective*. Dengan demikian tidak terbentuk *limit cycle* pada sistem (3.25). Hal ini tampak pada Gambar 3.4 (b). Perilaku ini menunjukkan adanya perubahan kestabilan *limit cycle* pada saat waktu tunda lebih besar dari waktu tunda kritis.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV PENUTUP

4.1. Kesimpulan

Model SIR dengan waktu tunda mengalami perubahan pada model interaksi antara *Susceptibles* (S) dan *Infective* (I). Jika pada model SIR tanpa waktu tunda I dinyatakan dalam variabel t , sedangkan pada model SIR dengan waktu tunda I dinyatakan dalam variabel $t - \tau$ dimana τ adalah waktu tunda. Titik kesetimbangan bebas epidemik stabil jika $R_0 \leq 1$, sedangkan titik kesetimbangan epidemik stabil jika $R_0 > 1$. Adanya waktu tunda tidak berpengaruh pada titik kesetimbangan bebas epidemik, namun mengakibatkan terjadinya perubahan kestabilan *limit cycle* di sekitar titik kesetimbangan epidemik model SIR. Jika besar waktu tunda melebihi titik kritis tundaan (τ^*), maka tidak terbentuk *limit cycle* di sekitar titik kesetimbangan epidemik. Dengan kata lain, pada saat $\tau < \tau^*$, terbentuk *limit cycle* yang stabil di sekitar titik kesetimbangan epidemik.

4.2. Saran

Untuk pengembangan selanjutnya, disarankan menganalisis model epidemik SIR dengan adanya pengaruh waktu tunda pada populasi *Infective* (I) dan *Susceptibles* (S). Dengan kata lain waktu tunda terjadi pada saat populasi tumbuh maupun populasi individu yang terjangkit penyakit yang berinteraksi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Berihun, Z. A., 2009. *Nonlinear Incidence and the Dynamic of Infectious Disease Models*. African Institute of Mathematical Science. South Africa.
- Edward, C. H. And D. E. Penney. 1996. *Differential equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*. Prentice Hall international, Inc. New Jersey.
- Forde, J. E., 2005. *Delay Differential Models in Mathematical Biology*. University of Michigan. Michigan.
- Grigorian, A., 2009. *Ordinary Differential Equations*. University of Bielefeld. Germany.
- Heesterbeek, J. A. P. and O. Diekmann. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases: Model Building, Analysis and Interpretation*. John Wiley. New York.
- Hereman, W., 2007. *Classification of Fixed Points of 2×2 Linear System*. African Institute of Mathematical Science. South Africa.
- Khamsi, M. A., 2004. *Equilibrium Point Analysis: Linierization Technique*. Utrecht University. Utrecht.
- Kuang, Y., 1993. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics* vol.191 of Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, Inc. San Diego.
- Panfilov, A., 2004. *Qualitative Analysis of Differential Equations*. Utrecht University. Utrecht.
- Purcell, E. J., D. Varberg, dan S. E. Rigdon, 2003. *Kalkulus Jilid 1*. Penerbit Erlangga. Jakarta.
- Robinson, R. C., 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA
- Teschl, G., 2011. *Ordinary Diferential Equations and Dynamical Systems*. American Mathematical Society. Rhode Island.
- Zhang, J-Z., Z. Jin, Q-X. Liu, and Z-Y. Zhang. 2008. *Discrete Dynamics in Nature and Society Vol. 2008 Article ID 636153: Analysis of a Delayed SIR Model with Nonlinear Incidence*. Hindawi Publishing Corporation.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 1

Program Matlab untuk Menentukan Titik Setimbang, Bilangan Reproduksi Dasar, dan Titik Kritis Tundaan

INPUT		OUTPUT	
K	80	S	20
r	0.1	I	1.5
Beta	0.1	R	7.5
Alfa	0.05	Ro	4
Gamma	0.5	Omega	0.21985
Mu1	0.5	Tau	0.998771
Mu2	0.1		

Titik Kritis Tundaan diperoleh dari $(\text{ArcCos}(\text{Tau}))/\text{Omega}$

```
K = str2double(get(editK, 'string'));
r = str2double(get(editr, 'string'));
b = str2double(get(editb, 'string'));
a = str2double(get(edita, 'string'));
g = str2double(get(editg, 'string'));
m1 = str2double(get(editm1, 'string'));
m2 = str2double(get(editm2, 'string'));
S = (m1+g) / (b-a*(m1+g)); Ro = K/S;
I = r*S*(1-1/Ro) / (m1+g); R = g*I/m2;
p = (-r*(1-2/Ro)+r*(1-1/Ro) / (1+a*S))^2;
q = r*(1-1/Ro) / (1+a*S) * (m1+g)^2 * (-2*r*(1-2/Ro)+r*(1-1/Ro) / (1+a*S));
mu = (-p+sqrt(p^2-4*q))/2;
w = sqrt(mu);
u = r*(1-1/Ro) / (1+a*S) + (m1+g);
v = -r*(1-2/Ro)+r*(1-1/Ro) / (1+a*S);
m = (w^2*u-v*r*(m1+g) * (1-2/Ro)) / (w^2*(m1+g) + (m1+g) * (r*(1-2/Ro))^2);
set(editS, 'string', S);
set(editI, 'string', I);
set(editR, 'string', R);
set(editRo, 'string', Ro);
set(editw, 'string', w);
set(editt, 'string', m);
```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 2

Program Matlab Grafik SIR tanpa Waktu Tunda

```
function epidemi
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-7);
figure(2);
[t,y] = ode23(@epidemikg,[0
    2000],[28;3;7],options);
plot(t,y(:,2),'r');
title('Perilaku kelas Infected terhadap waktu');
xlabel('time t');
ylabel('I(t)');grid;
hold on;
[t,y] = ode23(@epidemikg,[0
    2000],[30;24;9],options);
plot(t,y(:,2),'g');
title('Perilaku kelas Infected terhadap waktu');
xlabel('time t');
ylabel('I(t)');grid;
figure(3);
[t,y] = ode23(@epidemikg,[0
    2000],[28;3;7],options);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'r');
title('Fase Model Epidemik SIR dengan Nonlinier
    Incidence Rate');
ylabel('I(t)');
xlabel('S(t)');
zlabel('R(t)');grid on;
hold on;
[t,y] = ode23(@epidemikg,[0
    2000],[30;24;9],options);
plot3(y(:,1),y(:,2),y(:,3),'g');
title('Fase Model Epidemik SIR dengan Nonlinier
    Incidence Rate');
ylabel('I(t)');
xlabel('S(t)');
zlabel('R(t)');grid on;
hold on;
r = 0.1; K = 80; b = 0.1; m1 = 0.5; m2 = 0.1; a =
    0.05; g = 0.5;
u = (m1+g)/(b-a*(m1+g));
```

```
v = r*u*(1-u/K)/(m1+g);  
w = g*v/m2;  
plot3(u,v,w, '*');  
plot3(28,3,7, 'g*');  
plot3(30,24,9, 'm*');
```

```
function epid = epidemikg(t,y)  
r = 0.1; K = 80; b = 0.1; m1 = 0.5; m2 = 0.1; a =  
0.05; g = 0.5;  
epid = [r*y(1)*(1-y(1)/K)-b*y(1)*y(2)/(1+a*y(1));  
b*y(1)*y(2)/(1+a*y(1))-(m1+g)*y(2);  
g*y(2)-m2*y(3)];
```



Lampiran 3

Program Matlab Grafik SIR dengan Waktu Tunda

```
function epidemik
figure (2);
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
    7,'InitialY',[28,3,7]);
sol =
    dde23(@epidemikf,30,@titik,[0,10000],options);
plot(sol.x,sol.y(2,:), 'r');
title('Perilaku kelas Infected terhadap waktu');
ylabel('I(t)');
xlabel('time t');grid;
hold on;
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
    7,'InitialY',[30,24,9]);
sol =
    dde23(@epidemikf,30,@titik,[0,10000],options);
plot(sol.x,sol.y(2,:), 'g');
title('Perilaku kelas Infected terhadap waktu');
ylabel('I(t)');
xlabel('time t');grid;
figure(3);
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
    7,'InitialY',[28,3,7]);
sol =
    dde23(@epidemikf,30,@titik,[0,10000],options);
plot3(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol.y(3,:), 'r');
title('Fase Model Epidemik SIR dengan Nonlinier
    Incidence Rate dan Waktu Tunda');
ylabel('I(t)');
xlabel('S(t)');
zlabel('R(t)');grid on;
hold on;
options = ddeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',1e-
    7,'InitialY',[30,24,9]);
sol =
    dde23(@epidemikf,30,@titik,[0,10000],options);
plot3(sol.y(1,:),sol.y(2,:),sol.y(3,:), 'g');
title('Fase Model Epidemik SIR dengan Nonlinier
    Incidence Rate dan Waktu Tunda');
ylabel('I(t)');
```

```

xlabel('S(t)');
ylabel('R(t)');grid on;
hold on;
r = 0.1; K = 80; b = 0.1; m1 = 0.5; m2 = 0.1; a =
    0.05; g = 0.5;
u = (m1+g)/(b-a*(m1+g));
v = r*u*(1-u/K)/(m1+g);
w = g*v/m2;
plot3(u,v,w,'*');
plot3(28,3,7,'g*');
plot3(30,24,9,'m*');

```

```

function ttk = titik(t)
r = 0.1; K = 80; b = 0.1; m1 = 0.5; m2 = 0.1; a =
    0.05; g = 0.5;
ttk(1) = (m1+g)/(b-a*(m1+g));
ttk(2) = r*ttk(1)*(1-ttk(1)/K)/(m1+g);
ttk(3) = g*ttk(2)/m2;

```

```

function epi = epidemikf(t,y,Z)
ylag1 = Z(:,1);
epi = zeros(3,1);
r = 0.1; K = 80; b = 0.1; m1 = 0.5; m2 = 0.1; a =
    0.05; g = 0.5;
epi(1) = r*y(1)*(1-y(1)/K) -
    b*y(1)*ylag1(2)/(1+a*y(1));
epi(2) = b*y(1)*ylag1(2)/(1+a*y(1)) - (m1+g)*y(2);
epi(3) = g*y(2) - m2*y(3);

```