ORTHOGONAL GENERALIZED DERIVATION PADA RING SEMIPRIMA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
RETNA NURHAYATI
0710943002-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

ORTHOGONAL GENERALIZED DERIVATION
PADA RING SEMIPRIMA

oleh:
RETNA NURHAYATI
0710943002-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 5 Juli 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.	**Drs. Bambang Sugandi, M.Si.**
NIP. 19670907 199203 1 001	**NIP. 19590515 199203 1 002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc.
NIP. 19670907 199203 1 001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Retna Nurhayati**
NIM	**:**	**0710943002-94**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**:**	***Orthogonal Generalized Derivation*** **pada Ring Semiprima**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini,**
2. **apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 5 Juli 2011
Yang menyatakan,

(Retna Nurhayati)
NIM. 0710943002-94

ABSTRAK

Suatu ring R disebut ring semiprima jika $x R x = 0$ maka $x = 0$ untuk setiap $x \in R$. Beberapa pembahasan yang terkait dengan ring semiprima adalah *derivation* dan *generalized derivation*. Pada skripsi ini dibahas tentang *orthogonal generalized derivation* pada ring semiprima melalui pembahasan definisi maupun pembuktian teorema yang terkait. Dari studi pustaka yang telah dilakukan, diketahui bahwa Jika D dan G adalah *orthogonal generalized derivation* pada R, maka D dan G adalah *generalized derivation* dengan D dan G adalah suatu pemetaan aditif dari ring semiprima ke dirinya sendiri. Jika D Gadalah *generalized derivation* pada R, maka terdapat ideal U dan V sedemikian sehingga $U \cap V = 0$ dan $U \oplus V$ disebut *essential ideal* atas R.

Kata Kunci: pemetaan aditif, ring semiprima, ideal, *essential ideal, derivation, generalized derivation, orthogonal generalized derivation.*

ABSTRACT

A ring R is called semiprime ring if $x\ R \risingdotseq 0$ then $x = 0$ for all $x \in R$. There are some results about derivation and generalized derivation of semiprime ring. In this work, we present some results of definition and theorem about orthogonal generalized derivation of a semiprime ring. D and G are additive mapping. If D and G are orthogonal generalized derivation, then D and G are generalized derivation. If $D\ G$is generalized derivation of semiprime ring, then there exist ideal U and V of R such that $U \cap V = 0$ and $U \bigoplus V$ is essential ideal of R.

Key Words: additive mapping, semiprime ring, ideal, essential ideal, derivation, generalized derivation, orthogonal generalized derivation.

KATA PENGANTAR

Puji syukur ke hadirat Allah SWT atas bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "***Orthogonal Generalized Derivation* pada Ring Semiprima"**. Shalawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW dan para sahabat hingga akhir zaman.

Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc., selaku dosen pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Drs. Bambang Sugandi, M.Si., selaku dosen pembimbing II atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si., dan Dra. Ari Andari, M.S, selaku dosen penguji pada ujian skripsi serta Prof. Dr. Marjono, M.Phil selaku dosen penguji dan penasehat akademik atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh Bapak/Ibu dosen Matematika yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan kepada penulis.
5. Orang tua penulis yang telah memberi dukungan doa, nasehat dan motivasi tiada henti kepada penulis hingga terselesainya skripsi dan studi ini.
6. Suami penulis.
7. Bapak, Ibunda dan Adik- adik penulis.
8. Seluruh mahasiswa Matematika 2007 dan semua pihak yang telah membantu proses penulisan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak. Akhirnya semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca, khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang, Juli 2011

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN.. ii
HALAMAN PERNYATAAN..iii
ABSTRAK iv
ABSTRACT... v
KATA PENGANTAR... vi
DAFTAR ISI.. vii
DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN viii

BAB I PENDAHULUAN
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 1
1.3. Tujuan... 1

BAB II TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner 3
2.2 Pemetaan Aditif.. 3
2.3 Grup 5
2.4 Ring.. 5
2.5 Ideal.. 6
2.6 Ring Semiprima 8
2.7 Ring Prima 10
2.8 *Multiplier* 10

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN
3.1 *Derivation* pada Ring Semiprima.......................... 13
3.2 *Jordan Derivation* pada Ring Semiprima 15
3.3 *Generalized Derivation* pada Ring Semiprima 16
3.4 *Orthogonal Derivation* pada Ring Semiprima 22
3.5 *Orthogonal Generalized Derivation* pada Ring Semiprima 23

BAB IV KESIMPULAN.. 37

DAFTAR PUSTAKA.. 39

DAFTAR LAMBANG DAN SINGKATAN

*	: operasi biner
$\in$	: anggota himpunan
$\mathbb{Z}$	: himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Q}$	: himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan riil
$\emptyset$	: himpunan kosong
Ann (U)	: Annihilator dari ideal U
$\bigoplus$	: *direct sum*
$\cap$	: *intersection*
$\subset$	: himpunan bagian
$\exists$	: terdapat
$\forall$	: untuk setiap
C^{∞}	: $\{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f, f', f'', \dots\}$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar merupakan suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner dan memenuhi aksioma tertentu. Salah satu struktur aljabar adalah ring. Ring adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian. Ring R yang memenuhi kondisi, jika $xRx = 0$ maka $x = 0$ untuk setiap $x \in R$ disebut ring semiprima.

Sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan, muncul pembahasan baru tentang ring semiprima, di antaranya *derivation* dan *generalized derivation*. *Derivation* adalah pemetaan aditif $d: R \rightarrow R$ yang memenuhi $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ untuk setiap $x, y \in R$ dengan R adalah ring semiprima. Sedangkan *generalized derivation* merupakan generalisasi dari konsep *derivation* yang dibangun oleh *derivation* dan *left multiplier*.

Pada tahun 2004, Nurcan Argac, Atsushi Nakajima dan Emine Albas dalam jurnal berjudul "*On Orthogonal Generalized Derivations of Semiprime Rings*" menjelaskan bahwa ortogonalitas dapat dihubungkan dengan *generalized derivation.*

Definisi dan sifat-sifat *orthogonal generalized derivation* menarik untuk dipelajari. Oleh karena itu, penulis bermaksud memaparkan dalam skripsi ini tentang definisi *orthogonal generalized derivation* pada ring semiprima beserta lema dan teorema yang mendukung.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi dan sifat-sifat *orthogonal generalized derivation* pada ring semiprima.

1.3 Tujuan

Tujuan pembahasan skripsi ini adalah menjelaskan definisi dan sifat- sifat *orthogonal generalized derivation* pada ring semiprima.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Definisi 2.1.1 (Hasil Kali Cartesius) (Bhattacharya, 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut Hasil Kali Cartesius dari A dan B. Selanjutnya, dinyatakan dengan

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Definisi 2.1.2 (Relasi) (Bhattacharya, 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong dan R adalah himpunan bagian (*subset*) dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

Definisi 2.1.3 (Pemetaan) (Bhattacharya, 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan tidak kosong. Suatu relasi f dari A ke B (dinotasikan $f: A \to B$) disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap $x \in A$ berlaku jika $(x, y_1) \in f$ dan $(x, y_2) \in f$ maka $y_1 = y_2$ dengan $y_1, y_2 \in B$. A disebut domain dan B disebut kodomain.

Definisi 2.1.4 (Operasi Biner) (Whitelaw, 1995)
Misalkan A adalah himpunan tidak kosong. Suatu operasi biner $*$ pada A adalah pemetaan dari $S \times S$ ke S atau dinotasikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} *: S \times S &\longrightarrow S \\ (a, b) &\longmapsto *(a, b) = a * b. \end{aligned}$$

2.2 Pemetaan Aditif

Definisi 2.2.1 (Pemetaan Aditif) (Bartle,dkk., 1992)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu pemetaan $f: A \to B$ disebut pemetaan aditif, jika untuk setiap $x, y \in A$ memenuhi

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Contoh 2.2.2

Diberikan himpunan matriks ordo 2x2 sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Pemetaan $D: R \to R$ yang didefinisikan oleh

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa + pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a, b, c, p \in \mathbb{Z}$ merupakan pemetaan aditif.

Bukti. Diambil $A, B \in R$ dengan $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(B) = D\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_2 + pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan D merupakan pemetaan aditif. Berdasarkan Definisi 2.2.1 diperoleh

$$\begin{aligned} D(A + B) &= D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= D\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & p(a_1 + a_2) + p(c_1 + c_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} D(A) + D(B) &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & pa_2 + pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 + pa_2 + pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & p(a_1 + a_2) + p(c_1 + c_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, a_2, c_2 \in \mathbb{Z}$. Karena untuk setiap $A, B \in R$ diperoleh

$$D(A + B) = D(A) + D(B),$$

sehingga D merupakan pemetaan aditif. ■

2.3 Grup

Definisi 2.3.1 (Grup) (Fraleigh, 1997)
Suatu grup $(G,*)$ adalah himpunan G yang bersifat tertutup terhadap operasi biner $*$ dan memenuhi kondisi berikut.

1. Assosiatif yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku
$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$
2. Terdapat elemen identitas yaitu terdapat $e \in G$ untuk setiap $a \in G$ sedemikian sehingga berlaku
$$a * e = e * a = a.$$
3. Memiliki elemen invers yaitu untuk setiap $a \in G$ terdapat $a' \in G$ sedemikian sehingga
$$a * a' = a' * a = e.$$

Contoh 2.3.2
$(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup karena $\mathbb{Z}$ pada operasi penjumlahan bersifat assosiatif, memiliki elemen identitas dan elemen invers.

Definisi 2.3.3 (Grup Abel) (Fraleigh, 1997)
Suatu grup $(G,*)$ disebut grup Abel jika $(G,*)$ bersifat komutatif.

2.4 Ring

Definisi 2.4.1 (Ring) (Ehrlich, 1991)
Ring R adalah himpunan dengan dua operasi biner penjumlahan (+) dan perkalian (·) yang memenuhi aksioma berikut.

1. $(R, +)$ adalah grup Abel.
2. $(R,\cdot)$ bersifat tertutup dan assosiatif.
3. Berlaku hukum distributif.

Contoh 2.4.2
$(\mathbb{Z}, +,\cdot)$, $(\mathbb{Q}, +,\cdot)$, dan $(\mathbb{R}, +,\cdot)$ merupakan ring.

Definisi 2.4.3 (*Torsion Free*) (Vukman, 2007)
Ring R disebut 2-*torsion free*, jika $2x = 0$ maka $x = 0$ untuk setiap $x \in R$.

Contoh 2.4.4
Diberikan himpunan matriks segitigas atas yang didefinisikan oleh
$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Berdasarkan sifat- sifat operasi pada matrik, himpunan R terhadap operasi penjumlahan dan perkalian merupakan ring. Himpunan R merupakan suatu 2-*torsion free* ring karena jika diambil $A \in R$ dan $A \neq 0$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

maka

$$2A = 2\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2b_1 \\ 0 & 2c_1 \end{bmatrix} \neq 0$$

untuk setiap $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$. Jadi, R merupakan 2-*torsion free* ring. ■

2.5 Ideal

Definisi 2.5.1 (Ideal) (Whitelaw, 1995)
Diberikan suatu himpunan tidak kosong U dan U adalah himpunan bagian dari ring R. U disebut ideal kanan (kiri) jika memenuhi:
1. $a - b \in U$ untuk setiap $a, b \in U$.
2. $a\ r \in U$ $(r\ a \in U)$ untuk setiap $a \in U$ dan $r \in R$.

Jika U ideal kanan dan ideal kiri atas R $(a\ r \in U$ dan $r\ a \in U)$ maka U disebut *two-sided ideal.*

Contoh 2.5.2
Diberikan ring R sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Suatu himpunan tidak kosong U yang didefinisikan oleh

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

merupakan ideal atas R.

Bukti. Berdasarkan Definisi 2.5.1, akan dibuktikan U adalah ideal atas R. Misalkan $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in U$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Maka

$$A - B = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U.$$

Ambil $x_1, y_1, a, b, c \in \mathbb{Z}$ dan $A \in U, X \in R$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

Maka

$$A\ X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 a & x_1 b + y_1 c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U$$

dan

$$X\ A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a x_1 & a y_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in U.$$

Jadi, U merupakan ideal atas R. ■

Definisi 2.5.3 (Annihilator) (Argac, 2004)
Misalkan U adalah ideal atas R. Annihilator dari U didefinisikan oleh

$$\text{Ann }(U) = \{x \in R | x\ u = 0, \forall\ u \in U\}.$$

Contoh 2.5.4
Diberikan suatu ring R dan ideal U atas R sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & z \end{bmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dan } U = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Akan ditentukan annihilator dari U. Diambil $X \in R$ dengan

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 2.5.3,

$$0 = X\ U = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\ x & a\ y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan $a = 0$, maka

$$X = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \text{ dan } X\ U = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jadi, $\text{Ann }(U) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \forall\ b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$

Definisi 2.5.5
Suatu ring R dapat didefinisikan sebagai *external direct sum*, yaitu jumlah dari ring $R_1, R_2, \dots, R_n$ dan dinyatakan dengan

$$R = R_1 \oplus \dots \oplus R_n.$$

Definisi 2.5.6
Misalkan R adalah ring dan $U_1, U_2, \dots, U_n$ adalah ideal atas R sedemikian sehingga

(i) $R = \sum_{i=1}^{n} U_i$
(ii) $U_i \cap \sum_{j \neq 1}^{n} U_j = \{0\}$ untuk $i = 1, \dots, n$.

Maka R disebut *internal direct sum* dari ideal U_i dan R dinyatakan dengan $R = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.

2.6 Ring Semiprima

Definisi 2.6.1 (Ring semiprima) (Argac, 2004)
Suatu ring R disebut ring semiprima jika $xRx = 0$ maka $x = 0$ untuk setiap $x \in R$.

Contoh 2.6.2
Ring R yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

merupakan ring semiprima karena jika diambil $a_1, b_1, c_1 \neq 0$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \in R$$

maka

$$\begin{aligned} ARA &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a & a_1 b + b_1 c \\ 0 & c_1 c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 a a_1 & a_1 a b_1 + (a_1 b + b_1 c) c_1 \\ 0 & c_1 c c_1 \end{bmatrix} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Berdasarkan Definisi 2.6.1, kontraposisi terpenuhi. Jadi, R merupakan ring semiprima. ∎

Lema 2.6.3
Misalkan R adalah ring semiprima dengan 2-*torsion free*. Jika untuk setiap $x, a, b \in R$ memenuhi $axb + bxa = 0$, maka $axb = bxa = 0$, untuk setiap $x, a, b \in R$.

Bukti. Diketahui untuk setiap $x, a, b \in R$ berlaku

$$axb + bxa = 0.$$

Jika pada masing- masing ruas ditambahkan dengan $(-bxa)$, maka diperoleh

$$axb = -bxa$$

Berdasarkan Definisi 2.6.1, dihasilkan

$$axbyaxb = -axbyaxb \tag{2.1}$$

Jika pada persamaan (2.1) masing- masing ruas ditambahkan dengan $axbyaxb$, maka dihasilkan

$$2axbyaxb = 0.$$

Karena R adalah ring semiprima dengan 2-*torsion free*, sehingga

$$axbyaxb = 0.$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$axb = 0.$$

Jadi, diperoleh

$$bxa = 0.$$

Terbukti, $axb = bxa = 0$ untuk setiap $x, a, b \in R$. ■

Lema 2.6.4

Misalkan R adalah ring semiprima. Jika untuk setiap $a, b, x \in R$, $axb = 0$ maka $ab = ba = 0$.

Bukti. Jika diambil $x \in R$ maka berlaku

$$(ab)x(ab) = a(bxa)b = 0,$$
$$(ba)x(ba) = b(axb)a = 0.$$

Berdasarkan Definisi 2.6.1 maka $ab = ba = 0$, untuk setiap $x \in R$. ■

Definisi 2.6.5 (*Essential ideal*) (Argac N, 2004)

Diberikan ring semiprima R dan ideal U atas R. *Essential ideal* atas R didefinisikan oleh $U \oplus \text{Ann}\,(U)$ dengan $U \cap \text{Ann}\,(U) = 0$.

Contoh 2.6.6

Diberikan ring semiprima R dan ideal U atas R yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle|\, a, b \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dan } U = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle|\, x, y \in \mathbb{Z} \right\}$$

Diketahui annihilator dari U adalah

$$\text{Ann}(U) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $U \cap \text{Ann}\,(U) = 0$, sehingga terdapat $U \oplus \text{Ann}\,(U)$ yang merupakan *essential ideal*.

2.7 Ring prima

Definisi 2.7.1 (Ring prima) (Argac, 2004)
Suatu ring R disebut ring prima jika $x R y = 0$ maka $x = 0$ atau $y = 0$ untuk setiap $x, y \in R$.

Contoh 2.7.2
Ring R yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

merupakan ring prima.

Bukti. Diambil $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ dan $M \in R$, dengan

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Definisi 2.7.1 akan dibuktikan M adalah ring prima. Pembuktian dilakukan melalui kontraposisi. Diambil $c, d, e, f \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in R$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}.$$

Maka diperoleh

$$\begin{aligned} A\,M\,B &= \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c a_1 e & 0 \\ 0 & d b_1 f \end{bmatrix} \\ &\neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, b_1, c, d, e, f \in \mathbb{Z}$. Kontraposisi terpenuhi, sehingga R merupakan ring prima. ■

2.8 *Multiplier*

Definisi 2.8.1 (*Left Multiplier*) (Lahcen, 2010)
Misalkan R adalah ring semiprima. Didefinisikan suatu pemetaan aditif $H: R \to R$. Jika untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi

$$H(x\,y) = H(x)y$$

maka H disebut *left multiplier*.

Definisi 2.8.2 (*Right Multiplier*) (Lahcen, 2010)
Misalkan R adalah ring semiprima. Didefinisikan suatu pemetaan aditif $H: R \to R$. Jika untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi

$$H(xy) = xH(y)$$

maka H disebut *right multiplier*.

Contoh 2.8.3
Diberikan ring semiprima R sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ambil $A \in R$ dengan

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}, p \in \mathbb{R}$$

Suatu pemetaan $H: R \to R$ yang didefinisikan oleh

$$H(x) = Ax$$

memenuhi

$$H(xy) = H(x)y \text{ dan } H(x)y = xH(y)$$

untuk setiap $x, y \in R$.

BAB III
HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas beberapa definisi, lema, dan teorema tentang *Orthogonal Generalized Derivation* pada Ring semiprima.

3.1 *Derivation* pada Ring semiprima

Definisi 3.1.1 (Bresar, 1988)
Misalkan R adalah ring semiprima. Diberikan suatu pemetaan aditif $d: R \to R$. Jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$d(xy) = d(x)y + x\,d(y)$$

maka d disebut *derivation.*

Contoh 3.1.2
Diberikan ring semiprima R yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$$

dan pemetaan aditif d dan g didefinisikan sebagai berikut.

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -br \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan p dan r adalah elemen tidak nol dari $\mathbb{Z}$. Maka d dan g merupakan *derivation*.

Bukti. Diketahui

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Diambil $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in R$ sebagai berikut.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$d(A) = d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(B) = d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_2 - pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(A) = g\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b_1 r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(B) = g\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b_2 r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Akan ditunjukkan

$$d(AB) = d(A)B + A\,d(B).$$

Untuk ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned}
d(AB) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= d\left(\begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & p a_1 a_2 - p c_1 c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, a_2, c_2, p \in \mathbb{Z}$. Untuk ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned}
&d(A)B + A\,d(B) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & p a_1 - p c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & p a_2 - p c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (p a_1 - p c_1) c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 (p a_2 - p c_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (p a_1 - p c_1) c_2 + a_1 (p a_2 - p c_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & p a_1 c_2 - p c_1 c_2 + a_1 p a_2 - a_1 p c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -p c_1 c_2 + a_1 p a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & a_1 p a_2 - p c_1 c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, a_2, c_2, p \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan

$$g(AB) = g(A)B + A\,g(B).$$

Untuk ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned}
g(AB) &= g\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= g\left(\begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1 b_2 + b_1 c_2) r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, b_1, b_2, c_2, r \in \mathbb{Z}$. Untuk ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned}
&g(A)B + A\,g(B) \\
&\quad= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1(-b_2 r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad= \begin{bmatrix} 0 & -b_1 c_2 + a_1(-b_2 r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&\quad= \begin{bmatrix} 0 & -(a_1 b_2 + b_1 c_2) r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, b_1, b_2, c_2, r \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 3.1.1, d dan g merupakan *derivation*. ■

Contoh 3.1.3
Diberikan Ring R yang beranggotakan fungsi sebagai berikut.

$$R = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \in C^\infty\}$$

Suatu pemetaan aditif d didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} d: R &\longrightarrow R \\ f &\longmapsto d(f) = f' \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa d merupakan *derivation*. Ambil $f, g \in R$. Berdasarkan definisi pemetaan d di atas diperoleh

$$\begin{aligned} d(fg) &= (fg)' \\ &= f'g + fg' \\ &= d(f)g + f\,d(g) \end{aligned}$$

Terbukti bahwa d merupakan *derivation*. ■

3.2 *Jordan Derivation* pada Ring Semiprima

Definisi 3.2.1 (Bresar, 1988)
Misalkan R adalah ring semiprima. Diberikan suatu pemetaan aditif $d: R \to R$. Jika untuk setiap $x \in R$ memenuhi

$$d(x^2) = d(x)x + x\,d(x),$$

maka d disebut *Jordan derivation*.

Contoh 3.2.2
Diberikan ring semiprima R sebagai berikut.

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Suatu pemetaan aditif d didefinisikan oleh

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan a, b, c, p elemen tidak nol dari $\mathbb{Z}$. Maka d adalah *Jordan derivation*.

Bukti. Diambil $a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{Z}$ dan $A \in R$.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

dengan

$$d(A) = d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan dibuktikan

$$d(AA) = d(A)A + Ad(A).$$

Untuk ruas kiri diperoleh

$$\begin{aligned} d(AA) &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 b_1 + b_1 c_1 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 a_1 - pc_1 c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, p \in \mathbb{Z}$. Untuk ruas kanan diperoleh

$$\begin{aligned} & d(A)A + Ad(A) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (pa_1 - pc_1)c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1(pa_1 - pc_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (pa_1 - pc_1)c_1 + a_1(pa_1 - pc_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 c_1 - pc_1 c_1 + a_1 pa_1 - a_1 pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -pc_1 c_1 + a_1 pa_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1 pa_1 - pc_1 c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, p \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 3.2.1, d merupakan *Jordan derivation.* ■

3.3 *Generalized Derivation* pada Ring Semiprima

Definisi 3.3.1 (Daif, dkk., 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima. Diberikan pemetaan aditif $D: R \to R$. Jika terdapat *derivation* $d: R \to R$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi

$$D(xy) = D(x)y + xd(y)$$

maka D disebut *generalized derivation.*

Contoh 3.3.2

Diberikan ring semiprima R yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Misalkan p, q dan r elemen tidak nol dari $\mathbb{Z}$ dan pemetaan aditif $D, G, d,$ dan g didefinisikan sebagai berikut.

$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa + pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & qc - br \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -br \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan d dan g adalah *derivation*. Maka D dan G adalah *generalized derivation*.

Bukti. Diambil $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ dan $A, B \in R$.

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(B) = d\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_2 - pc_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(A) = G\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & qc_1 - b_1 r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(B) = g\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b_2 r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Akan dibuktikan

$$D(AB) = D(A)B + A\,d(B)$$

Untuk ruas kiri, diperoleh

$$\begin{aligned} D(AB) &= D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= D\left(\begin{bmatrix} a_1 a_2 & a_1 b_2 + b_1 c_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 a_2 + pc_1 c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

untuk setiap $a_1, c_1, a_2, c_2, p \in \mathbb{Z}$.

Untuk ruas kanan, diperoleh

$$D(A)B + A\,d(B)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & p\,a_1 + p\,c_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & p\,a_2 - p\,c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (p\,a_1 + p\,c_1)c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1(p\,a_2 - p\,c_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (p\,a_1 + p\,c_1)c_2 + a_1(p\,a_2 - p\,c_2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & p\,a_1c_2 + p\,c_1c_2 + a_1p\,a_2 - a_1p\,c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & p\,c_1c_2 + a_1p\,a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & p\,a_1a_2 + p\,c_1c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a_1, c_1, a_2, c_2, p \in \mathbb{Z}$. Selanjutnya, akan dibuktikan

$$G(AB) = G(A)B + A\,g(B).$$

Untuk ruas kiri, diperoleh

$$G(AB) = G\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= G\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & q\,c_1c_2 - (a_1b_2 + b_1c_2)r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a_1, b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$. Untuk ruas kanan, diperoleh

$$G(A)B + A\,g(B)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & q\,c_1 - b_1r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (q\,c_1 - b_1r)c_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_1(-b_2r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (q\,c_1 - b_1r)c_2 + a_1(-b_2r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & q\,c_1c_2 - b_1r\,c_2 - a_1b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & q\,c_1c_2 - (a_1b_2 + b_1c_2)r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

untuk setiap $a_1, b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$. Berdasarkan Definisi 3.3.1, terbukti D dan G merupakan *generalized derivation*. ■

Definisi 3.3.3 (Vukman, 2007)

Suatu pemetaan aditif $D: R \to R$ disebut *generalized Jordan derivation* jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$D(x^2) = D(x)x + x\,d(x)$$

dengan $d: R \to R$ adalah *derivation.*

Contoh 3.3.4

Contoh 3.3.2 merupakan *generalized Jordan derivation* karena berdasarkan Definisi 3.3.1 dan Definisi 3.3.3, hal ini dapat dibuktikan dengan diasumsikan $y = x$ untuk setiap x dan y elemen dari ring semiprima.

Teorema 3.3.5

Misalkan R ring semiprima dengan 2-*torsion free*. Diberikan pemetaan aditif $D: R \to R$ dan $d: R \to R$. Jika d adalah *derivation* dan untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$D(xyx) = D(x)yx + x\,d(yx),$$

maka D merupakan *generalized Jordan derivation*.

Bukti. Diberikan

$$D(xyx) = D(x)yx + x\,d(yx) \tag{3.1}$$

untuk setiap $x, y \in R$. Jika dilakukan substitusi $x = x + z$ ke persamaan (3.1) dan dilakukan linierisasi, maka diperoleh

$$D(xyz + zyx) = D(x)yz + x\,d(yz) + D(z)yx + z\,d(yx) \tag{3.2}$$

Jika dilakukan substitusi $z = x^2$ ke persamaan (3.2) maka dihasilkan

$$D(xyx^2 + x^2yx) = D(x)yx^2 + x\,d(yx^2) + D(x^2)yx + x^2d(yx) \tag{3.3}$$

Substitusi $y = xy + yx$ ke persamaan (3.1), diperoleh

$$\begin{aligned} D(x(xy + yx)x) &= D(x)\big((xy + yx)x\big) + x\,d\big((xy + yx)x\big) \\ &= D(x)xyx + D(x)yx^2 + x\,d(xyx) + x\,d(yx^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Berdasarkan perbandingan persamaan (3.3) dan (3.4) diperoleh persamaan baru, yaitu:

$$\begin{aligned} &D(x)yx^2 + x\,d(yx^2) + D(x^2)yx + x^2d(yx) \\ &\quad = D(x)xyx + D(x)yx^2 + x\,d(xyx) + x\,d(yx^2) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Misalkan

$$A(x) = D(x^2) - D(x)x - x\,d(x),$$

sehingga untuk setiap $x, y \in R$, persamaan (3.5) dapat diubah dalam bentuk:

$$
\begin{aligned}
0 &= D(x)yx^2 + x\,d(yx^2) + D(x^2)y\,x + x^2 d(y\,x) \\
&\quad - \left(D(x)x\,y + D(x)yx^2 + x\,d(x\,y)x + x\,d(yx^2)\right) \\
&= 0 + 0 + D(x^2)y\,x + x^2 d(y\,x) - D(x)x\,y - x\,d(x\,y)x \\
&= D(x^2)y\,x + x^2 d(y\,x) - D(x)x\,y - x\,d(x)y\,x - x\,x\,d(y\,x) \\
&= D(x^2)y\,x + 0 - D(x)x\,y - x\,d(x)y\,x \\
&= D(x^2)y\,x - D(x)x\,y - x\,d(x)y\,x \\
&= \left(D(x^2) - D(x)x - x\,d(x)\right)y\,x \\
&= A(x)y\,x \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

Selanjutnya untuk setiap $x, y \in R$, akan ditunjukkan

$$A(x) = 0. \qquad (3.7)$$

Jika dilakukan subtitusi $y = x\,y\,A(x)$ ke persamaan (3.6), maka untuk $x \in R$ diperoleh

$$0 = A(x)x\,y\,A(x)x$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$0 = A(x)x \qquad (3.8)$$

Pada persamaan (3.6), jika x dikalikan dari sisi kiri dan $A(x)$ dari sisi kanan, maka untuk setiap $x, y \in R$ dihasilkan

$$
\begin{aligned}
0 &= x\,A(x)y\,x\,A(x) \\
&= x\,A(x) \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

karena R adalah ring semiprima. Melalui linierisasi persamaan (3.8), diperoleh

$$A(x)y + \beta(x,y)x + A(y)x + \beta(x,y)y = 0 \qquad (3.10)$$

untuk setiap $x, y \in R$ dengan

$$\beta(x,y) = D(x\,y + y\,x) - D(x)y - D(y)x - x\,d(y) - y\,d(x).$$

Untuk setiap $x, y \in R$, jika dilakukan substitusi $x = -x$ ke persamaan (3.10) maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= A(-x)y + \beta(-x,y)(-x) + A(y)(-x) + \beta(-x,y)y \\
&= A(-x)y + (D(-x\,y + y\,x) - D(-x)y - d(y)(-x) \\
&\quad - (-x)d(y) - y\,D(-x)\,)(-x) + A(y)(-x) \\
&\quad + \left(D(-x\,y + y\,x) - D(-x)y - d(y)(-x)\right. \\
&\quad \left. - (-x)d(y) - y\,D(-x)\right)y \\
&= A(x)y + \beta(x,y)x - A(y)x - \beta(x,y)y \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

Jika persamaan (3.10) dan (3.11) dijumlahkan, maka untuk setiap $x, y \in R$ dihasilkan

$$\begin{aligned} 0 &= A(x)y + \beta(x,y)x + A(y)x + \beta(x,y)y + A(x)y + \beta(x,y)x \\ &\qquad - A(y)x - \beta(x,y)y \\ &= 2(A(x)y + \beta(x,y)x) \end{aligned}$$

Karena R adalah 2-*torsion free*, sehingga

$$0 = A(x)y + \beta(x,y)x \qquad (3.12)$$

untuk setiap $x, y \in R$. Pada persamaan (3.12), jika sisi kanan dikalikan dengan $A(x)$ maka diperoleh

$$A(x)yA(x) = 0$$

untuk setiap $x, y \in R$. Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$A(x) = 0$$

untuk setiap $x \in R$. Jadi, D adalah *generalized jordan derivation.* ■

***Corolary* 3.3.6**

Misalkan R adalah ring semiprima dengan 2-*torsion free*. Diberikan pemetaan aditif $D: R \to R$ dan $d: R \to R$. Jika untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi

$$D(xyx) = D(x)yx + xd(yx)$$

dengan d adalah *derivation* maka D merupakan *generalized derivation*.

Bukti. Diketahui untuk setiap $x, y \in R$,

$$D(xyx) = D(x)yx + xd(yx).$$

Misalkan $a_l = D - d$, maka

$$\begin{aligned} a_l(xyx) &= D(xyx) - d(xyx) \\ &= D(x)yx + xd(yx) - d(x)yx - xd(yx) \\ &= D(x)yx + x\big(d(y)x + yd(x)\big) - d(x)yx - x\big(d(y)x + yd(x)\big) \\ &= D(x)yx + xd(y)x + xyd(x) - d(x)yx - xd(y)x - xyd(x) \\ &= \big(D(x) - d(x)\big)yx \\ &= a_l(x)yx \end{aligned}$$

Dengan kata lain, a_l adalah *left multiplier* dari R. Dari permisalan di atas, berarti $D = d + a_l$, dengan d *derivation* dan a_l adalah *left multiplier* dari R yang menunjukkan bahwa D adalah *generalized derivation*. ■

3.4 *Orthogonal Derivation* pada Ring Semiprima

Muhammad Ashraf mengutip definisi *orthogonal derivation* sebagai berikut.

Definisi 3.4.1
Dua *derivation* d dan g disebut ortogonal jika memenuhi

$$d(x)R\,g(y) = 0 = g(y)R\,d(x)$$

untuk setiap $x, y \in R$.

Contoh 3.4.2
Misalkan R adalah ring semiprima yang didefinisikan oleh

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Diberikan pemetaan aditif d dan g sebagai berikut.

$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -br \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan p, r elemen tidak nol dari $\mathbb{Z}$ dan d, g adalah *derivation*. Akan ditunjukkan d dan g *orthogonal derivation*. Ambil $A, B \in R$ dan $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ yaitu

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$

dengan

$$d(A) = d\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(B) = g\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Definisi 3.4.1,

$$\begin{aligned} d(A)R\,g(B) &= \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (pa_1 - pc_1)c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dan

$$g(B)R\,d(A) = \begin{bmatrix} 0 & -b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & (-b_2r)c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & pa_1 - pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, d dan g adalah *orthogonal derivation*. ■

3.5 *Orthogonal Generalized Derivation* pada Ring semiprima

Definisi 3.5.1 (Argac, 2004)
Dua *generalized derivation* D dan G pada ring semiprima R disebut ortogonal jika
$$D(x)R\,G(y) = 0 = G(y)R\,D(x)$$
untuk setiap $x, y \in R$.

Contoh 3.5.2
Misalkan R adalah ring semiprima yang diberikan oleh
$$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle|\, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$
Diberikan dua *derivation*
$$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa - pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, g\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -br \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
dan dua *generalized derivation*
$$D\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa + pc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & qc - br \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Akan ditunjukkan D dan G ortogonal. Diberikan $A, B \in R$ dengan $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{Z}$ sebagai berikut.
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$$
dengan
$$D(A) = D\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$G(B) = G\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & qc_2 - b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Berdasarkan Definisi 3.5.1, diperoleh
$$D(A)R\,G(B) = \begin{bmatrix} 0 & pa_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & qc_2 - b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & (pa_1 + pc_1)c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & qc_2 - b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$
\begin{aligned}
G(B)RD(A) &= \begin{bmatrix} 0 & qc_2 - b_2r \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & pq_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & (qc_2 - b_2r)c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & pq_1 + pc_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Jadi, D dan G adalah *orthogonal generalized derivation.* ■

Lema 3.5.3

Misalkan R adalah ring semiprima dengan 2- *torsion free*. Jika D dan G *orthogonal generalized derivation* pada R, maka D dan G memenuhi kondisi berikut.

(i) $D(x)G(y) = G(x)D(y)$, sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in R$ berlaku
$$D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0.$$
(ii) d dan g ortogonal, dan untuk setiap $x, y \in R$ berlaku
$$d(x)G(y) = G(y)d(x) = 0.$$
(iii) g dan D ortogonal, dan untuk setiap $x, y \in R$ berlaku
$$g(x)D(y) = D(y)g(x) = 0$$
(iv) d dan g adalah *orthogonal derivation.*

(v) $dG = Gd = 0$ dan $gD = Dg = 0$.

(vi) $DG = GD = 0$.

Bukti.

(i) Misalkan untuk setiap $x, y, z \in R$,
$$D(x)zG(y) = 0 \text{ dan } G(x)zD(y) = 0$$
adalah *orthogonal generalized derivation.* Berdasarkan Lema 2.6.4, untuk setiap $x, y \in R$, diperoleh
$$D(x)G(y) = 0 \text{ dan } G(x)D(y) = 0.$$
Jadi, untuk setiap $x, y \in R$ dihasilkan
$$D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0 \tag{3.13}$$

(ii) Diketahui
$$D(x)G(y) = 0 \text{ dan } D(x)zG(y) = 0$$
untuk setiap $x, y, z \in R$.

Pada persamaan $D(x)G(y) = 0$, jika dilakukan substitusi $x = r\ x$ untuk setiap $x, r \in R$, maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= D(r\ x)G(y) \\
&= \big(D(r)x + r\ d(x)\big)G(y) \\
&= D(r)x\ G(y) + r\ d(x)G(y) \\
&= r\ d(x)G(y) \\
&= d(x)G(y)r\ d(x)G(y) \\
&= d(x)G(y) && (3.14)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan persamaan (3.14), untuk setiap $x, y, r \in R$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= d(x\ r)G(y) \\
&= \big(d(x)r + x\ d(r)\big)G(y) \\
&= d(x)r\ G(y) + x\ d(r)G(y) \\
&= d(x)r\ G(y)
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Lema 2.6.4, untuk setiap $x, y, r \in R$ dihasilkan

$$
\begin{aligned}
0 &= G(y)r\ d(x) \\
&= G(y)d(x) && (3.15)
\end{aligned}
$$

Jadi, d dan G ortogonal dan $d(x)G(y) = G(y)d(x) = 0$ untuk setiap $x, y \in R$.

(iii) Diketahui

$$G(x)D(y) = 0 \text{ dan } G(x)z\ D(y) = 0$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Dengan $G(x)D(y) = 0$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= G(r\ x)D(y) \\
&= \big(G(r)x + r\ g(x)\big)D(y) \\
&= G(r)x\ D(y) + r\ g(x)D(y) \\
&= r\ g(x)D(y) && (3.16) \\
&= g(x)D(y) && (3.17)
\end{aligned}
$$

untuk setiap untuk setiap $x, y, r \in R$. Dengan persamaan (3.17), untuk setiap $r, x, y \in R$ diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= g(x\ r)D(y) \\
&= \big(g(x)r + x\ g(r)\big)D(y) \\
&= g(x)r\ D(y) + x\ g(r)D(y) \\
&= g(x)r\ D(y).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan Lema 2.6.4, dihasilkan

$$\begin{aligned} 0 &= D(y)r\ g(x) \\ &= D(y)g(x) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Jadi, $g(x)D(y) = D(y)g(x) = 0$ untuk setiap $x, y \in R$.

(iv) Jika dilakukan substitusi $x = x\ z$ dan $y = y\ w$ ke persamaan $D(x)G(y) = 0$ maka diperoleh

$$D(x\ z)G(y\ w) = 0.$$

Dari persamaan (3.19), diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} 0 &= D(x\ z)G(y\ w) \\ &= \big(D(x)z + x\ d(z)\big)\big(G(y)w + y\ g(w)\big) \\ &= D(x)z\ G(y)w + D(x)z\ y\ g(w) + x\ d(z)G(y) + x\ d(z)y\ g(w) \\ &= x\ d(z)y\ g(w) \end{aligned} \tag{3.20}$$

untuk setiap $x, w, y, z \in R$. Jadi, d dan g ortogonal.

(v) (a) Akan dibuktikan $d\ G = G\ d = 0$.

Berdasarkan (ii), untuk setiap $x, y \in R$ diketahui

$$d(x)G(y) = 0 \text{ dan } G(y)d(x) = 0$$

Misalkan

$$G\big(d(x)z\ G(y)\big) = 0 \tag{3.21}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Berdasarkan pembuktian di *point* (ii), diketahui

$$d(x)z\ G(y) = 0,$$

untuk setiap $x, y \in R$. Dengan persamaan (3.21), untuk setiap $x, y, z \in R$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= G\big(d(x)z\ G(y)\big) \\ &= G\big(d(x)\big)z\ G(y) + d(x)g\big(z\ G(y)\big) \\ &= G\big(d(x)\big)z\ G(y) + d(x)g(z)G(y) + d(x)z\ g\big(G(y)\big) \\ &= G\big(d(x)\big)z\ G(y) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Jika dilakukan substitusi $y = d(x)$ ke persamaan (3.22), dihasilkan

$$0 = G\big(d(x)\big)z\ G\big(d(x)\big)$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga diperoleh

$$0 = G\big(d(x)\big) \tag{3.23}$$

Jadi, $G\ d = 0$.

Misalkan

$$0 = d\big(G(x)z\,d(y)\big)$$

Maka

$$\begin{aligned} 0 &= d\big(G(x)\big)z\,d(y) + G(x)d\big(z\,d(y)\big) \\ &= d\big(G(x)\big)z\,d(y) + G(x)d(z)d(y) + G(x)z\,d(d(y)) \\ &= d\big(G(x)\big)z\,d(y) \qquad (3.24) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Jika dilakukan substitusi $y = G(x)$ ke persamaan (3.24), diperoleh

$$d\big(G(x)\big)z\,d\big(G(x)\big) = 0$$

untuk setiap $x, z \in R$ dan karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$d\big(G(x)\big) = 0 \qquad (3.25)$$

Jadi, $d\,G = 0$. Terbukti bahwa $G\,d = d\,G = 0$.

(b) Diberikan

$$g\big(D(x)z\,g(y)\big) = 0.$$

Untuk setiap $x, y, z \in R$, diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= g\big(D(x)\big)z\,g(y) + D(x)g\big(z\,g(y)\big) \\ &= g\,D(x)z\,g(y) + D(x)g(z)g(y) + D(x)z\,g\big(g(y)\big) \\ &= g\big(D(x)\big)z\,g(y) \qquad (3.26) \end{aligned}$$

Jika dilakukan substitusi $y = D(x)$ ke persamaan (3.26), dihasilkan

$$g\big(D(x)\big)z\,g\big(D(x)\big) = 0$$

dan karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$g\big(D(x)\big) = 0 \qquad (3.27)$$

Jika diketahui

$$D\big(g(x)z\,D(y)\big) = 0.$$

untuk setiap $x, y, z \in R$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= D\big(g(x)\big)z\,D(y) + g(x)d\big(z\,D(y)\big) \\ &= D\big(g(x)\big)z\,D(y) + g(x)\Big(d(z)D(y) + z\,d\big(D(y)\big)\Big) \\ &= D\big(g(x)\big)z\,D(y) + g(x)d(z)D(y) + g(x)z\,d\big(D(y)\big) \\ &= D\big(g(x)\big)z\,D(y) + g(x)D(y)d(z) + g(x)z\,d\big(D(y)\big) \\ &= D\big(g(x)\big)z\,D(y) \qquad (3.28) \end{aligned}$$

Jika dilakukan substitusi $y = g(x)$ ke persamaan (3.28), dihasilkan

$$D\big(g(x)\big)z D\big(g(x)\big) = 0$$

dan karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$D\big(g(x)\big) = 0 \tag{3.29}$$

Jadi, $g D = D g = 0$.

(vi) Misalkan

$$G\big(D(x)z G(y)\big) = 0,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= G\big(D(x)\big)z G(y) + D(x)g\big(z G(y)\big) \\ &= G\big(D(x)\big)z G(y) + D(x)g(z)G(y) + D(x)g(G(y)) \\ &= G\big(D(x)\big)z G(y) \end{aligned} \tag{3.30}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Jika dilakukan substitusi $y = D(x)$ ke persamaan (3.30) maka diperoleh

$$G\big(D(x)\big)z G\big(D(x)\big) = 0.$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$G\big(D(x)\big) = 0 \tag{3.31}$$

Untuk setiap $x, y, z \in R$, diberikan

$$D\big(G(x)z D(y)\big) = 0,$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= D\big(G(x)\big)z D(y) + G(x)d\big(z D(y)\big) \\ &= D\big(G(x)\big)z D(y) + G(x)d(z)D(y) + G(x)z\, d\,(y) \\ &= D\big(G(x)\big)z D(y) \end{aligned} \tag{3.32}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Jika dilakukan substitusi $y = G(x)$ ke persamaan (3.32), diperoleh

$$0 = D\big(G(x)\big)z D\big(G(x)\big)$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$0 = D\big(G(x)\big) \tag{3.33}$$

Terbukti bahwa $G D = D G = 0$. ■

Lema 3.5.4

Diberikan ring semiprima R dan ideal U atas R. Misalkan V adalah annihilator dari U. Jika D adalah *generalized derivation* pada R sedemikian sehingga $D(R), d(R) \subset U$, maka $D(V) = d(V) = 0$.

Bukti. Diketahui $V =$Ann (U), sehingga $x\, U = 0$ untuk $x \in V$. Diasumsikan $d(U) \subset U$ dan diberikan suatu *generalized derivation* sebagai berikut.

$$0 = D(x)y + x\, d(y) = D(x)y$$

untuk setiap $y \in U, x \in V$ dan $D(x) \in U \cap V$. Karena R adalah ring semiprima, sehingga $D = 0$. Terbukti, $D(V) = d(V) = 0$. ■

Teorema 3.5.5

Jika D dan G *generalized derivation* pada R, maka kondisi berikut ekivalen.

(i) D dan G ortogonal.

(ii) Untuk setiap $x, y \in R$, berlaku:
- (a) $D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0$
- (b) $d(x)G(y) + g(x)D(y) = 0$.

(iii) $D(x)G(y) = d(x)G(y) = 0$, untuk setiap $x, y \in R$.

(iv) $D(x)G(y) = 0$, untuk setiap $x, y \in R$ dan $d\, G = d\, g = 0$.

(v) $D\, G$ adalah *generalized derivation* dan $D(x)G(y) = 0$, untuk setiap $x, y \in R$.

(vi) Terdapat ideal U dan V atas R sedemikian sehingga:
- (a) $U \cap V = 0$ dan $U \oplus V$ adalah *essential ideal* dari R
- (b) $D(R), d(R) \subset U$ dan $G(R), g(R) \subset V$
- (c) $D(V) = d(V) = 0$ dan $G(U) = g(U) = 0$.

Bukti. *(i)* ⇒ *(ii)*

(a) Diketahui untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

$$D(x)z\, G(y) = 0 \text{ dan } G(x)z\, D(y) = 0$$

Berdasarkan Lema 2.6.4 diperoleh

$$D(x)G(y) = 0 \text{ dan } G(x)D(y) = 0$$

Jadi, untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0.$$

(b) Pada Lema 3.5.3 diketahui

$$d(x)G(y) = 0 \text{ dan } g(x)D(y) = 0$$

untuk setiap $x, y \in R$. Jadi, untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$d(x)G(y) + g(x)D(y) = 0.$$

(ii) ⇒ *(i)* Diketahui

$$D(x)G(y) + G(x)D(y) = 0$$

dan

$$d(x)G(y) + g(x)D(y) = 0.$$

Jika dilakukan substitusi $x\ z = x$ ke persamaan pada (ii),(a) diperoleh

$$D(x)zG(y) + G(x)zD(y) = 0$$

Berdasarkan Lema 2.6.4, maka dihasilkan

$$D(x)zG(y) = 0 \text{ dan } G(x)zD(y) = 0$$

untuk setiap $x, y \in R$. Berdasarkan Definisi 3.5.1, maka D dan G ortogonal.

(i) ⇒ *(iii)* Berdasarkan pembuktian (i) ⇒ (ii) diketahui

$$D(x)G(y) = 0 \text{ dan } D(x)zG(y) = 0$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Maka untuk setiap $r, x, y \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} 0 &= D(rx)G(y) \\ &= \big(D(r)x + rd(x)\big)G(y) \\ &= D(r)xG(y) + rd(x)G(y) \\ &= rd(x)G(y) \\ &= d(x)G(y) \end{aligned}$$

Jadi, $D(x)G(y) = d(x)G(y) = 0$ untuk setiap $x, y \in R$.

(i) ⇒ *(iv)* Pada pembuktian *(i)* ⇒*(ii)* telah diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$D(x)G(y) = 0.$$

Pada pembuktian Lema 3.5.3 point (ii) diberikan

$$G(x)zd(y) = 0.$$

Misalkan $d\big(G(x)zd(y)\big) = 0$ dan $G(x)zd(y) = 0$. Maka untuk setiap $x, y, z \in R$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= d\big(G(x)\big)zd(y) + G(x)d\big(zd(y)\big) \\ &= d\big(G(x)\big)zd(y) + G(x)d(z)d(y) + G(x)zd\big(d(y)\big) \\ &= d\big(G(x)\big)zd(y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$, jika dilakukan substitusi $y = G(x)$ ke persamaan terakhir maka diperoleh

$$0 = d\big(G(x)\big)zd\big(G(x)\big)$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$d\big(G(x)\big) = 0$$

untuk setiap $x \in R$. Misalkan untuk setiap $x, y, z \in R$ berlaku

$$d\big(g(x)z\,d(y)\big) = 0$$

Maka

$$0 = d\big(g(x)\big)z\,d(y) + g(x)d\big(z\,d(y)\big) = d\big(g(x)\big)z\,d(y)$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Jika dilakukan substitusi $y = g(x)$, diperoleh

$$0 = d\big(g(x)\big)z\,d\big(g(x)\big)$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$d\big(g(x)\big) = 0$$

Jadi, $dG = dg = 0$

(iii) ⇒*(i)* Diketahui untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$D(x)G(y) = 0$$

Jika dilakukan substitusi $x = xz$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= D(xz)G(y) \\ &= \big(D(x)z + x\,d(z)\big)G(y) \\ &= D(x)z\,G(y) + x\,d(z)G(y) \\ &= D(x)z\,G(y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Jadi, D dan G ortogonal.

(iv)⇒*(i)* Diketahui d dan g ortogonal dan berlaku

$$\begin{aligned} 0 &= d\big(G(xy)\big) \\ &= d\big(G(x)y + x\,g(y)\big) \\ &= d(G(x)y) + d\big(x\,g(y)\big) \\ &= d\big(G(x)\big)y + G(x)d(y) + d(x)g(y) + x\,d\big(g(y)\big) \\ &= G(x)d(y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in R$. Jika dilakukan substitusi $x = xz$ ke persamaan terakhir diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= G(xz)d(y) \\ &= G(x)z\,d(y) + x\,g(z)d(y) \\ &= G(x)z\,d(y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$.

(v)⇒(i) Diketahui $D\ G$ adalah *generalized derivation* dan untuk setiap $x, y\ \in R$ berlaku

$$D(x)G(y) = 0$$

dengan $d\ g$ adalah *derivation*. Untuk setiap $x, y \in R$ diperoleh

$$D\ G(x\ y) = D\ G(x)y + x\ d\ g(y) \qquad (3.34)$$

dan

$$\begin{aligned} D\ G(x\ y) &= D\big(G(x)y + x\ g(y)\big) \\ &= D\big(G(x)\big)y + G(x)d(y) + D(x)g(y) + x\ d\big(g(y)\big) \qquad (3.35) \end{aligned}$$

Dengan membandingkan persamaan (3.34) dan (3.35), maka diperoleh

$$\begin{aligned} D\ G(x)y + x\ d\ g(y) \\ &= D\big(G(x)\big)y + G(x)d(y) + D(x)g(y) + x\ d\big(g(y)\big). \end{aligned}$$

Dengan kaidah kanselasi maka diperoleh

$$G(x)d(y) + D(x)g(y) = 0 \qquad (3.36)$$

Sebelumnya telah diketahui bahwa

$$D(x)G(y) = 0$$

untuk setiap $x, y \in R$. Jika dilakukan substitusi $y = y\ z$ diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= D(x)G(y\ z) \\ &= D(x)(G(y)z + y\ g(z)) \\ &= D(x)G(y)z + D(x)y\ g(z) \\ &= D(x)y\ g(z) \qquad (3.37) \end{aligned}$$

Karena R adalah ring semiprima, sehingga

$$D(x)g(z) = 0$$

untuk setiap $y, z \in R$. Terbukti.

(i)⇒(vi) Misalkan U adalah ideal atas R. Diberikan $\text{Ann}(U) = V$. Berdasarkan Lema 3.5.3 dan Lema 3.5.4, untuk setiap $x, y \in R$ diketahui

$$\begin{gathered} D(x)G(y) = G(x)D(y) = 0, \\ d(x)G(y) = g(x)D(y) = 0, \\ d(x)g(y) = g(y)d(x) = 0, \\ D(R), d(R) \subset U, \text{ dan } G(R), g(R) \subset V. \end{gathered}$$

sehingga diperoleh

$$D(V) = d(V) = 0 \text{ dan } G(U) = g(U) = 0.$$

Karena $U \cap V = 0$ sehingga terdapat $U \oplus V$ yang merupakan *essential ideal*. ∎

(vi)⇒*(i)* Jelas. Berdasarkan Definisi 2.5.6, Lema 3.5.3, Lema 3.5.4 dan pembuktian *(i)*⇒*(vi)*.

Teorema 3.5.6

Misalkan D dan G *generalized derivation* pada R. Maka kondisi berikut ekivalen.

(i) $D\ G$*generalized derivation*

(ii) $G\ D$*generalized derivation*

(iii) D dan g ortogonal, dan G dan d ortogonal

Bukti. (i)⇒*(iii)* Diasumsikan $D\ G$adalah *generalized derivation*. Pada pembuktian Teorema 3.5.5 (v) ⇒ (i), untuk setiap $x, y \in R$ diketahui

$$G(x)d(y) + D(x)g(y) = 0 \qquad (3.36)$$

Substitusi $y = z$ dengan $z \in R$, ke persamaan (3.36) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= G(x)d(y\ z) + D(x)g(y\ z) \\ &= G(x)\big(d(y)z + y\ d(z)\big) + D(x)\big(g(y)z + y\ g(z)\big) \\ &= G(x)d(y)z + G(x)y\ d(z) + D(x)g(y)z + D(x)y\ g(z) \\ &= G(x)d(y)z + D(x)g(y)z + G(x)y\ d(z) + D(x)y\ g(z) \\ &= \big(G(x)d(y) + D(x)g(y)\big)z + G(x)y\ d(z) + D(x)y\ g(z) \\ &= G(x)y\ d(z) + D(x)y\ g(z) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Diketahui $D\ G$ *generalized derivation*, sehingga $d\ g$ adalah *derivation*. Berdasarkan Teorema 3.5.5 dan Lema 3.5.3 diketahui d dan g ortogonal, maka diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= G(x)g(z)y\ d(z) + D(x)g(z)y\ g(z) \\ &= D(x)g(z)y\ g(z) \\ &= D(x)g(z) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Karena

$$D(x)g(z) = 0,$$

sehingga

$$D(x)y\ g(z) = 0 \text{ dan } G(x)y\ d(z) = 0.$$

(iii)⇒*(i)* Diketahui D dan g ortogonal, maka

$$D(x)y\ g(z) = 0 \qquad (3.38)$$

untuk setiap $x, y, z \in R$. Substitusi $x = r\ x$ ke persamaan (3.38) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= D(r\ x)y\ g(z) \\ &= (D(r)x + r\ d(x))y\ g(z) \end{aligned}$$

$$= D(r)xy\,g(z) + r\,d(x)y\,g(z)$$
$$= r\,d(x)y\,g(z)$$
untuk setiap $x, r, y, z \in R$. Berdasarkan Definisi 2.6.1 diperoleh
$$d(x)y\,g(z) = 0$$
dengan $x, y, z \in R$. Berdasarkan Definisi 3.4.1 dapat diketahui dg adalah *derivation*. Dari persamaan (3.38) diperoleh
$$0 = D(x)\big(g(z)R\,D(x)\big)g(z)$$
$$= D(x)g(z)$$
untuk setiap $x, y, z \in R$. Diketahui G dan d ortogonal, sehingga
$$G(x)y\,d(z) = 0 \text{ dan } G(x)d(z) = 0$$
untuk setiap $x, y, z \in R$. Jadi, Berdasarkan Definisi 3.3.1 dan pembuktian Teorema 3.5.4 terbukti bahwa
$$D\,G(xz) = D\big(G(x)\big)z + x\,d\,G(z)$$
yang menunjukkan $D\ G$adalah *generalized derivation*.

(ii)⇒(iii) Diketahui G dan d ortogonal, sehingga
$$G(x)y\,d(z) = 0 \tag{3.39}$$
untuk setiap $x, y, z \in R$. Substitusi $x = r\,x$ ke persamaan (3.39) diperoleh
$$0 = G(rx)y\,d(z)$$
$$= (G(r)x + r\,g(x))y\,d(z)$$
$$= G(r)xy\,d(z) + r\,g(x)y\,d(z)$$
$$= r\,g(x)y\,d(z)$$
untuk setiap $x, y, z \in R$. Berdasarkan Definisi 2.6.1 diperoleh
$$g(x)y\,d(z) = 0$$
untuk setiap $x, y, z \in R$. Berdasarkan Definisi 3.4.1 dapat diketahui dg adalah *derivation*. Dari persamaan (3.39) diperoleh
$$G(x)\big(d(z)R\,G(x)\big)d(z) = 0 \text{ dan } G(x)d(z) = 0$$
untuk setiap $x, z \in R$. Diketahui D dan g ortogonal, sehingga
$$0 = D(x)y\,g(z) = D(x)g(z)$$
untuk setiap $x, y, z \in R$. Jadi, Berdasarkan Definisi 3.3.1 dan pembuktian Teorema 3.5.4 terbukti bahwa
$$G\,D(xz) = G\big(D(x)\big)z + x\,g\,D(z)$$
yang menunjukkan bahwa $G\ D$*generalized derivation*. ■

***Corollary* 3.5.7**

Misalkan D dan G *generalized derivations* pada R. Jika $D\,G$ *generalized derivation* maka terdapat ideal U dan V atas R sedemikian sehingga memenuhi kondisi berikut.

(i) $U \cap V = 0$ dan $U \oplus V$ *essential ideal* atas R.

(ii) $d(R) \subset U, d(V) = 0, g(R) \subset V, G(R) \subset V, g(U) = G(U) = 0$.

Bukti. Misalkan U adalah ideal atas R. Diberikan $V = \mathrm{Ann}(U)$. Berdasarkan Lema 3.5.4 dan Teorema 3.5.6 diketahui bahwa D dan g, G dan d, d dan g ortogonal. Karena $d(R) \subset U$ dan $g(R)\ , G(R) \subset V$, sehingga berdasarkan Lema 3.5.3 diperoleh $g(U) = G(U) = 0$. Selanjutnya, jika $U\ x = 0$ maka $U\ d(x) = 0$. Jadi, $d(x) = 0$ yang menunjukkan $d(V) = 0$. ■

***Corollary* 3.5.8**

Misalkan D adalah *generalized derivation* pada R. Jika D^2 *generalized derivation*, maka $d = 0$.

Bukti. Diketahui D^2 *generalized derivation*, d^2 adalah *derivation*. Berdasarkan Teorema 3.5.6, d dan d ortogonal, sehingga $d(x)y\ d(x) = 0$ untuk setiap $x, y \in R$. Karena R adalah ring semiprima, sehingga diperoleh $d(R) = 0$. ■

***Corollary* 3.5.9**

Jika untuk setiap $x, y \in R$, $D(x)D(y) = 0$ maka $D = d = 0$, dengan D adalah *generalized derivation* pada R.

Bukti. Diberikan untuk setiap $x, y \in R$

$$\begin{aligned} 0 &= D(x)D(y\,z) \\ &= D(x)\big(D(y)z + y\ d(z)\big) \\ &= D(x)D(y)z + D(x)y\ d(z) \\ &= D(x)y\ d(z) \end{aligned} \tag{3.40}$$

Berdasarkan Lema 2.6.4 dapat diketahui

$$d(z)D(x) = 0 \tag{3.41}$$

untuk setiap $x, y \in R$.

Substitusi $x = x\ z$ ke persamaan (3.41) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= d(z)D(x\ z) \\ &= d(z)\big(D(x)z + x\ d(z)\big) \\ &= d(z)D(x)z + d(z)x\ d(z) \\ &= d(z)x\ d(z) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in R$. Jadi, diperoleh $d = 0$ karena R adalah ring semiprima. Selanjutnya, diketahui

$$D(x)D(y) = 0 \tag{3.43}$$

untuk setiap $x, y \in R$. Substitusi $x = x\ y$ ke persamaan (3.43) diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= D(x\ y)D(y) \\ &= \big(D(x)y + x\ d(y)\big)D(y) \\ &= D(x)y\ D(y) + x\ d(y)D(y) \\ &= D(x)y\ D(y) \end{aligned}$$

untuk setiap $x, y \in R$. Karena R adalah ring semiprima, sehingga $D = 0$. ■

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini dapat ditarik beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Jika D dan G adalah *orthogonal generalized derivation* pada R, maka D dan G adalah *generalized derivation.*
2. Jika D G adalah *generalized derivation* pada R, maka terdapat ideal U dan V sedemikian sehingga $U \cap V = 0$ dan $U \oplus V$ disebut *essential ideal* atas R.

DAFTAR PUSTAKA

Argac, N., Nakajima, A., Albas, E. 2004. *On Orthogonal Generalized Derivation of Semiprime Rings*. Turk J Math. 28, 185-194.

Ashraf, M. Jamal M.R. 2010. *Orthogonal Derivation in Γ-rings*. Research India Publication. Advances in Algebra. Volume 3, No 1, pp. 1-6

Bartle R.G, Sherbert D.R. 1992. *Introduction to Real Analysis*. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. Singapore

Bhattacharya P.B, Jain S.K, Nagpaul S.R. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Second Edition. Cambridge University Press. Melbourne

Bresar, M. 1988. *Jordan Derivations on Semiprime Rings*. Proceedings of the American Mathematical society. Vol.104 No.4.

Bresar, M. 1989. *On the Distance of the Composition of Two Derivations to the Generalized Derivations. Glasgow*. Math, J. 33. 89-93

Daif. M.N, Tammam. E. 2007. *An Identity Related to Generalized Derivation*. International Journal of Algebra, Vol.1, no. 11, 547-550. Cairo.

Ehrlich. 1991. *Fundamental Concepts of Abstract Algebra*. PWS-KENT Publishing Company. Boston.

Fraleigh, John B. 1997. *A First Course in Abstract Algebra*. Fifth edition. Addison- Wesley Publishing Company. New York.

Hartley. B, Hawkens. T.O. 1970. *Rings, Modules and Linear Algebra*. Chapman and Hall LTD. London

I.N. Herstein. *Jordan Derivations of Prime Ring*. Proc. Amer. Math. Soc. 8, 1104-1119.

Lahcen O. 2010. *Left Multiplier and Lie Ideals in Rings with Involution*. Int. J. Open Problems Compt. Math., Vol. 3, No. 3.

Olson D M, Jenkins T L.1981. *Upper Radicals and Essential Ideals*. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 30, 385-389

Vukman, J. 2007. *A Note on Generalized Derivation of Semiprime Ring*. Thaiwanese Journal of Mathematics: Vol. 11, No.2, pp. 367-370.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Third Edition. Blackie Academic & Professional. Glasgow.

W.Jing, S. Lu. 2003. *Generalized Jordan Derivations on Prime Rings and Standard Operator Algebras*. Taiwanese Journal of Mathematics Vol. 7, No. 4, pp. 605-613.