

PERBANDINGAN METODE *UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (UMLE) DAN METODE KALMAN FILTER PADA PENDUGAAN PARAMETER MODEL AR(1)

SKRIPSI

oleh :
EFFENDI SUSANTO
0710950020-95



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

PERBANDINGAN METODE *UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (UMLE) DAN METODE KALMAN FILTER PADA PENDUGAAN PARAMETER MODEL AR(1)

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Statistika

oleh :

EFFENDI SUSANTO

0710950020-95



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2011**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PERBANDINGAN METODE *UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (UMLE) DAN METODE *KALMAN FILTER* PADA PENDUGAAN PARAMETER MODEL AR(1)

oleh :

EFFENDI SUSANTO
0710950020-95

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 21 Juni 2011
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

Pembimbing

Ketua Penguji

Ir. Heni Kusdarwati, MS
NIP. 19611208 198701 2 001

Prof. Dr. Ir. Waego Hadi N.
NIP. 19521207 197903 1 003

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc
NIP. 19670907 1999203 1 001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : EFFENDI SUSANTO
NIM : 0710950020-95
Program Studi : STATISTIKA
Penulis Skripsi Berjudul :

PERBANDINGAN METODE *UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (UMLE) DAN METODE *KALMAN FILTER* PADA PENDUGAAN PARAMETER MODEL AR(1)

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 21 Juni 2011
Yang menyatakan,

EFFENDI SUSANTO
NIM. 0710950020-95

PERBANDINGAN METODE *UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (UMLE) DAN METODE *KALMAN FILTER* PADA PENDUGAAN PARAMETER MODEL AR(1)

ABSTRAK

Pendugaan parameter model merupakan tahap penting dalam analisis deret waktu. Metode *Unconditional Maximum Likelihood Estimation* (UMLE) dan metode *Kalman filter* merupakan metode pendugaan parameter model AR(1). Kedua metode tersebut dapat dibandingkan dengan menggunakan *mean square error* (MSE) sebagai ukuran kriteria keakuratan pendugaan. Tujuan dari tulisan ini adalah untuk memperoleh informasi tentang metode pendugaan parameter model AR(1) terbaik dengan cara membandingkan nilai MSE antara metode UMLE dan *Kalman filter*. Data yang digunakan adalah data simulasi AR(1). Data tersebut dibangkitkan dengan menggunakan makro minitab untuk spesifikasi nilai parameter ϕ tertentu. Terdapat 18 macam nilai spesifikasi parameter ϕ yang digunakan yaitu -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, dan 0.9. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari 18 macam data bangkitan yang digunakan, metode UMLE menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk 6 macam data bangkitan (dengan persentase 33,33 % dari keseluruhan data). Sedangkan metode *Kalman Filter* menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk 12 macam data bangkitan (dengan persentase 66,66 % dari keseluruhan data). Hal ini memberikan kesimpulan bahwa metode *Kalman Filter* lebih akurat dibandingkan dengan metode *Unconditional Maximum Likelihood Estimation* (UMLE) dalam menduga parameter model AR(1).

Kata Kunci : Pendugaan parameter model, Model AR(1), Box Jenkins, *State Space*, *Kalman Filter*, Data Bangkitan AR(1), *mean square error* (MSE)

THE COMPARISON BETWEEN THE *UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (UMLE) METHOD AND THE *KALMAN FILTER* METHOD IN ESTIMATING OF AR(1) MODEL PARAMETER

ABSTRACT

The parameter estimation of model is important step in time series analysis. Unconditionl Maximum Likelihood Estimation (UMLE) method and Kalman filter method are methods of parameter estimation for AR(1) model. Two of method could be compared with mean square error (MSE) as the measure of estimate accuration. The aim of this research is to get information about the best of estimating method by comparing mean square error (MSE) value between UMLE method and Kalman filter method. Data which used in this research is AR(1) simulation data. That data are generated by minitab macro with specific ϕ parameter value are -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, dan 0.9. The result show that from 18 generated data which used, UMLE method give smaller MSE value for 6 generated data (or persentase 33,33% from all of generated data). Whenever Kalman filter method give smaller MSE value for 12 generated data (or persentase 66,66 % from all of generated data). This result give the conclusion that Kalman Filter method is more accurate than Unconditional Maximum Likelihood Estimation (UMLE) method in estimating of AR(1) parameter model.

Key Word : Estimating of parameter model, AR(1) Model, Box-Jenkins, State Space, Kalman Filter, AR(1) Generated Data, mean square error (MSE)

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang senantiasa memberikan rahmat, hidayah dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **“PERBANDINGAN METODE UNCONDITIONAL MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION (UMLE) DAN METODE KALMAN FILTER PADA PENDUGAAN PARAMETER MODEL AR(1)”** sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Statistika. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Ir. Heni Kusdarwati, MS selaku Dosen Pembimbing dan Bapak Prof. Dr. Ir. Waego Hadi Nugroho selaku Dosen Ketua Penguji atas bimbingan, masukan, serta bantuan yang telah diberikan.
2. Bapak Adji Achmad Rinaldo Fernandes, SSi., MSc selaku dosen penguji atas saran dan nasihat yang telah diberikan.
3. Bapak Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
4. Keluargaku tercinta yang telah memberikan kasih sayang, doa, dan dukungan yang tulus selama ini.
5. Sahabat dan teman-teman Statistika 2007,2006, 2005 atas dukungan, bantuan dan kebersamaannya selama ini.
6. Staf TU Jurusan Matematika yang telah membantu keperluan administrasi.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah membantu dan memberikan dukungan selama penulisan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun demi perbaikan selanjutnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca.

Malang, Juni 2011

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL.....	i
HALAMAN PENGESAHAN.....	ii
HALAMAN PERNYATAAN.....	iii
ABSTRAK.....	iv
ABSTRACT.....	v
KATA PENGANTAR.....	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR.....	ix
DAFTAR TABEL.....	x
DAFTAR LAMPIRAN.....	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	Error! Bookmark not defined.
1.1 Latar Belakang.....	Error! Bookmark not defined.
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Tujuan.....	2
1.4 Manfaat.....	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	3
2.1 Analisis Deret Waktu.....	3
2.1.1 Kestasioneran Data Deret Waktu.....	3
2.1.2 Fungsi Autokovarian dan Autokorelasi Sampel.....	6
2.1.3 Fungsi Autokorelasi Parsial Sampel.....	7
2.2 Model AR(p) Box-Jenkins.....	7
2.3 Model AR(1) Box-Jenkins.....	8
2.4 Spesifikasi Model AR(1) Box-Jenkins.....	9
2.5 Pendugaan Parameter Model AR(1) Box-Jenkins.....	10
2.5.1 Maximum Likelihood Estimation (MLE).....	10
2.5.2 Unconditional Maximum Likelihood Estimation (UMLE) untuk Model AR(1) Box-Jenkins.....	11
2.5.3 Metode Backasting.....	12
2.6 Uji Diagnostik Model AR(1) Box-Jenkins.....	14
2.7 Peramalan Model AR(1).....	14
2.8 Model State Space Umum.....	14
2.9 Model State Space Univariat.....	17

2.10 Model AR(p) dari State Space	18
2.11 Model AR(1) dari State Space	19
2.12 Spesifikasi Model AR(1) dari State Space	20
2.13 Pendugaan Parameter Model AR(1) dari State Space	20
2.13.1 Penggunaan Metode Kalman filter	20
2.13.2 Maximum Likelihood Estimation (MLE) untuk Model AR(1) dari State Space	22
2.13.3 Metode Marquardt	23
2.14 Uji Diagnostik Model AR(1) dari State Space	25
2.15 Peramalan Model AR(1) dari State Space	25
2.16 Mean Square Error (MSE) sebagai Ukuran Kesesuaian Model Deret Waktu	25
BAB III METODE PENELITIAN	27
3.1 Sumber Data	27
3.2 Tahap Persiapan Data Deret Waktu	27
3.3 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari Box-Jenkins	28
3.4 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari State Space Menggunakan Metode Kalman Filter	28
3.5 Tahap Perbandingan Nilai MSE antara Model AR(1) dari Box Jenkins dengan Model AR(1) dari State Space	29
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	33
4.1 Persiapan Data Deret Waktu	33
4.1.1 Plot Data	33
4.1.2 Pemeriksaan Kestasioneran Data	34
4.1.3 Spesifikasi Model AR(1) dari Box-Jenkins	36
4.2 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari Box-Jenkins	37
4.3 Uji Kelayakan Model AR(1) dari Box-Jenkins	38
4.4 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari State Space Menggunakan Metode Kalman Filter	40
4.5 Uji Kelayakan Model AR(1) dari State Space	43
4.6 Perbandingan Nilai MSE (<i>mean square error</i>) antara Hasil Pendugaan Parameter Menggunakan Metode UMLE pada Model AR(1) Box-Jenkins dengan Metode <i>Kalman filter</i> pada Model AR(1) dari <i>State Space</i>	45

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....	47
5.1 Kesimpulan	47
5.2 Saran.....	47
DAFTAR PUSTAKA	49
LAMPIRAN.....	51

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Nilai λ dan bentuk transformasi yang bersesuaian	5
Tabel 2.2 Identifikasi Model AR(1) Box-Jenkins	10
Tabel 4.1 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Box-Jenkins untuk Data Deret Waktu.....	37
Tabel 4.2 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) dari <i>State</i> <i>Space</i>	38
Tabel 4.3 Hasil Perbandingan Nilai MSE	41
Tabel 4.4 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) dari <i>State</i> <i>Space</i> untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$)	41
Tabel 4.5 Hasil Perbandingan MSE Setiap Macam Nilai Parameter ϕ pada Data Bangkitan AR(1)	45
Tabel 4.6 Hasil Perbandingan MSE Total untuk Nilai Parameter ϕ pada Data Bangkitan AR(1)	46



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1 Konsep hubungan deret waktu pada model AR(p) Box-Jenkins.....	8
Gambar 2.2 Struktur proses markov pada model State Space.....	15
Gambar 3.1 Diagram alir perbandingan metode pendugaan parameter model AR(1).....	31
Gambar 4.1 Plot Deret Waktu untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$)	33
Gambar 4.2 Plot data deret waktu untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$).....	34
Gambar 4.3 Plot ACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$)	35
Gambar 4.4 Plot ACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$)	35
Gambar 4.5 Plot ACF dan PACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$)	36
Gambar 4.6 Plot ACF dan PACF untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$).....	37
Gambar 4.7 Histogram Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1).....	39
Gambar 4.8 Plot Peluang Kenormalan Sisaan untuk Data Bangkitan	39
Gambar 4.9 Plot ACF sisaan untuk data bangkitan.....	40
Gambar 4.10 Hasil Plot Prediksi Observasi dan Data Aktual untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$)	42
Gambar 4.11 Hasil Plot Prediksi Observasi dan Data Aktual untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$)	42
Gambar 4.12 Histogram Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1).....	43
Gambar 4.13 Plot Peluang Kenormalan Sisaan untuk Data Bangkitan	44
Gambar 4.14 Plot ACF Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1)	44

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran	Halaman
Lampiran 1. Makro Minitab Simulasi Data AR(1)	51
Lampiran 2. Hasil Transformasi Box-Cox Data Bangkitan AR(1) untuk $\phi=0,4$ dan $\phi=0,8$	53
Lampiran 3. Hasil Pendugaan Parameter Model Menggunakan Metode UMLE untuk Data Bangkitan AR(1) dengan $\phi=0,4$	54
Lampiran 4. Hasil Pendugaan Parameter Model Menggunakan Metode UMLE untuk Data Bangkitan AR(1) dengan $\phi=0,8$	55
Lampiran 5. Hasil Spesifikasi Model AR(1) dari State Space untuk Data Bangkitan AR(1).....	56
Lampiran 6. Contoh Metode Backasting Model AR(1) dengan $n=10$ (Wei, 1994)	57
Lampiran 7. Hasil Pendugaan Parameter Model Menggunakan Metode <i>Kalman filter</i> untuk Data Bangkitan AR(1) dengan $\phi=0,4$ dan $\phi=0,8$	60
Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan	61
Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode <i>Kalman filter</i> pada Data Bangkitan	68
Lampiran 10. Hasil Penurunan Fungsi <i>Sum of Square</i> $S(\phi)$ terhadap Parameter ϕ	75
Lampiran 11. Perhitungan Metode Iterasi Marquardt pada Data Bangkitan AR(1).....	76

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Analisis deret waktu memiliki manfaat untuk memodelkan suatu proses stokastik yang ada dalam data dan untuk meramalkan nilai-nilai periode mendatang berdasarkan historis data tersebut. Model AR(1) dari Box-Jenkins merupakan model deret waktu yang dapat menjelaskan suatu proses *autoregressive*. Konsep model AR(1) Box-Jenkins yaitu bahwa model AR(1) tersebut berlaku sebagai suatu proses bangkitan (*generating process*) oleh suatu masukan (*input*), sehingga dari proses bangkitan tersebut dihasilkan keluaran (*output*). Kestasioneran data deret waktu diperlukan dalam analisis model AR(1). Asumsi kestasioneran yang harus dipenuhi adalah stasioner terhadap ragam dan rata-rata.

Model AR(1) dari *State Space* merupakan bentuk khusus dari model *State Space* secara umum. Model *State Space* melibatkan unsur *state* dalam analisisnya. *State* tersebut diartikan sebagai suatu informasi masa lalu yang dapat bermanfaat untuk memprediksi nilai-nilai periode mendatang. Proses *markov* merupakan konsep utama yang mendasari analisis model *State Space*.

Pada penelitian mengenai analisis model *State Space* tahun 1998 yang berjudul “Analisis Model *State Space* Untuk Meramalkan Nilai Peubah Indikator Ekonomi Moneter Indonesia” telah dibahas mengenai model *State Space* untuk data pada bidang ekonomi. Namun, kajian tersebut hanya menjelaskan mengenai model *State Space* untuk representasi model AR(p) secara umum saja, tentang penggunaan metode *Kalman filter* dan suatu perbandingan antar metode pendugaan parameter model tidak dikaji pada penelitian tersebut. Hal itu menjadi acuan penelitian ini, sehingga bahasan mengenai *Kalman filter* dan perbandingan metode pendugaan parameter model dapat dilakukan.

Pendugaan parameter model merupakan tahap penting dalam analisis deret waktu. Pendugaan parameter model AR(1) dari Box-Jenkins dapat menggunakan *Unconditional Maximum Likelihood*

Estimation (UMLE). Terdapat dua tahap penggunaan metode UMLE yaitu tahap pembentukan fungsi *Likelihood* yang dilakukan dengan cara mengalikan fungsi kepekatan peluang setiap amatan dan tahap pemaksimalan fungsi *Likelihood*.

Pendugaan parameter model AR(1) dari *State Space* dapat menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dengan bantuan metode *Kalman filter*. Pemaksimalan fungsi *Likelihood* tersebut adalah sama halnya dengan meminimumkan fungsi *Sum of Square* yang dituliskan oleh $S(\phi)$. Peran *Kalman filter* adalah mendapatkan nilai-nilai prediksi *state* agar fungsi *Sum of Square* dapat dibentuk. Selanjutnya, meminimumkan fungsi *Sum of Square* tersebut dilakukan dengan bantuan metode *marquardt*. Konsep kerja metode *marquardt* adalah meminimumkan jumlah kuadrat sisaan atau *Sum of Square Error* (SSE).

Suatu perbandingan antara metode pendugaan UMLE pada model AR(1) Box-Jenkins dengan metode pendugaan *Kalman filter* pada model AR(1) *State Space* dapat dilakukan karena antara model AR(1) Box-Jenkins dengan model AR(1) dari *State Space* adalah sama (Wei, 1994).

1.2 Rumusan Masalah

Manakah yang terbaik antara metode UMLE pada model AR(1) Box-Jenkins dan metode *Kalman filter* pada model AR(1) *State Space*, ditinjau dari nilai *mean square error* (MSE)?

1.3 Tujuan

Memperoleh metode pendugaan parameter model terbaik antara UMLE dan metode *Kalman filter*, dengan cara membandingkan nilai *mean square error* (MSE) dari pendugaan parameter model AR(1) pada data bangkitan.

1.4 Manfaat

Manfaat dari hasil tulisan ini adalah diperoleh informasi mengenai metode pendugaan parameter model terbaik antara UMLE dan metode *Kalman filter*.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Deret Waktu

Deret waktu (*time series*) merupakan sederet barisan observasi yang diambil secara terurut dengan interval waktu pengambilan yang sama. Observasi-observasi dalam deret waktu saling terkait satu dengan yang lain atau disebut saling berkorelasi (Wei, 1994). Secara umum terdapat dua tujuan analisis deret waktu yaitu untuk menjelaskan proses stokastik yang terdapat pada suatu data dan untuk meramalkan nilai-nilai periode mendatang berdasarkan historis data tersebut (Cryer, 1986).

2.1.1 Kestasioneran Data Deret Waktu

Asumsi kestasioneran data deret waktu harus dipenuhi agar suatu inferensia statistik dapat dibentuk. Menurut Makridakis dkk, (1983), konsep stasioneritas ini dapat digambarkan secara praktis sebagai berikut :

- a) Apabila suatu deret waktu diplot dan kemudian tidak terbukti adanya perubahan nilai tengah dari waktu ke waktu, maka dapat disimpulkan bahwa deret waktu tersebut stasioner terhadap nilai tengah.
- b) Apabila plot data deret waktu tidak memperlihatkan adanya perubahan keragaman yang jelas dari waktu ke waktu, maka dapat disimpulkan deret waktu tersebut stasioner terhadap ragam.

Deretan peubah acak (y_t , $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) merupakan suatu proses stokastik. Proses stokastik tersebut memiliki fungsi rata-rata sebagai berikut :

$$\mu_t = E(y_t) \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1)$$

μ_t merupakan nilai harapan dari proses pada waktu t . Secara umum μ_t dapat berbeda pada setiap titik waktu t . Menurut Cryer dan Chan

(2008) suatu proses stokastik $\{y_t\}$ dikatakan memenuhi asumsi kestasioneran atau stasioner lemah jika :

- a) fungsi rata-rata adalah konstan sepanjang waktu, dan
- b) $\gamma_{t, t-k} = \gamma_{0, k}$ untuk semua waktu t dan lag k , di mana γ menunjukkan fungsi autokovarian.

1. Stasioner Terhadap Ragam

Data dikatakan stasioner terhadap ragam apabila fluktuasi data tidak terlalu tinggi dari waktu ke waktu, tetapi sebaliknya jika fluktuasi data sangat tinggi maka data tidak stasioner terhadap ragam (Box dan Cox, 1964). Upaya perbaikan terhadap data yang tidak stasioner terhadap ragam dapat dilakukan dengan Transformasi Box-Cox, bentuk transformasinya adalah sebagai berikut:

$$T(y_t) = y_t^{(\lambda)} = \frac{y_t^\lambda - 1}{\lambda} \quad (2.2)$$

di mana λ adalah parameter transformasi. Transformasi Box-Cox diberlakukan pada deret observasi y_t . Salah satu metode penaksiran untuk parameter λ adalah metode *maximum likelihood*. Cara penaksiran tersebut berbeda dengan cara penaksiran yang biasa dilakukan, yaitu dengan menentukan nilai λ pada kisaran tertentu.

Prosedur penaksiran λ adalah sebagai berikut :

1. Ditentukan nilai λ dengan kisaran $(-2,2)$ atau $(-1,1)$ kemudian ditentukan level-level nilai λ sehingga terdapat 21 sampai 11 level nilai λ (tidak dikehendaki nilai $\lambda=0$).
2. Untuk setiap level nilai λ yang dipilih, dihitung fungsi maksimum *Likelihood* terhadap nilai λ tersebut.
3. Dibuat plot fungsi *Likelihood* ($L_{maks}(\lambda)$) terhadap λ , kemudian dideteksi nilai fungsi $L_{maks}(\lambda)$ tertinggi. Nilai tertinggi inilah yang digunakan sebagai penaksir untuk λ dalam transformasi Box-Cox.

Beberapa nilai λ dan bentuk transformasi yang bersesuaian dapat dilihat pada Tabel 2.1.

Tabel 2.1 Nilai λ dan Bentuk Transformasi

Nilai λ	-1	-0.5	0	0.5	1
Bentuk Transformasi	$\frac{1}{y_t}$	$\frac{1}{\sqrt{y_t}}$	$\text{Ln } y_t$	$\sqrt{y_t}$	y_t

2. Stasioner Terhadap Rata-rata

Data dikatakan stasioner pada rata-rata apabila 95% data tersebut masuk dalam selang $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Menurut Hanke dkk., (2003), apabila data tidak stasioner pada rata-rata, maka dapat dirubah menjadi data yang stasioner melalui pembedaan (*differencing*) yaitu deret asli diganti dengan deret selisih. Banyaknya *differencing* yang dilakukan untuk mencapai stasioner dinotasikan sebagai d .

Bentuk pembedaan pertama ($d = 1$) adalah sebagai berikut

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1}$$

Sedangkan bentuk pembedaan kedua ($d = 2$) adalah

$$\nabla^2 y_t = \nabla y_t - \nabla y_{t-1}$$

di mana :

y_t = observasi pada periode waktu ke- t ,

y_{t-1} = observasi pada periode waktu ke- $t-1$,

∇y_t = data hasil pembedaan pertama pada periode waktu ke- t

∇y_{t-1} = data hasil pembedaan pertama pada periode waktu ke- $t-1$

$\nabla^2 y_t$ = data hasil pembedaan kedua pada periode waktu ke- t .

Proses pembedaan dilakukan sampai data hasil pembedaan menunjukkan kondisi stasioner pada rata-rata.

2.1.2 Fungsi Autokovarian dan Autokorelasi Sampel

Fungsi Autokovarian $\gamma_{t,s}$ dinyatakan sebagai berikut :

$$\gamma_{t,s} = Cov(y_t, y_s) \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

di mana

$$Cov(y_t, y_s) = E[(y_t - \mu_t)(y_s - \mu_s)] = E(y_t y_s) - \mu_t \mu_s \quad (2.3)$$

Fungsi Autokorelasi $\rho_{t,s}$ atau ACF dituliskan sebagai berikut :

$$\rho_{t,s} = Corr(y_t, y_s) \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

di mana

$$Corr(y_t, y_s) = \frac{Cov(y_t, y_s)}{\sqrt{Var(y_t)Var(y_s)}} = \frac{\gamma_{t,s}}{\sqrt{\gamma_{t,t} \gamma_{s,s}}} \quad (2.4)$$

Menurut Hanke dkk, (2003), autokorelasi merupakan hubungan deret berkala dengan deret berkala itu sendiri pada selisih waktu (*lag*) 0,1,2 periode atau lebih. Koefisien autokorelasi menyatakan keeratan hubungan antar nilai dari variabel yang sama, akan tetapi pada periode waktu yang berbeda (Arsyad, 1994).

Fungsi Autokorelasi $\rho_{t,s}$ ini diduga menggunakan *Sample Autocorrelation Function* r_k pada lag k, karena data yang digunakan berupa data sampel. Fungsi r_k dituliskan sebagai berikut :

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^n (y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

di mana,

r_k = nilai koefisien korelasi pada lag k

y_t = data observasi pada waktu t

\bar{y} = rata-rata data observasi deret waktu

Suatu plot ACF sampel r_k terhadap lag waktu k disebut *Correlogram* (Cryer dan Chan, 2008).

2.1.3 Fungsi Autokorelasi Parsial Sampel

Menurut Makridakis dkk, (1983) autokorelasi parsial digunakan untuk mengukur tingkat keeratan hubungan linier antara observasi y_t dengan y_{t+k} apabila pengaruh dari *time lag* 1,2,..., k-1 dianggap konstan atau terpisah.

Menurut Cryer (1986), taksiran dari PACF adalah berdasarkan koefisien autokorelasi pada persamaan Yule-Walker untuk k lag waktu, sebagai berikut :

$$r_1 = \phi_{k1} + \phi_{k2}r_1 + \dots + \phi_{kk}r_{k-1}$$

$$r_2 = \phi_{k1}r_1 + \phi_{k2} + \dots + \phi_{kk}r_{k-2}$$

.

$$r_k = \phi_{k1}r_{k-1} + \phi_{k2}r_{k-2} + \dots + \phi_{kk}$$

dari persamaan Yule-Walker tersebut didapatkan ϕ_{kk} berikut :

$$\phi_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} r_{k-j}}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_{k-1,j} r_j} \quad (2.6)$$

dengan, $\phi_{k,j} = \phi_{k-1,j} - \phi_{kk} \phi_{k-1,k-j} \quad j = 1, 2, \dots, k-1$

di mana

ϕ_{kk} = koefisien autokorelasi parsial pada lag k

r_k = koefisien autokorelasi pada lag k (diduga dengan r_k)

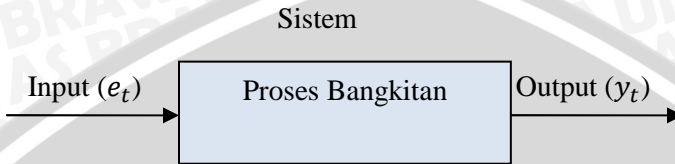
r_j = koefisien autokorelasi pada lag j (diduga dengan r_j)

r_{k-j} = koefisien autokorelasi pada lag k-j (diduga dengan r_{k-j})

2.2 Model AR(p) Box-Jenkins

Model AR(p) dari Box-Jenkins merupakan model deret waktu yang stasioner. Konsep model AR(p) Box-Jenkins sebagai

model deret waktu dapat dinyatakan secara grafis pada Gambar 2.1 berikut



Gambar 2.1 Konsep Hubungan Deret Waktu pada Model AR(p) Box-Jenkins

Sistem pada model AR(p) tersebut berlaku sebagai suatu proses bangkitan (*generating process*) oleh suatu masukan (*input*) e_t atau *noise*, sehingga dari proses bangkitan tersebut dihasilkan keluaran (*output*) berupa y_t yang menyatakan nilai observasi. Proses bangkitan itu sendiri tidak diketahui bagaimana mekanismenya (Makridakis dkk, 1983).

Kestasioneran data deret waktu diperlukan dalam analisis model AR(p) Box-Jenkins. Asumsi kestasioneran yang harus dipenuhi adalah stasioner terhadap ragam dan rata-rata.

Model AR(p) Box-Jenkins dari deret waktu y_t dituliskan pada Persamaan (2.7) berikut ini

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + e_t \quad (2.7)$$

di mana y_t = observasi pada waktu t
 ϕ_p = nilai parameter ke-p dari model *Autoregressive*
 e_t = proses *white noise* yang berdistribusi identik dan bebas dengan rata-rata nol dan keragaman σ_a^2

2.3 Model AR (1) Box-Jenkins

Model AR(1) Box-Jenkins dari deret waktu y_t dituliskan dalam Persamaan (2.8) berikut ini

$$y_t = \phi y_{t-1} + e_t \quad (2.8)$$

dalam model ini diasumsikan bahwa rata-rata proses dihilangkan sehingga rata-rata deret adalah nol atau $E(y_t) = 0$. Keragaman deret y_t adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} \text{var}(y_t) &= \text{var}(\phi y_{t-1} + e_t) \\ &= \phi^2 \text{var}(y_{t-1}) + \text{var}(e_t) \\ \gamma_0 &= \sigma_e^2 \left(\frac{1}{1-\phi^2} \right) \end{aligned}$$

Fungsi Autokovarian untuk model AR(1) sebagai berikut

$$\gamma_k = \phi^k \frac{\sigma_e^2}{1-\phi^2} \quad (2.9)$$

sehingga didapatkan fungsi Autokorelasinya (ACF) sebagai berikut

$$r_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

(Cryer dan Chan, 2008).

Fungsi Autokorelasi Parsial Sampel (PACF sampel) untuk model AR(1) ini adalah sebagai berikut

$$\phi_{kk} = \begin{cases} r_1 = \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases} \quad (2.11)$$

(Wei, 1994).

2.4 Spesifikasi Model AR(1) Box-Jenkins

Suatu identifikasi terhadap model AR(1) Box-Jenkins dapat dilakukan dengan memeriksa ciri-ciri pola ACF dan pola PACF dari data sampel sehingga dapat diperoleh spesifikasi model. Tabel 2.2 menjelaskan pola ACF dan PACF untuk spesifikasi model AR(1) Box-Jenkins.

Tabel 2.2 Identifikasi Model AR(1) Box-Jenkins

Tipe Model	Pola Tipikal ACF	Pola Tipikal PACF
AR(1)	Menurun secara eksponensial menuju nol	Signifikan hanya pada lag 1

2.5 Pendugaan Parameter Model AR(1) Box-Jenkins

2.5.1 *Maximum Likelihood Estimation (MLE)*

Maximum Likelihood Estimation (MLE) adalah metode pendugaan klasik yang paling populer digunakan pada proses pendugaan parameter. Menurut Cryer (1986), MLE menggunakan keseluruhan informasi dari data pengamatan. Penggunaan metode MLE terdiri dari dua tahap utama yaitu tahap pembentukan fungsi *Likelihood* yang dilakukan dengan cara mengalikan fungsi kepadatan peluang setiap amatan dan tahap pemaksimalan fungsi *Likelihood*.

Misalkan y adalah variabel acak dengan fungsi peluang $f(y; \theta)$, di mana θ merupakan himpunan parameter yang tidak diketahui dan y_t saling bebas, maka pembentukan fungsi *Likelihood* dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L(\theta; y) = \prod_{t=1}^n f(y_t; \theta) = f(y_1, \theta) f(y_2, \theta) \dots f(y_n, \theta) \quad (2.12)$$

di mana $t = 1, 2, 3, \dots, n$. Pada kasus *time series*, pembentukan fungsi *Likelihood* seperti pada Persamaan (2.12) dapat dilakukan, namun memerlukan suatu proses perhitungan yang rumit. Oleh karena itu, pembentukan fungsi *Likelihood* dilakukan dengan cara mengalikan fungsi kepadatan peluang bersama dari distribusi bersyarat y_t berikut

$$L(\theta, y) = \prod_{t=1}^n f(y_t | y_{t-1}) \quad (2.13)$$

di mana $f(y_t | y_{t-1})$ merupakan distribusi bersyarat dari y_t jika y_{t-1} diketahui. Apabila pengamatan y_1 tidak dikondisikan maka bentuk fungsi *Likelihood* akan memuat fungsi $f(y_1 | y_0)$.

2.5.2 Unconditional Maximum Likelihood Estimation (UMLE) untuk Model AR(1) Box-Jenkins

Spesifikasi fungsi kepekaan peluang bersama (*joint probability density function*) dari sisaan (e_t) diperlukan dalam pembentukan fungsi *Likelihood*, di mana sisaan ini bersifat *white noise* dan menyebar berdasarkan distribusi normal, dengan rata-rata nol dan ragam σ_e^2 atau $e_t \sim N(0, \sigma_e^2)$, sehingga diasumsikan $\dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n$ adalah saling bebas. Pada kasus AR(1), parameter yang diduga adalah ϕ dan σ_e^2 .

Probability Density Function atau fungsi kepekaan peluang untuk setiap sisaan e_t adalah :

$$p(e|\phi, \sigma_e^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp\left[-\frac{(y_t - \phi y_{t-1})^2}{2\sigma_e^2}\right], \quad -\infty < e < \infty \quad (2.14)$$

dan fungsi kepekaan peluang bersama atau fungsi *Likelihood* dari model AR(1) Box-Jenkins adalah,

$$L(\phi, \sigma_e^2) = (2\pi\sigma_e^2)^{-\left(\frac{n}{2}\right)} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma_e^2} S(\phi)\right] \quad (2.15)$$

Box, Jenkins, dan Reinsel (1994) menuliskan fungsi *log-Likelihood* berdasarkan Persamaan (2.15) dengan *Unconditional Likelihood* sebagai berikut :

$$\log L(\phi, \sigma_e^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi\sigma_e^2 - \frac{S(\phi)}{2\sigma_e^2} \quad (2.16)$$

di mana $S(\phi)$ adalah *Unconditional Sum of Square Function* yang dituliskan sebagai berikut

$$S(\phi) = \sum_{t=-\infty}^n [E(e_t | \phi, y)]^2 \quad (2.17)$$

dan $E(e_t | \phi, y)$ adalah nilai harapan dari e_t yang diberikan oleh ϕ dan y .

Untuk mendapat nilai duga parameter $\hat{\phi}$, caranya adalah dengan memaksimumkan fungsi (2.16). Nilai duga ini disebut juga *unconditional maximum likelihood estimator*. Karena

$\ln L(\phi, \sigma_e^2)$ pada Persamaan (2.16) hanya meliputi penyelesaian atas $S(\phi)$, maka *unconditional maximum likelihood estimator* ini akan ekuivalen dengan *unconditional sum of square estimator* dengan cara meminimumkan fungsi *Sum of Square* $S(\phi)$.

2.5.3 Metode Backasting

Suatu nilai ramalan sebelumnya atau disebut *backcast* diperlukan agar meminimuman fungsi *Sum of Square* pada Persamaan (2.17) dapat dilakukan. Metode *Backasting* berfungsi untuk meramalkan nilai amatan sebelumnya yaitu $y_* = (y_{1-p}, \dots, y_{-1}, y_0)$ dan $e_* = (e_{1-p}, \dots, e_{-1}, e_0)'$. Hal ini dapat dilakukan karena semua model deret waktu salah satunya model AR(1) Box-Jenkins dapat dituliskan dalam *forward form* yaitu,

$$e_t = y_t - \phi y_{t-1} \quad (2.18)$$

atau dituliskan dalam *backward form*,

$$e_t = y_t - \phi y_{t+1} \quad (2.19)$$

di mana e_t merupakan deret sisaan yang bersifat *white noise* dengan rata-rata nol dan ragam σ_e^2 . *Forward form* (2.18) digunakan untuk meramalkan nilai kedepan berdasarkan data $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, dan *backcast form* (2.19) digunakan untuk meramalkan nilai sebelumnya berdasarkan data $(y_n, y_{n-1}, \dots, y_1)$.

Persamaan (2.17) didekati dengan bentuk berhingga (*a finite form*) berikut

$$S(\phi) = \sum_{t=-M}^n [E(e_t | \phi, y)]^2 \quad (2.20)$$

dengan M adalah bilangan integer yang cukup besar sehingga iterasi *backcast* $|E(y_t | \phi, y) - E(y_{t-1} | \phi, y)|$ diproses sampai ditemukan nilai ϵ kecil di mana kondisi tersebut tercapai untuk $t \leq -(M + 1)$. Pernyataan tersebut diimplikasikan $E(y_t | \phi, y) \approx \mu$, karena itu $E(e_t | \phi, y)$ tidak berarti untuk $t \leq -(M + 1)$.

Menurut Cryer (1986), prinsip metode *Backasting* dijelaskan sebagai berikut, dengan melihat *Unconditional Sum of Square Function* yang dituliskan

$$S(\phi) = \sum_{t=-\infty}^n \hat{e}_t^2 \quad (2.21)$$

di mana $\hat{e}_t = e_t$ untuk $1 \leq t \leq n$, sedangkan nilai

$$\hat{e}_t = E(e_t | y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \quad \text{untuk } t \leq 0$$

adalah *backcast* untuk meramalkan nilai amatan sebelumnya. Bentuk *backcast* model AR(1) dituliskan pada Persamaan (2.17) di mana untuk menghitung nilai e dimulai dengan $t = n-1$ dan $e_n = 0$ untuk mendapatkan nilai awal. Proses perhitungan berulang sampai kembali ke $t=1$. Misalkan $\hat{y}_t = E(y_t | y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$, dengan bentuk *backcast* sebagai berikut,

$$\begin{aligned} \hat{y}_0 &= \phi y_1 \\ \hat{y}_{-1} &= \phi \hat{y}_0 \\ &\vdots \\ \hat{y}_{-l} &= \phi \hat{y}_{-l+1} \end{aligned} \quad \text{untuk } l \geq 1 \quad (2.22)$$

Backcast untuk pengamatan sebelum periode 1 dapat dilakukan dengan Persamaan (2.22) sampai menunjukkan nilai yang konvergen yang terjadi pada saat $t = -Q$. Pembangkitan nilai e_t dilakukan dengan men-set $e_{-Q} = 0$ dengan tidak mengabaikan e_t sehingga nilai $S(\phi)$ dapat dihitung.

Setelah memperoleh penduga parameter $\hat{\phi}$, selanjutnya mencari nilai duga $\hat{\sigma}_e^2$ dengan menghitung

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{S(\hat{\phi})}{n} \quad (2.23)$$

Agar lebih efisien, pendugaan parameter model *time series* menggunakan *backcast method*. Khususnya untuk deret yang relatif pendek. Contoh penggunaan metode *Backasting* untuk model AR(1) dengan n amatan sebanyak sepuluh dapat dilihat pada Lampiran 6.

2.6 Uji Diagnostik Model AR(1) Box-Jenkins

Tahap selanjutnya adalah pengujian kelayakan model. Model dikatakan layak jika sisaan berdistribusi normal dan merupakan *white noise*. Berikut ini adalah beberapa cara untuk analisis sisaan (Cryer, 1986)

1. Secara deskriptif, model dikatakan layak apabila plot sisaan menunjukkan suatu pola acak (tidak terdapat unsur tren atau pola apapun dalam plot sisaan).
2. Uji kenormalan sisaan dapat dilakukan dengan memeriksa histogram sisaan.
3. Memeriksa plot ACF sisaan, model dikatakan sesuai jika seluruh ACF sisaan tidak ada yang keluar dari batas selang $\pm 1.96/\sqrt{n}$. Pemeriksaan ACF sisaan tersebut berguna untuk menguji kebebasan *noise*.

2.7 Peramalan Model AR(1)

Peramalan deret waktu menggunakan model AR(1) untuk l langkah ke depan dinyatakan oleh persamaan sebagai berikut :

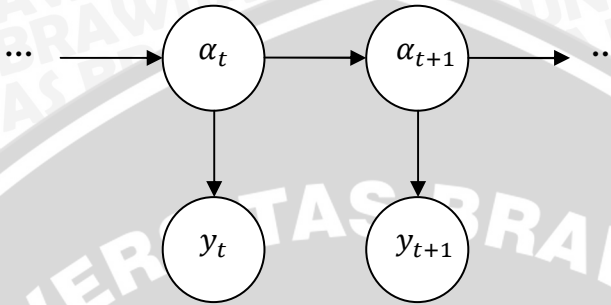
$$\hat{y}_t(l) = \phi \hat{y}_t(l-1) \quad \text{untuk } l=1,2,3\dots \quad (2.24)$$

di mana $\hat{y}_t(l)$ merupakan nilai ramalan l periode ke depan (Cryer,1986).

2.8 Model *State Space* Umum

State Space merupakan suatu model deret waktu yang melibatkan unsur *state* pada model. *State* tersebut diartikan sebagai suatu informasi saat ini dan waktu lampau yang bermanfaat untuk menentukan nilai-nilai periode mendatang (Wei, 1990). Proses *markov* merupakan konsep dasar analisis model *State Space*.

Gambar 2.2 menjelaskan secara grafis mengenai struktur hubungan (proses *markov*) dari model *State Space*.



Gambar 2.2 Struktur Proses *Markov* pada model *State Space*

Gambar 2.2 menjelaskan secara grafis proses *markov* pada model *State Space*, di mana α_t merupakan rantai *markov* (*markov chain*) yang berlaku sebagai *state* dalam model *State Space*. *State* tersebut merupakan informasi yang berfungsi untuk menentukan proses *observable* y_t dan juga untuk menentukan proses *state* berikutnya yaitu α_{t+1} . Rangkaian proses *markov* tersebut membentuk suatu konsep untuk model *State Space* (Cappe, O, Eric M. and T. Ryden. 2005).

Model *State Space* dapat bermanfaat pada analisis deret waktu univariat maupun multivariat (Wei, 1990). *State Space* merupakan model yang dapat merepresentasikan model lain, seperti model Box-Jenkins (Koopman dan Commandeur, 2007).

Model *State Space* memiliki dua persamaan yaitu persamaan *state* dan persamaan observasi. Persamaan *state* dari model *State Space* umum adalah sebagai berikut :

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.25)$$

dan persamaan observasinya adalah

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.26)$$

Berikut ini merupakan penjelasan untuk α_t , T_t , c_t , R_t , dan η_t yang terdapat pada persamaan *state*.

α_t = vektor *state* ($mx1$), dengan m merupakan banyaknya komponen *state* yang masuk dalam model.

T_t = matrik berukuran (mxm), di mana elemen yang mengisi matrik ini adalah parameter-parameter yang digambarkan oleh Model *State Space*

c_t = vektor berukuran ($mx1$), elemen matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

R_t = matrik berukuran (mxg), elemen matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

η_t = vektor *noise* atau *error* untuk persamaan *state*

Berikut ini merupakan penjelasan untuk y_t , Z_t , d_t , dan ε_t yang terdapat pada persamaan observasi.

y_t = vektor berukuran ($Nx1$) yang merupakan variable observasi pada waktu t , dengan N merupakan banyaknya variabel deret waktu yang dianalisis

Z_t = matrik berukuran (Nxm), elemen matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

d_t = vektor berukuran ($Nx1$), elemen matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

ε_t = vektor *noise* atau *error* untuk persamaan observasi.

Unsur *noise* pada persamaan *state* diasumsikan memiliki rata-rata nol dan keragaman Q_t , begitu pula unsur *noise* observasi memiliki rata-rata nol dan keragaman H_t . Model *State Space* secara umum

dapat merepresentasikan model deret waktu lain, seperti model AR(p) Box-Jenkins (Koopman dan Commandeur,2007).

2.9 Model *State Space* Univariat

Model *State Space* univariat berasal dari bentuk *State Space* umum, di mana jumlah variabel yang dianalisis y_t adalah sebanyak satu variabel atau univariat. Sehingga perubahan y_t dari bentuk vektor menjadi bentuk skalar terjadi pada persamaan observasi model *State Space* (Harvey,1993).

Persamaan *state* untuk model *State Space* univariat sebagai berikut

$$\alpha_t = T_t \alpha_{t-1} + c_t + R_t \eta_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.27)$$

sedangkan persamaan observasinya sebagai berikut :

$$y_t = Z_t \alpha_t + d_t + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.28)$$

hanya satu variabel y_t yang dianalisis dalam model *State Space* univariat. Berikut ini merupakan penjelasan untuk α_t , T_t , c_t , R_t , dan η_t yang terdapat pada persamaan *state* model univariat.

α_t = vektor *state* ($mx1$), dengan m merupakan banyaknya komponen *state* yang masuk dalam model.

T_t = matrik berukuran (mxm), di mana elemen yang mengisi matrik ini adalah parameter-parameter yang digambarkan oleh Model *State Space*

c_t = vektor berukuran ($mx1$), elemen matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

R_t = matrik berukuran (mxg), elemen matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

η_t = vektor *noise* atau *error* untuk persamaan *state*

Berikut ini merupakan penjelasan untuk y_t , Z_t , d_t , dan ε_t yang terdapat pada persamaan observasi.

y_t = skalar yang merupakan variabel observasi univariat

Z_t = matrik berukuran $(1 \times m)$, bentuk matrik ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

d_t = unsur skalar, bentuk skalar ini menyesuaikan pada proses dasar yang direpresentasikan oleh model *state space*

ε_t = *noise* atau *error* untuk persamaan observasi berbentuk skalar

Unsur *noise* pada persamaan *state* diasumsikan memiliki rata-rata nol dan keragaman Q_t , begitu pula unsur *noise* observasi memiliki rata-rata nol dan keragaman σ_ε^2 (Harvey, 1993).

2.10 Model AR(p) dari *State Space*

Model AR(p) dari *State Space* merupakan salah satu model khusus dari model *State Space* umum. Model AR(p) dari *State Space* adalah setara dengan model AR(p) Box-Jenkins pada Subbab 2.2 dan juga sama-sama dapat menjelaskan proses *autoregressive*.

Model *State Space* dapat merepresentasikan model Box-Jenkins. Apabila model AR(p) Box-Jenkins dinyatakan oleh persamaan berikut

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + e_t \quad (2.29)$$

maka model AR(p) Box-Jenkins tersebut dapat dinyatakan ke dalam model AR(p) dari *State Space* dengan mendefinisikan persamaan *state* setara dengan Persamaan (2.29) pada model AR(p) Box-Jenkins

menjadi sebagai berikut :

$$\alpha_t = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \cdots & \phi_p \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_{t-1} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} e_t \quad (2.30)$$

di mana, unsur state $\alpha_t = [y_t \ y_{t-1} \ y_{t-2} \ \cdots \ y_1]'$ merupakan vektor yang memiliki elemen berupa data observasi dari titik waktu t hingga titik waktu 1. Unsur state $\alpha_{t-1} = [y_{t-1} \ y_{t-2} \ y_{t-3} \ \cdots \ y_p]'$ merupakan vektor yang memiliki elemen data observasi dari titik waktu t-1 hingga titik waktu ke-p. Sedangkan e_t merupakan unsur gangguan yang bersifat *white noise* yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan keragaman σ^2 (Harvey, 1993).

Sedangkan persamaan observasi untuk model AR(p) *State Space* adalah sebagai berikut :

$$y_t = Z_t \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.31)$$

di mana unsur $Z_t = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]'$ dan *noise* pada persamaan observasi telah ditentukan sama dengan nol $\varepsilon_t = 0$ (Harvey, 1993). Apabila Persamaan (2.30) dan Persamaan (2.33) dijabarkan secara lengkap (tidak dalam bentuk matrik) maka hasilnya akan setara dengan Persamaan (2.29) model AR(p) Box-Jenkins.

2.11 Model AR(1) dari *State Space*

Model AR(1) dari *State Space* merupakan salah satu model khusus dari model AR(p) *State Space*. Model AR(1) dari *State Space* adalah setara dengan model AR(1) Box-Jenkins pada Subbab 2.3 dan juga sama-sama dapat menjelaskan proses *autoregressive*.

Model *State Space* dapat merepresentasikan model Box-Jenkins. Apabila model AR(1) Box-Jenkins dinyatakan oleh persamaan berikut

$$y_t = \phi y_{t-1} + e_t \quad (2.32)$$

maka model AR(1) Box-Jenkins tersebut dapat dinyatakan ke dalam model AR(1) dari *State Space* dengan mendefinisikan persamaan *state* setara dengan Persamaan (2.32) pada model AR(1) Box-Jenkins menjadi sebagai berikut :

$$\alpha_t = \phi \alpha_{t-1} + e_t \quad (2.33)$$

di mana, unsur *state* α_t merupakan data observasi pada titik waktu t . Unsur *state* α_{t-1} merupakan data observasi pada titik waktu $t-1$. Sedangkan e_t merupakan unsur gangguan (*error*) yang bersifat *white noise*. *Error* tersebut berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan keragaman σ_e^2 (Harvey, 1993).

Sedangkan persamaan observasi untuk model AR(1) *State Space* adalah sebagai berikut :

$$y_t = \alpha_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.34)$$

di mana unsur y_t dan α_t sama-sama menyatakan data observasi untuk titik waktu ke t . (Harvey, 1993). Sehingga Persamaan (2.33) dan Persamaan (2.34) yang merupakan model AR(1) dari *State Space* adalah setara dengan Persamaan (2.32) yaitu model AR(1) Box-Jenkins.

2.12 Spesifikasi Model AR(1) dari *State Space*

Tahap identifikasi pada model AR(1) dari *State Space* sama dengan tahap identifikasi pada model AR(1) dari Box-Jenkins karena secara prinsip kedua model tersebut sama (Wei, 1994). Identifikasi dilakukan dengan memeriksa plot ACF dan PACF apakah sesuai dengan tipe spesifikasi untuk model AR(1) pada Tabel 2.2.

2.13 Pendugaan Parameter Model AR(1) dari *State Space*

2.13.1 Penggunaan Metode *Kalman filter*

Proses *Kalman filter* berguna untuk menghitung nilai-nilai prediksi *state* α_t . Informasi nilai α_t tersebut dapat digunakan dalam

tahap pendugaan parameter dengan menggunakan MLE yang akan dijelaskan dalam subbab berikutnya.

Proses perhitungan dari *Kalman filter* tersebut adalah terdiri dari dua tahap yaitu tahap prediksi dan tahap *updating*.

1. Tahap Prediksi

Tahap prediksi dilakukan dengan menghitung nilai prediksi *state* dengan menggunakan persamaan berikut :

$$\hat{\alpha}_t = \phi \alpha_{t-1} \quad (2.35)$$

dengan diperolehnya nilai prediksi *state* α_t tersebut maka akan didapat suatu nilai prediksi untuk observasi yaitu \hat{y}_t dengan menyamakan

$$\hat{y}_t = \hat{\alpha}_t$$

Kesalahan prediksi e_t dapat diperoleh dengan persamaan sebagai berikut :

$$e_t = y_t - \hat{y}_t \quad (2.36)$$

Selanjutnya, dilakukan perhitungan keragaman kesalahan prediksi dengan persamaan berikut :

$$P_t = \phi^2 P_{t-1} + \sigma_e^2 \quad (2.37)$$

Nilai keragaman kesalahan prediksi tersebut berguna untuk menghitung nilai prediksi *state* untuk tahap *updating*.

2. Tahap Updating

Hasil nilai-nilai prediksi *state* pada Persamaan (2.35) akan diupdate menggunakan persamaan *updating* berikut ini

$$\alpha_t^* = \hat{y}_t + (y_t - \hat{y}_t) \quad (2.38)$$

dan juga meng-update keragaman kesalahan prediksi *state* dengan

persamaan *updating* berikut :

$$P_t^* = P_t - P_t P_t^{-1} P_t \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.39)$$

Proses perhitungan *Kalman filter* memerlukan nilai *state* awal α_0 sama dengan nol dan nilai awal keragaman kesalahan prediksi P_0 didapatkan dari informasi *default* Software Eviews. Proses perhitungan Kalman filter berlangsung hingga mencapai data pengamatan pada titik waktu ke- n (Harvey, 1993).

2.13.2 *Maximum Likelihood Estimation (MLE) untuk Model AR(1) dari State Space*

Fungsi *Likelihood* didefinisikan sebagai fungsi kepekatan peluang bersama dari data observasi $y_1, y_2 \dots y_n$. Asumsi penting dalam analisis deret waktu adalah bahwa sisaan $e_1, e_2, \dots e_n$ merupakan peubah acak yang berdistribusi normal, bebas, dan memiliki rata-rata nol dan keragaman σ_e^2 . Fungsi kepekatan peluang untuk setiap e adalah sebagai berikut

$$p(e|\phi, \sigma_e^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_e^2}} \exp\left[-\frac{(y_t - \phi\hat{\alpha}_{t-1})^2}{2\sigma_e^2}\right], \quad -\infty < e < \infty \quad (2.40)$$

Fungsi kepekatan peluang bersama untuk $y_2, y_3, \dots y_n$ yang merupakan fungsi kepekatan peluang bersyarat (*conditional pdf*) adalah sebagai berikut

$$f(y_2, y_3, \dots, y_n | y_1) = (2\pi\sigma_e^2)^{-\frac{(n-1)}{2}} \exp\left\{\left(\frac{-1}{2\sigma_e^2}\right) \sum_{t=2}^n (y_t - \phi\hat{\alpha}_{t-1})^2\right\} \quad (2.41)$$

Fungsi kepekatan peluang untuk y_1 juga berasal dari distribusi normal dengan rata-rata μ dan keragaman $\sigma_e^2/(1 - \phi^2)$. Perkalian antara fungsi kepekatan peluang bersyarat untuk y_2, y_3, \dots, y_n pada Persamaan (2.41) dengan fungsi kepekatan peluang untuk y_1 menghasilkan fungsi kepekatan peluang *unconditional* dari $y_1, y_2, y_3 \dots, y_n$

yang merupakan fungsi *Likelihood* berikut

$$L(\phi, \sigma_a^2) = (2\pi\sigma_e^2)^{-\frac{n}{2}} (1 - \phi^2)^{1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_e^2} s(\phi) \right] \quad (2.42)$$

Fungsi $s(\phi)$ disebut *Unconditional Sum of Square Function*. Fungsi *log-Likelihood* untuk Persamaan (2.37) adalah sebagai berikut

$$l(\phi, \sigma_e^2) = -\frac{n}{2} \log 2\pi - \frac{n}{2} \log \sigma_e^2 + \frac{1}{2} \log(1 - \phi^2) - \frac{1}{2\sigma_e^2} s(\phi) \quad (2.43)$$

di mana *Sum of Square Function* dinyatakan sebagai berikut

$$S(\phi) = \sum_{t=2}^n (y_t - \phi \alpha_{t-1})^2 + (1 - \phi^2) y_1^2 \quad (2.44)$$

Pemaksimuman fungsi *log-Likelihood* pada Persamaan (2.43) adalah ekuivalen dengan meminimumkan fungsi *Sum of Square* $S(\phi)$ pada Persamaan (2.44). Untuk memperoleh penduga parameter $\hat{\phi}$, suatu proses iterasi harus dilakukan untuk meminimumkan $S(\phi)$ karena persamaan normal $\partial S / \partial \phi = 0$ adalah nonlinier terhadap parameter ϕ . Hasil penduga parameter yang diperoleh adalah *Unconditional Least Square Estimator*. Nilai-nilai prediksi *state* α_{t-1} diperoleh dari hasil perhitungan *Kalman filter*.

2.13.3 Metode Marquardt

Metode *marquardt* merupakan salah satu metode pendugaan nonlinier yang mengaplikasikan proses iterasi. Konsep penggunaan metode *marquardt* adalah meminimumkan jumlah kuadrat kesalahan atau *Sum of Square Error* (SSE) dari fungsi $S(\phi)$ pada Persamaan (2.44). Proses iterasi harus dilakukan karena Persamaan (2.44) merupakan persamaan nonlinier terhadap parameter ϕ . Nonlinier berarti apabila persamaan tersebut diturunkan terhadap parameter ϕ maka hasil turunannya masih memiliki unsur ϕ .

Persamaan normal yang merupakan turunan pertama Persamaan (2.44) terhadap parameter ϕ dan hasilnya disamadengankan nol adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial[S(\phi)]}{\partial[\phi]} = \frac{\partial[\sum_{t=2}^n (y_t - \phi\alpha_{t-1})^2 + (1 - \phi^2)y_1^2]}{\partial[\phi]} = 0$$

Hasil turunan $\partial S/\partial\phi = 0$ akan menghasilkan Persamaan Normal sebagai berikut :

$$\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1} - \hat{\phi} \left[\sum_{t=2}^n y_{t-1}^2 - \frac{y_1^2}{(1-\phi^2)} \right] = 0 \quad (2.45)$$

Secara umum perhitungan iterasi metode *marquardt* dituliskan sebagai berikut

$$\hat{\phi}^{n+1} = \phi^n - t_n (D(\phi^n)' D(\phi^n) + \lambda_n I_k)^{-1} \left[\frac{\partial S(\phi)}{\partial(\phi)} \right]_{\phi=\hat{\phi}} \quad (2.46)$$

di mana

- ϕ^n = nilai dugaan awal parameter
- $\hat{\phi}^{n+1}$ = nilai parameter yang ditaksir
- $D(\phi^n)' D(\phi^n)$ = nilai skalar hasil perkalian antara vektor observasi pada turunan pertama fungsi *Sum of Square* setiap proses iterasi.
- λ_n = nilai skalar pada iterasi ke n , di mana $0 < \lambda_n \leq 1$
- t_n = panjang langkah
- I_k = matrik identitas
- $\left[\frac{\partial S(\phi)}{\partial(\phi)} \right]_{\phi=\hat{\phi}}$ = Persamaan Normal hasil turunan pertama fungsi *Sum of Square* terhadap parameter ϕ

Persamaan Normal hasil turunan pertama dari fungsi *Sum of Square* terhadap parameternya dapat dilihat secara detail pada Lampiran 10. Iterasi yang dilakukan oleh metode *marquardt* tersebut berlanjut hingga dicapai suatu nilai yang konvergen. Nilai parameter awal yang digunakan dalam metode *marquardt* adalah nol sesuai dengan

default dari *Software Eviews*. Ringkasan proses iterasi pada metode *marquardt* dapat dilihat pada Lampiran 11.

2.14 Uji Diagnostik Model AR(1) dari *State Space*

Uji kelayakan untuk model AR(1) dari *State Space* adalah sama dengan uji kelayakan model AR(1) dari Box-Jenkins pada Subbab 2.6, uji tersebut meliputi pemeriksaan sisaan secara deskriptif dengan menggunakan plot sisaan, histogram sisaan dan pemeriksaan plot ACF sisaan.

2.15 Peramalan Model AR(1) dari *State Space*

Menurut Harvey (1993), peramalan pada model ini dilakukan dengan melanjutkan proses perhitungan *Kalman filter* untuk beberapa periode ke depan menggunakan persamaan prediksi (2.35) hingga (2.39). Peramalan ini dapat dilakukan setelah perhitungan *Kalman filter* tersebut mencapai data observasi yang terakhir yaitu data pada waktu n . Persamaan *Kalman filter* untuk menghitung nilai peramalan *state* adalah sebagai berikut :

$$\hat{\alpha}_{n+l} = \phi \hat{\alpha}_{n+l-1} \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (2.47)$$

Peramalan *state* pada Persamaan (2.44) akan memberikan hasil ramalan observasi untuk l periode mendatang yaitu \hat{y}_{n+l} sebagai berikut

$$\hat{y}_{n+l} = \hat{\alpha}_{n+l} \quad (2.48)$$

2.16 *Mean Square Error* (MSE) Sebagai Ukuran Ketepatan Penduga Parameter Model

Nilai *mean square error* (MSE) dapat digunakan untuk memeriksa seberapa jauh ketersebaran nilai duga parameter model tersebut ($\hat{\theta}$) terhadap nilai parameter yang sebenarnya θ . Sehingga dapat diketahui seberapa akurat metode pendugaan suatu model deret

waktu. MSE untuk nilai duga parameter model dirumuskan sebagai berikut :

$$MSE(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 \quad (2.49)$$

di mana,

θ = nilai parameter model yang sebenarnya

$\hat{\theta}$ = nilai duga parameter model

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data yang dianalisis dalam skripsi ini adalah data bangkitan AR(1). Data bangkitan AR(1) tersebut diperoleh dengan menggunakan makro Minitab (makro dapat dilihat pada Lampiran 1). Pembangkitan data dilakukan dengan 18 macam nilai parameter ϕ yaitu -0.9, -0.8, -0.7, -0.6, -0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 masing-masing dengan ulangan sebanyak sepuluh dan $n=100$, sehingga diperoleh data bangkitan AR(1) sebanyak 180 data.

3.2 Tahap Persiapan Data Deret Waktu

Tahap awal persiapan data deret waktu dalam penelitian ini antara lain plot data deret waktu, uji kestasioneran data deret waktu dan tahap spesifikasi data sebagai berikut :

1. Pembuatan plot data deret waktu untuk mengetahui pola data secara keseluruhan.
2. Pemeriksaan kestasioneran data deret waktu, kestasioneran ini meliputi stasioner terhadap ragam dan stasioner terhadap rata-rata. Pemeriksaan kestasioneran terhadap ragam dilakukan dengan *Box-Cox Transformation* berdasarkan Persamaan (2.2) sedangkan pemeriksaan kestasioneran terhadap rata-rata dapat dilakukan dengan memeriksa plot ACF.
3. Spesifikasi model, tahap ini dilakukan dengan membentuk plot ACF dan plot PACF serta mengidentifikasi ciri-ciri pola ACF dan PACF tersebut apakah sesuai dengan spesifikasi Model AR(1) ataukah tidak. Ciri-ciri tersebut dapat diidentifikasi dengan mengacu pada Tabel 2.2.

Tahap pengujian kestasioneran dan spesifikasi data deret waktu tersebut dilakukan dengan menggunakan bantuan *Software* Minitab 14.

3.3 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari Box-Jenkins

Tahap pendugaan parameter model AR(1) Box-Jenkins menggunakan metode pendugaan parameter UMLE adalah sebagai berikut :

1. Pendugaan parameter model AR(1) dari Box-Jenkins menggunakan *Unconditional Maximum Likelihood Estimation* (UMLE).
2. Uji diagnostik model AR(1) ini dilakukan secara deskriptif menggunakan histogram sisaan dan plot ACF sisaan.

Tahap pendugaan parameter model AR(1) dari Box-Jenkins menggunakan metode UMLE dilakukan dengan bantuan *Software* Minitab 14.

3.4 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari State Space Menggunakan Metode Kalman filter

Berikut ini merupakan tahap pendugaan parameter model AR(1) dari *State Space* dengan menggunakan metode *Kalman filter*.

1. Pendugaan parameter model AR(1) dari *State Space* dilakukan dengan memaksimumkan fungsi log-*Likelihood* pada Persamaan (2.16). Pemaksimuman terhadap fungsi *Likelihood* tersebut sama halnya dengan meminimumkan fungsi *Sum of Square* $S(\phi)$ pada Persamaan (2.20) dengan menggunakan metode iterasi *marquardt*. Pembentukan fungsi *Sum of Square* tersebut dilakukan dengan bantuan metode *Kalman filter* pada Persamaan (2.35) hingga (2.39) sehingga diperoleh nilai-nilai prediksi *state* dan prediksi observasi.

2. Uji diagnostik model, uji ini sama dengan pengujian diagnostik pada model AR(1) Box-Jenkins. Uji diagnostik dilakukan untuk memeriksa apakah model AR(1) ini layak atau tidak.

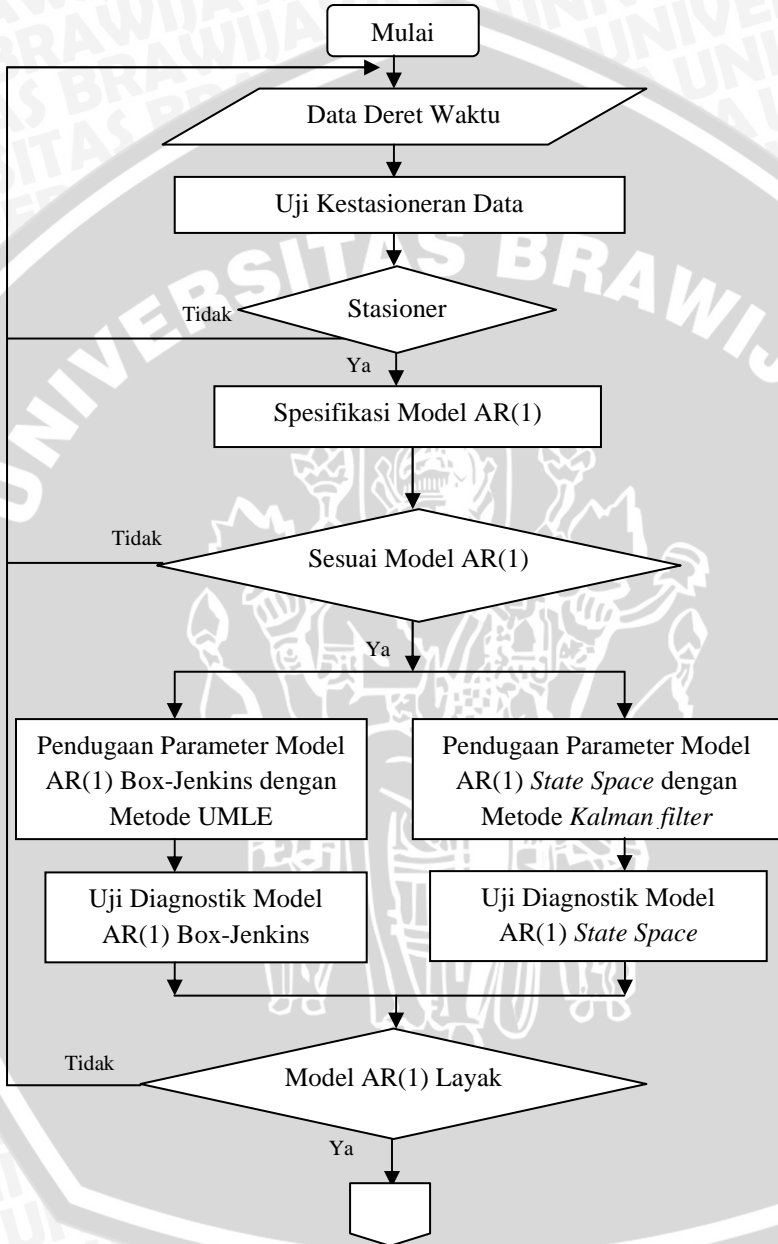
Tahap pendugaan parameter model AR(1) dari *State Space* menggunakan metode *Kalman filter* dilakukan dengan bantuan *Software Eviews 4.1*.

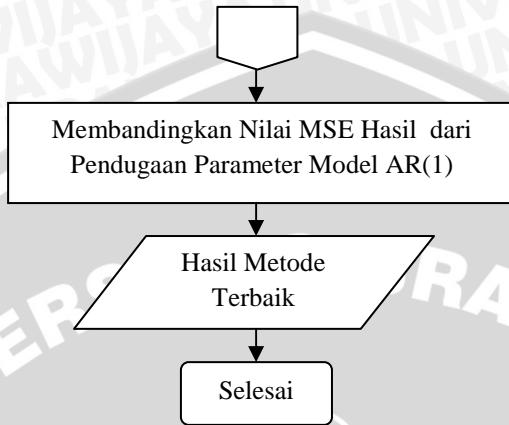
3.5 Tahap Perbandingan Nilai MSE antara Model AR(1) dari Box-Jenkins dengan Model AR(1) dari *State Space*

Terakhir, dilakukan perbandingan nilai MSE (nilai tengah kesalahan kuadrat) antara hasil pendugaan menggunakan UMLE dan MSE hasil pendugaan metode *Kalman filter*. Gambar 3.1 menjelaskan secara grafis mengenai tahap awal, tahap pendugaan parameter model dan tahap perbandingan nilai MSE.



Diagram Perbandingan Metode Pendugaan Parameter Model





Gambar 3.1 Diagram Alir Perbandingan Metode Pendugaan Parameter Model AR(1)

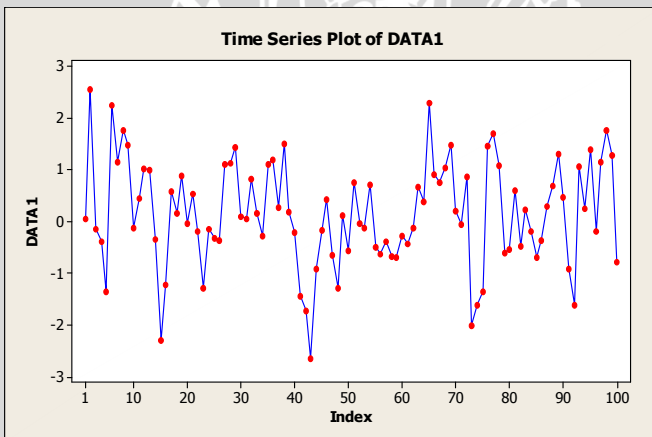
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Persiapan Data Deret Waktu

4.1.1 Plot Data

Bab ini hanya menampilkan hasil untuk dua data saja sebagai contoh, akan tetapi hasil akhir tetap dari informasi keseluruhan data bangkitan. Tahap awal analisis deret waktu adalah pembuatan plot deret waktu.

Hasil plot deret waktu untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$) adalah sebagai berikut :

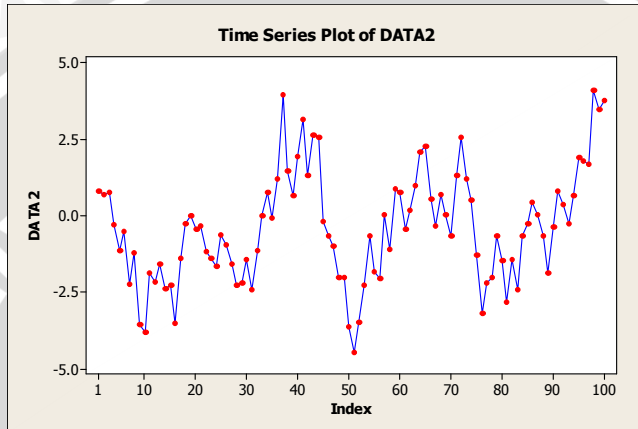


Gambar 4.1 Plot Deret Waktu untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$)

Plot deret waktu pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa data memiliki unsur acak. Plot tersebut juga berfluktuasi cukup tinggi, hal ini mengindikasikan bahwa deret waktu tersebut memiliki keragaman yang tinggi. Nilai data tertinggi adalah 2,573 yaitu pada

titik waktu ke-2 sedangkan nilai terendah adalah -2,639 yaitu pada titik waktu ke-43.

Hasil plot deret waktu untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,8$) adalah sebagai berikut :



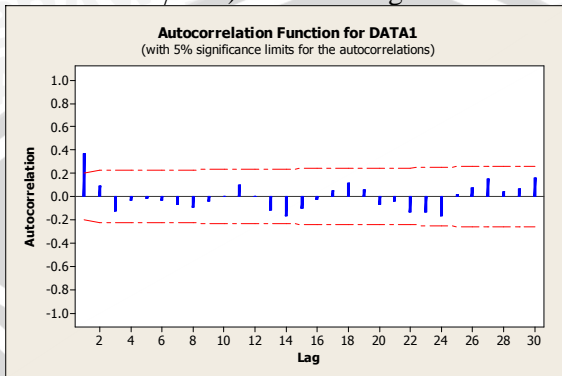
Gambar 4.2 Plot Deret Waktu untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,8$)

Plot deret waktu pada Gambar 4.2 menunjukkan bahwa data memiliki unsur acak. Plot tersebut juga berfluktuasi cukup tinggi, hal ini mengindikasikan bahwa deret waktu tersebut memiliki keragaman yang tinggi. Nilai data tertinggi adalah 4,1188 yaitu pada titik waktu ke-98 sedangkan nilai terendah adalah -4,4889 yaitu pada titik waktu ke-51.

4.1.2 Pemeriksaan Kestasioneran Data

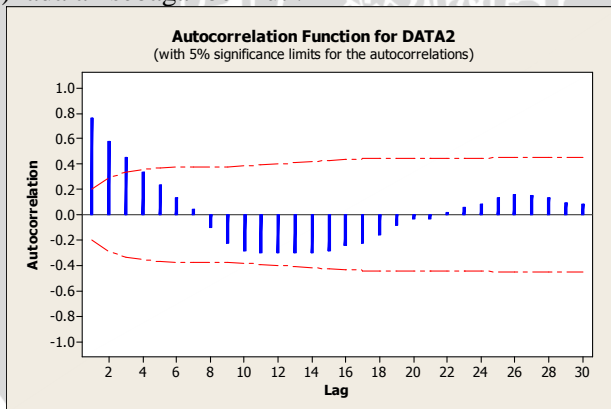
Pemeriksaan kestasioneran terhadap ragam menggunakan Transformasi Box-Cox. Hasil transformasi untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$) dan data bangkitan dengan ($n=100$ dan $\phi=0.8$) dapat dilihat pada Lampiran 2. Hasil transformasi menunjukkan bahwa setelah dilakukan transformasi satu kali, dihasilkan nilai estimasi lambda 0,82 dan 0,95 maka dapat disimpulkan data bangkitan tersebut stasioner terhadap ragam.

Pemeriksaan kestasioneran terhadap rata-rata dilakukan dengan memeriksa plot ACF. Hasil plot ACF untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$) adalah sebagai berikut :



Gambar 4.3 Plot ACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$)

Hasil plot ACF pada Gambar 4.3 menunjukkan bahwa nilai autokorelasi berada dalam selang (tidak signifikan) untuk lag waktu ke 4, 5, 6 dan seterusnya, hal tersebut mengindikasikan bahwa data bangkitan stasioner terhadap rata-rata. Kesimpulannya data bangkitan tersebut adalah stasioner terhadap ragam dan rata-rata. Hasil plot ACF untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$) adalah sebagai berikut :



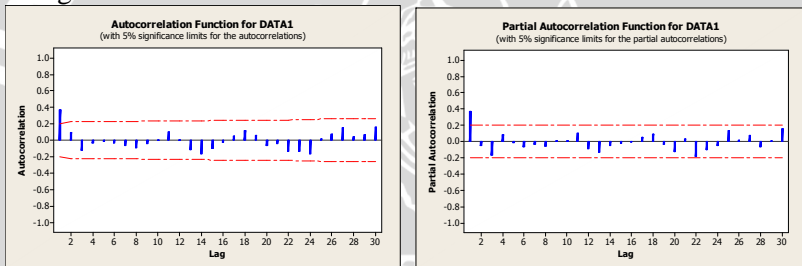
Gambar 4.4 Plot ACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$)

Hasil plot ACF pada Gambar 4.4 menunjukkan bahwa nilai autokorelasi berada dalam selang (tidak signifikan) untuk lag waktu ke 4, 5, 6 dan seterusnya, hal tersebut mengindikasikan bahwa data bangkitan stasioner terhadap rata-rata. Kesimpulannya data bangkitan tersebut adalah stasioner terhadap ragam dan rata-rata.

4.1.3 Spesifikasi Model AR(1) dari Box-Jenkins

Setelah pemeriksaan kestasioneran dilakukan, tahap berikutnya adalah spesifikasi model AR(1) Box-Jenkins. Spesifikasi model AR(1) Box-Jenkins terhadap data bangkitan dapat dilakukan dengan mengidentifikasi ciri-ciri plot ACF dan PACF.

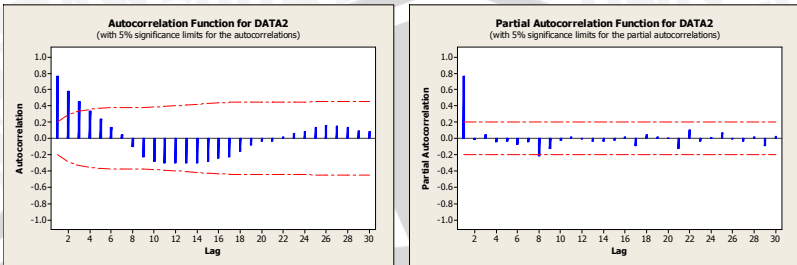
Hasil plot ACF dan PACF untuk data bangkitan adalah sebagai berikut :



Gambar 4.5 Plot ACF dan PACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$)

Gambar 4.5 menampilkan bahwa plot ACF menunjukkan kestasioneran dan plot PACF memiliki nilai autokorelasi parsial signifikan hanya pada lag waktu yang pertama, hal ini mengindikasikan bahwa data bangkitan AR(1) memiliki spesifikasi model AR(1) dari Box-Jenkins.

Hasil plot ACF dan PACF untuk data bangkitan adalah sebagai berikut :



Gambar 4.6 Plot ACF dan PACF untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$)

Gambar 4.6 menampilkan bahwa plot ACF menunjukkan kestasioneran dan plot PACF memiliki nilai autokorelasi parsial signifikan hanya pada lag waktu yang pertama, hal ini mengindikasikan bahwa data bangkitan AR(1) memiliki spesifikasi model AR(1) dari Box-Jenkins.

4.2 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari Box-Jenkins Menggunakan Metode UMLE

Hasil pendugaan parameter model AR(1) Box-Jenkins menggunakan *Unconditional Maximum Likelihood Estimation* (UMLE) untuk salah satu data bangkitan AR(1) ditampilkan pada Tabel 4.1 berikut ini :

Tabel 4.1 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Box-Jenkins Menggunakan UMLE untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$)

Data Bangkitan	Nilai Duga Parameter Model AR(1)
1	0.4582
2	0.436
3	0.347
4	0.404
5	0.4484

6	0.5012
7	0.3901
8	0.2183
9	0.348
10	0.4901

Tabel 4.1 tersebut menampilkan hasil penggunaan metode *Unconditional Maximum Likelihood Estimation*. Pemaksimuman fungsi *Likelihood* dilakukan dengan meminimumkan fungsi *Sum of Square* $S(\phi)$. Fungsi $S(\phi)$ tersebut dapat diperoleh dan diminimumkan dengan menggunakan bantuan metode *backasting*.

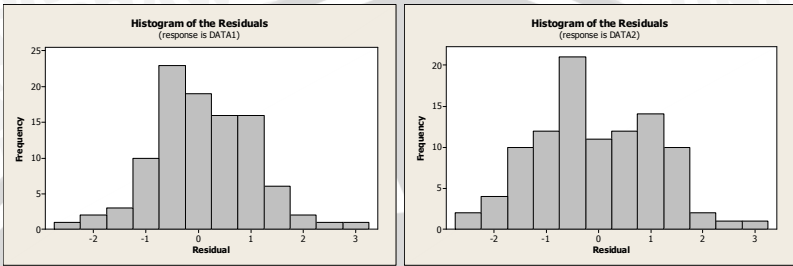
Tabel 4.2 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Box-Jenkins Menggunakan UMLE untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.8$)

Data Bangkitan	Nilai Duga Parameter Model AR(1)
1	0.7935
2	0.8217
3	0.6545
4	0.8138
5	0.795
6	0.8635
7	0.7193
8	0.7349
9	0.7328
10	0.7721

4.3 Uji Diagnostik Model AR(1) dari Box-Jenkins

Hasil uji kelayakan model AR(1) Box-Jenkins untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0.4$) adalah sebagai berikut :

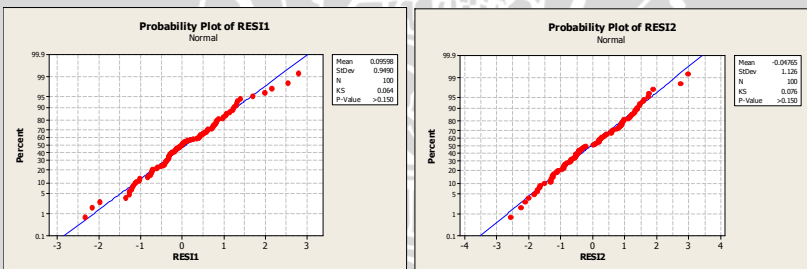
1. Secara deskriptif, pemeriksaan kenormalan sisaan dapat menggunakan histogram pada Gambar 4.4 sebagai berikut :



Gambar 4.7 Histogram Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1)

Gambar 4.7 secara deskriptif, menunjukkan bahwa sebagian besar frekuensi bernilai tinggi pada sisaan nol, hal ini memberikan informasi bahwa sisaan dari model AR(1) Box-Jenkins untuk data bangkitan AR(1) memiliki rata-rata nol dan bentuk histogram tersebut mendekati distribusi normal.

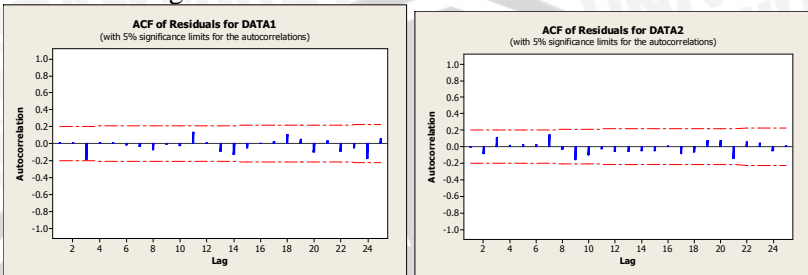
2. Uji kenormalan sisaan dapat dilakukan dengan memeriksa plot peluang kenormalan sebagai berikut :



Gambar 4.8 Plot Peluang Kenormalan Sisaan untuk Data Bangkita

Hasil plot pada Gambar 4.4 menunjukkan bahwa sisaan memiliki nilai rata-rata 0,09598 dan -0,047 . Hasil yang penting adalah nilai *P-Value* 0.15 yang lebih besar dari taraf nyata 0.05, hal ini memberikan kesimpulan bahwa sisaan memiliki distribusi normal.

3. Hasil plot Fungsi Autokorelasi (ACF) sisaan adalah sebagai berikut :



Gambar 4.9 Plot ACF Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1)

Hasil Gambar 4.9 menunjukkan bahwa seluruh nilai koefisien autokorelasi berada dalam selang. Hal tersebut mengindikasikan bahwa tidak terdapat autokorelasi dalam sisaan (sisaan saling bebas) sehingga sisaan telah memenuhi sifat *white noise*. Hasil tersebut memberikan kesimpulan bahwa model AR(1) Box-Jenkins layak untuk data bangkitan AR(1).

4.4 Tahap Pendugaan Parameter Model AR(1) dari *State Space* Menggunakan Metode *Kalman filter*

Pendugaan parameter model AR(1) dari *State Space* dilakukan dengan bantuan metode *Kalman filter*. Metode *Kalman filter* tersebut berguna untuk menghitung nilai-nilai prediksi *state* dan prediksi pengamatan. Nilai prediksi *state* yang diperoleh tersebut digunakan untuk membentuk fungsi *Sum of Square* yaitu $S(\phi)$ pada Persamaan (2.44). Selanjutnya, cara memperoleh nilai dugaan parameter model adalah dengan meminimumkan fungsi *Sum of Square* $S(\phi)$ dengan menggunakan bantuan metode iterasi *marquardt* pada Persamaan (2.46). Proses perhitungan metode *marquardt* tersebut berlanjut hingga dicapai suatu kekonvergenan. Tabel 4.2 berikut ini menunjukkan hasil pendugaan parameter model AR(1) dari *State Space*.

Tabel 4.3 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) dari *State Space* untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,4$)

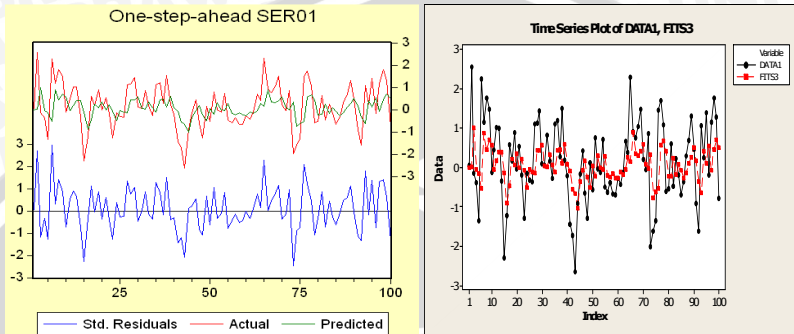
Data Bangkitan	Nilai Duga Parameter Model AR(1)
1	0.45355
2	0.431569
3	0.343522
4	0.399782
5	0.443972
6	0.496049
7	0.386287
8	0.216072
9	0.344538
10	0.485276

Tabel 4.4 Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) dari *State Space* untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\phi=0,8$)

Data Bangkitan	Nilai Duga Parameter Model AR(1)
1	0.785469
2	0.812773
3	0.64812
4	0.805043
5	0.786282
6	0.855175
7	0.71216
8	0.727559
9	0.725483
10	0.764612

Setelah dilakukan pendugaan parameter model, maka plot prediksi untuk observasi dapat dibuat dengan melanjutkan perhitungan *Kalman filter* hingga pada titik waktu pengamatan yang terakhir yaitu titik waktu ke- n . Gambar 4.10 menampilkan plot prediksi observasi untuk data bangkitan AR(1).

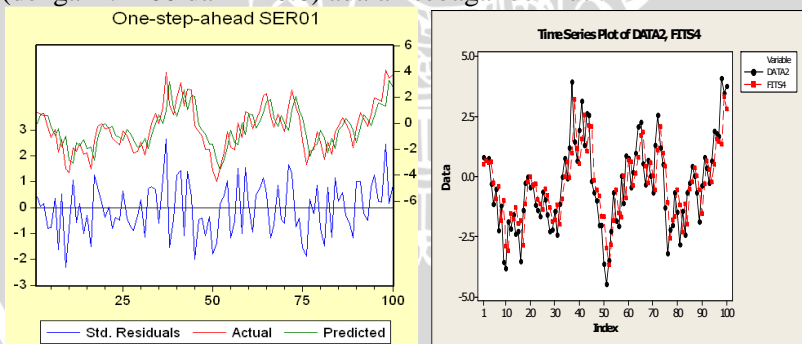
Hasil plot prediksi observasi untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\alpha=0.4$) adalah sebagai berikut :



Gambar 4.10 Hasil Plot Prediksi Observasi dan Data Bangkitan untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\alpha=0,4$)

Gambar 4.10 memberikan informasi bahwa proses prediksi pada model AR(1) tertinggal satu *lag* titik waktu terhadap data bangkitannya. Hal tersebut ditampilkan baik pada hasil prediksi model AR(1) Box-Jenkins maupun hasil prediksi model AR(1) *State Space*.

Hasil plot prediksi observasi untuk data bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\alpha=0.8$) adalah sebagai berikut :



Gambar 4.11 Hasil Plot Prediksi Observasi dan Data Bangkitan untuk Data Bangkitan AR(1) (dengan $n=100$ dan $\alpha=0,8$)

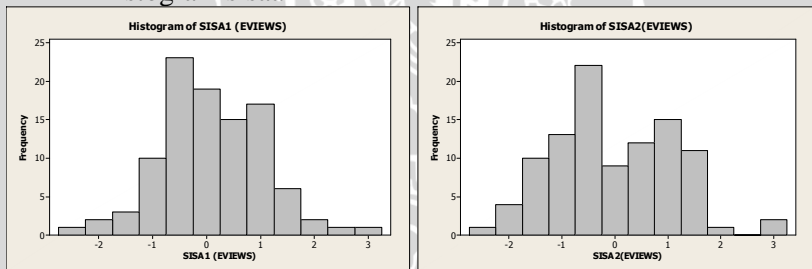
Gambar 4.11 juga memberikan informasi bahwa proses prediksi pada model AR(1) tertinggal satu *lag* titik waktu terhadap data bangkitannya. Hal tersebut ditampilkan baik pada hasil prediksi model AR(1) Box-Jenkins maupun hasil prediksi model AR(1) *State Space*.

4.5 Uji Diagnostik Model AR(1) dari *State Space*

Nilai-nilai sisaan untuk uji kelayakan model diperoleh dari hasil perhitungan prediksi observasi pada metode *Kalman filter*. Hasil uji kelayakan model untuk data bangkitan adalah sebagai berikut :

Hasil uji kelayakan model untuk data bangkitan AR(1) adalah sebagai berikut :

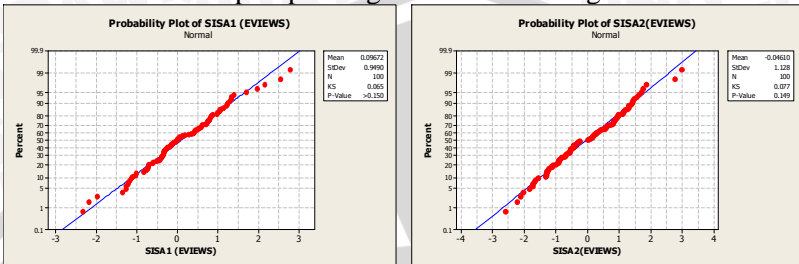
1. Hasil secara deskriptif dilakukan dengan memeriksa histogram sisaan



Gambar 4.12 Histogram Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1)

Gambar 4.12 secara deskriptif, menunjukkan bahwa sebagian besar frekuensi bernilai tinggi pada sisaan nol, hal ini memberikan informasi bahwa sisaan dari model AR(1) *State Space* untuk data bangkitan AR(1) memiliki rata-rata nol dan bentuk histogram tersebut mendekati distribusi normal.

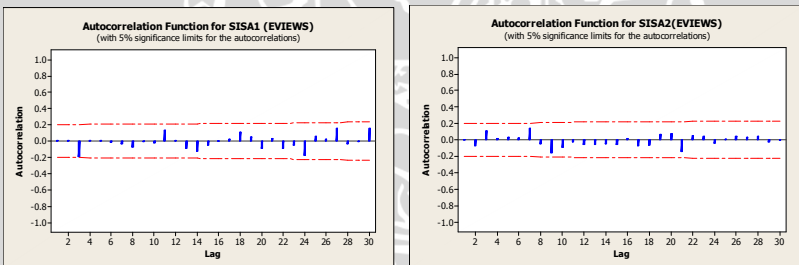
2. Uji kenormalan secara deskriptif dilakukan dengan memeriksa plot peluang kenormalan sebagai berikut :



Gambar 4.13 Plot Peluang Kenormalan Sisaan untuk Data Bangkitan

Hasil plot pada Gambar 4.13 menunjukkan bahwa sisaan memiliki nilai rata-rata 0,09672 dan -0,0461 . Hasil yang terpenting adalah nilai *P-Value* 0,15 dan 0,149 yang lebih besar dari taraf nyata 0.05, hal ini memberikan kesimpulan bahwa sisaan memiliki distribusi normal.

3. Hasil plot ACF sisaan adalah sebagai berikut :



Gambar 4.14 Plot ACF Sisaan untuk Data Bangkitan AR(1)

Hasil Gambar 4.14 menunjukkan bahwa sisaan berdistribusi secara normal dan seluruh nilai koefisien autokorelasi berada dalam selang. Hal tersebut mengindikasikan bahwa tidak terdapat autokorelasi dalam sisaan, sehingga dapat diperoleh kesimpulan bahwa model AR(1) *State Space* layak untuk data bangkitan AR(1).

4.6 Perbandingan *Mean Square Error* (MSE) untuk Nilai Penduga Parameter Model antara Metode UMLE dan Metode *Kalman filter*

Hasil perbandingan MSE setiap spesifikasi nilai parameter ϕ antara metode UMLE dan *Kalman filter* ditampilkan pada Tabel 4.5 berikut ini :

Tabel 4.5 Hasil Perbandingan MSE Setiap Spesifikasi Nilai Parameter ϕ pada Data Bangkitan AR(1)

Nilai Parameter ϕ Sebenarnya	Nilai MSE Pendugaan Parameter Model AR(1)	
	Metode UMLE	Metode <i>Kalman Filter</i>
-0,9	0,001268	0,001312
-0,8	0,001873	0,001748
-0,7	0,002834	0,002771
-0,6	0,002563	0,002551
-0,5	0,002946	0,002868
-0,4	0,006574	0,006303
-0,3	0,003214	0,003302
-0,2	0,005901	0,005838
-0,1	0,005491	0,005466
0,1	0,005405	0,005308
0,2	0,012386	0,012506
0,3	0,012366	0,011980
0,4	0,006403	0,006258
0,5	0,004756	0,004287
0,6	0,005433	0,005464
0,7	0,004088	0,004067
0,8	0,004198	0,004647
0,9	0,006373	0,006819

Nilai MSE yang lebih kecil ditunjukkan oleh warna coklat pada Tabel 4.5 (dengan pengambilan 6 angka dibelakang koma) . Hasil tersebut menunjukkan bahwa metode UMLE menghasilkan nilai

MSE yang lebih kecil daripada metode *Kalman filter* pada data bangkitan dengan spesifikasi parameter ϕ yaitu -0,9 , -0,3 , 0,2 , 0,6 , 0,8 , dan 0,9. Sedangkan metode *Kalman filter* menghasilkan MSE yang lebih kecil daripada metode UMLE pada data bangkitan dengan spesifikasi ϕ yaitu -0,8 , -0,7 , -0,6 , -0,5 , -0,4 , -0,2 , -0,1 , 0,1 , 0,3 , 0,4 , 0,5 dan 0,7.

Tabel 4.6 Hasil Perbandingan MSE Rata-rata untuk Nilai Parameter ϕ pada Data Bangkitan AR(1)

Nilai MSE Rata-rata Pendugaan Parameter Model AR(1)	
Metode UMLE	Metode <i>Kalman Filter</i>
0,005255	0,005197

Metode *Kalman filter* menghasilkan nilai MSE 0,005197 yang lebih kecil dibandingkan dengan metode UMLE sebesar 0,005255.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari 18 macam data bangkitan yang digunakan, metode UMLE menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk 6 macam data bangkitan (dengan persentase 33,33 % dari keseluruhan data). Sedangkan metode *Kalman Filter* menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk 12 macam data bangkitan (dengan persentase 66,66 % dari keseluruhan data). Hal ini memberikan kesimpulan bahwa metode *Kalman Filter* lebih akurat dibandingkan dengan metode *Unconditional Maximum Likelihood Estimation* (UMLE) dalam menduga parameter model AR(1).

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Hasil penelitian menunjukkan bahwa dari 18 macam data bangkitan yang digunakan, metode UMLE menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk 6 macam data bangkitan (dengan persentase 33,33 % dari keseluruhan data). Sedangkan metode *Kalman Filter* menghasilkan nilai MSE yang lebih kecil untuk 12 macam data bangkitan (dengan persentase 66,66 % dari keseluruhan data). Hal ini memberikan kesimpulan bahwa metode *Kalman Filter* lebih akurat dibandingkan dengan metode *Unconditional Maximum Likelihood Estimation* (UMLE) dalam menduga parameter model AR(1).

5.2 Saran

Sebaiknya pada penelitian selanjutnya dikembangkan suatu perbandingan antara metode *Kalman filter* dan metode UMLE dalam menduga parameter model AR(1) untuk kasus multivariat.

DAFTAR PUSTAKA

- Arsyad, L. 1994. **Peramalan Bisnis**. Edisi Pertama. BPFE. Yogyakarta.
- Box, G.E.P. dan Jenkins, G.M. 1976. **Time Series Analysis Forecasting and Control**. Revised Edition. Holdenday Inc, San Fransisco.
- Box, Jenkin. Reisel. 1994. **Time Series Analysis and Control Forecasting**. Prentice Hall. New Yersey.
- Cappe, O, Eric M. and T. Ryden. 2005. **Inference in Hidden Markov Models**. Springer Science+Bussines Media. New York.
- Commandeur, J. J. F. and S. J. Koopman. 2007. **an Introduction to State Space Time Series Analysis**. Oxford University Press. New York.
- Cryer, J. 1986. **Time Series Analysis**. PWS-KENT Publishing Company. Boston.
- Cryer, J. D. and Kung-Sik, C. 2008. **Time Series Analysis. With Application in R**. Second Edition. Springer Science+Business Media. New York.
- Hanke, J.E., A.G. Reitsch dan D.W. Wichern. 2003. **Peramalan Bisnis**. Edisi Ketujuh. Alih Bahasa: Devy Anantanur. PT. Prehallindo. Jakarta.
- Harvey, A. C. 1993. **Time Series Models**. Second Edition. Hemel Hempstead Harvester Wheatsheaf.

Makridakis, S., S. C. Wheelwright dan V. E. McGee. 1983. **Metode dan Aplikasi Peramalan**. Edisi Kedua Jilid Satu. Alih Bahasa: Ir. Untung Sus Adriyanto, M.Sc dan Ir. Abdul Basith, M.Sc. Erlangga. Jakarta.

Wei, W. W. S. 1990. **Time Series Analysis** : Univariate and Multivariate Methods. Addison-Wesley. California.

Wei, W.W.S. 1994. **Time Series Analysis. Univariate and Multivariate Methods**. Second Edition. Addison Wesley Publishing Company. New York.



Lampiran 1. Makro Minitab Simulasi Data AR(1)

```
gmacro # Macro name AR1.MAC
arl # Written by Jon Cryer, University of
Iowa, Jon-Cryer@uiowa.edu
Note
Note This macro simulates a stationary AR1
process.
Note
Note Enter the desired sample size and press
Enter.
Set C3;
  file 'terminal';
  NObs 1.
Let K3=C3(1) # Sample size
Note Enter AR1 parameter (phi). (strictly
between -1 and +1)
Set C3;
  file 'terminal';
  Nobs 1.
Note ...working, please be patient...
Let K4=C3 # AR1 parameter
Let K5=K3+1
Rand K5 C2 # the noise
Erase C1
Let C1(1)=C2(K5)/sqrt(1-K4*K4)
Do K1=2:K3
  Let K2=K1-1
  Let C1(K1)=K4*C1(K2)+C2(K1)
EndDo
Note The simulated series is in C1.
Erase c2 c3 K1-K5
EndMacro
```

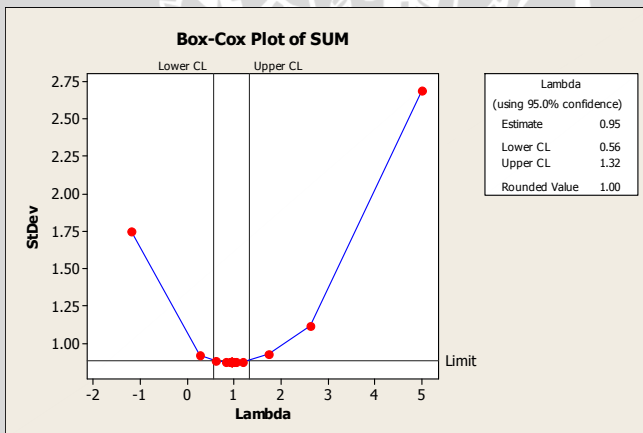
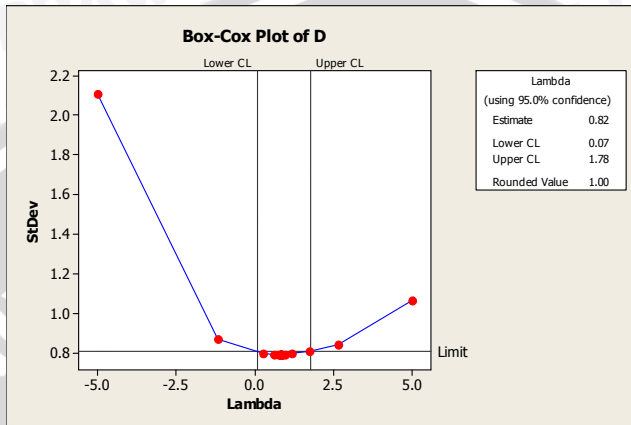
Pembangkitan data bangkitan AR(1) dimulai dengan tahap *input* ukuran sampel observasi (dikodekan Let K3=C3(1)) kemudian *input* untuk nilai parameter ϕ (dikodekan Let K4=C3). Selanjutnya set penjumlahan ukuran sampel dengan nilai scalar satu (dikodekan Let

Lampiran 1 (Lanjutan)

$K5=K3+1$) kemudian bangkitkan proses *noise* secara acak atau random (dikodekan dengan *comment* Rand K5 C2). Setelah diperoleh nilai-nilai proses *noise* bangkitan tersebut, maka dapat diperoleh data observasi pada *cell* 1minitab (dikodekan C1(1)) dengan cara membagi hasil tersebut dengan akar kuadrat dari $(1 - \phi^2)$ *comment* sebagai berikut (Let C1(1)=C2(K5) / sqrt (1-K4*K4) hingga *comment* (Let C1 (K1)=K4*C1 (K2) + C2 (K1), kemudian hasil tampilan data bangkitan AR(1) ditampilkan pada *cell* 1 minitab (C(1)) dan nilai *input* sebelumnya dihapus dengan menggunakan *comment* (Erase C2 C3 K1-K5).



Lampiran 2. Hasil Transformasi Box-Cox Data Bangkitan AR(1) untuk $\phi = 0,4$ dan $\phi = 0,8$



Lampiran 3. Hasil Pendugaan Parameter Model Menggunakan Metode UMLE untuk Data Bangkitan AR(1) dengan $\phi=0,4$

ARIMA Model: DATA1					
Estimates at each iteration					
Iteration		SSE	Parameters		
0		98.9753	0.100		
1		92.1609	0.250		
2		90.0921	0.383		
3		90.0869	0.390		
4		90.0869	0.390		
Final Estimates of Parameters					
Type		Coef	SE Coef	T	P
AR	1	0.3901	0.0928	4.20	0.000
Number of observations: 100					
Residuals: SS = 90.0864 (backforecasts excluded)					
MS = 0.9100 DF = 99					
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic					
Lag		12	24	36	48
Chi-Square		7.1	18.9	37.3	44.9
DF		11	23	35	47
P-Value		0.789	0.710	0.364	0.559

Lampiran 4. Hasil Pendugaan Parameter Model Menggunakan Metode UMLE untuk Data Bangkitan AR(1) dengan $\phi=0,8$

ARIMA Model: DATA2					
Estimates at each iteration					
Iteration		SSE	Parameters		
0		293.175	0.100		
1		230.223	0.250		
2		182.053	0.400		
3		148.665	0.550		
4		130.059	0.700		
5		125.818	0.807		
6		125.804	0.813		
7		125.804	0.814		
Final Estimates of Parameters					
Type		Coef	SE Coef	T	P
AR	1	0.8138	0.0621	13.11	0.000
Number of observations: 100					
Residuals: SS = 125.661 (backforecasts excluded)					
MS = 1.269 DF = 99					
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square statistic					
Lag		12	24	36	48
Chi-Square		9.0	16.0	21.9	32.1
DF		11	23	35	47
P-Value		0.625	0.855	0.959	0.953

Lampiran 5. Hasil Spesifikasi Model AR(1) dari State Space untuk Data Bangkitan AR(1)

```
EViews - [Sspace: UNTITLED  Workfile: UNTITLED]
File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help
View Procs Objects Print Name Freeze Spec Estimate Stats Forecast
@signal BANGKITAN = sv1
@state sv1 = c(2)*sv1(-1) + [var = exp(c(1))]
```



Lampiran 6 . Contoh Metode *Backasting* Model AR(1) dengan $n = 10$, Wei (1994).

Berikut ini merupakan contoh perhitungan metode *Backasting* untuk fungsi *Sum of Square* $S(\phi = 0.3)$. Sebelumnya, hasil perhitungan pada setiap iterasi akan ditampilkan pada tabel hasil. Keterangan untuk Kolom $E(Z_t|Z)$ untuk $t=1,2,3,\dots,10$, misal parameter $\phi = 0.3$ dan *Unconditional sum of square* ,

$$s(\phi = 0.3) = \sum_{t=-M}^{10} [E(a_t | \phi = 0.3, Z)]^2$$

Dimana M dipilih berdasarkan $|E(Z_t | \phi = 0.3, Z) - E(Z_{t-1} | \phi = 0.3, Z)| < 0.005$ untuk $t \leq -(M + 1)$. Dengan tujuan untuk mempermudah notasi maka keterangan nilai $E(a_t | \phi = -0.3, Z)$ adalah ditulis dengan notasi $E(a_t | Z)$ sedangkan $E(Z_t | \phi = -0.3, Z)$ ditulis dengan notasi $E(Z_t | Z)$.

Berikutnya untuk memperoleh nilai-nilai $E(a_t | Z)$ digunakan rumus berikut ini,

$$E(a_t | Z) = E(Z_t | Z) - \phi E(Z_{t-1} | Z)$$

Nilai $E(a_t | Z)$ untuk $t \leq 1$, namun untuk menentukan nilai Z_t pada $t \leq 0$ digunakan *Backcast* sehingga menggunakan Persamaan (2.24).

$$E(Z_t | Z) = E(e_t | Z) + \phi E(Z_{t+1} | Z)$$

$$E(e_t | Z) = 0 \text{ untuk } t \leq 0$$

sehingga, untuk $\phi = 0.3$ dapat dihitung

$$E(Z_0 | Z) = E(e_0 | Z) + 0.3E(Z_1 | Z)$$

$$= 0 + (0.3)(-0.2) = -0.6$$

$$E(Z_{-1} | Z) = E(e_{-1} | Z) + 0.3E(Z_0 | Z)$$

Lampiran 6. (Lanjutan)

$$\begin{aligned}
 &= 0 + (0.3)(-0.6) = -0.18 \\
 E(Z_{-2}|Z) &= E(e_{-2}|Z) + 0.3E(Z_{-1}|Z) \\
 &= 0 + (0.3)(-0.18) = -0.0054 \\
 E(Z_{-3}|Z) &= E(e_{-3}|Z) + 0.3E(Z_{-2}|Z) \\
 &= 0 + (0.3)(-0.0054) = -0.00162.
 \end{aligned}$$

Karena nilai $|E(Z_{-3}|Z) - E(Z_{-2}|Z)| = 0.00378 < 0.005$, sehingga dapat ditentukan nilai M yaitu $M = 2$. Dengan nilai *Backcast* Z_t untuk $t \leq 0$, kembali pada Persamaan (2.23) *forward form* untuk menghitung nilai $E(a_t|Z)$ pada nilai $\phi = 0.3$ dan $-2 \leq t \leq 10$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 E(a_{-2}|Z) &= E(Z_{-2}|Z) - 0.3E(Z_{-3}|Z) \\
 &= -0.0054 - (0.3)(-0.00162) = -0.0049 \\
 E(a_{-1}|Z) &= E(Z_{-1}|Z) - 0.3E(Z_{-2}|Z) \\
 &= -0.018 - (0.3)(-0.0054) = -0.0164 \\
 E(a_0|Z) &= E(Z_0|Z) - 0.3E(Z_{-1}|Z) \\
 &= -0.06 - (0.3)(-0.018) = -0.0546 \\
 E(a_1|Z) &= E(Z_1|Z) - 0.3E(Z_0|Z) \\
 &= -0.2 - (0.3)(-0.06) = -0.182 \\
 E(a_2|Z) &= E(Z_2|Z) - 0.3E(Z_1|Z) \\
 &= -0.4 - (0.3)(-0.2) = -0.349 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 E(a_{10}|Z) &= E(Z_{10}|Z) - 0.3E(Z_9|Z) \\
 &= -0.2 - (0.3)(-0.1) = -0.17
 \end{aligned}$$

Dari seluruh perhitungan tersebut sehingga diperoleh nilai *Sum of Square* berikut ini :

$$s(\phi = 0.3) = \sum_{t=-2}^{10} [E(a_t | \phi = 0.3, Z)]^2 = 0.8232$$

Lampiran 6. (Lanjutan)

Tabel berikut ini merupakan ringkasan seluruh perhitungan di atas.

t	$E(a_t Z)$	$-0.3E(Z_{t-1} Z)$	$E(Z_t Z)$	$0.3E(Z_{t+1} Z)$	$E(e_t Z)$
-3			-0.0016	-0.0016	0
-2	-0.0049	0.0005	-0.0054	-0.0054	0
-1	-0.0164	0.0016	-0.018	-0.018	0
0	-0.0546	0.0054	-0.06	-0.06	0
1	-0.182	0.018	-0.2		
2	-0.34	0.06	-0.4		
3	-0.38	0.12	-0.5		
4	-0.35	0.15	-0.5		
5	-0.45	0.15	-0.6		
6	-0.32	0.18	-0.5		
7	-0.25	0.15	-0.4		
8	-0.08	0.12	-0.2		
9	-0.04	0.06	-0.1		
10	-0.17	0.03	-0.2		

Perhitungan nilai *Sum of Square* untuk nilai ϕ yang lain dapat dilakukan dengan cara seperti di atas, sehingga dapat diperoleh nilai SSE yang paling minimum.

Lampiran 7. Hasil Pendugaan Parameter Model Menggunakan Metode *Kalman filter* untuk Data Bangkitan AR(1) dengan $\phi=0,4$ dan $\phi=0,8$

EViews - [Sspace: UNTITLED Workfile: UNTITLED]				
File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help				
View Procs Objects Print Name Freeze Spec Estimate Stats Forecast				
Sspace: UNTITLED				
Method: Maximum likelihood (Marquardt)				
Date: 06/09/11 Time: 16:49				
Sample: 1 100				
Included observations: 100				
Estimation settings: tol= 0.00010, derivs=accurate numeric				
Initial Values: C(1)=0.00000, C(2)=0.00000				
Convergence achieved after 8 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	-0.104375	0.133451	-0.782126	0.4341
C(2)	0.386287	0.094966	4.067629	0.0000
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	-0.294903	0.949151	-0.310702	0.7560
Log likelihood	-136.7557	Akaike info criterion		2.775115
Parameters	2	Schwarz criterion		2.827218
Diffuse priors	0	Hannan-Quinn criter.		2.796202

EViews - [Sspace: UNTITLED Workfile: UNTITLED]				
File Edit Objects View Procs Quick Options Window Help				
View Procs Objects Print Name Freeze Spec Estimate Stats Forecast				
Sspace: UNTITLED				
Method: Maximum likelihood (Marquardt)				
Date: 06/09/11 Time: 16:52				
Sample: 1 100				
Included observations: 100				
Estimation settings: tol= 0.00010, derivs=accurate numeric				
Initial Values: C(1)=0.00000, C(2)=0.00000				
Convergence achieved after 14 iterations				
	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C(1)	0.229751	0.163897	1.401799	0.1610
C(2)	0.805043	0.063089	12.76038	0.0000
	Final State	Root MSE	z-Statistic	Prob.
SV1	3.036270	1.121734	2.706765	0.0068
Log likelihood	-153.9039	Akaike info criterion		3.118078
Parameters	2	Schwarz criterion		3.170181
Diffuse priors	0	Hannan-Quinn criter.		3.139165

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
-0.9	1	-0,9109
	2	-0,9077
	3	-0,8879
	4	-0,9614
	5	-0,8964
	6	-0,9438
	7	-0,8638
	8	-0,888
	9	-0,9217
	10	-0,8312
-0.8	1	-0,8648
	2	-0,8287
	3	-0,867
	4	-0,8349
	5	-0,8111
	6	-0,7886
	7	-0,7445
	8	-0,8289
	9	-0,7383
	10	-0,7952
-0.7	1	-0,785
	2	-0,6761
	3	-0,7534
	4	-0,7302
	5	-0,7151
	6	-0,7189
	7	-0,6321
	8	-0,6192
	9	-0,6535
	10	-0,7538

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
-0.6	1	-0,6463
	2	-0,6025
	3	-0,6477
	4	-0,5452
	5	-0,6675
	6	-0,5073
	7	-0,629
	8	-0,5529
	9	-0,632
	10	-0,5689
-0.5	1	-0,5004
	2	-0,4829
	3	-0,5854
	4	-0,4389
	5	-0,5
	6	-0,5159
	7	-0,617
	8	-0,46
	9	-0,4926
	10	-0,4496
-0.4	1	-0,3903
	2	-0,4478
	3	-0,5274
	4	-0,3828
	5	-0,5332
	6	-0,4507
	7	-0,3325
	8	-0,3333
	9	-0,3118
	10	-0,4987

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
-0.3	1	-0,3302
	2	-0,2265
	3	-0,2752
	4	-0,1943
	5	-0,2902
	6	-0,2065
	7	-0,3214
	8	-0,2761
	9	-0,2805
	10	-0,3616
-0.2	1	-0,213
	2	-0,1878
	3	-0,1233
	4	-0,1493
	5	-0,0866
	6	-0,3106
	7	-0,114
	8	-0,2106
	9	-0,3232
	10	-0,1504
-0.1	1	-0,0798
	2	-0,1454
	3	-0,0725
	4	-0,0059
	5	-0,0893
	6	-0,0535
	7	0,081
	8	-0,0192
	9	-0,0723
	10	-0,1222

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.0	1	0,0048
	2	0,0785
	3	0,0464
	4	0,0527
	5	0,0021
	6	0,1521
	7	0,1409
	8	0,0995
	9	-0,0586
	10	0,0429
0.1	1	0,1811
	2	0,1625
	3	0,0434
	4	0,1635
	5	-0,0476
	6	0,0515
	7	0,1195
	8	0,0101
	9	0,1604
	10	0,1089
0.2	1	0,0667
	2	0,2314
	3	0,2418
	4	0,1833
	5	0,3746
	6	0,2153
	7	0,1806
	8	0,3273
	9	0,0291
	10	0,363

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.3	1	0,2741
	2	0,4148
	3	0,2621
	4	0,1463
	5	0,2637
	6	0,2217
	7	0,4655
	8	0,4764
	9	0,2724
	10	0,4343
0.4	1	0,4582
	2	0,436
	3	0,347
	4	0,404
	5	0,4484
	6	0,5012
	7	0,3901
	8	0,2183
	9	0,348
	10	0,4901
0.5	1	0,6201
	2	0,5668
	3	0,5583
	4	0,4408
	5	0,6016
	6	0,5679
	7	0,4574
	8	0,5103
	9	0,5011
	10	0,5701

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.6	1	0,6585
	2	0,5903
	3	0,6329
	4	0,6646
	5	0,6628
	6	0,4445
	7	0,5543
	8	0,4865
	9	0,5771
	10	0,644
0.7	1	0,7814
	2	0,6586
	3	0,6403
	4	0,679
	5	0,6021
	6	0,7893
	7	0,6431
	8	0,7387
	9	0,7774
	10	0,6843
0.8	1	0,7935
	2	0,8217
	3	0,6545
	4	0,8138
	5	0,795
	6	0,8635
	7	0,7193
	8	0,7349
	9	0,7328
	10	0,7721

Lampiran 8. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode UMLE pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.9	1	0,9438
	2	0,9549
	3	0,7572
	4	0,8616
	5	0,9507
	6	0,9291
	7	0,9202
	8	0,8348
	9	0,7474
	10	0,8254



Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode *Kalman filter* pada Data Bangkitan

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
-0.9	1	-0,902545
	2	-0,898678
	3	-0,878507
	4	-0,952911
	5	-0,888147
	6	-0,935062
	7	-0,855648
	8	-0,879209
	9	-0,91313
	10	-0,823122
-0.8	1	-0,85642
	2	-0,820567
	3	-0,858611
	4	-0,826919
	5	-0,802697
	6	-0,780252
	7	-0,737014
	8	-0,820642
	9	-0,730983
	10	-0,787352
-0.7	1	-0,777211
	2	-0,669411
	3	-0,746118
	4	-0,72304
	5	-0,707868
	6	-0,711851
	7	-0,62585
	8	-0,613131
	9	-0,646943
	10	-0,745766

Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode Kalman filter pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
-0.6	1	-0,639745
	2	-0,596435
	3	-0,641401
	4	-0,539576
	5	-0,660741
	6	-0,502285
	7	-0,62281
	8	-0,54745
	9	-0,625822
	10	-0,563052
-0.5	1	-0,49535
	2	-0,478205
	3	-0,579526
	4	-0,434573
	5	-0,494853
	6	-0,510785
	7	-0,610858
	8	-0,455491
	9	-0,487672
	10	-0,445155
-0.4	1	-0,386097
	2	-0,443289
	3	-0,522258
	4	-0,378442
	5	-0,52795
	6	-0,446233
	7	-0,329006
	8	-0,329999
	9	-0,308776
	10	-0,493712

Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode Kalman filter pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
-0.3	1	-0,326725
	2	-0,224213
	3	-0,272496
	4	-0,192329
	5	-0,28707
	6	-0,204433
	7	-0,318175
	8	-0,273359
	9	-0,2776
	10	-0,358025
-0.2	1	-0,210821
	2	-0,185871
	3	-0,122065
	4	-0,147813
	5	-0,085785
	6	-0,307497
	7	-0,112822
	8	-0,208402
	9	-0,319906
	10	-0,14887
-0.1	1	-0,079027
	2	-0,143963
	3	-0,071761
	4	-0,005796
	5	-0,088434
	6	-0,05298
	7	0,08018
	8	-0,019008
	9	-0,071562
	10	-0,120973

Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode Kalman filter pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.0	1	0,004755
	2	0,077707
	3	0,045927
	4	0,052157
	5	0,002106
	6	0,150457
	7	0,139459
	8	0,098537
	9	-0,058018
	10	0,042445
0.1	1	0,179315
	2	0,160854
	3	0,042951
	4	0,161881
	5	-0,047102
	6	-0,051014
	7	0,118348
	8	0,009959
	9	0,158779
	10	0,107776
0.2	1	0,066082
	2	0,229089
	3	0,239399
	4	0,181476
	5	0,370728
	6	0,213142
	7	0,178772
	8	0,324069
	9	0,028788
	10	0,359408

Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode Kalman filter pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.3	1	0,271038
	2	0,410706
	3	0,259525
	4	0,144836
	5	0,261067
	6	0,219535
	7	0,460876
	8	0,471402
	9	0,26973
	10	0,429705
0.4	1	0,45355
	2	0,431569
	3	0,343522
	4	0,399782
	5	0,443972
	6	0,496049
	7	0,386287
	8	0,216072
	9	0,344538
	10	0,485276
0.5	1	0,613574
	2	0,560917
	3	0,552855
	4	0,436312
	5	0,595607
	6	0,562134
	7	0,452736
	8	0,505264
	9	0,49583
	10	0,564229

Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode Kalman filter pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.6	1	0,651858
	2	0,583474
	3	0,626633
	4	0,658066
	5	0,656045
	6	0,440057
	7	0,548453
	8	0,481748
	9	0,571393
	10	0,637624
0.7	1	0,773724
	2	0,651999
	3	0,634005
	4	0,672155
	5	0,596206
	6	0,781352
	7	0,636728
	8	0,731449
	9	0,769841
	10	0,676703
0.8	1	0,785469
	2	0,812773
	3	0,64812
	4	0,805043
	5	0,786282
	6	0,855175
	7	0,71216
	8	0,727559
	9	0,725483
	10	0,764612

Lampiran 9. Hasil Pendugaan Parameter Model AR(1) Menggunakan Metode *Kalman filter* pada Data Bangkitan (Lanjutan)

Nilai Parameter ϕ	Data Bangkitan	Nilai Duga $\hat{\phi}$
0.9	1	0,932728
	2	0,945368
	3	0,749707
	4	0,85297
	5	0,942445
	6	0,920703
	7	0,911515
	8	0,826818
	9	0,74006
	10	0,81656



Lampiran 10. Hasil Penurunan Fungsi *Sum of Square* $S(\phi)$ terhadap Parameter ϕ

Untuk memperoleh Persamaan Normal, fungsi *Sum of Square* tersebut harus diturunkan terhadap parameter ϕ dan disamadengankan nol berikut ini :

$$\begin{aligned} \frac{\partial[S(\phi)]}{\partial[\phi]} &= \frac{\partial[\sum_{t=2}^n (y_t - \phi \alpha_{t-1})^2 + (1 - \phi^2) y_1^2]}{\partial[\phi]} = 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{t=2}^n (y_t - \hat{\phi} y_{t-1})(-y_{t-1}) + y_1^2 (1 - \hat{\phi}^2)^{-1} (-2\hat{\phi}) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 \sum_{t=2}^n (y_t - \hat{\phi} y_{t-1})(y_{t-1}) + \frac{(-2\hat{\phi} y_1^2)}{(1 - \hat{\phi}^2)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{t=2}^n (y_t - \hat{\phi} y_{t-1})(y_{t-1}) &= \left(\frac{2\hat{\phi} y_1^2}{-2(1 - \hat{\phi}^2)} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{t=2}^n (y_t - \hat{\phi} y_{t-1})(y_{t-1}) &= \left(-\frac{\hat{\phi} y_1^2}{(1 - \hat{\phi}^2)} \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{t=2}^n y_t y_{t-1} - \hat{\phi} \sum_{t=2}^n y_{t-1}^2 &= -\frac{\hat{\phi} y_1^2}{(1 - \hat{\phi}^2)} \\ \Leftrightarrow \hat{\phi} \sum_{t=2}^n y_{t-1}^2 &= \frac{\hat{\phi} y_1^2}{(1 - \hat{\phi}^2)} + \sum_{t=2}^n y_t y_{t-1} \\ \Leftrightarrow \hat{\phi} &= \frac{\hat{\phi} y_1^2 + (1 - \hat{\phi}^2) \sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}}{(1 - \hat{\phi}^2) \sum_{t=2}^n y_{t-1}^2} \end{aligned}$$

Hasil menunjukkan bahwa fungsi tersebut nonlinier terhadap parameter, sehingga pendugaan parameter model dilakukan dengan menggunakan metode pendugaan nonlinier.

Lampiran 11. Perhitungan Metode Iterasi *Marquardt* pada Data Bangkitan AR(1)

Langkah awal dalam perhitungan iterasi *marquardt* adalah menentukan nilai awal ϕ^0 (nilai awal tersebut adalah nol, yang merupakan *default* dari *Software Eviews*). Tahap selanjutnya menyelesaikan Persaman Normal yang berasal dari turunan pertama fungsi *Sum of Square* terhadap parameter ϕ . Setelah itu menentukan nilai skalar dari setiap iterasi yang dinotasikan dengan λ di mana $0 < \lambda \leq 1$ dan iterasi tersebut berhenti pada saat nilai iterasi tersebut sudah konvergen yaitu $|\phi^{k+1} - \phi^k| \leq \varepsilon$. Fungsi $S(\phi)$ adalah sebagai berikut :

$$\sum_{t=2}^n (y_t - \phi \alpha_{t-1})^2 + (1 - \phi^2) y_1^2$$

Sedangkan turunan pertama fungsi tersebut terhadap parameter ϕ menghasilkan Persamaan Normal sebagai berikut :

$$\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1} - \hat{\phi} \left[\sum_{t=2}^n y_{t-1}^2 - \frac{y_1^2}{(1-\phi^2)} \right] = 0$$

Karena Persamaan Normal tersebut nonlinier terhadap parameter ϕ maka cara yang tepat untuk menyelesaikan persamaan normal tersebut adalah dengan menggunakan metode numeric untuk melakukan penaksiran secara iterasi. Persamaan iterasi *marquardt* dituliskan sebagai berikut :

$$\hat{\phi}^{n+1} = \phi^n - t_n (D(\phi^n)' D(\phi^n) + \lambda_n I_k)^{-1} \left[\frac{\partial S(\phi)}{\partial (\phi)} \right]_{\phi=\hat{\phi}}$$

Proses untuk iterasi pertama awalnya ditentukan nilai awal parameter $\phi^0 = 0$ dari *default Eviews*, kemudian menentukan vector

Lampiran 11. (Lanjutan)

$D(\phi^n)'D(\phi^n)$ di mana $D_{ik}^{(0)} = \left[\frac{\partial S(\phi)}{\partial(\phi)} \right]$ vektor tersebut memiliki elemen data deret waktu. Kemudian dihitung $[D^0 'D^0 + \lambda_n I_k]^{-1}$ serta hasil penyelesaian persamaan $\left[\frac{\partial S(\phi)}{\partial(\phi)} \right]$ turunan pertama fungsi Sum of Suare terhadap nilai parameter awal atau pada setiap hasil iterasi. Selanjutnya dihitung perkalian $[D^0 'D^0 + \lambda_n I_k]^{-1} \left[\frac{\partial S(\phi)}{\partial(\phi)} \right]$ sehingga akan diperoleh nilai parameter baru hasil iterasi pertama $\phi^{(1)}$. Nilai baru ini berasal dari selisih antara nilai awal nol dengan hasil perkalian tersebut. Sehingga dapat diketahui besarnya nilai SSE dari setiap iterasi yang dilakukan dan juga nilai SSE yang minimum apabila iterasi sudah mencapai konvergen.

