PENDEKATAN TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

SKRIPSI

Oleh
HUSNUN NADHIROH
0610940021-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

PENDEKATAN TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh
HUSNUN NADHIROH
0610940021-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENDEKATAN TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

oleh :
HUSNUN NADHIROH
0610940021-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 02 Agustus 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Ratno Bagus E. W., M.Si.,Ph.D	**Kwardiniya A., S.Si.,M.Si.**
NIP. 197509082000031003	**NIP. 197006221998022001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP.196709071992031001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: HUSNUN NADHIROH**
NIM	**: 0610940021**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: PENDEKATAN TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri, dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Selain karya-karya yang tercantum di isi dan dalam Daftar Pustaka skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.**
2. **Apabila kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 02 Agustus 2011
Yang menyatakan,

(Husnun Nadhiroh)
NIM. 0610940021

PENDEKATAN TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

ABSTRAK

Misalkan f adalah suatu pemetaan pada ruang metrik (X, d) ke dirinya sendiri. Akan dicari suatu solusi pendekatan dari $f(x) = x$. Jika terdapat $z \in X$ sehingga metrik $d(f(z), z) \leq \varepsilon$, ε adalah bilangan positif, maka z dikatakan solusi pendekatan persamaan $f(x) = x$, atau $z \in X$ adalah sebuah pendekatan titik tetap (ε-*fixed point*) dari f. Dalam Skripsi ini akan ditunjukkan bahwa ruang metrik adalah *b-metric space* dan tidak berlaku sebaliknya. Lebih lanjut akan ditunjukkan pula pendekatan titik tetap dengan beberapa operator yaitu, Kontraksi, Kannan, Chatterjea dan Zamfirescu pada Ruang *b*-Metrik.

Kata Kunci: Titik Tetap, Pendekatan Titik Tetap, Ruang *b*-Metrik.

PENDEKATAN TITIK TETAP PADA RUANG *b*-METRIK

ABSTRACT

Let f be a self map of a metric space (X, d). Let us look for an approximate solution of $f(x) = x$. If there exists a point $z \in X$ such that $d(f(z), z) \leq \varepsilon$, where ε is a positive number, then z is called an approximate solution of the equation $f(x) = x$, or equivalently, $z \in X$ is an approximate fixed point (or ε-fixed point) of f. In this paper is proposed to show that the space metric is b-metric space and do not applied on the contrary. Furthermore, it will also show approximate fixed point with some operator that is, Contraction, Kannan, Chatterjea and Zamfirescu in b-metric space.

Keywords: Fixed point, Approximate fixed point, b-metric space.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahi Rabbil ‘Alamin, segala puji hanya bagi Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga tugas akhir ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam semoga selalu tercurah kepada baginda Rasulullah Muhammad SAW.

Dalam penyususnan Skripsi yang berjudul ”***Pendekatan Titik Tetap pada Ruang b-Metrik***” banyak pihak yang telah membantu. Oleh karena itu penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Ratno Bagus E. W., M.Si.,Ph.D selaku dosen pembimbing I atas bimbingan, kesabaran dan koreksi Skripsi ini sehingga layak untuk diajukan sebagai syarat kelulusan penulis.
2. Kwardiniya Andawaningtyas, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing II atas bimbingan dan koreksinya selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika yang sudah memberikan dukungan selama proses penulisan skripsi ini.
4. Drs. M. Muslikh, M.Si selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan saran selama penulis menempuh studi.
5. Drs. M. Muslikh, M.Si., Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. Dra. Ari Andari, MS. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan kritik untuk perbaikan skripsi ini.
6. Ibunda Tahmimah Hs, Ayahanda M. Ngadi, Mbak Evi, Haqi, Sela tercinta dan Andri yang senantiasa memberikan do’a, dukungan, semangat saat suka maupun duka, dan pengorbanan yang diberikan kepada penulis.
7. Teman-teman math’06 dan kos sumbersari gang III/242 atas do’a, dukungan dan semangat yang diberikan kepada penulis.

Penulis menyadari adanya kekurangan dalam penulisan skipsi ini. Oleh karena itu penulis mengharapkan saran dan kritik dari para pembaca untuk perbaikan penulisan ke depan dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca pada umumnya.

Malang, 02 Agustus 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR NOTASI

Notasi	Keterangan
$\mathbb{N}$	himpunan semua bilangan asli
$\in$	elemen (anggota)
$\exists$	terdapat
$\emptyset$	himpunan kosong
$\forall$	untuk setiap
$\neq$	tidak sama dengan
$f: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{X}$	pemetaan dari $\boldsymbol{X}$ ke $\boldsymbol{X}$
$\Rightarrow$	jika… maka …
$\Leftrightarrow$	jika dan hanya jika
$d(x.y)$	fungsi jarak titik x dan y
$(\boldsymbol{X}, d)$	ruang metrik
(x_n)	barisan
$\mathbb{R}_+$	himpunan bilangan riil tak negatif
$\mathbb{R}$	himpunan bilangan riil
$E \subset \boldsymbol{X}$	E adalah himpunan bagian dari $\boldsymbol{X}$ tetapi $E \neq \boldsymbol{X}$
$\leq$	kurang dari sama dengan
$\geq$	lebih dari sama dengan
$<$	kurang dari
ε	epsilon
δ	delta

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Titik tetap (*fixed point*) mempunyai peranan yang penting dalam masalah penyelesaian suatu persamaan fungsi. Oleh karena itu beberapa teorema yang membahas tentang eksistensi dan ketunggalan titik tetap dari suatu pemetaan menarik untuk dipelajari.

Misalkan f adalah suatu pemetaan pada ruang metrik (X, d) ke dirinya sendiri. Akan dicari suatu solusi pendekatan dari $f(x) = x$. Jika terdapat $z \in X$ sehingga metrik $d(f(z), z) \leq \varepsilon$, ε adalah bilangan positif, maka z dikatakan solusi pendekatan persamaan $f(x) = x$, atau $z \in X$ adalah sebuah pendekatan titik tetap $(\varepsilon - fixed\ point)$ dari f (Prasad dkk, 2009). Namun pada kenyataannya solusi titik tetap pada pemetaan sulit ditemukan, sehingga untuk mendapatkan solusi titik tetap perlu dilakukan pendekatan. Pendekatan teorema titik tetap selama ini dapat ditemukan pada aplikasi ruang metrik.

Berinde (2006), memperoleh pendekatan teorema-teorema titik tetap untuk operator-operator yang memenuhi tipe Kannan, Chatterjea dan Zamfirescu pada ruang metrik. Pada skripsi ini akan dibahas mengenai pendekatan titik tetap pada modifikasi ruang metrik yaitu ruang *b*-metrik.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada skripsi ini adalah :

1. Bagaimana hubungan ruang metrik dengan ruang *b*-metrik.
2. Bagaimana definisi, lema dan teorema beserta bukti-bukti yang berkaitan dengan pendekatan titik tetap pada ruang *b*-metrik.

1.3 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Menunjukkan hubungan ruang metrik dengan ruang *b*-metrik.
2. Menjelaskan definisi yang berkaitan dengan pendekatan titik tetap pada ruang *b*-metrik, selanjutnya membuktikan lema dan teorema yang berhubungan dengan pendekatan titik tetap pada ruang *b*-metrik.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1.1 (Ruang Metrik)
Diberikan himpunan $\boldsymbol{X} \neq \emptyset$ dan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real. Fungsi $d: \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ dikatakan metrik, jika untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{X}$ dipenuhi aksioma:

1. $d(x,y) \geq 0$ (tidak negatif)
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (identitas)
3. $d(x,y) = d(y,x)$ (simetris)
4. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, untuk $x, y, z \in \boldsymbol{X}$ (ketaksamaan segitiga)

Himpunan $\boldsymbol{X}$ yang dilengkapi dengan metrik d pada $\boldsymbol{X}$ disebut ruang metrik dan dinotasikan sebagai $(\boldsymbol{X}, d)$.

Contoh 2.1.2
Diketahui $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$. Didefinisikan $d(x,y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, akan dibuktikan $(\boldsymbol{X}, d)$ merupakan ruang metrik.

Bukti:

1. $d(x,y) = |x - y| \geq 0$ (sifat nilai mutlak)
2. $d(x,y) = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$
3. $d(x,y) = |x - y| = |y - x| = d(y,x)$
4. $d(x,y) = |x - y| = |x - z + z - y|$
   $\leq |x - z| + |z - y|$
   $= d(x,z) + d(z,y)$.

Jadi, terbukti bahwa $(\boldsymbol{X}, d)$ merupakan ruang metrik (Soemantri, 1988).

Definisi 2.1.3 (Ruang *b*-Metrik)
Misalkan $\boldsymbol{X} \neq \emptyset$ dan $s \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$. Suatu fungsi $d : \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$ disebut *b*-metrik, jika untuk setiap $x, y, z \in \boldsymbol{X}$ memenuhi kondisi :

1. $d(x,y) \geq 0$,
2. $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$,
4. $d(x,y) \leq s[d(x,z) + d(z,y)]$.

Maka $(\boldsymbol{X}, d)$ disebut ruang *b*-metrik.

Contoh 2.1.4
Misal $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, didefinisikan

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} k \geq 2, & i \neq j, \quad i, j \in \{1,2\}, \\ 0, & i = j, \\ 1, & \text{yang lainnya,} \end{cases}$$

untuk setiap $i, j = 1,2,3,4$.
Maka

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{k}{2}\left[d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j)\right]$$

untuk setiap $n, i, j = 1,2,3,4$. Akan ditunjukkan bahwa Contoh 2.1.4 merupakan ruang *b*-metrik (Prasad dkk, 2009).

Bukti:
Diketahui:
1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
2. $d(x_1, x_2) = k \geq 2$,
3. $d(x_1, x_3) = d(x_1, x_4) = d(x_2, x_3) = d(x_2, x_4) = d(x_3, x_4) = d(x_3, x_1) = d(x_3, x_2) = d(x_4, x_1) = d(x_4, x_2) = d(x_4, x_3) = 1$, $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$ untuk setiap $i, j = 1,2,3,4$,
4. $d(x_i, x_i) = 0, i = 1,2,3,4$.

Dari yang telah diketahui, maka dapat ditunjukkan contoh di atas merupakan ruang *b*-metrik., yaitu memenuhi kondisi pada Definisi 2.1.3.

(i) $d(x, y) \geq 0$.
Ambil $d(x_1, x_2) = k \geq 2$, maka sifat tidak negatif terpenuhi.

(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
Akan dibuktikan dari ruas kiri :

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y.$$

Dari yang telah diketahui $d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$.
Misal $x = x_i$, $y = x_j$, $\quad i, j = 1,2,3,4$

$$d(x, y) = d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = 0, \text{ maka}$$
$$x_i = x_j$$

dari ruas kiri terbukti bahwa $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

Akan dibuktikan dari ruas kanan :

$$x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0.$$

Misalkan $x = x_i, \ y = x_j, \quad i, j = 1,2,3,4$, sehingga

$$d(x, y) = d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = 0.$$

Untuk $i = 1$, maka $(x_i, x_j) = 0$.

Karena $x = y \Longrightarrow x_i = x_j, \quad i = j$, maka

$$d(x_1, x_1) \ = 0$$

Dari ruas kanan juga terbukti $x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0$.
Terbukti bahwa kondisi (ii) terpenuhi.

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$.
Misalkan $x = x_i, y = x_j, i, j = 1,2,3,4$

$$d(x, y) = d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i) = d(y, x).$$

Untuk $i = 1, j = 1,2,3,4$

$$d(x_1, x_1) = d(x_1, x_1)$$
$$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$$
$$d(x_1, x_3) = d(x_3, x_1)$$
$$d(x_1, x_4) = d(x_4, x_1).$$

Untuk $i = 2, j = 1,2,3,4$

$$d(x_2, x_1) = d(x_1, x_2)$$
$$\vdots$$
$$d(x_2, x_4) = d(x_4, x_2).$$

$\vdots$

Untuk $i = 4, j = 1,2,3,4$

$$d(x_4, x_1) = d(x_1, x_4)$$
$$\vdots$$
$$d(x_4, x_4) = d(x_4, x_4).$$

Terbukti bahwa kondisi (iii) terpenuhi.

(iv) $d(x, y) \leq s[d(x, z) + d(z, y)]$.
Misalkan $x = x_i, y = x_j, \ z = x_n, \ i, j, n = 1,2,3,4$
$k = 2$

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{k}{2}\left[d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j)\right]. \qquad (2.1)$$

Dari persamaan (2.1) diperoleh 64 pertaksamaan segitiga (bukti lihat lampiran 1).
Karena contoh di atas memenuhi kondisi pada Definisi 2.1.3 , maka Contoh 2.1.4 merupakan ruang *b*-metrik.

Definisi 2.1.5 (Himpunan Terbatas)
Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang metrik dan $E \subset \boldsymbol{X}$. Himpunan E dikatakan terbatas jika terdapat $M > 0$ dan $p \in \boldsymbol{X}$ sehingga untuk semua $x \in \boldsymbol{X}$ berlaku

$$d(p, x) \leq M$$

(Soemantri, 1988).

2.2 Barisan

Definisi 2.2.1 (Barisan Titik)
Misalkan $\boldsymbol{X}$ ruang metrik. Barisan di dalam $\boldsymbol{X}$ adalah suatu fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow \boldsymbol{X}$ dengan $\mathbb{N}$ himpunan semua bilangan asli.
Jika fungsi barisan tersebut adalah $f: \mathbb{N} \rightarrow \boldsymbol{X}$, maka nilai untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah $f(n) = x_n$. Suku-suku x_n di dalam $\boldsymbol{X}$ merupakan barisan titik dalam $\boldsymbol{X}$ dan dinotasikan dengan (x_n) (Soemantri, 1988).

Definisi 2.2.2 (Barisan Konvergen)
Barisan x_n pada ruang metrik $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}, d)$ dikatakan konvergen di $x \in \boldsymbol{X}$, jika terdapat $x \in \boldsymbol{X}$ sehingga

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0.$$

atau untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq \mathbb{N}$ maka berlaku :

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

(Kreyszig, 1978).

2.3 Pemetaan Pada Ruang Metrik

Definisi 2.3.1 (Pemetaan)
Misalkan $\boldsymbol{X}$ dan $\boldsymbol{Y}$ adalah ruang-ruang metrik. Pemetaan f dari himpunan $\boldsymbol{X}$ ke himpunan $\boldsymbol{Y}$ dinotasikan dengan $f: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ adalah suatu pengawanan setiap $x \in \boldsymbol{X}$ dikawankan secara tunggal dengan $y \in \boldsymbol{Y}$ dan ditulis $\boldsymbol{y} = f(x)$ (Soemantri, 1988).

Definisi 2.3.2 (Pemetaan Kontinu)
Misalkan $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}, d_1)$ dan $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{Y}, d_2)$ adalah ruang-ruang metrik. Pemetaan $f: \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ dikatakan kontinu di titik $x_0 \in \boldsymbol{X}$ jika untuk

setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in \boldsymbol{X}$ dengan $d_1(x, x_0) < \delta$ maka berlaku

$$d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Pemetaan f dikatakan kontinu pada $\boldsymbol{X}$ jika f kontinu di setiap titik anggota $\boldsymbol{X}$ (Kreyszig, 1978).

Definisi 2.3.3 (Pemetaan Kontraksi)
Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ adalah ruang metrik. Pemetaan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ dikatakan pemetaan kontraksi, jika ada suatu bilangan real k dengan $0 \leq k < 1$ sehingga:

$$d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y), \quad \forall\, x, y \in \boldsymbol{X}$$

(Kreyszig, 1978).

Contoh 2.3.4
Diberikan ruang metrik $(\boldsymbol{X}, d)$ dengan $\boldsymbol{X} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Didefinisikan $d(x, y) = |x - y|$ untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{X}$ dengan pemetaan $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Maka f merupakan pemetaan kontraksi.
Bukti :

$$\begin{aligned} d\big(f(x), f(y)\big) &\leq d\left(\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\right) \\ d\big(f(x), f(y)\big) &\leq \left|\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right| \\ &\leq \frac{1}{2}|x - y| \\ &\leq \frac{1}{2}d(x, y). \end{aligned}$$

$k = \frac{1}{2} < 1$ merupakan konstanta pemetaan kontraksi.
Terbukti bahwa f merupakan pemetaan kontraksi.

Definisi 2.3.5 (Komposisi Pemetaan)
Misalkan $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ dan $\boldsymbol{Z}$ adalah ruang metrik. Jika $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ dan $\mathrm{g} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ maka komposisi pemetaan $\mathrm{g} \circ f$ merupakan pemetaan dari $\boldsymbol{X}$ ke $\boldsymbol{Z}$ yang didefinisikan

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = \mathrm{g}(f(x)), \ \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Komposisi $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = f^2(x)$ dan jika komposisi sebanyak n suku, maka $(f \circ f \circ f \ldots \circ f)(x) = f^n(x)$(Bartle dan Sherbert, 1992).

2.4 Titik Tetap Pada Ruang Metrik

Definisi 2.4.1 (Titik Tetap)

Misalkan $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ adalah pemetaan kontinu, untuk $x \in \mathbb{R}$, maka solusi $x^* = x$ dari persamaaan $f(x) = x$ disebut titik tetap (Suzuki danYamazashi, 2010).

Contoh 2.4.2

Diketahui $f(x) = x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Akan dicari solusi titik tetap dari f.

Penyelesaian:

Dengan menggunakan syarat pemetaan titik tetap, yaitu:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = x \\
&\Rightarrow x^3 = x \\
&\Rightarrow x^3 - x = 0 \\
&\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \\
&\Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \\
&\Rightarrow x = 0,\ x = 1,\ x = -1.
\end{aligned}
$$

Untuk $x = 0$ maka $f(0) = 0^3 = 0$,
$x = 1$ maka $f(1) = 1^3 = 1$,
$x = -1$ maka $f(-1) = (-1)^3 = -1$,
$x = 0,1,-1$ disebut titik tetap dari f.

Definisi 2.4.3 (Pendekatan Titik Tetap)

Misalkan $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$, $\varepsilon > 0$ dan $x_0 \in \boldsymbol{X}$. $x_0 \in \boldsymbol{X}$ dikatakan pendekatan titik tetap (ε-*fixed point*) dari x^* jika $d(f(x_0), x_0) < \varepsilon$. f dikatakan memenuhi pendekatan titik tetap properti (AFPP) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, berlaku

$$Fix_\varepsilon(f) \neq \emptyset,$$

dimana

$Fix_\varepsilon(f) = \{x_0 \in \boldsymbol{X} \mid x_0$ adalah ε-*fixed point* dari $x^*\}$ (Prasad dkk, 2009).

Contoh 2.4.4

Diberikan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x + (x+1)^{-1}, \forall x \in \mathbb{R}$. Carilah pendekatan titik tetap dari f.

Penyelesaian :

$$f(x) = x$$

$$x = x + \frac{1}{x+1}$$
$$x(x+1) = x(x+1) + 1$$
$$x^2 + x = x^2 + x + 1$$
$$0 \neq 1$$

Persamaan di atas tidak mempunyai titik tetap, maka dicari solusi titik tetap dengan pendekatan titik tetap.

$x_0 \in \boldsymbol{X}$ dikatakan pendekatan titik tetap (ε-*fixed point*) dari x^* jika $d(f(x_0), x_0) < \varepsilon$.

Misalkan $\varepsilon = 1, x_0 = 1$ maka $f(x_0) = f(1) = 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$, sehingga

$$d(f(x_0), x_0) < \varepsilon$$
$$\left|\frac{3}{2} - 1\right| < 1$$
$$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$$
$$\frac{1}{2} < 1.$$

Nilai pendekatan titik tetap dari Contoh 2.4.5 adalah $\frac{1}{2}$, sehingga $Fix_1(f) = \{x_0 \in \boldsymbol{X} \,|\, d(f(x_0), x_0) < 1\}$.

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab pembahasan ini dibahas hubungan antara ruang metrik dengan ruang b-metrik, serta pendekatan titik tetap pada ruang b-metrik.

3.1 Hubungan Ruang Metrik dengan Ruang *b*-Metrik.

Akan diselidiki apakah untuk setiap sifat ruang b-metrik memenuhi sifat ruang metrik :

Teorema 3.1.1

$(\boldsymbol{X}, d)$ ruang metrik, maka $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik.

Bukti :

Dari definisi ruang metrik dan ruang b-metrik bahwa kondisi pada Definisi 2.1.1 tentang ruang metrik dengan Definisi 2.1.3 tentang ruang b-metrik saling *dependent*. Namun, pada kondisi yang keempat dari ruang b-metrik jika diambil $s > 1$ maka tidak memenuhi sifat ketaksamaan metrik. Ini menunjukkan bahwa ruang metrik merupakan ruang b-metrik tetapi tidak berlaku sebaliknya jika diambil $s > 1$.

Contoh 3.1.2

Misal $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, didefinisikan

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} k \geq 3,\ \ i \neq j,\ \ i, j \in \{1,2\}, \\ 0,\ \ i = j, \\ 1,\ \ \text{yang lainnya}, \end{cases}$$

untuk setiap $i, j = 1,2,3,4$.

Maka

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{k}{2}\left[d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j)\right].$$

Akan ditunjukkan bahwa ruang b-metrik bukan ruang metrik.

untuk setiap $n, i, j = 1,2,3,4$ (Prasad, 2010).

Bukti :

Diketahui :

1. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
2. $d(x_1, x_2) = k \geq 3$,
3. $d(x_1, x_3) = d(x_1, x_4) = d(x_2, x_3) = d(x_2, x_4) = d(x_3, x_4) = d(x_3, x_1) = d(x_3, x_2) = d(x_4, x_1) = d(x_4, x_2) = d(x_4, x_3) = 1,\ d(x_i, x_j) = d(x_j, x_i)$ untuk setiap $i, j = 1,2,3,4$,

4. $d(x_i, x_i) = 0, i = 1,2,3,4.$

Dari yang telah diketahui, bahwa kondisi ruang metrik pada Definisi 2.1.1.1 sampai dengan Definisi 2.1.1.3 terpenuhi. Untuk kondisi Definisi 2.1.1.4, yaitu :

$$d\left(x_i, x_j\right) \leq \frac{k}{2}\left[d(x_i, x_n) + d\left(x_n, x_j\right)\right],$$

untuk $n, i, j = 1,2,3,4.$

Jika $k = 3$, maka

$$d\left(x_i, x_j\right) \leq \frac{3}{2}\left[d(x_i, x_n) + d\left(x_n, x_j\right)\right].$$

Dapat dilihat, bahwa kondisi Definisi 2.1.1.4 tidak terpenuhi. Ini merupakan b-metrik bukan metrik.

3.2 Pendekatan titik tetap pada ruang *b*-metrik.

Akan ditunjukkan pendekatan titik tetap dengan menggunakan ketiga kondisi pada Definisi berikut :

Definisi 3.2.1 (Pemetaan Asimtotik Reguler)

Sebuah pemetaan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ dikatakan asimtotik reguler jika untuk sebarang $x \in \boldsymbol{X}$,

$$\lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^{n+1}(x)) = 0.$$

Diasumsikan bahwa untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{X}$ dan $a \in (0,1), b, c \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ berlaku:

$$d(f(x), f(y)) \leq ad(x, y) \tag{3.1}$$

$$d(f(x), f(y)) \leq b[d(x, f(x)) + d(y, f(y))] \tag{3.2}$$

$$d(f(x), f(y)) \leq c[d(x, f(y)) + d(y, f(x))] \tag{3.3}$$

(Prasad dkk, 2009).

Lema 3.2.2

Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$. Jika f adalah pemetaan asimtotik regular, maka f mempunyai AFPP.

Bukti :

Berdasarkan Definisi 3.2.1, yaitu

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) = 0 \ , \forall x \in \boldsymbol{X},$$

ambil $x_0 \in \boldsymbol{X}$, maka :

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0(\varepsilon)$, maka

$$d\left(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) < \varepsilon$$
$$d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) < \varepsilon.$$

Misalkan $y_0 = f^n(x_0)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $y_0 \in \boldsymbol{X}$ sehingga $d(y_0, f(y_0)) < \varepsilon$.
Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada pendekatan titik tetap untuk f pada $\boldsymbol{X}$, yaitu y_0.
Menurut Definisi 2.4.3, ini berarti bahwa f mempunyai AFPP (Berinde, 2006).

Lema 3.2.3
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$**.** Jika f adalah pemetaan asimtotik regular, maka f mempunyai AFPP.
Bukti :
Karena pada ruang metrik merupakan ruang b-metrik, maka Lema 3.2.2 berlaku juga pada ruang b-metrik.

Teorema 3.2.4
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik. dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.1), maka f mempunyai AFPP.
Bukti :
Misalkan $\varepsilon > 0$, $x \in \boldsymbol{X}$ maka dari persamaan (3.1), yaitu

$$\begin{aligned}
d\left(f(x), f(y)\right) &\leq ad(x,y), \text{ diperoleh} \\
d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) &= d(f(f^{n-1}(x)), f(f^n(x))) \\
&\leq ad\left(f^{n-1}(x), f^n(x)\right) \\
d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) &\leq as\big[d\left(f^{n-1}(x), f^n(x)\right) + \\
&\quad dfnx,fnx \\
&\leq asd\left(f^{n-1}(x), f^n(x)\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq (as)^n d\left(x, f(x)\right),
\end{aligned}$$

untuk $a \in (0,1), as < 1$

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) \leq \lim_{n\to\infty} (as)^n d\left(x, f(x)\right)$$

karena

$$\lim_{n\to\infty} (as)^n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) \leq 0.$$

Dengan menggunakan Lema 3.2.3, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$, $Fix_\varepsilon(f) \neq \emptyset$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0 \ , \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Ambil $x_0 \in \boldsymbol{X}$**,** maka :

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0$$

$\Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0(\varepsilon)$, maka

$$d\big(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\big) < \varepsilon$$

$$d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) < \varepsilon.$$

Misalkan $y_0 = f^n(x_0)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $y_0 \in \boldsymbol{X}$ sehingga $d(y_0, f(y_0)) < \varepsilon$.

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada pendekatan titik tetap untuk f pada ***X***, yaitu y_0.

Ini berarti bahwa f mempunyai AFPP.

Teorema 3.2.5

Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang *b*-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.1), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x, y) \leq \frac{s\varepsilon(1+s)}{1-as^2}$.

Bukti :

Telah diketahui bahwa f mempunyai AFPP, maka dapat diambil dua sebarang *x* dan *y* dari *ε-fixed point* di f, maka

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq s\big[d\big(x, f(x)\big) + d(f(x), y)\big] \\ &\leq s\varepsilon + s^2\big[d\big(f(x), f(y)\big) + d(f(y), y)\big] \\ &\leq s\varepsilon + s^2 d\big(f(x), f(y)\big) + s^2\varepsilon \\ &\leq s\varepsilon + s^2\varepsilon + as^2 d(x,y). \end{aligned}$$

Jadi $d(x, y) \leq \frac{s\varepsilon(1+s)}{1-as^2}$, $\forall \varepsilon > 0$.

Jika diambil $s = 1$ pada Teorema 3.2.5, maka $d(x, y) \leq \frac{2\varepsilon}{1-a}$.

Akibat 3.2.6

Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang *b*-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.1), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x, y) \leq \frac{2\varepsilon}{1-a}$.

Bukti :

$$d(x, y) \leq \frac{s\varepsilon(1+s)}{1-as^2} \ , \forall \varepsilon > 0.$$

Jika $s = 1$, maka

$$d(x,y) \leq \frac{1\varepsilon(1+1)}{1-a(1)^2}$$
$$\leq \frac{2\varepsilon}{1-a}.$$

Teorema 3.2.7
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.2), maka f mempunyai AFPP.
Bukti :
Berdasarkan persamaan (3.2)

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq b\big[d\big(x, f(x)\big) + d(y, f(y))\big],$$

diperoleh

$$\begin{aligned}
d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) &= d(f(f^{n-1}(x)), f(f^n(x))) \\
&\leq b[d(f^{n-1}(x), f(f^{n-1}(x))) \\
&\qquad + d(f^n(x), f(f^n(x)))] \\
&\leq b\big[d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) + d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big)\big] \\
&\leq bd\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) + bd\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \\
&\leq bd\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) \\
&\qquad + bs\big[d\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big) \\
&\qquad + d\big(f^{n-1}(x), f^{n+1}(x)\big)\big] \\
&\leq bd\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) \\
&\qquad + bsd\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big) \\
&\qquad + bsd\big(f^{n-1}(x), f^{n+1}(x)\big) \\
&\leq bd\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) \\
&\qquad + bsd\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big) \\
&\qquad + bs^2\big[d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) \\
&\qquad + d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big)\big] \\
&\leq bd\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) \\
&\qquad + bsd\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big) \\
&\qquad + bs^2 d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) \\
&\qquad + bs^2 d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big)
\end{aligned}$$

$$(1 - bs^2)d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \leq bd\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) + bsd\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big) + bs^2 d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big)$$

$$\leq (b+bs^2)d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) + bsd\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big)$$

$$d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \leq \frac{(b+bs^2)}{1-bs^2} d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) + \frac{bs}{1-bs^2} d\big(f^n(x), f^{n-1}(x)\big)$$

$$\leq \cdots$$

$$\leq \left(\frac{(b+bs^2)}{1-bs^2}\right)^n d\big(x, f(x)\big) + \left(\frac{bs}{1-bs^2}\right)^n d(f(x), x)$$

untuk $b \in \left(0, \frac{1}{2}\right), bs^2, bs < \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(b+bs^2)}{1-bs^2}\right)^n d\big(x, f(x)\big) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{bs}{1-bs^2}\right)^n d(f(x), x)$$

karena

$$\lim_{n\to\infty} (bs)^n = \lim_{n\to\infty} (bs^2)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \leq 0.$$

Dengan menggunakan Lema 3.2.3, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0, Fix_\varepsilon(f) \neq \emptyset$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0 \;, \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Ambil $x_0 \in \boldsymbol{X}$**,** maka :

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0$$

$\Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0(\varepsilon)$, maka

$$d\big(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\big) < \varepsilon$$

$$d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) < \varepsilon.$$

Misalkan $y_0 = f^n(x_0)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $y_0 \in \boldsymbol{X}$ sehingga $d(y_0, f(y_0)) < \varepsilon$.

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada pendekatan titik tetap untuk f pada $\boldsymbol{X}$, yaitu y_0.

Ini berarti bahwa f mempunyai AFPP.

Teorema 3.2.8
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.2), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x, y) \leq s\varepsilon(1 + s + 2bs)$.
Bukti :
Telah diketahui bahwa f mempunyai AFPP, maka dapat diambil dua sebarang *x* dan *y* dari *ε-fixed point* di f, maka

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq s\left[d\big(x, f(x)\big) + d(f(x), y)\right] \\ &\leq s\varepsilon + s^2\left[d\big(f(x), f(y)\big) + d(f(y), y)\right] \\ &\leq s\varepsilon + s^2 d\big(f(x), f(y)\big) + s^2\varepsilon \\ &\leq s\varepsilon + s^2\varepsilon + s^2 b\left[d\big(x, f(x)\big) + d(y, f(y))\right] \\ &\leq s\varepsilon + s^2\varepsilon + s^2 2b\varepsilon \\ &\leq s\varepsilon(1 + s + 2bs) \end{aligned}$$

jadi $d(x, y) \leq s\varepsilon(1 + s + 2bs), \forall \varepsilon > 0$.

Jika diambil $s = 1$ pada Teorema 3.2.8, maka $d(x, y) \leq 2\varepsilon(1 + b)$.

Akibat 3.2.9
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.2), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x, y) \leq 2\varepsilon(1 + b)$.
Bukti :

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq s\varepsilon(1 + s + 2bs)\ , \forall \varepsilon > 0. \\ &\leq 1\varepsilon(1 + 1 + 2b(1)) \\ &\leq 1\varepsilon(2 + 2b) \\ &\leq 2\varepsilon(1 + b) \\ d(x, y) &\leq 2\varepsilon(1 + b). \end{aligned}$$

Teorema 3.2.10
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.3) dengan $cs \leq \frac{1}{2}$, maka f mempunyai AFPP.
Bukti :
Misal $\varepsilon > 0$ dan $x \in \boldsymbol{X}$, maka

$$\begin{aligned} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) &= d(f(f^{n-1}(x)), f(f^n(x))) \\ &\leq c[d(f^{n-1}(x), f(f^n(x))) + \\ &\quad dfnx,f(fn-1x) \\ &= cd\big(f^{n-1}(x), f^{n+1}(x)\big) \\ &\leq cs\big[d\big(f^{n-1}(x), f^n(x)\big) + \\ &\quad dfnx,fn+1x \end{aligned}$$

$$\leq \frac{cs}{1-cs} d\left(f^{n-1}(x), f^n(x)\right)$$
$$\leq \cdots$$
$$\leq \left(\frac{cs}{1-cs}\right)^n d(x, f(x)).$$

Untuk $c \in \left(0, \frac{1}{2}\right), cs < \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right)$$
$$\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{cs}{1-cs}\right)^n d(x, f(x))$$

karena

$$\lim_{n\to\infty} (cs)^n = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) \leq 0, \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Dengan menggunakan Lema 3.2.3, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0, Fix_\varepsilon(f) \neq \emptyset$

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) = 0 \ , \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Ambil $x_0 \in \boldsymbol{X}$**,** maka :

$$\lim_{n\to\infty} d\left(f^n(x), f^{n+1}(x)\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0(\varepsilon)$, maka

$$d\left(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\right) < \varepsilon$$
$$d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) < \varepsilon.$$

Misalkan $y_0 = f^n(x_0)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $y_0 \in \boldsymbol{X}$ sehingga $d(y_0, f(y_0)) < \varepsilon$.

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada pendekatan titik tetap untuk f pada $\boldsymbol{X}$, yaitu y_0.

Ini berarti bahwa f mempunyai AFPP.

Teorema 3.2.11

Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.3), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x, y) \leq \frac{s\varepsilon(1+s+2cs)}{1-2s^2c}$.

Bukti :

Telah diketahui bahwa f mempunyai AFPP, maka dapat diambil dua sebarang *x* dan *y* dari ε-*fixed point* di f, maka

$$d(x, y) \leq s\left[d\left(x, f(y)\right) + d(y, f(x))\right]$$

$$\leq s\varepsilon + s^2\left[d\big(f(x), f(y)\big) + d(f(y), y)\right]$$
$$\leq s\varepsilon + s^2 d\big(f(x), f(y)\big) + s^2\varepsilon$$
$$\leq s\varepsilon + s^2\varepsilon + s^2 c\left[d\big(x, f(y)\big) + d(y,f(x))\right.$$
$$\leq s\varepsilon + s^2\varepsilon + s^2 c[d(x,y) + d(y, f(y))] + s^2 c[d(y,x) + d(x, f(x))]$$
$$\leq s\varepsilon + s^2\varepsilon + 2s^2 c d(x,y) + 2s^2 c\varepsilon$$
$$\leq \frac{s\varepsilon(1+s+2cs)}{1-2s^2c}.$$

Jadi $d(x,y) \leq \frac{s\varepsilon(1+s+2cs)}{1-2s^2c}, \forall\varepsilon > 0.$

Jika diambil $s = 1$ pada Teorema 3.2.11, maka $d(x,y) \leq \frac{2\varepsilon(1+c)}{1-2c}$.

Akibat 3.2.12
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang *b*-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ memenuhi persamaan (3.3), maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x,y) \leq \frac{2\varepsilon(1+c)}{1-2c}$.

Bukti :

$$d(x,y) \leq \frac{s\varepsilon(1+s+2cs)}{1-2s^2c}, \forall\varepsilon > 0.$$
$$\leq \frac{1\varepsilon(1+1+2c(1))}{1-2(1)^2c}$$
$$\leq \frac{1\varepsilon(2+2c)}{1-2c}$$
$$\leq \frac{2\varepsilon(1+c)}{1-2c}.$$

Teorema 3.2.13
Jika $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang *b*-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ sebuah operator Zamfirescu pada $\boldsymbol{X}$, maka untuk $bs^2 < \frac{1}{2}$, $cs < \frac{1}{2}$, f mempunyai AFPP.

Bukti :
Akan diperlihatkan bahwa Teorema 3.2.13 memenuhi salah satu dari ketiga kondisi persamaan (3.1), (3.2), dan (3.3). Ambil $x, y \in \boldsymbol{X}$. Misalkan persamaan (3.2) dipenuhi, maka diperoleh

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq b\left[d\big(x, f(x)\big) + d(y, f(y))\right]$$

$$\leq bd\big(x,f(x)\big) + bs[d(y,x) + d(x,f(y))$$
$$\leq bd\big(x,f(x)\big) + bsd(y,x) + bs^2[d(x,f(x)) + d(f(x),f(y))]$$
$$\leq b(1+s^2)d\big(x,f(x)\big) + bsd(y,x) + bs^2 d(f(x),f(y))$$
$$\leq \frac{b(1+s^2)}{1-bs^2}\ d\big(x,f(x)\big) + \frac{bs}{1-bs^2}\ d(x,y)$$

Misalkan persamaan (3.3) dipenuhi, maka diperoleh

$$d(f(x),f(y)) \leq c\big[d\big(x,f(y)\big) + d(y,f(x))\big]$$
$$\leq cs[d(x,y) + d(y,f(y))] + cs[d(y,f(y)) + d(f(y),f(x))]$$
$$\leq csd(x,y) + 2csd\big(y,f(y)\big) + csd\big(f(y),f(x)\big)$$
$$\leq \frac{cs}{1-cs} d\big(x,y\big) + \frac{2cs}{1-cs}\ \big(y,f(y)\big).$$

Ambil

$$\delta = max\left\{as, \frac{bs}{1-bs^2}, \frac{b(1+s^2)}{2(1-bs^2)}, \frac{cs}{1-cs}\right\}.$$

Maka jelas terlihat bahwa $\delta \in [0.1)$.
Jika f memenuhi salah satu kondisi pada persamaan (3.1), (3.2) dan (3.3), maka

$$d\big(f(x),f(y)\big) \leq 2\delta d\big(x,f(x)\big) + \delta d(x,y)$$

dan

$$d\big(f(x),f(y)\big) \leq 2\delta d\big(y,f(y)\big) + \delta d(x,y)$$

dipenuhi.
Dengan menggunakan kondisi ini, diperoleh

$$d\big(f(x),f(y)\big) \leq 2\delta d\big(x,f(x)\big) + \delta d(x,y)$$
$$d\big(f^n(x),f^{n+1}(x)\big) = d(f(f^{n-1}(x)),f(f^n(x)))$$
$$\leq 2\delta d\left(f^{n-1}(x),f\big(f^{n-1}(x)\big)\right) + \delta d(f^{n-1}(x),f^n(x))$$
$$= (3\delta)d\left(f^{n-1}(x),f\big(f^{n-1}(x)\big)\right)$$
$$\leq \cdots$$
$$\leq (3\delta)^n d\big(x,f(x)\big)$$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \le \lim_{n\to\infty} (3\delta)^n d\big(x, f(x)\big)$$

karena

$$\lim_{n\to\infty} (3\delta)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) \le 0$$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0 \ , \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Dengan menggunakan Lema 3.2.3, akan dibuktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0, Fix_\varepsilon(f) \neq \emptyset$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0 \ , \forall x \in \boldsymbol{X}.$$

Ambil $x_0 \in \boldsymbol{X}$**,** maka :

$$\lim_{n\to\infty} d\big(f^n(x), f^{n+1}(x)\big) = 0$$

$\Leftrightarrow$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \ge n_0(\varepsilon)$, maka

$$d\big(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)\big) < \varepsilon$$

$$d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) < \varepsilon.$$

Misalkan $y_0 = f^n(x_0)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $y_0 \in \boldsymbol{X}$ sehingga $d(y_0, f(y_0)) < \varepsilon$.

Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$, ada pendekatan titik tetap untuk f pada $\boldsymbol{X}$, yaitu y_0.

Ini berarti bahwa f mempunyai AFPP.

Teorema 3.2.14

Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ sebuah operator Zamfirescu, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x,y) \le \frac{s\varepsilon(1+s+2\delta s)}{1-\delta}$,

di mana

$$\delta = max\left\{as, \frac{bs}{1-bs^2}, \frac{b(1+s^2)}{2(1-bs^2)}, \frac{cs}{1-cs}\right\}$$

Bukti :

Pada pembuktian Teorema 3.2.13 telah ditunjukkan bahwa jika f memenuhi salah satu dari kondisi pada persamaan (3.1), (3.2) atau (3.3), maka diperoleh

$$d(f(x), f(y)) \le 2\delta d(x, f(x) + \delta d(x,y))$$

dan

$$d(f(x), f(y)) \le 2\delta d(y, f(y) + \delta d(x,y)).$$

Telah diketahui bahwa f mempunyai AFPP, maka dapat mengambil dua sebarang *x* dan *y* dari *ε-fixed point* dari f, sehingga

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le s\left[d\big(x,f(x)\big)+d\big(f(x),y\big)\right] \\ &\le s\varepsilon + s^2\left[d\big(f(x),f(y)\big)+d\big(f(y),y\big)\right] \\ &\le s\varepsilon + s^2 d\big(f(x),f(y)\big) + s^2\varepsilon \\ &\le s\varepsilon + s^2\varepsilon + s^2 2\delta d\big(x,f(x)\big) + \delta d(x,y) \\ &\le s\varepsilon + s^2\varepsilon + s^2 2\delta + \delta d(x,y) \\ &\le \frac{s\varepsilon(1+s+2\delta s)}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Jadi $d(x,y) \le \frac{s\varepsilon(1+s+2\delta s)}{1-\delta}, \forall\varepsilon > 0.$

Jika diambil $s = 1$ pada Teorema 3.2.14, maka $d(x,y) \le \frac{2\varepsilon(1+\delta)}{1-\delta}$.

Akibat 3.2.15

Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang *b*-metrik dan $f\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ sebuah operator Zamfirescu, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, $d(x,y) \le \frac{2\varepsilon(1+\delta)}{1-\delta}$,
dimana

$$\delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}.$$

Bukti :

$$d(x,y) \le \frac{s\varepsilon(1+s+2\delta s)}{1-\delta}, \forall\varepsilon > 0,$$

dimana

$$\delta = max\left\{as, \frac{bs}{1-bs^2}, \frac{b(1+s^2)}{2(1-bs^2)}, \frac{cs}{1-cs}\right\}$$

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le \frac{s\varepsilon(1+s+2\delta s)}{1-\delta} \\ &\le \frac{1\varepsilon(1+1+2\delta(1))}{1-\delta} \\ &\le \frac{1\varepsilon(2+2\delta)}{1-\delta} \\ &\le \frac{2\varepsilon(1+\delta)}{1-\delta} \end{aligned}$$

dimana

$$\delta = max\left\{as, \frac{bs}{1-bs^2}, \frac{b(1+s^2)}{2(1-bs^2)}, \frac{cs}{1-cs}\right\}$$

$$\Rightarrow \delta = max\left\{a, \frac{b(1)}{1-b(1)^2}, \frac{b(1+(1)^2)}{2(1-b(1)^2)}, \frac{c(1)}{1-c(1)}\right\}$$

$$\Rightarrow \delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{2b}{2(1-b)}, \frac{c}{1-c}\right\}$$

$$\Rightarrow \delta = max\left\{a, \frac{b}{1-b}, \frac{c}{1-c}\right\}.$$

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan adalah sebagai berikut :

1. Ruang metrik merupakan ruang b-metrik. Tetapi tidak berlaku sebaliknya jika diambil $s > 1$.
2. Misalkan $(\boldsymbol{X}, d)$ ruang b-metrik dan $f: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ sebuah operator Zamfirescu pada $\boldsymbol{X}$, maka untuk $bs^2 < \frac{1}{2}, < \frac{1}{2}$, f mempunyai AFPP.

4.2 Saran

Pembahasan dapat dikaji lebih lanjut pendekatan titik tetap dengan menggunakan operator-operator Edelstein, Bianchini, Reich, dan lain-lain pada ruang b-metrik.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G. Dan Sherbert D. R. 1992. *Introduction to Real Analysis*. Second Ed. John Wiley & Sons, Inc. Kanada.

Berinde, M. 2006. *Approximate Fixed Point Theorems*, Stud. Univ. “Babes¸ Bolyai”, no. 1, 11-25.

Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* John Wiley and Sons, Inc. Canada. hal 25-303.

Prasad, B. Singh, B. dan Sahni R. 2009. *Some Approximate Fixed Point Theorems.* Jaypee Institute of Information Technology University, India. no. 5, 203-210

Prasad, B. 2010. *A Stability Result in Generalized Metric Spaces*. Jaypee Institute of Information Technology University, India. no. 1, 13-28

Soemantri, R. 1988. *Analisis Real I*. Pusat Penerbitan Universitas Terbuka. Jakarta, 2.17-3.2.

Suzuki, T. dan Yamazashi, H. 2010. *Introduction to Mathematical Science model*, Baifukan, 27.

LAMPIRAN

Lampiran 1.
Bukti Contoh 2.1.4 pada persamaan 2.1.
Misalkan diambil $k = 2$ dari persamaan

$$d(x_i, x_j) \leq \frac{k}{2}\left[d(x_i, x_n) + d(x_n, x_j)\right],$$

diperoleh :
untuk *n*=1, *i*=1, *j*=1,2,3,4

$$d(x_1, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_1) + d(x_1, x_1)]$$
$$d(x_1, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_1) + d(x_1, x_2)]$$
$$d(x_1, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_1) + d(x_1, x_3)]$$
$$d(x_1, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_1) + d(x_1, x_4)]$$

untuk *n*=1, *i*=2, *j*=1,2,3,4

$$d(x_2, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_1) + d(x_1, x_1)]$$
$$d(x_2, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_1) + d(x_1, x_2)]$$
$$d(x_2, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_1) + d(x_1, x_3)]$$
$$d(x_2, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_1) + d(x_1, x_4)]$$

untuk *n*=1, *i*=3, *j*=1,2,3,4

$$d(x_3, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_1) + d(x_1, x_1)]$$
$$d(x_3, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_1) + d(x_1, x_2)]$$
$$d(x_3, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_1) + d(x_1, x_3)]$$
$$d(x_3, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_1) + d(x_1, x_4)]$$

untuk *n*=1, *i*=4, *j*=1,2,3,4

$$d(x_4, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_1) + d(x_1, x_1)]$$
$$d(x_4, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_1) + d(x_1, x_2)]$$
$$d(x_4, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_1) + d(x_1, x_3)]$$

$$d(x_4, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_1) + d(x_1, x_4)]$$

untuk *n*=2, *i*=1, *j*=1,2,3,4

$$d(x_1, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_2) + d(x_2, x_1)]$$

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_2) + d(x_2, x_2)]$$

$$d(x_1, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)]$$

$$d(x_1, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_2) + d(x_2, x_4)]$$

untuk *n*=2, *i*=2, *j*=1,2,3,4

$$d(x_2, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_2) + d(x_2, x_1)]$$

$$d(x_2, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_2) + d(x_2, x_2)]$$

$$d(x_2, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_2) + d(x_2, x_3)]$$

$$d(x_2, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_2) + d(x_2, x_4)]$$

untuk *n*=2, *i*=3, *j*=1,2,3,4

$$d(x_3, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_2) + d(x_2, x_1)]$$

$$d(x_3, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_2) + d(x_2, x_2)]$$

$$d(x_3, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_2) + d(x_2, x_3)]$$

$$d(x_3, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_2) + d(x_2, x_4)]$$

untuk *n*=2, *i*=4, *j*=1,2,3,4

$$d(x_4, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_2) + d(x_2, x_1)]$$

$$d(x_4, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_2) + d(x_2, x_2)]$$

$$d(x_4, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_2) + d(x_2, x_3)]$$

$$d(x_4, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_2) + d(x_2, x_4)]$$

untuk *n*=3, *i*=1, *j*=1,2,3,4

$$d(x_1, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_3) + d(x_3, x_1)]$$

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)]$$
$$d(x_1, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_3) + d(x_3, x_3)]$$
$$d(x_1, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_3) + d(x_3, x_4)]$$

untuk *n*=3, *i*=2, *j*=1,2,3,4
$$d(x_2, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_3) + d(x_3, x_1)]$$
$$d(x_2, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_3) + d(x_3, x_2)]$$
$$d(x_2, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_3) + d(x_3, x_3)]$$
$$d(x_2, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4)]$$

untuk *n*=3, *i*=3, *j*=1,2,3,4
$$d(x_3, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_3) + d(x_3, x_1)]$$
$$d(x_3, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_3) + d(x_3, x_2)]$$
$$d(x_3, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_3) + d(x_3, x_3)]$$
$$d(x_3, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_3) + d(x_3, x_4)]$$

untuk *n*=3, *i*=4, *j*=1,2,3,4
$$d(x_4, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_3) + d(x_3, x_1)]$$
$$d(x_4, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_3) + d(x_3, x_2)]$$
$$d(x_4, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_3) + d(x_3, x_3)]$$
$$d(x_4, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_3) + d(x_3, x_4)]$$

untuk *n*=4, *i*=1, *j*=1,2,3,4
$$d(x_1, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_4) + d(x_4, x_1)]$$
$$d(x_1, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_4) + d(x_4, x_2)]$$
$$d(x_1, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_4) + d(x_4, x_3)]$$
$$d(x_1, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_1, x_4) + d(x_4, x_4)]$$

untuk n=4, i=2, j=1,2,3,4

$$d(x_2, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_4) + d(x_4, x_1)]$$
$$d(x_2, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_4) + d(x_4, x_2)]$$
$$d(x_2, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_4) + d(x_4, x_3)]$$
$$d(x_2, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_2, x_4) + d(x_4, x_4)]$$

untuk n=4, i=3, j=1,2,3,4

$$d(x_3, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_4) + d(x_4, x_1)]$$
$$d(x_3, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_4) + d(x_4, x_2)]$$
$$d(x_3, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_4) + d(x_4, x_3)]$$
$$d(x_3, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_3, x_4) + d(x_4, x_4)]$$

untuk n=4, i=4, j=1,2,3,4

$$d(x_4, x_1) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_4) + d(x_4, x_1)]$$
$$d(x_4, x_2) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_4) + d(x_4, x_2)]$$
$$d(x_4, x_3) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_4) + d(x_4, x_3)]$$
$$d(x_4, x_4) \leq \frac{2}{2}[d(x_4, x_4) + d(x_4, x_4)]$$