

**KONDISI BATAS TRANSPARAN  
UNTUK PERSAMAAN FRESNEL**

**SKRIPSI**

Oleh:  
**REYMOND PURNOMO**  
**0710940005-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**KONDISI BATAS TRANSPARAN  
UNTUK PERSAMAAN FRESNEL**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

**REYMOND PURNOMO**

**0710940005-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2011**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**KONDISI BATAS TRANSPARAN  
UNTUK PERSAMAAN FRESNEL**

Oleh:  
**REYMOND PURNOMO**  
**0710940005-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 25 Mei 2011  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc.**  
**NIP. 196908071994121001**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**  
**NIP. 196709071992031001**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.**  
**NIP. 196709071992031001**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

**Nama** : Reymond Purnomo  
**Nim** : 0710940005-94  
**Jurusan** : Matematika  
**Penulis Skripsi berjudul** : Kondisi Batas Transparan untuk  
Persamaan Fresnel

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Skripsi ini adalah benar-benar karya saya sendiri dan bukan hasil plagiat dari karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam daftar pustaka semata-mata digunakan sebagai acuan atau referensi.
2. Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 25 Mei 2011  
Yang menyatakan,

( Reymond Purnomo )  
NIM 0710940005-94



UNIVERSITAS BRAWIJAYA





# KONDISI BATAS TRANSPARAN UNTUK PERSAMAAN FRESNEL

## ABSTRAK

Kondisi batas memiliki peranan yang sangat penting dalam mensimulasikan perambatan gelombang, misal gelombang optik yang dimodelkan oleh persamaan Fresnel atau metode perambatan berkas. Karena keterbatasan ukuran memori komputer, persamaan Fresnel tidak dapat disimulasikan pada domain tak hingga. Akibatnya, domain tersebut harus dibatasi dengan kondisi batas transparan. Skripsi ini membahas tentang sebuah pendekatan untuk mendesain kondisi batas transparan dari persamaan Fresnel. Kondisi batas transparan tersebut didesain dengan menggunakan kombinasi linear dari solusi pendekatan persamaan Fresnel di persekitaran titik batas. Selanjutnya, persamaan Fresnel dan kondisi batas transparan diselesaikan dengan metode beda hingga. Skema beda hingga dari persamaan Fresnel dan kondisi batas transparan diimplementasikan pada berkas Gauss pada medium linear. Hasil simulasi dari skema beda hingga tersebut menunjukkan bahwa berkas tersebut mengalami pemantulan yang kecil, sehingga pendekatan tersebut cukup baik dalam mensimulasikan perambatan suatu berkas pada domain yang terbatas.

**Kata kunci** : persamaan Fresnel, kondisi batas transparan, metode beda hingga

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# TRANSPARENCY BOUNDARY CONDITION FOR FRESNEL EQUATION

## ABSTRACT

Boundary condition plays an important role in simulation of wave propagation, such as optical wave which is modeled by Fresnel equation or beam propagation method. Because of the finiteness of memory size of computer, Fresnel equation cannot be simulated throughout the whole infinite domain. Hence, this domain must be truncated by an artificial boundary condition or transparent boundary condition. This final project presents an approach to construct a transparent boundary condition of Fresnel equation. The boundary condition is constructed by a linear combination of approximation solution of Fresnel equation in the vicinity of boundary points. Fresnel equation with the boundary conditions are solved by finite difference method. Finite difference schemes from Fresnel equation and these boundary conditions implemented for simulation of Gaussian beam in linear medium. The results from finite difference schemes simulation indicate that Gaussian beam has a little reflection, so that this approach is quite good for simulating beam propagation on the bounded domain.

**Keywords** : Fresnel equation, transparency boundary condition, finite difference method

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan dan petunjuk-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik.

Banyak pihak yang telah memberikan dukungan baik moral maupun spiritual secara langsung maupun tidak langsung dalam penyelesaian skripsi ini. Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. **Dr. Agus Suryanto, M.Sc.** selaku pembimbing I atas segala bimbingan dan motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. selaku pembimbing II dan pembimbing akademik atas segala bimbingan dan motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Kwardiniya A., S.Si., M.Si., Dra. Endang Wahyu H., M.Si., dan Drs. M. Muslikh, M.Si. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak / ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Orang tua beserta saudara yang selalu mengiringi penulis dengan segala doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesainya skripsi ini.
6. Sahabat-sahabatku, teman-teman seperjuangan matematika atas dukungan, bantuan dan doanya.
7. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan Skripsi ini. Oleh karena itu, penulis dengan senang hati menerima masukan, saran dan kritik yang membangun. Akhir kata, semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis khususnya serta semua pihak pada umumnya.

Malang, 25 Mei 2011

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xv
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	2
1.3 Tujuan .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b>	
2.1 Persamaan Diferensial .....	3
2.2 Deret Taylor .....	4
2.2.1 Deret Taylor .....	4
2.2.2 Kesalahan Pemotongan .....	5
2.3 Skema Beda Hingga .....	5
2.3.1 Skema Beda Hingga dan Notasi .....	6
2.3.2 Konsistensi dan Orde Kesalahan .....	7
2.3.3 Grid dan Stensil Beda Hingga .....	8
2.4 Skema Crank-Nicholson untuk Persamaan Difusi .....	9
2.4.1 Persamaan Difusi .....	9
2.4.2 Skema Crank-Nicholson .....	10
2.4.3 Kesalahan Pemotongan dari Skema Crank- Nicholson .....	11
2.4.4 Kestabilan dari Skema Crank-Nicholson .....	12
2.5 Persamaan Fresnel .....	12
2.6 Kondisi Batas Kontinu untuk Persamaan Gelombang .....	12
2.6.1 Persamaan Gelombang .....	12
2.6.2 Nilai Awal untuk Persamaan Gelombang .....	13
2.6.3 Kondisi Dirichlet untuk Persamaan Gelombang .....	14
2.6.4 Kondisi Neumann untuk Persamaan Gelombang .....	16
2.7 Kondisi Batas Transparan untuk Persamaan Monokromatik Satu Dimensi .....	19
2.7.1 Persamaan Gelombang Monokromatik Satu	



Dimensi .....	19
2.7.2 Kondisi Batas Transparan Kontinu .....	21
2.7.3 Kondisi Batas Transparan Diskrit .....	21
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
3.1 Skema Beda Hingga untuk Persamaan Fresnel pada Titik Interior .....	23
3.2 Kondisi Batas Transparan dan Skema Beda Hingga untuk Persamaan Fresnel untuk Titik Batas .....	24
3.3 Implementasi dan Simulasi Persamaan Fresnel .....	27
<b>BAB IV PENUTUP</b>	
4.1 Kesimpulan .....	33
4.2 Saran .....	33
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	35
<b>LAMPIRAN</b> .....	37



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Grid beda hingga .....	9
Gambar 2.2 Stensil skema Crank-Nicholson.....	10
Gambar 2.3 Grafik $v(x,t)$ untuk kondisi Dirichlet .....	17
Gambar 2.4 Grafik $v(x,t)$ untuk kondisi Neumann .....	20
Gambar 3.1 Grafik dua dimensi solusi $\psi(x,t)$ .....	30
Gambar 3.2 Grafik permukaan tiga dimensi solusi $\psi(x,t)$ .....	31
Gambar 3.3 Grafik kontur solusi $\psi(x,t)$ .....	32
Gambar 3.4 Grafik permukaan tiga dimensi solusi $\psi(x,t)$ dengan variasi $\beta$ .....	33



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Dalam dunia fisika, teknologi optik paling sering digunakan dalam peralatan berteknologi tinggi. Contohnya adalah laser, *fiber glass*, lintasan gelombang optik, sensor optik, sel solar, dan sistem pengukuran untuk berbagai macam aplikasi seperti sistem metrologi optik dan produk sehari-hari seperti *Blue-ray player*. Optik juga memainkan peran yang sangat penting dalam produksi *chip* semikonduktor (Zschiedrich, 2009).

Dalam memodelkan atau mendesain perambatan berkas pada peralatan optik, diperlukan suatu metode. Metode tersebut adalah metode perambatan berkas yang banyak digunakan dalam pemodelan optik. Metode ini efisien dan fleksibel. Metode perambatan berkas menggunakan suatu persamaan yang disebut persamaan perambatan berkas standar atau persamaan Fresnel. Persamaan tersebut merupakan analogi optik dari persamaan kuantum mekanik Schrödinger (Yang dan Jiang, 2007).

Solusi eksak dari persamaan Fresnel dapat ditentukan hanya untuk beberapa medium yang berstruktur simetris seperti pandu gelombang silindris dan lempengan. Untuk medium yang lebih kompleks seperti *Y-coupler*, solusi eksak dari persamaan tersebut sulit ditentukan, sehingga persamaan tersebut perlu diselesaikan secara numerik. Penyelesaian numerik persamaan Fresnel diperlukan untuk melakukan simulasi pada komputer.

Komputer memiliki keterbatasan memori yang mengakibatkan persamaan Fresnel tidak dapat disimulasikan pada domain tak hingga, sehingga domain tersebut harus dibatasi dengan mendesain kondisi batas buatan. Dalam kasus ini, kondisi batas buatan tidak boleh mempengaruhi perhitungan numerik dalam domain interior. Kondisi batas buatan tersebut dikenal sebagai kondisi batas transparan (Suryanto, 2000).

Pada skripsi ini, akan membahas tentang suatu pendekatan untuk desain kondisi batas transparan serta

penerapan metode beda hingga untuk menyelesaikan persamaan Fresnel secara numerik.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang pada subbab 1.1, dapat dirumuskan beberapa masalah sebagai berikut.

1. Bagaimana menyelesaikan persamaan Fresnel secara numerik menggunakan metode beda hingga?
2. Bagaimana desain kondisi batas transparan untuk persamaan Fresnel?
3. Bagaimana implementasi dan simulasi pada persamaan Fresnel dengan kondisi batas transparan?

## 1.3 Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menyelesaikan persamaan Fresnel secara numerik menggunakan metode beda hingga.
2. Menentukan kondisi batas transparan untuk persamaan Fresnel.
3. Mengimplementasikan dan mensimulasikan persamaan Fresnel dengan kondisi batas transparan.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Persamaan Diferensial

#### Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu turunan atau lebih dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Finizio dan Ladas, 1982).

Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde atau tingkat  $n$  jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke- $n$ . Suatu persamaan diferensial mempunyai derajat atau pangkat  $k$  jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial itu berpangkat  $k$  (Kartono, 1994).

Contoh :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0 \text{ memiliki orde 2 dan derajat 1.}$$

#### Definisi 2.2

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang merupakan hubungan antara turunan dari satu variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas (Soehardjo, 2001).

#### Definisi 2.3

Suatu persamaan diferensial biasa orde  $n$  adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)},$$

dengan  $y, y', \dots, y^{(n)}$  adalah fungsi dari  $x$  (Finizio dan Ladas, 1982).

Contoh :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$



### Definisi 2.4

Persamaan diferensial parsial untuk fungsi  $u(x, t)$  adalah hubungan antara  $u$  dan turunan parsialnya  $u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots$  dan dapat ditulis sebagai

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0,$$

dengan  $F$  adalah suatu fungsi terhadap  $u$  dan turunan parsialnya (Debnath, 2005).

Contoh :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

### Definisi 2.5

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi linear dan nonlinear. Persamaan diferensial parsial dikatakan linear jika variabel tak bebas  $u$  dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara linear (tidak dipangkatkan atau dikalikan). Persamaan diferensial parsial dikatakan nonlinear jika variabel tak bebas  $u$  dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara tidak linear (dipangkatkan atau dikalikan) (Farlow, 1994).

Contoh PDP linear :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Contoh PDP nonlinear :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

## 2.2 Deret Taylor

### 2.2.1 Deret Taylor

Deret Taylor merupakan dasar untuk menyelesaikan masalah dalam skema numerik, terutama penyelesaian persamaan diferensial. Bentuk umum deret Taylor  $f(x)$  di sekitar titik  $x_0$  adalah



$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^i}{i!} f^{(i)}(x_0), f^{(i)}(x_0) = \frac{d^i f(x_0)}{dx^i}.$$

Jika suatu fungsi  $u(x)$  diketahui di titik  $x_j$  dan semua turunan fungsi  $u$  terhadap  $x$  diketahui pada titik tersebut, maka deret Taylor fungsi  $u$  pada titik  $x_{j+1}$  yang terletak pada jarak  $\Delta x$  dari titik  $x_j$  dan dipotong sampai pada suku ke- $n$  adalah

$$u(x_{j+1}) = u(x_j) + u'(x_j) \frac{\Delta x}{1!} + u''(x_j) \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots + u^{(n)}(x_j) \frac{\Delta x^n}{n!} + R_n, \quad (2.1)$$

dengan  $\Delta x$  : jarak antara  $x_j$  dan  $x_{j+1}$ ,

$R_n$  : kesalahan pemotongan atau suku sisa.

Dari persamaan (2.1), kesalahan pemotongan  $R_n$  diberikan oleh bentuk berikut ini

$$R_n = u^{(n+1)}(\xi) \frac{\Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (2.2)$$

dengan  $x_j \leq \xi \leq x_{j+1}$  (Triatmodjo, 2002).

## 2.2.2 Kesalahan Pemotongan

Menurut Triatmodjo (2002), deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan benar jika semua suku dari deret tersebut diperhitungkan. Dalam praktek, hanya beberapa suku saja yang diperhitungkan, sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti pada penyelesaian analitik. Kesalahan yang muncul yaitu tidak memperhitungkan suku-suku terakhir dari deret Taylor. Kesalahan ini disebut dengan kesalahan pemotongan yang ditulis dalam bentuk

$$R_n = O(\Delta x^{n+1}).$$

Indeks bawah  $n$  menunjukkan bahwa deret yang diperhitungkan adalah sampai pada suku ke- $n$ , sedangkan indeks atas  $n+1$  menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai orde  $n+1$ . Notasi  $O(\Delta x^{n+1})$  menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai orde  $\Delta x^{n+1}$ , atau kesalahan

adalah sebanding dengan langkah ruang pangkat  $n+1$ . Kesalahan pemotongan tersebut kecil apabila :

1. Interval  $\Delta x$  adalah kecil.
2. Memperhitungkan lebih banyak suku pada deret Taylor.

## 2.3 Skema Beda Hingga

### 2.3.1 Skema Beda Hingga dan Notasi

#### Definisi 2.6

Skema beda hingga adalah sebuah cara pendekatan diferensi; artinya suatu pendekatan operator diferensial dengan menggunakan prinsip deret Taylor (Wignyosukarto, 1986).

Menurut Morton dan Mayer (1996), berikut adalah tiga macam skema beda hingga yang merupakan pendekatan dari turunan pertama fungsi  $u$  terhadap  $x$ .

1. Skema beda maju

$$u_x|_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \quad (2.3)$$

2. Skema beda mundur

$$u_x|_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} \quad (2.4)$$

3. Skema beda pusat

$$u_x|_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} \quad (2.5)$$

dengan notasi  $u_{j+1} = u(x_{j+1})$ ,  $u_j = u(x_j)$ , dan  $u_{j-1} = u(x_{j-1})$ .

Pendekatan dari turunan kedua dari fungsi  $u$  terhadap  $x$  dapat dicari dengan

$$u_{xx}|_j = \frac{\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} - \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2},$$

sehingga pendekatan tersebut adalah skema beda pusat orde dua dengan notasi

$$u_{xx}|_j = \frac{\delta_x^2 u}{\Delta x^2} = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2}. \quad (2.6)$$

### 2.3.2 Konsistensi dan Orde Kesalahan

Jika fungsi  $u$  diekspansikan dengan deret Taylor terhadap  $\Delta x$  dan  $-\Delta x$  sebagai berikut

$$u_{j+1} = u_j + u_x|_j \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x^2 + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 + \dots \quad (2.7)$$

$$u_{j-1} = u_j - u_x|_j \Delta x - \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x^2 - \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 - \dots, \quad (2.8)$$

maka diperoleh selisih maju, selisih mundur, selisih beda pusat orde satu, dan selisih beda pusat orde dua sebagai berikut

$$u_{j+1} - u_j = u_x|_j \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x^2 + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 + \dots \quad (2.9)$$

$$u_j - u_{j-1} = u_x|_j \Delta x - \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x^2 - \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 - \dots \quad (2.10)$$

$$u_{j+1} - u_{j-1} = 2u_x|_j \Delta x + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 + \dots \quad (2.11)$$

$$\delta_x^2 u_j = u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1} = u_{xx}|_j \Delta x^2 + \frac{1}{12} u_{xxxx}|_j \Delta x^4 + \dots \quad (2.12)$$

yang mana  $u_{j+1} = u(x_{j+1})$ ,  $u_j = u(x_j)$ , dan  $u_{j-1} = u(x_{j-1})$ .

Jika persamaan (2.9) - (2.12) disubstitusikan pada persamaan (2.3) - (2.6), maka akan diperoleh :

1. Skema beda maju

$$u_x|_j = \frac{u_x|_j \Delta x + \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x^2 + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 + \dots}{\Delta x} \quad (2.13)$$

$$= u_x|_j + \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^2 + \dots$$

2. Skema beda mundur

$$u_x|_j = \frac{u_x|_j \Delta x - \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x^2 + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^3 + \dots}{\Delta x} \quad (2.14)$$

$$= u_x|_j - \frac{1}{2} u_{xx}|_j \Delta x + \frac{1}{6} u_{xxx}|_j \Delta x^2 + \dots$$

### 3. Skema beda pusat

$$\begin{aligned}u_x|_j &= \frac{2u_x|_j\Delta x + \frac{2}{6}u_{xxx}|_j\Delta x^3 + \dots}{2\Delta x} \\ &= u_x|_j + \frac{1}{6}u_{xxx}|_j\Delta x^2 + \dots\end{aligned}\quad (2.15)$$

### 4. Skema beda pusat untuk turunan kedua

$$\begin{aligned}u_{xx}|_j &= \frac{u_{xx}|_j\Delta x^2 + \frac{1}{12}u_{xxxx}|_j\Delta x^4 + \dots}{\Delta x^2} \\ &= u_{xx}|_j + \frac{1}{12}u_{xxxx}|_j\Delta x^2 + \dots\end{aligned}\quad (2.16)$$

Dengan menggunakan substitusi nilai  $\Delta x$  yang mendekati nol pada persamaan (2.15) - (2.18), akan diperoleh kesimpulan bahwa skema beda maju, skema beda mundur, skema beda pusat orde satu, dan skema beda pusat orde dua masing-masing akan konsisten dengan turunan eksaknya. Dengan mengabaikan turunan eksak dari persamaan (2.13) – (2.16), skema beda maju dan skema beda mundur mempunyai orde kesalahan  $O(\Delta x)$ , sedangkan dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa skema beda pusat orde satu dan skema beda pusat orde dua mempunyai orde kesalahan  $O(\Delta x^2)$  (Hoffman, 2001).

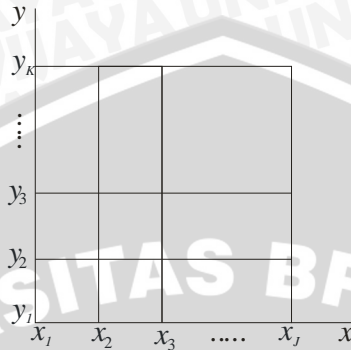
### 2.3.3 Grid dan Stensil Beda Hingga

#### Definisi 2.7

Grid beda hingga adalah titik-titik atau garis-garis yang membagi domain. Perpotongan antar garis grid disebut titik grid. Contoh grid beda hingga dua dimensi ditunjukkan pada Gambar 2.1 (Hoffman, 2001).

#### Definisi 2.8

Stensil beda hingga adalah gambar dari grid beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan beda hingga. Contoh stensil beda hingga ditunjukkan pada stensil skema Crank-Nicholson (Hoffman, 2001).



Gambar 2.1 Grid beda hingga

## 2.4 Skema Crank-Nicholson untuk Persamaan Difusi

### 2.4.1 Persamaan Difusi

Diberikan sebuah persamaan difusi satu dimensi pada medium homogen

$$u_t = u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < 1$$

dan kondisi batas Dirichlet

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan di atas dengan skema beda hingga, akan dihitung nilai pendekatan solusi  $u$  pada stensil titik  $(x_j, t_n)$  dengan domain komputasi yang didiskritkan menggunakan stensil titik yang seragam, baik pada arah  $x$  maupun arah  $t$ .

$$t_n = (n-1)\Delta t, \quad n \geq 1$$

$$x_j = (j-1)\Delta x, \quad 1 \leq j \leq J$$

Persamaan difusi ini hanya sebagai contoh untuk menjelaskan skema Crank-Nicholson (Cheney dan Kincaid, 1996).



## 2.4.2 Skema Crank-Nicholson

Skema ini menggunakan pendekatan pusat untuk  $t$  dan  $x$  pada titik  $u_j^{n+1/2}$ , yang mana titik tersebut merupakan langkah setengah dari titik grid  $u_j^n$  dan  $u_j^{n+1}$ . Skema Crank-Nicholson untuk pendekatan diskrit persamaan difusi adalah sebagai berikut

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left( \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right). \quad (2.17)$$

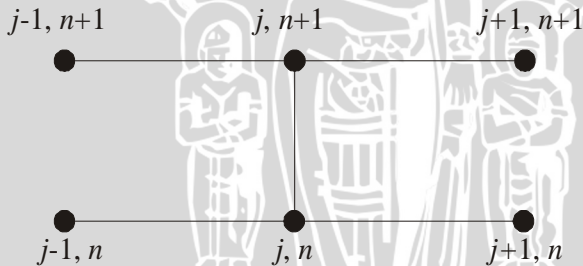
Jika persamaan (2.17) disederhanakan, akan diperoleh :

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} \left( (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) + (u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) \right). \quad (2.18)$$

Pada persamaan (2.18), nilai  $u_j^{n+1}$  bergantung pada nilai-nilai di sekitarnya yang belum diketahui dan nilai-nilai sebelumnya yang telah diketahui. Oleh karena itu, persamaan (2.18) perlu diubah menjadi

$$-\gamma u_{j-1}^{n+1} + 2(1+\gamma)u_j^{n+1} - \gamma u_{j+1}^{n+1} = \gamma u_{j-1}^n + 2(1-\gamma)u_j^n + \gamma u_{j+1}^n, \quad (2.19)$$

dengan  $\gamma = \Delta t / \Delta x^2$  (Morton dan Mayers, 1996).



Gambar 2.2. Stensil skema Crank Nicholson

Dengan menerapkan kondisi batas Dirichlet pada persamaan awal dan akhir, yaitu  $u_1^n = u_1^{n+1} = 0$  dan  $u_j^n = u_j^{n+1} = 0$ , persamaan (2.17) akan membentuk sistem persamaan linear yang dinyatakan dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 2(1+\gamma) & -\gamma & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma & 2(1+\gamma) & -\gamma & \cdots & 0 \\ 0 & -\gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2(1+\gamma) & -\gamma \\ 0 & 0 & \cdots & -\gamma & 2(1+\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{j-2}^{n+1} \\ u_{j-1}^{n+1} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} 2(1-\gamma) & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & 2(1-\gamma) & \gamma & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 2(1-\gamma) & \gamma \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma & 2(1-\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{j-2}^n \\ u_{j-1}^n \end{bmatrix}$$

yang memiliki bentuk  $AU^{n+1} = BU^n$ , dengan matriks A dan B berukuran  $(J-2) \times (J-2)$ . Matriks  $U^{n+1}$  diperoleh dengan rumus  $U^{n+1} = A^{-1}BU^n$  (Cheney dan Kincaid, 1996).

### 2.4.3 Kesalahan Pemotongan dari Skema Crank-Nicholson

Persamaan diferensial termodifikasi yang diperoleh dengan substitusi deret Taylor untuk  $u(x, t)$  di sekitar titik  $u_j^{n+1/2}$  adalah

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \frac{1}{24}u_{xxxx}\Delta t^2 + \cdots + \frac{1}{8}u_{xxt}\Delta t^2 + \frac{1}{12}u_{xxxx}\Delta x^2 + \frac{1}{360}u_{xxxxx}\Delta x^4 + \cdots \\ &= u_{xx} + O(\Delta t^2, \Delta x^2). \end{aligned}$$

Jika  $\Delta t \rightarrow 0$  dan  $\Delta x \rightarrow 0$ , maka kesalahan pemotongan akan menuju ke nol dan persamaan (2.17) mendekati persamaan difusi. Akibatnya, persamaan (2.17) konsisten dengan persamaan difusi (Hoffman, 2001).

### 2.4.4 Kestabilan dari Skema Crank-Nicholson

Berdasarkan analisis kestabilan von Neumann, faktor amplifikasi  $G$  dari persamaan (2.17) adalah



$$G = \frac{1 - \gamma(1 - \cos \theta)}{1 + \gamma(1 - \cos \theta)}$$

$(1 - \cos \theta) \geq 0$  untuk semua nilai  $\theta = \beta \Delta x / 2$ . Akibatnya,  $|G| \leq 1$  untuk semua nilai positif  $\gamma$  dan persamaan (2.10) stabil tanpa syarat. Pendekatan Crank-Nicholson untuk persamaan difusi adalah konsisten dan stabil tanpa syarat (Hoffman, 2001).

## 2.5 Persamaan Fresnel

Persamaan Fresnel dapat diperoleh dari persamaan Maxwell dengan asumsi *Transverse Electric Mode* atau vektor medan listrik tegak lurus dengan arah perambatan. Persamaan Fresnel dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{ik}{2n_r} (n_r^2 - n^2) \psi - \frac{i}{2kn_r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (2.21)$$

dengan  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $k$  adalah angka gelombang,  $\lambda$  adalah panjang gelombang,  $n$  adalah indeks refraksi lokal, dan  $n_r$  adalah indeks refraksi referensi (Lohmeyer, 2003).

## 2.6 Kondisi Batas Kontinu untuk Persamaan Gelombang

### 2.6.1 Persamaan Gelombang

Menurut Grigoryan (2010), persamaan gelombang, yang mendeskripsikan tentang dinamika amplitudo  $u(x,t)$  suatu kawat di titik  $x$  pada waktu  $t$ , memiliki bentuk

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.22)$$

dengan  $c$  adalah kecepatan gelombang dan diasumsikan  $c$  selalu positif. Persamaan gelombang mempunyai bentuk kanonik kedua untuk persamaan hiperbolik. Kemudian, persamaan (2.22) dapat ditulis dalam bentuk kanonik pertama, yaitu

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (2.23)$$

Persamaan (2.23) diperoleh dengan perubahan variabel

$$\begin{cases} \xi = x + ct \\ \eta = x - ct \end{cases}. \quad (2.24)$$

Solusi dari persamaan (2.23) adalah

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta). \quad (2.25)$$

Dengan mensubstitusikan variabel (2.24) ke persamaan (2.25), akan didapatkan solusi umum dari persamaan (2.22)

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct). \quad (2.26)$$

## 2.6.2 Nilai Awal untuk Persamaan Gelombang

Menurut Grigoryan (2010), persamaan gelombang memiliki turunan kedua terhadap waktu  $t$ , sehingga nilai awal harus ditentukan posisi awal  $u(x, 0)$  dan kecepatan awal  $u_t(x, 0)$ . Persamaan gelombang dengan nilai awal dapat dibentuk sebagai berikut.

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \gamma(x) \end{cases}, \quad (2.27)$$

dengan  $\phi$  dan  $\gamma$  adalah fungsi satu variabel dan  $c$  adalah kecepatan gelombang. Untuk kondisi awal pertama, pada saat  $t = 0$ , persamaan (2.26) menjadi

$$u(x, 0) = \phi(x) = f(x) + g(x). \quad (2.28)$$

Untuk kondisi awal kedua, pada saat  $t = 0$ , turunan dari persamaan (2.26) menjadi

$$u_t(x, 0) = \gamma(x) = cf'(x) - cg'(x). \quad (2.29)$$

Persamaan (2.28) dan (2.29) dapat dinyatakan sebagai sistem persamaan dari fungsi  $f$  dan  $g$ . Untuk menyelesaikan sistem tersebut, persamaan (2.29) diintegrasikan dari 0 sampai  $x$ , sehingga sistem persamaan tersebut menjadi

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \phi(x), \\ f(x) - g(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x \gamma(s) ds + f(0) - g(0). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Solusi dari sistem persamaan (2.30) adalah

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \gamma(s) ds + \frac{1}{2} [f(0) - g(0)], \\ g(x) &= \frac{1}{2} \phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \gamma(s) ds - \frac{1}{2} [f(0) - g(0)]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.31) ke persamaan (2.26), akan didapatkan solusi dari persamaan (2.27)

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_0^x \gamma(s) ds. \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) disebut sebagai solusi d' Alembert.

### 2.6.3 Kondisi Dirichlet untuk Persamaan Gelombang

Kondisi Dirichlet adalah suatu kondisi yang mana nilai pada titik batas dari suatu fungsi diketahui. Persamaan gelombang pada domain  $[0, \infty)$  dengan kondisi awal dan kondisi Dirichlet dapat dibentuk sebagai berikut.

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & x \geq 0, t \geq 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & v_t(x, 0) = \gamma(x). \\ v(0, t) = 0 \end{cases} \quad (2.33)$$

Misalkan persamaan gelombang pada domain  $(-\infty, \infty)$  dengan kondisi awal

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), & u_t(x, 0) = \gamma(x) \end{cases} \quad (2.34)$$

Ketika kondisi batasnya berupa kondisi Dirichlet, kondisi awal yang digunakan pada persamaan (2.34) harus berupa fungsi ganjil, dengan

$$\begin{aligned} \phi_{odd}(x) &= \begin{cases} \phi(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases} \\ \gamma_{odd}(x) &= \begin{cases} \gamma(x), & x > 0 \\ 0, & x = 0. \\ -\gamma(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.35)$$

Kemudian diberikan batasan dari  $u(x, t)$  pada domain  $[0, \infty)$  :

$$v(x, t) = u(x, t)|_{x \geq 0}, \quad (2.36)$$

sehingga, secara otomatis,  $v(0, t) = u(0, t) = 0$  dan nilai awal juga

terpenuhi ketika nilai awal dari  $v(x,t)$  adalah nilai awal dari  $u(x,t)$ . Oleh karena itu, solusi dari persamaan (2.33) adalah unik.

Dengan menggunakan solusi d' Alembert (2.32) dan batasan (2.36), akan didapatkan

$$v(x,t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{odd}}(x+ct) + \phi_{\text{odd}}(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \gamma_{\text{odd}}(s) ds. \quad (2.37)$$

Jika  $x \geq 0$  dan  $t \geq 0$ , maka  $x+ct > 0$  dan  $\phi_{\text{odd}}(x+ct) = \phi(x+ct)$ .

Jika  $x-ct > 0$ , maka  $\phi_{\text{odd}}(x-ct) = \phi(x-ct)$ , dan untuk interval  $s \in [x-ct, x+ct]$ ,  $\gamma_{\text{odd}}(s) = \gamma(s)$ . Untuk  $x > ct$ ,

$$v(x,t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \gamma(s) ds. \quad (2.38)$$

Untuk  $0 < x < ct$ , argumen  $x-ct < 0$ , dengan menggunakan persamaan (2.35), solusi (2.37) menjadi

$$v(x,t) = \frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \left[ \int_{x-ct}^0 -\gamma(-s) ds + \int_0^{x+ct} \gamma(s) ds \right]. \quad (2.39)$$

Dengan mengubah variabel  $s \rightarrow -s$  pada persamaan (2.39), akan didapatkan

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \left[ \int_{ct-x}^0 \gamma(s) ds + \int_0^{x+ct} \gamma(s) ds \right] \\ &= \frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \gamma(s) ds. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dari persamaan (2.38) dan (2.40), solusi dari persamaan (2.33) adalah

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \gamma(s) ds, & x > ct \\ \frac{1}{2} [\phi(x+ct) - \phi(ct-x)] + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} \gamma(s) ds, & 0 < x < ct \end{cases} \quad (2.41)$$

Ilustrasi :

Diberikan persamaan gelombang dengan kondisi awal

$$\phi(x) = \begin{cases} h, & a < x < 2a \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad \text{dan} \quad \gamma(x) = 0.$$

Dengan memisalkan  $h = 2$ ,  $c = 1$ , dan  $a = 3$ , grafik solusi dari persamaan gelombang dengan kondisi Dirichlet ditunjukkan pada Gambar 2.3 (Grigoryan, 2010).

Dari Gambar 2.3, gelombang memiliki amplitudo awal dua satuan, kemudian gelombang tersebut terpecah menjadi dua gelombang yang masing-masing merambat ke kanan dan kiri dengan amplitudo satu satuan. Gelombang yang merambat ke arah kiri akan merambat menuju sumbu  $x$  yang tak hingga. Ketika gelombang yang merambat ke arah kanan menuju titik batas, gelombang tersebut terpantul dengan amplitudo negatif menuju sumbu  $x$  yang tak hingga.

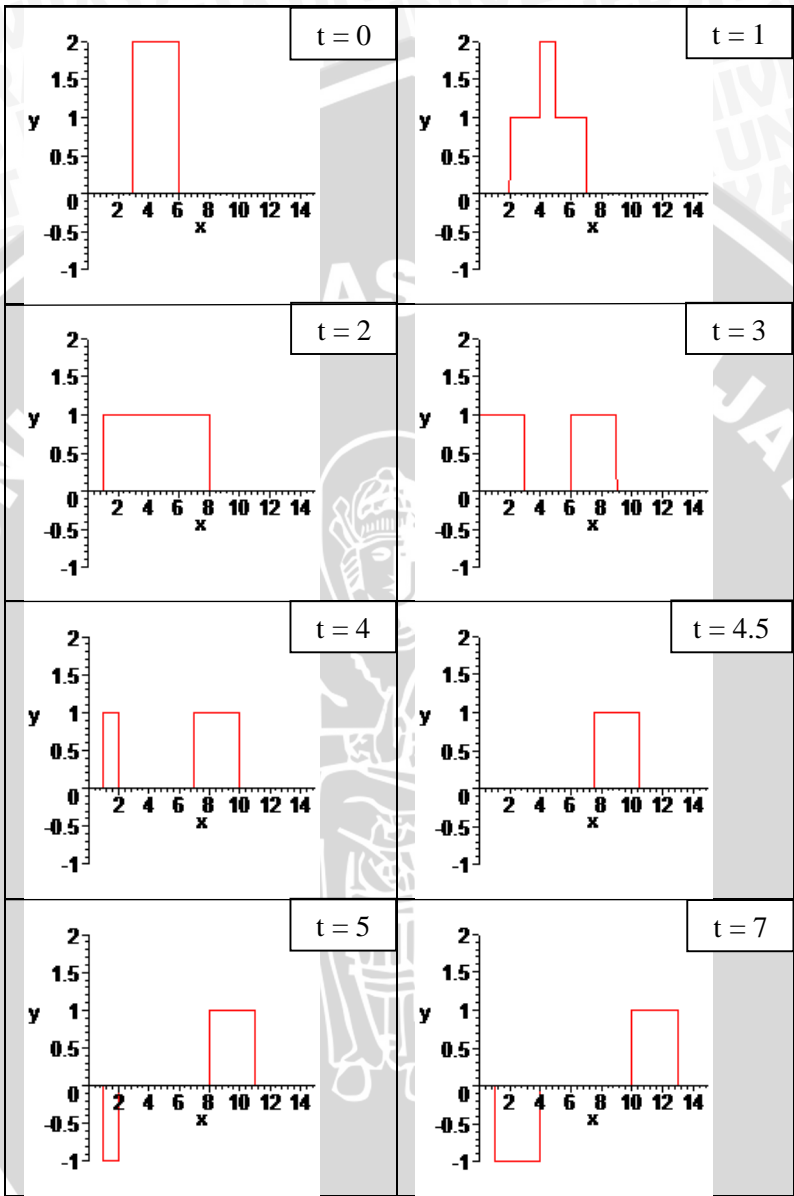
## 2.6.4 Kondisi Neumann untuk Persamaan Gelombang

Kondisi Neumann adalah suatu kondisi yang mana nilai turunan pada titik batas dari suatu fungsi diketahui. Persamaan gelombang pada domain  $[0, \infty)$  dengan kondisi awal dan kondisi Neumann dapat dibentuk sebagai berikut.

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & x \geq 0, t \geq 0 \\ v(x, 0) = \phi(x), & v_t(x, 0) = \gamma(x). \\ v_x(0, t) = 0 \end{cases} \quad (2.42)$$

Misalkan persamaan gelombang pada domain  $(-\infty, \infty)$  dengan kondisi awal





Gambar 2.3. Grafik solusi  $v(x,t)$  dengan variasi  $t$  untuk kondisi Dirichlet

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \gamma(x) \end{cases} \quad (2.43)$$

Ketika kondisi batasnya berupa kondisi Neumann, kondisi awal yang digunakan pada persamaan (2.43) harus berupa fungsi genap, dengan

$$\begin{aligned} \phi_{\text{even}}(x) &= \begin{cases} \phi(x), & x \geq 0 \\ \phi(-x), & x < 0 \end{cases} \\ \gamma_{\text{even}}(x) &= \begin{cases} \gamma(x), & x \geq 0 \\ \gamma(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Solusi  $u(x, t)$  dari persamaan (2.43) menjadi fungsi genap dan ketika turunan dari fungsi genap adalah fungsi ganjil,  $u_x(x, t)$  menjadi fungsi ganjil, dan akibatnya  $u_x(0, t) = 0$ . Sama seperti kondisi Dirichlet, batasan

$$v(x, t) = u(x, t)|_{x \geq 0}, \quad (2.45)$$

membuat solusi dari persamaan (2.42) adalah unik.

Dengan menggunakan solusi d' Alembert (2.32) dan batasan (2.45), akan didapatkan

$$v(x, t) = \frac{1}{2} [\phi_{\text{even}}(x + ct) + \phi_{\text{even}}(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \gamma_{\text{even}}(s) ds. \quad (2.46)$$

Persamaan (2.37) diselesaikan dengan dua kasus  $x > ct$  dan  $0 < x < ct$ . Dengan menggunakan persamaan (2.44), persamaan (2.46), dan cara yang sama seperti kondisi Dirichlet, solusi dari persamaan (2.42) adalah

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds, & x > ct \\ \frac{1}{2} [\phi(x + ct) + \phi(ct - x)] \\ + \frac{1}{2c} \left[ \int_0^{ct-x} \gamma(s) ds + \int_0^{x+ct} \gamma(s) ds \right], & 0 < x < ct \end{cases} \quad (2.47)$$



Ilustrasi :

Diberikan persamaan gelombang dengan kondisi awal

$$\phi(x) = \begin{cases} h, & a < x < 2a \\ 0, & x \text{ yang lain} \end{cases} \quad \text{dan} \quad \gamma(x) = 0.$$

Dengan memisalkan  $h = 2$ ,  $c = 1$ , dan  $a = 3$ , grafik solusi dari persamaan gelombang dengan kondisi batas Neumann ditunjukkan pada Gambar 2.4 (Grigoryan, 2010).

Dari Gambar 2.4, gelombang memiliki amplitudo awal dua satuan, kemudian gelombang tersebut terpecah menjadi dua gelombang yang masing-masing merambat ke kanan dan kiri dengan amplitudo satu satuan. Gelombang yang merambat ke arah kiri akan merambat menuju sumbu  $x$  yang tak hingga. Ketika gelombang yang merambat ke arah kanan menuju titik batas, gelombang tersebut terpantul kembali dengan amplitudo yang sama menuju sumbu  $x$  yang tak hingga.

## 2.7. Kondisi Batas Transparan untuk Persamaan Gelombang Monokromatik Satu Dimensi

### 2.7.1 Persamaan Gelombang Monokromatik Satu Dimensi

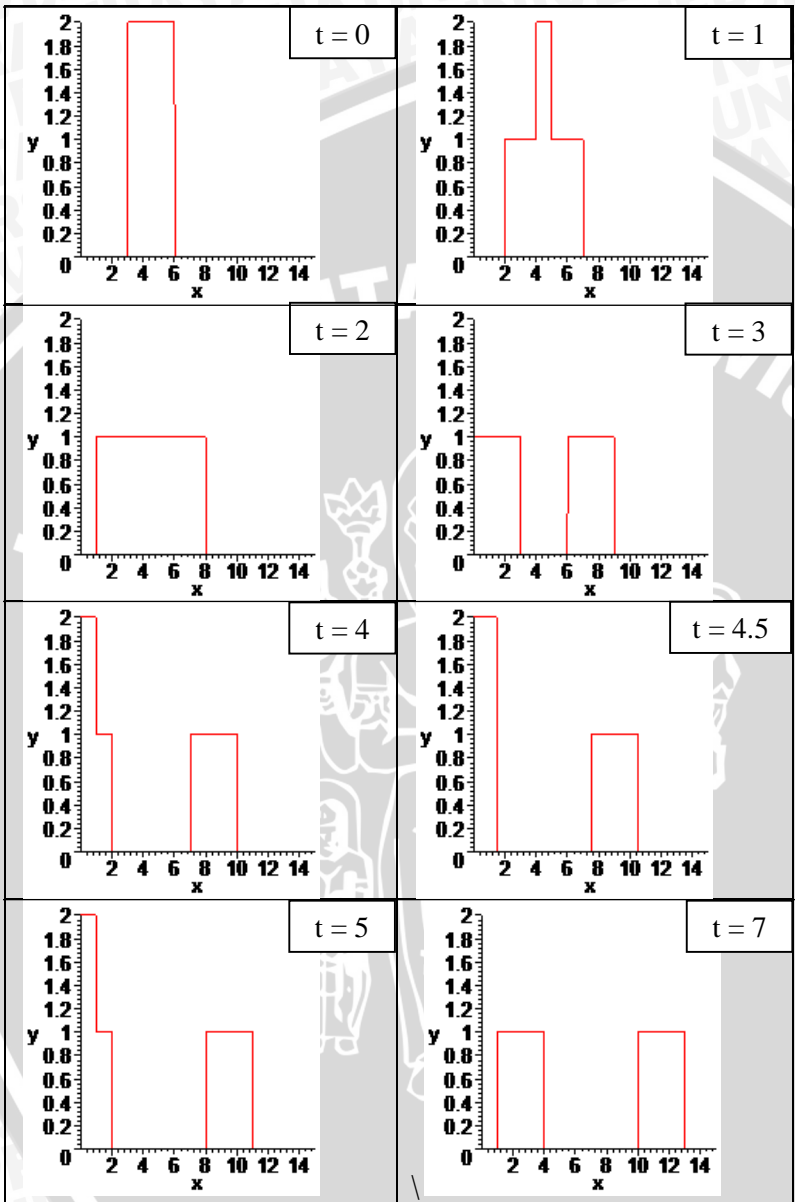
Diberikan persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c > 0. \quad (2.48)$$

Misalkan solusi pendekatan dari persamaan (2.48) dengan satu frekuensi adalah

$$u(x, t) = Ce^{i(kx - \omega t)} = v(x)e^{-i\omega t}, \quad (2.49)$$

dengan  $C$  adalah konstanta. Persamaan (2.49) disubstitusikan ke persamaan (2.48), sehingga didapatkan



Gambar 2.4. Grafik solusi  $v(x,t)$  dengan variasi  $t$  untuk kondisi Neumann

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\
\Leftrightarrow -\omega^2 v e^{-i\omega t} - c^2 v_{xx} e^{-i\omega t} &= 0 \\
\Leftrightarrow -e^{-i\omega t} (\omega^2 v + c^2 v_{xx}) &= 0 \\
\Leftrightarrow c^2 v_{xx} + \omega^2 v &= 0 \\
\Leftrightarrow v_{xx} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 v &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + k^2 v &= 0. \tag{2.50}
\end{aligned}$$

Persamaan (2.50) disebut persamaan gelombang monokromatik satu dimensi (Suryanto, 2003).

### 2.7.2 Kondisi Batas Transparan Kontinu

Persamaan (2.50) dapat difaktorkan menjadi :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\right)v = 0. \tag{2.51}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\right)v = 0$  menyatakan gelombang yang merambat ke arah kiri, sedangkan  $\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\right)v = 0$  menyatakan gelombang yang merambat ke arah kanan.

Pada domain  $[0, L]$ , kondisi batas untuk  $x = 0$  adalah :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - ik\right)v \Big|_{x=0} = 0, \tag{2.52}$$

dan kondisi batas untuk  $x = L$  adalah :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + ik\right)v \Big|_{x=L} = 0. \tag{2.53}$$

Kondisi batas (2.52) dan (2.53) disebut kondisi batas transparan kontinu dari persamaan (2.50) (Suryanto, 2003).

### 2.7.3 Kondisi Batas Transparan Diskrit

Diberikan persamaan (2.50) dengan domain  $x \geq 0$ . Kemudian, domain tersebut didiskritkan menjadi  $x_n = n\Delta x$  dan

$u_n = u(x_n) = u(n\Delta x)$ . Skema beda hinggga untuk persamaan (2.50) adalah :

$$\frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}}{\Delta x^2} + k^2 v_n = 0, \quad (2.54)$$

dengan diberikan dua nilai awal  $v_0$  dan  $v_1$ . Dari persamaan (2.54), nilai  $v_{n+1}$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari  $v_n$  dan  $v_{n-1}$  :

$$v_{n+1} = (2 - k^2 \Delta x^2)v_n - v_{n-1}. \quad (2.55)$$

Persamaan (2.56) dapat disebut sebagai relasi rekursi.

Dari persamaan (2.55), diasumsikan relasi rekursi dari orde kedua adalah sebagai berikut :

$$v_{n+1} = c_1 v_n + c_2 v_{n-1}. \quad (2.56)$$

Koefisien  $c_1$  dan  $c_2$  merupakan koefisien yang akan dicari. Misalkan solusi dari persamaan (2.50) adalah  $r(x) = e^{ikx}$  dan  $s(x) = e^{-ikx}$ .  $r(x)$  dan  $s(x)$  disebut sebagai fungsi pembangkit karena fungsi tersebut digunakan untuk menentukan koefisien dari  $c_1$  dan  $c_2$  secara optimal.

Persamaan (2.56) dapat dinyatakan sebagai :

$$v_{n+1} - (c_1 v_n + c_2 v_{n-1}) = 0 \quad (2.57)$$

Karena terdapat dua solusi dari persamaan (2.50), maka persamaan (2.57) berubah menjadi :

$$r_{n+1} - (c_1 r_n + c_2 r_{n-1}) = 0 \quad (2.58)$$

$$s_{n+1} - (c_1 s_n + c_2 s_{n-1}) = 0 \quad (2.59)$$

Dari persamaan (2.58) dan (2.59), dapat dibentuk suatu fungsi  $D$  yang akan digunakan untuk mengukur deviasi antara nilai eksak dari fungsi pembangkit :

$$D(c_1, c_2) = |r_{n+1} - (c_1 r_n + c_2 r_{n-1})|^2 + |s_{n+1} - (c_1 s_n + c_2 s_{n-1})|^2$$

Minimum dari  $D$  memberikan koefisien optimal untuk  $c_1 = 2\cos(k\Delta t)$  dan  $c_2 = -1$ . Skema beda hinggga

$$u_{k+1} = (2 \cos(k\Delta t))u_k - 1$$

merupakan solusi eksak dari persamaan (2.50) (Lohmeyer, 2003).

## BAB III PEMBAHASAN

Persamaan (2.21) merupakan suatu persamaan diferensial parsial yang memuat turunan parsial pertama fungsi  $\psi(x,z)$  terhadap variabel  $z$  dan turunan parsial kedua terhadap variabel  $x$ . Pada subbab 3.1, akan dibahas skema Crank-Nicholson untuk persamaan (2.21) pada titik interior, sedangkan pada subbab 3.2, akan dibahas kondisi batas transparan pada titik batas. Pada subbab 3.3, skema dan kondisi batas tersebut akan diimplementasikan untuk berkas Gauss pada jendela komputasi yang terbatas.

### 3.1 Skema Beda Hingga untuk Persamaan Fresnel pada Titik Interior

Persamaan (2.21) didiskritkan menggunakan metode Crank-Nicholson dan didapatkan skema sebagai berikut

$$\frac{\psi_a^{s+1} - \psi_a^s}{\Delta z} = \frac{ik}{2n_r} (n_r^2 - n^2) \left( \frac{\psi_a^{s+1} + \psi_a^s}{2} \right) - \frac{i}{2kn_r} \left( \frac{(\psi_{a-1}^{s+1} - 2\psi_a^{s+1} + \psi_{a+1}^{s+1}) + (\psi_{a-1}^s - 2\psi_a^s + \psi_{a+1}^s)}{2\Delta x^2} \right), \quad (3.1)$$

dengan subskrip  $a$  menyatakan  $x_a = x_1 + (a-1)\Delta x$ ,  $a = 1, \dots, Nx$  dan superskrip  $s$  menyatakan  $z_s = z_1 + (s-1)\Delta z$ ,  $z = 1, \dots, Nz$ . Skema pada persamaan (3.1) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} & \frac{iv}{4kn_r} \psi_{a-1}^{s+1} + \left( 1 - \frac{ik\tau}{4n_r} (n_r^2 - n^2) - \frac{iv}{2kn_r} \right) \psi_a^{s+1} + \frac{iv}{4kn_r} \psi_{a+1}^{s+1} \\ & = -\frac{iv}{4kn_r} \psi_{a-1}^s + \left( 1 + \frac{ik\tau}{4n_r} (n_r^2 - n^2) + \frac{iv}{2kn_r} \right) \psi_a^s - \frac{iv}{4kn_r} \psi_{a+1}^s, \end{aligned} \quad (3.2)$$

dengan  $v = \Delta z / \Delta x^2$  dan  $\tau = \Delta z$ .

Kedua ruas pada persamaan (3.2) dikalikan dengan  $4kn_r$ , sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
& i\nu\psi_{a-1}^{s+1} + \left(4kn_r - ik^2\tau(n_r^2 - n^2) - 2i\nu\right)\psi_a^{s+1} + i\nu\psi_{a+1}^{s+1} \\
& = -i\nu\psi_{a-1}^s + \left(4kn_r + ik^2\tau(n_r^2 - n^2) + 2i\nu\right)\psi_a^s - i\nu\psi_{a+1}^s.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Dengan memisalkan :

$$\alpha = 4kn_r - ik^2\tau(n_r^2 - n^2) - 2i\nu$$

$$\beta = 4kn_r + ik^2\tau(n_r^2 - n^2) + 2i\nu,$$

maka persamaan (3.3) akan menjadi :

$$i\nu\psi_{a-1}^{s+1} + \alpha\psi_a^{s+1} + i\nu\psi_{a+1}^{s+1} = -i\nu\psi_{a-1}^s + \beta\psi_a^s - i\nu\psi_{a+1}^s. \tag{3.4}$$

Skema (3.4) hanya dapat digunakan pada titik interior  $x_a$ ,  $a = 2, \dots, Nx-1$ .

### 3.2 Kondisi Batas Transparan dan Skema Beda Hingga untuk Persamaan Fresnel pada Titik Batas

Secara umum, nilai turunan fungsi  $\psi(x,z)$  terhadap variabel  $z$  di  $x = x_a$  dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari  $\psi_{a_j}, j = 1, \dots, J$  dan dinotasikan sebagai berikut.

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_a = \sum_{j=1}^J c_j \psi_{a_j}. \tag{3.5}$$

Sebagai contoh, untuk  $a = 1$  dan  $J = 3$ , nilai turunan fungsi  $\psi(x,z)$  terhadap variabel  $z$  di  $x = x_1$  dapat dinyatakan sebagai

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 \tag{3.6}$$

dan untuk  $a = Nx$  dan  $J = 3$ , nilai turunan fungsi  $\psi(x,z)$  terhadap variabel  $z$  di  $x = x_{Nx}$  dapat dinyatakan sebagai

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{Nx} = c_1\psi_{Nx} + c_2\psi_{Nx-1} + c_3\psi_{Nx-2}. \tag{3.7}$$

Solusi pendekatan yang akan digunakan untuk menentukan koefisien  $c_j$  pada persamaan (3.5) adalah

$$F^l(x, z) = \exp\left(ik\left(\pm\left(\frac{n_r}{2} - \frac{n^2}{2n_r}\cos\theta_l\right)z - \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\sin\theta_l\right)x\right)\right), \tag{3.8}$$



dengan  $\theta_l$  adalah pendiskritan terhadap sudut datang berkas pada domain  $0 \leq \theta \leq \theta_{max}$  yang berupa

$$\theta_l = \frac{l\theta_{max}}{N_\theta}, l = 0, \dots, N_\theta. \quad (3.9)$$

Untuk domain batas sebelah kanan, solusi pendekatan akan digunakan untuk menentukan koefisien  $c_j$  pada persamaan (3.7) adalah

$$F^l(x, z) = \exp\left(ik\left(\left(\frac{n_r}{2} - \frac{n^2}{2n_r}\cos\theta_l\right)z - \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\sin\theta_l\right)x\right)\right), \quad (3.10)$$

sedangkan untuk domain batas sebelah kiri, solusi pendekatan yang akan digunakan untuk menentukan koefisien  $c_j$  pada persamaan (3.6) adalah

$$F^l(x, z) = \exp\left(ik\left(-\left(\frac{n_r}{2} - \frac{n^2}{2n_r}\cos\theta_l\right)z - \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\sin\theta_l\right)x\right)\right). \quad (3.11)$$

Fungsi pembangkit yang digunakan adalah

$$D(c_1, \dots, c_J) = \sum_l g_l^2 \left| \left( \frac{\partial F^l}{\partial z} \right)_a - \sum_{j=1}^J c_j F^l_{a_j} \right|^2, \quad (3.12)$$

dengan bobot  $g_l$  adalah

$$g_l = \exp\left(-\frac{(\theta_l - \theta_{opt})^2}{\theta_w^2}\right). \quad (3.13)$$

$\theta_{opt}$  dan  $\theta_w$  adalah parameter tambahan.

Koefisien  $c_j$  akan dicari dengan meminimalkan  $D$ .

$$\frac{\partial D}{\partial c_j} = 0, j = 1, \dots, J. \quad (3.14)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.12) ke persamaan (3.14), akan didapatkan

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial D(c_1, \dots, c_j)}{\partial c_j} = 0 \\
& \Leftrightarrow -2 \sum_l g_l^2 \left| \left( \frac{\partial F^l}{\partial z} \right)_a - \sum_{k=1}^J c_k F_{a_k}^l \right| F_{a_j}^l = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_l g_l^2 \left| \left( \frac{\partial F^l}{\partial z} \right)_a - \sum_{k=1}^J c_k F_{a_k}^l \right| F_{a_j}^l = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_l \left( g_l^2 F_{a_j}^l \sum_{k=1}^J c_k F_{a_k}^l \right) = \sum_l \left( g_l^2 F_{a_j}^l \left( \frac{\partial F^l}{\partial z} \right)_a \right) \\
& \Leftrightarrow \sum_l \left( \sum_{k=1}^J (g_l^2 F_{a_j}^l c_k F_{a_k}^l) \right) = \sum_l \left( g_l^2 F_{a_j}^l \left( \frac{\partial F^l}{\partial z} \right)_a \right) \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=1}^J \left( \sum_l (g_l^2 F_{a_j}^l F_{a_k}^l) c_k \right) = \sum_l \left( g_l^2 F_{a_j}^l \left( \frac{\partial F^l}{\partial z} \right)_a \right) \\
& \Leftrightarrow \sum_{k=1}^J (L_{jk} c_k) = R_j, \quad j=1, \dots, J. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.16) merupakan suatu sistem persamaan linear.

Persamaan (3.6) didiskritkan menggunakan metode Crank-Nicholson dan didapatkan skema

$$\frac{\psi_1^{s+1} - \psi_1^s}{\Delta z} = \frac{1}{2} \left( (c_1 \psi_1^s + c_2 \psi_2^s + c_3 \psi_3^s) + (c_1 \psi_1^{s+1} + c_2 \psi_2^{s+1} + c_3 \psi_3^{s+1}) \right). \tag{3.16}$$

Skema pada persamaan (3.16) dapat disederhanakan menjadi :

$$\begin{aligned}
& (2 - c_1 \Delta z) \psi_1^{s+1} - c_2 \Delta z \psi_2^{s+1} - c_3 \Delta z \psi_3^{s+1} \\
& = (2 + c_1 \Delta z) \psi_1^s + c_2 \Delta z \psi_2^s + c_3 \Delta z \psi_3^s. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Persamaan (3.7) didiskritkan menggunakan metode Crank-Nicholson dan didapatkan skema :

$$\frac{\psi_{N_x}^{s+1} - \psi_{N_x}^s}{\Delta z} = \frac{1}{2} \left( c_1 \psi_{N_x}^s + c_2 \psi_{N_x-1}^s + c_3 \psi_{N_x-2}^s \right) + \frac{1}{2} \left( c_1 \psi_{N_x}^s + c_2 \psi_{N_x-1}^s + c_3 \psi_{N_x-2}^s \right). \quad (3.18)$$

Skema pada persamaan (3.18) dapat disederhanakan menjadi :

$$\begin{aligned} & (2 - c_1 \Delta z) \psi_{N_x}^{s+1} - c_2 \Delta z \psi_{N_x-1}^{s+1} - c_3 \Delta z \psi_{N_x-2}^{s+1} \\ & = (2 + c_1 \Delta z) \psi_{N_x}^s + c_2 \Delta z \psi_{N_x-1}^s + c_3 \Delta z \psi_{N_x-2}^s. \end{aligned} \quad (3.19)$$

### 3.3 Implementasi dan Simulasi Persamaan Fresnel

Pada subbab ini, persamaan Fresnel akan diimplementasikan untuk berkas Gauss dua dimensi dengan kondisi awal

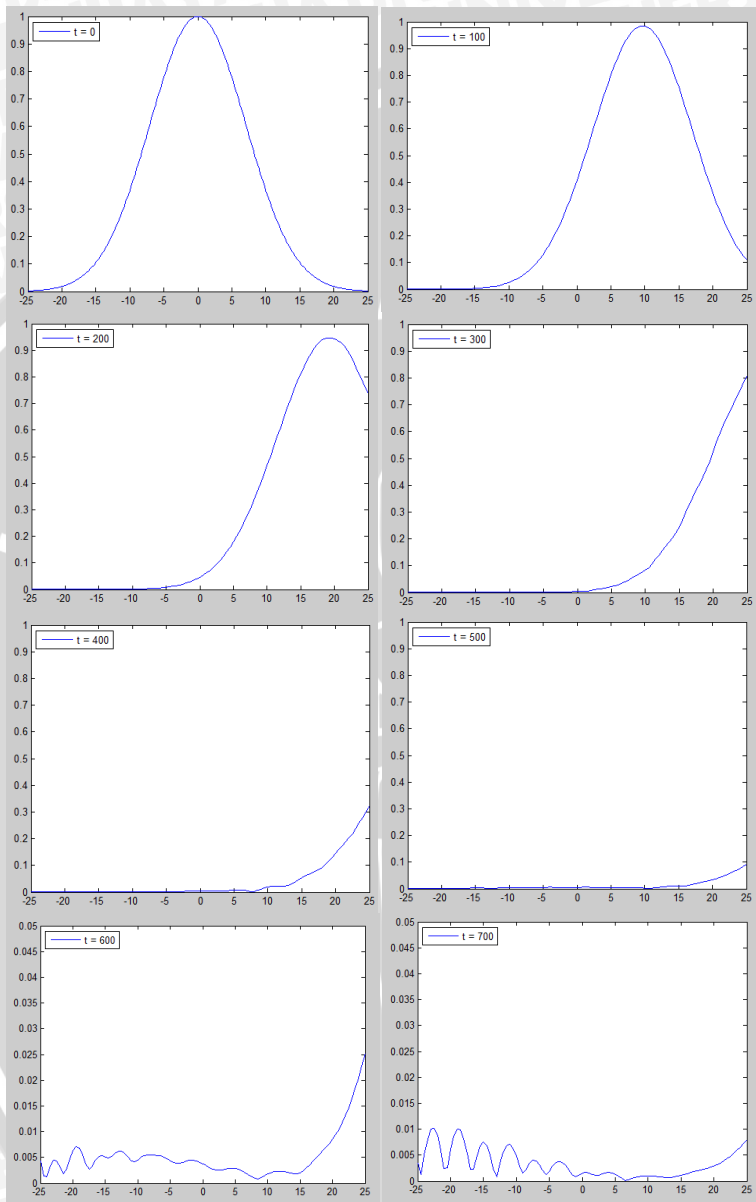
$$\psi(x, 0) = \exp\left(-\left(x - x_s\right)^2 / x_w^2\right) \exp\left(-i\left(kn \sin(\beta)\right)x\right), \quad (3.20)$$

yang mana berkas tersebut dipancarkan dengan lebar  $2x_w$  yang berpusat di  $x_s$ , dengan sudut datang  $\beta$  yang searah sumbu  $z$ .

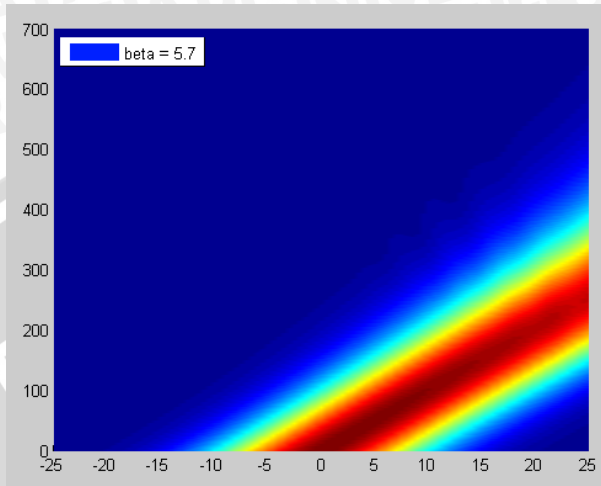
Nilai dari parameter-parameter yang digunakan dalam simulasi ini adalah :  $\lambda = 2\pi / k = 0,828 \mu\text{m}$ ,  $n_r = n = 1,0$ , domain komputasi =  $[-25 \mu\text{m}, 25 \mu\text{m}]$ ,  $\Delta x = \Delta z = 0,5 \mu\text{m}$ ,  $\theta_{max} = 30^\circ$ ,  $\theta_w = 2^\circ$ ,  $\theta_{opt} = 7,5^\circ$ , panjang berkas  $650 \mu\text{m}$  dengan  $x_w = 10 \mu\text{m}$ ,  $x_s = 0$ , dan  $\beta = 5,7^\circ$ .

Hasil simulasi 2 dimensi dari nilai parameter-parameter yang digunakan untuk berbagai nilai  $z$  ditunjukkan pada Gambar 3.1. Dari Gambar 3.1, dapat dilihat bahwa gelombang tersebut merambat ke arah kanan dan menembus domain komputasi sebelah kanan. Kemudian, amplitudo dari grafik tersebut semakin mengecil dan mengalami pemantulan seiring bertambahnya nilai  $t$ . Pantulan tersebut dapat dilihat dari grafik yang juga merambat ke arah kiri.

Hasil simulasi permukaan tiga dimensi dari nilai parameter-parameter yang digunakan ditunjukkan pada Gambar 3.2. Warna-warna pada Gambar 3.2 menyatakan amplitudo grafik solusi. Urutan warna-warna pada grafik di atas adalah merah, kuning, hijau, dan biru, yang mana warna merah tua menyatakan amplitudo tertinggi dan warna biru tua menyatakan



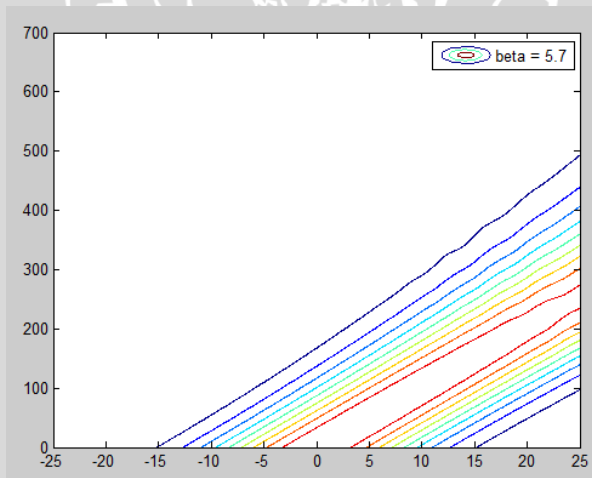
Gambar 3.1. Grafik dua dimensi solusi  $\psi(x,t)$



Gambar 3.2. Grafik permukaan tiga dimensi solusi  $\psi(x,t)$

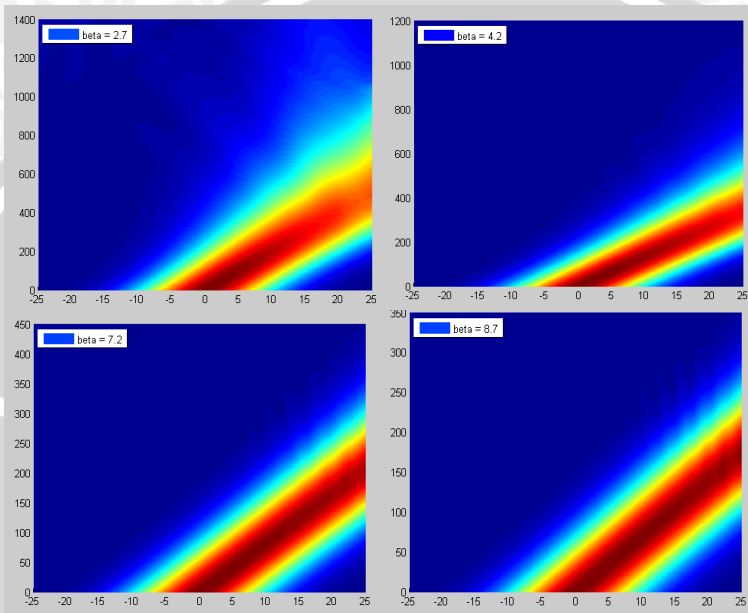
amplitudo terendah. Dari Gambar 3.2, dapat dilihat bahwa berkas yang dipancarkan merambat ke arah kanan dan menembus domain komputasi sebelah kanan.

Hasil simulasi kontur dari nilai parameter-parameter yang digunakan ditunjukkan pada Gambar 3.3.



Gambar 3.3. Grafik kontur solusi  $\psi(x,t)$

Berkas Gauss tersebut juga akan disimulasikan untuk beberapa nilai sudut datang berkas. Gambar 3.4 adalah beberapa simulasi berkas Gauss dengan variasi nilai  $\beta$ .



Gambar 3.4. Grafik permukaan tiga dimensi solusi  $\psi(x,t)$  dengan variasi  $\beta$

Dari Gambar 3.4, dapat dilihat bahwa jika sudut datang berkas kurang dari atau lebih dari  $5.7^0$ , maka berkas tersebut akan mengalami pemantulan yang lebih besar, sehingga pendekatan tersebut akan menghasilkan pemantulan yang sangat kecil untuk sudut datang  $\beta = 5.7^0$ .

Dari Gambar 3.1 – 3.4, untuk mengukur tingkat transparansi pada titik batas, diperlukan suatu koefisien refleksi yang mana koefisien tersebut dicari dengan menggunakan rumus :

$$R = \frac{P^{Nt}}{P^1}, P^s = \sum_{a=1}^{Nt} |\psi_a^s|^2 \quad (3.16)$$



Berikut adalah tabel koefisien refleksi untuk beberapa nilai  $\beta$  yang telah disimulasikan sebelumnya.

Tabel 3.1. Tabel koefisien refleksi dengan variasi  $\beta$

Nilai $\beta$	Koefisien Refleksi ( $R$ )
$\beta = 2.7^0$	0.1286
$\beta = 4.2^0$	0.0154
$\beta = 5.7^0$	0.0114
$\beta = 7.2^0$	0.0141
$\beta = 8.7^0$	0.0176

Dari Tabel 3.1, dapat dilihat bahwa koefisien refleksi untuk semua nilai  $\beta$  sangat kecil atau mendekati nol, tetapi nilai koefisien refleksi untuk  $\beta = 5.7^0$  paling kecil di antara semua nilai koefisien refleksi. Oleh karena itu, nilai  $\beta = 5.7^0$  merupakan sudut datang yang paling akurat untuk mensimulasikan perambatan berkas Gauss. Jadi, dari tabel 3.1, dapat disimpulkan bahwa pendekatan tersebut untuk desain kondisi batas transparan cukup baik dalam mensimulasikan perambatan berkas Gauss pada domain yang terbatas.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 4.1. Kesimpulan

Berdasarkan tujuan pengerjaan skripsi ini yang telah diuraikan pada Bab I dan pembahasan pada Bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Skema beda hingga untuk persamaan Fresnel dibentuk dengan menggunakan skema Crank-Nicholson pada titik interior.
2. Kondisi batas transparan persamaan Fresnel didesain dengan menggunakan kombinasi linear dari solusi pendekatan persamaan Fresnel di persekitaran titik batas. Koefisien dari kombinasi linear tersebut dicari dengan menyelesaikan sistem persamaan linear yang didapat dengan meminimumkan fungsi deviasi.
3. Persamaan Fresnel diimplementasikan untuk perambatan berkas Gauss pada medium linear. Dari hasil simulasi perambatan berkas dengan skema beda hingga, didapatkan bahwa berkas tersebut mengalami pemantulan yang kecil dengan sudut datang yang relatif kecil, sehingga pendekatan ini cukup baik dalam mensimulasikan perambatan suatu berkas pada domain yang terbatas.

#### 4.2. Saran

Dalam penyusunan skripsi ini masih terdapat kekurangan baik pada kajian pustaka maupun pada pembahasan. Oleh karena itu, peneliti selanjutnya disarankan untuk mensimulasikan perambatan berkas pada domain nonhomogen atau persamaan perambatan berkas nonlinear.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Cheney, W. dan Kincaid, D. 1996. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Wadsworth. Inc. California.
- Debnath, L. 2005. *Nonlinear Partial Differential Equation for Scientists and Engineers 2<sup>nd</sup> Edition*. Birkhäuser. Boston.
- Farlow, S. J. 1994. *An Introduction to Differential Equation and Their Application*. McGraw Hill. New York.
- Finizio, N. Dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta.
- Grigoryan, V. 2010. *Partial Differential Equations*. University of California. Santa Barbara.
- Hoffman, J. D. 2001. *Numerical Method for Engineers dan Scientists 2<sup>nd</sup> Edition Revised and Expanded*. Marcel Dekker Inc. New York.
- Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset. Yogyakarta.
- Lohmeyer, M., 2003, "Boundary Conditions for the Finite Difference Beam Propagation Method Based on Plane Wave Solutions of the Fresnel Equation", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 33, no. 2, hlm. 279-285.
- Morton, K. W. dan Mayers, D. F. 1996. *Numerical Solution of Partial Differential Equation*. Cambrigde University Press. New York.
- Soehardjo. 2001. *Kalkulus II untuk Teknik*. ITATS ITS. Surabaya.
- Suryanto, A., 2000, "One-Way Wave Equations As Non-Reflecting Boundary Conditions", *Integral*, vol. 5, no. 1.
- Suryanto, A. 2003. *Optical Waves in Inhomogenous Kerr Media Beyond Paraxial Approximation*. Twente University Press. Belanda.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset. Yogyakarta.

Wignyosukarto, B. 1986. *Hidrolika Numerik*. PAU-UGM. Yogyakarta.

Yang, S. dan X. Jiang, "The Beam Propagation Method Used for the Design of An Integrated Optical Coupler", *Proceedings of Computing and Engineering Annual Researchers Conference 2007*, University of Huddersfield, Huddersfield, hlm. 1 - 6.

Zschiedrich, L. 2009. *Transparency Boundary Conditions for Maxwell's Equation: Numerical Concepts beyond The PML Method*. Freie Universität. Berlin.





## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Program Persamaan Fresnel dengan Skema Crank-Nicholson

```
clear all;
clc;

%input parameter
x0=input('Nilai x0      : ');
x1=input('Nilai x1      : ');
t1=input('Nilai t1      : ');
dx=input('Nilai dx      : ');
dt=input('Nilai dt      : ');
xw=input('Nilai xw      : ');
xs=input('Nilai xs      : ');
n=input('Nilai n        : ');
nr=input('Nilai nr      : ');
thetamax=input('Input theta max : ');
ntheta=input('Banyak grid theta : ');
thetaw=input('Nilai theta w : ');
thetao=input('Nilai theta opt : ');
beta=input('Nilai beta   : ');
lambda=input('Nilai lambda : ');

k=2*pi/lambda;
x=x0:dx:x1;
t=0:dt:t1;
nu=dt/(dx^2);
Nx=length(x);
Nt=length(t);
A=zeros(Nx,Nx);
B=zeros(Nx,Nx);
z=zeros(Nx,Nt);

for i=1:ntheta+1
    theta(i)=(i-1)*(thetamax*2*pi/360)/ntheta;
end;
for i=1:ntheta+1
    g(i)=exp(-(theta(i)-
                (thetao*2*pi/360))^2/(thetaw*2*pi/360)^2
            );
end;
```

```

%syarat awal
for i=1:Nx
    z(i,1)=exp(-(x(i)-xs)^2/xw^2)*exp(-sqrt(-
        1)*(k*n*sin(beta*2*pi/360))*x(i));
end;

plot(x,abs(z(:,1)));
drawnow;
pause

%menghitung z
for i=2:Nt
    %membentuk SPL type 1
    h11=0; h12=0; h13=0; h22=0; h23=0; h33=0;
    dh1=0; dh2=0; dh3=0;
    for j=1:ntheta+1
        h11=h11+g(j)^2*fs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr)
            ^2;
        h12=h12+g(j)^2*fs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr)
            *fs1b(x(2),t(i),theta(j),k,n,nr);
        h13=h13+g(j)^2*fs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr)
            *fs1b(x(3),t(i),theta(j),k,n,nr);
        h22=h22+g(j)^2*fs1b(x(2),t(i),theta(j),k,n,nr)
            ^2;
        h23=h23+g(j)^2*fs1b(x(2),t(i),theta(j),k,n,nr)
            *fs1b(x(3),t(i),theta(j),k,n,nr);
        h33=h33+g(j)^2*fs1b(x(3),t(i),theta(j),k,n,nr)
            ^2;
        dh1=dh1+g(j)^2*fs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr)
            *dfs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr);
        dh2=dh2+g(j)^2*fs1b(x(2),t(i),theta(j),k,n,nr)
            *dfs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr);
        dh3=dh3+g(j)^2*fs1b(x(3),t(i),theta(j),k,n,nr)
            *dfs1b(x(1),t(i),theta(j),k,n,nr);
    end;
    h=[h11 h12 h13; h12 h22 h23; h13 h23 h33];
    d=[dh1; dh2; dh3];

    %mencari koefisien type 1
    c=h\d;

    %membentuk SPL type 2

```

```

h11=0; h12=0; h13=0; h22=0; h23=0; h33=0;
dh1=0; dh2=0; dh3=0;
for j=1:ntheta+1
h11=h11+g(j)^2*fsla(x(Nx),t(i),theta(j),k,n,nr
)^2;
h12=h12+g(j)^2*fsla(x(Nx),t(i),theta(j),k,n,nr
)*fsla(x(Nx-1),t(i),theta(j),k,n,nr);
h13=h13+g(j)^2*fsla(x(Nx),t(i),theta(j),k,n,nr
)*fsla(x(Nx-2),t(i),theta(j),k,n,nr);
h22=h22+g(j)^2*fsla(x(Nx-
1),t(i),theta(j),k,n,nr)^2;
h23=h23+g(j)^2*fsla(x(Nx-
1),t(i),theta(j),k,n,nr)*fsla(x(Nx-
2),t(i),theta(j),k,n,nr);
h33=h33+g(j)^2*fsla(x(Nx-
2),t(i),theta(j),k,n,nr)^2;
dh1=dh1+g(j)^2*fsla(x(Nx),t(i),theta(j),k,n,nr
)*dfsla(x(Nx),t(i),theta(j),k,n,nr);
dh2=dh2+g(j)^2*fsla(x(Nx-
1),t(i),theta(j),k,n,nr)*dfsla(x(Nx),t(i
),theta(j),k,n,nr);
dh3=dh3+g(j)^2*fsla(x(Nx-
2),t(i),theta(j),k,n,nr)*dfsla(x(Nx),t(i
),theta(j),k,n,nr);
end;
h1=[h11 h12 h13; h12 h22 h23; h13 h23 h33];
d1=[dh1; dh2; dh3];

%mencaari koefisien type 2
c1=h1\d1;

%membuat matriks A dan B untuk metode Crank-
Nicholson pada titik batas
A(1,1)=2-dt*c(1); B(1,1)=2+dt*c(1);
A(1,2)=-dt*c(2); B(1,2)=dt*c(2);
A(1,3)=-dt*c(3); B(1,3)=dt*c(3);
A(Nx,Nx-2)=-dt*c1(3); B(Nx,Nx-2)=dt*c1(3);
A(Nx,Nx-1)=-dt*c1(2); B(Nx,Nx-1)=dt*c1(2);
A(Nx,Nx)=2-dt*c1(1); B(Nx,Nx)=2+dt*c1(1);

%membuat matriks A dan B untuk metode Crank-
Nicholson pada titik interior
for j=2:Nx-1

```

```

A(j,j-1)=sqrt(-1)*nu;
A(j,j)=4*k*nr-sqrt(-1)*k^2*dt*(nr^2-n^2)-
    2*sqrt(-1)*nu;
A(j,j+1)=sqrt(-1)*nu;
B(j,j-1)=-sqrt(-1)*nu;
B(j,j)=4*k*nr+sqrt(-1)*k^2*dt*(nr^2-
    n^2)+2*sqrt(-1)*nu;
B(j,j+1)=-sqrt(-1)*nu;
end;

%menghitung psi
z(1:Nx,i)=A\B*z(1:Nx,i-1);
plot(x,abs(z(:,i)));
axis([x0 x1 0 1]);
drawnow;
end;

%plot surface dan kontur
figure(2);
surface(x,t,abs(z)');
shading interp;
figure(3);
contour(x,t,abs(z)');

%koefisien refleksi
pb=0; ps=0;
for i=1:Nx
    pb=pb+abs(z(i,Nt));
    ps=ps+abs(z(i,1));
end;
R=pb/ps;
R

function f=fsla(x,z,t,k,n,nr)
f=exp(sqrt(-1)*k*((nr/2-n^2/(2*nr))*cos(t))*z-
    (n/sqrt(2)*sin(t))*x);

function f=fslb(x,z,t,k,n,nr)
f=exp(sqrt(-1)*k*(-(nr/2-n^2/(2*nr))*cos(t))*z-
    (n/sqrt(2)*sin(t))*x);

function d=dfsla(x,z,t,k,n,nr)

```

```
d=sqrt(-1)*k*(nr/2-  
n^2/(2*nr))*cos(t))*fsla(x,z,t,k,n,nr);
```

```
function d=dfs1b(x,z,t,k,n,nr)
```

```
d=-sqrt(-1)*k*(nr/2-  
n^2/(2*nr))*cos(t))*fs1b(x,z,t,k,n,nr);
```

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

