IDEAL PRIMA DAN IDEAL SEMIPRIMA DARI Γ-SEMIRING

SKRIPSI

oleh :

SYAIFUL AMIN
0410940052-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

IDEAL PRIMA DAN IDEAL SEMIPRIMA DARI Γ-SEMIRING

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
SYAIFUL AMIN
0410940052-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

IDEAL PRIMA DAN IDEAL SEMIPRIMA DARI
Γ-SEMIRING

Oleh :
SYAIFUL AMIN
0410940052-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
Pada tanggal 11 Februari 2010
Dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Drs. Bambang Sugandi, M.Si**
NIP. 196105161987012001	**NIP. 195905151992031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 196908071994121001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: SYAIFUL AMIN**
NIM	**: 0410940052**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: IDEAL PRIMA DAN IDEAL SEMIPRIMA DARI $\Gamma-$SEMIRING**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 Februari 2010
Yang menyatakan,

(Syaiful Amin)
NIM. 0410940052

IDEAL PRIMA DAN IDEAL SEMIPRIMA DARI Γ-SEMIRING

ABSTRAK

Konsep Γ-semiring telah diperkenalkan oleh Rao (1995). Skripsi ini memperkenalkan konsep ideal prima dan ideal semiprima dari Γ-semiring yang dipelajari melalui semiring operator kiri dari Γ–semiring. Misalkan S adalah Γ-semiring dan L semiring operator kiri. Jika P adalah ideal prima (semiprima) dari semiring operator kiri L maka P^{+} adalah ideal prima (semiprima) dari Γ-semiring S. Kemudian, jika Q adalah ideal prima (semiprima) dari Γ-semiring S maka $Q^{+'}$ adalah ideal prima (semiprima) dari semiring operator kiri L. Selanjutnya, misalkan S adalah Γ-semiring L semiring operator kiri, maka terdapat suatu pemetaan isomorfik $\theta : Q \to Q^{+'}$ diantara semua himpunan ideal prima (semiprima) dari S dan semua himpunan ideal prima (semiprima) dari L.

Kata kunci : Γ-semiring, semiring operator kiri, ideal prima, ideal semiprima, isomorfik.

PRIME IDEAL AND SEMIPRIME IDEAL OF Γ −SEMIRING

ABSTRACT

The concept of a Γ-semirings was introduced by Rao (1995). This final project introduces the concept of a prime ideal and semiprime ideal of Γ–semirings and study them via left operator semirings of Γ–semiring. Let S is a Γ-semirings and L left operator semirings. If P is a prime (semiprime) ideal of left operator semirings L, then P^+ is also prime (semiprime) ideal of Γ-semirings S. Moreover, if Q is a prime (semiprime) of Γ-semirings S, then $Q^{+'}$ is prime (semiprime) ideal of left operator semirings L. Furthermore, let S is a Γ-semirings and L left operator semirings, then there exist an isomorphics mapping $\theta : Q \to Q^{+'}$ between the set of all prime (semiprime) ideals of Γ-semirings S and the set of all prime (semiprime) ideals of left operator semirings L.

Keywords : Γ-semirings, left operator semirings, prime ideal, semiprime ideal, isomorphics.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT karena berkat segala rahmat serta hidayah yang telah dilimpahkan-Nya penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi yang berjudul **”Ideal Prima dan Ideal Semiprima dari Γ −Semiring”**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penulis menyadari bahwa penulisan Skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bantuan baik yag bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak, untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Dra. Ari Andari, MS selaku pembimbing I dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasehat, dan dukungan yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini,
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr.Wuryansari Muharini K, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika,
3. Kwardiniya, S.Si, M.Si selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan perhatiannya selama melaksanakan studi,
4. Dr.Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, Drs.Imam Nurhadi P., MT, dan Drs.Marsudi, MS selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini,
5. Segenap bapak dan ibu dosen jurusan Matematika FMIPA UNIBRAW yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis,
6. Orang tua, guru, beserta saudara yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesaikannya Skripsi ini,
7. Segenap staf dan karyawan Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi,
8. Seluruh Keluarga 244 dan keluarga math 04 yang senantiasa memberikan dukungan dan semangat, serta
9. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam penulisan Skripsi ini.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat kekurangan sehingga belum dapat dikatakan sempurna. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga Skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 11 Februari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\in$	:	elemen
$\notin$	:	bukan elemen
$\emptyset$	:	himpunan kosong
$\subseteq$	:	himpunan bagian
$\subset$	:	himpunan bagian sejati
$\cap$	:	irisan
$\cup$	:	gabungan
$\Longrightarrow$	:	jika...maka...
$\Longleftrightarrow$	:	jika dan hanya jika
$\forall$	:	untuk setiap
$\exists$	:	terdapat
$\ni$	:	sedemikian sehingga
$A \times B$	:	*cartesian product*dari$A$ dan B
a_i	:	elemen ke-i
$\mathbb{Z}$	:	himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	:	himpunan bilangan bulat positif
$a\rho b$	:	a berelasi dengan b
(R, max, min)	:	suatu semiring R dengan operasi penjumlahan $(a \oplus b = max\{a, b\})$ dan operasi perkalian $(a \odot b = min\ \{a, b\})$, untuk setiap $a, b \in R$
$\blacksquare$	:	akhir sebuah bukti.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar atau sistem aljabar merupakan himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi binari pada himpunan tersebut. Suatu struktur aljabar dimana operasi binarinya memenuhi sifat-sifat tertentu adalah semigrup, grup, semiring, ring, modul, dan sebagainya.

Struktur aljabar yang paling sederhana adalah semigrup. Semigrup adalah suatu himpunan tidak kosong yang hanya dilengkapi dengan satu operasi binari saja dan memenuhi sifat ketertutupan dan keasosiatifan. Seperti halnya semigrup, grup juga merupakan suatu struktur aljabar yang hanya dilengkapi dengan satu operasi binari. Aksioma-aksioma yang berlaku pada grup adalah sama dengan aksioma-aksioma yang berlaku pada semigrup tetapi harus memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers. Jadi dengan kata lain grup merupakan semigrup yang memiliki elemen identitas dan setiap elemennya memiliki invers.

Selanjutnya, terdapat struktur aljabar yang dinamakan ring. Ring merupakan perluasan dari konsep grup dengan dua operasi binari, yaitu penjumlahan dan perkalian. Konsep struktur aljabar yang lebih sederhana dari ring adalah semiring. Selain itu juga terdapat suatu ideal yang merupakan subset dari semiring atau ring. Ada dua macam ideal, yaitu ideal kiri dan ideal kanan. Suatu ideal disebut ideal dua sisi jika ideal tersebut merupakan ideal kiri dan juga merupakan ideal kanan. Namun jika ideal tersebut merupakan ideal kanan saja atau ideal kiri saja maka disebut ideal satu sisi.

Struktur aljabar selalu mengalami perkembangan sehingga memungkinkan munculnya teori-teori dan konsep-konsep baru di dalamnya. Rao (1995) telah memberikan konsep Γ-semiring. Selanjutnya, pada skripsi ini akan dibahas definisi dan teorema dari ideal prima dan ideal semiprima dari Γ-semiring yang dipelajari melalui semiring operator kiri dari Γ-semiring, beserta bukti-buktinya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi ideal prima dan ideal semiprima dari Γ-semiring dan teorema-teorema yang berkaitan dengan ideal prima dan ideal semiprima dari Γ-semiring yang dipelajari melalui semiring operator kiri dari Γ-semiring, beserta bukti-buktinya.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini hanya akan dipelajari definisi-definisi dan teorema-teorema ideal prima dan ideal semiprima dari Γ-semiring yang dipelajari melalui semiring operator kiri dari Γ-semiring, beserta bukti-buktinya, dan tidak dibandingkan dengan struktur aljabar yang lain.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas beberapa definisi, serta membuktikan teorema-teorema tentang ideal prima dan ideal semiprima dari Γ-semiring yang dipelajari melalui semiring operator kiri dari Γ-semiring.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema untuk membantu memahami materi yang dibahas dan juga digunakan sebagai acuan dalam bab pembahasan.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi

Dalam struktur aljabar, elemen-elemen dari suatu himpunan tak kosong dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, atau keduanya yang dikenal dengan operasi, salah satu contohnya adalah operasi binari atau operasi ternari. Berikut akan diberikan definisi tentang relasi, pemetaan, operasi binari dan operasi ternari.

Definisi 2.1.1 (Bhattacharya, dkk., 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut (x, y), dengan $x \in A$ dan $y \in B$, disebut hasil kali kartesian *(cartesian product)* dari A dan B, dinyatakan

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Definisi 2.1.2 (Bhattacharya, 1990)
Misalkan himpunan tak kosong A dan B, dan ρ adalah subset dari $A \times B$, maka ρ disebut relasi dari A ke B. Jika $(x, y) \in \rho$, maka x dikatakan berelasi dengan y diberi notasi $x\rho y$. Kemudian relasi dari A ke A disebut relasi pada A (atau di dalam A).

Definisi 2.1.3 (Bhattacharya, 1990)
Misalkan ρ relasi pada himpunan X, ρ memenuhi:
(i) ρ refleksif jika $x\rho x$, untuk setiap $x \in X$,
(ii) ρ simetris jika $x\rho y$ maka $y\rho x$, untuk setiap $x, y \in X$,
(iii) ρ antisimetris jika $x\rho y$ dan $y\rho x$ maka $x = y$, untuk setiap $x, y \in X$,
(iv) ρ transitif jika $x\rho y$ dan $y\rho z$ maka $x\rho z$, untuk setiap $x, y, z \in X$.

Jika ρ refleksif, simetris, dan trasitrif maka ρ disebut relasi ekivalen pada X.

Definisi 2.1.4 (Bhatacharya, 1990)
Misalkan ρ adalah relasi ekivalen pada himpunan X dan $a \in X$. Himpunan semua elemen X yang berada dalam relasi ρ ke a disebut kelas ekivalen dari a di bawah ρ dan diberi notasi C_a. Dalam notasi himpunan, dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$C_a = \{x \in X | x\rho a\}$$

Selanjutnya himpunan semua kelas-kelas ekivalen dari ρ di X disebut *quotient* dari X oleh ρ dan ditulis X/ρ. Dalam bentuk notasi himpunan, X/ρ dinyatakan sebagai berikut:

$$X/\rho = \{C_a | a \in X\}.$$

Definisi 2.1.5 (Bhatacharya, 1990)
Suatu relasi f dari A ke B disebut pemetaan dari A ke B jika untuk setiap $x \in A$ mempunyai kawan tepat satu $y \in B$ (y disebut image x dibawah relasi f). f adalah pemetaan dari A ke B, ditulis:

$$f : A \to B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B.$$

Definsi 2.1.6 (Bhattacharya, 1990)
Suatu pemetaan $f : A \to B$ adalah

1. Injektif (1-1) jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ maka
$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ atau } x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
2. Surjektif jika untuk setiap $y \in B$ maka $y = f(x)$, untuk suatu $x \in A$

Suatu pemetaan yang bersifat injektif dan surjektif disebut bijektif. Jika $f : A \to B$ adalah pemetaan yang bijektif, maka dapat dinyatakan dengan $f: A \cong B$.

Definisi 2.1.7 (Bhattacharya, 1990)
Misalkan S adalah suatu himpunan tak kosong. Suatu operasi binari $*$ pada himpunan S adalah pemetaan setiap pasangan terurut $(a,b) \in S \times S$ ke $a * b \in S$. Ditulis dalam bentuk notasi:

$$* : S \times S \to S$$
$$(a,b) \to *(a,b) = a * b.$$

Definisi 2.1.8 (Bhattacharya, 1990)

Untuk suatu bilangan bulat positif *n*, pemetaan $f : S^n \to S$, di mana $S^n = S \times S \times \cdots \times S$ (n faktor) disebut operasi *n-ari* pada *S*. Jika $n = 1$ maka pemetaan $u : S \to S$ disebut operasi unari dan jika $n = 2$ maka pemetaan $u : S \times S \to S$ disebut operasi binari dan jika $n = 3$ maka pemetaan $u : S \times S \times S \to S$ disebut operasi ternari, dan seterunya.

2.2 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang paling sederhana. Semigrup merupakan suatu himpunan tak kosong yang di dalamnya memiliki satu operasi binari dan memenuhi syarat-syarat tertentu. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1(Whitelaw, 1995)

Misalkan M himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan operasi binari $*$. $(M,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika:

1. $(M,*)$ tertutup : $a * b \in M$, untuk setiap $a, b \in M$, dan
2. $(M,*)$ berlaku sifat assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$.

Contoh 2.2.2

Diberikan suatu himpunan $R = \{n | n \in \mathbb{Z}^+\}$. Maka $(R, +)$ dengan $+$ adalah operasi penjumlahan biasa merupakan semigrup.

Bukti:

1. Ambil sebarang $a, b \in R$. Akan dibuktikan $a + b \in R$.
   $a, b \in R$ maka dapat dinyatakan $a = n_1$ dan $b = n_2$ di mana $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga
   $$\begin{aligned} a + b &= n_1 + n_2 \\ &= k, \text{ di mana } k \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$
   Jadi, R tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Ambil sebarang $a, b, c \in R$. Akan dibuktikan assosiatif
   $a, b, c \in R$ maka dapat dinyatakan $a = n_1,\ b = n_2$ dan $c = n_3$ di mana $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga

$$i)\ (a+b)+c = (n_1+n_2)+n_3$$
$$= (n_1+n_2+n_3)$$
$$ii)\ a+(b+c) = n_1(n_2+n_3)$$
$$= n_1+(n_2+n_3)$$
$$= (n_1+n_2+n_3)$$

Dari i) dan ii) maka $(a+b)+c = a+(b+c)$. Jadi, R terbukti assosiatif. Dari 1 dan 2 maka terbukti R adalah semigrup. ■

Berikut ini diberikan beberapa definisi serta contoh mengenai semigrup komutatif, semigrup dengan elemen identitas, dan subsemigrup.

Definisi 2.2.3 (Kandasamy, 2002)
Jika dalam semigrup $(M,*)$ berlaku $a*b = b*a$, untuk setiap $a,b \in M$ maka $(M,*)$ disebut semigrup komutatif.

Contoh 2.2.4
Dari contoh 2.2.2 diketahui $(R,+)$ merupakan semigrup. Akan dibuktikan bahwa $(R,+)$ semigrup komutatif.

Bukti :
Ambil sebarang $a,b \in R$. Akan dibuktikan $a+b = b+a$, $a,b \in R$ maka dapat dinyatakan $a = n_1$ dan $b = n_2$ di mana $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga
$$i)\ a+b = n_1+n_2$$
$$ii)\ b+a = n_2+n_1$$
karena $\mathbb{Z}^+$ bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan jadi, $n_2+n_1 = n_1+n_2$. Sehingga ii) dapat dinyatakan
$$b+a = n_2+n_1$$
$$= (n_1+n_2)$$
Dari i) dan ii) maka $(R,+)$ semigrup komutatif. ■

Langkah-langkah pembuktian di atas juga berlaku untuk himpunan $\Gamma = \{3n|n \in \mathbb{Z}^+\}$ terhadap operasi penjumlahan. Sehingga $(\Gamma,+)$ merupakan semigrup komutatif.

Definisi 2.2.5 (Kandasamy, 2002)
Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup dan mempunyai elemen identitas e sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in M$. Maka $(M,*)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau semigrup *monoid*.

Elemen identitas pada suatu semigrup $(M, +)$ biasanya disebut elemen nol *(zero element)* dan dinotasikan dengan 0 sedemikian sehingga memenuhi $0 + m = m + 0 = m$, untuk setiap $m \in M$. Sedangkan pada suatu semigrup $(M,\cdot)$ disebut elemen identitas *(identity element)* dan dinotasikan dengan 1 sedemikian sehingga memenuhi $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$, untuk setiap $m \in M$.

Teorema 2.2.6 (Whitelaw,1995)
Elemen identitas pada semigrup $(M,*)$ adalah tunggal.

Bukti:
Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup. Andaikan $e, f \in M$ adalah elemen identitas. Akan ditunjukkan bahwa $e = f$. Karena f merupakan elemen identitas maka $f * e = e * f = e$. Karena e juga merupakan elemen identitas maka $e * f = f * e = f$. Dengan demikian $e = f$. Jadi, terbukti bahwa suatu semigrup *monoid* hanya mempunyai elemen identitas yang tunggal. ■

Definisi 2.2.7(Lipschutz, 1976)
Semigrup memenuhi hukum kanselasi kanan dan kiri.

Definisi 2.2.8 (Whitelaw, 1995)
Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup dan H *subset* dari M. Maka H disebut subsemigrup dari M jika dan hanya jika $(H,*)$ suatu semigrup.

Contoh 2.2.9
Misalkan $H = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$, $(H, +)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{Z}^+, +)$ karena H *subset* dari $\mathbb{Z}^+$ dan $(H, +)$ suatu semigrup.

Bukti:
Karena $H \subseteq \mathbb{Z}^+$, maka cukup dibuktikan $(H, +)$ adalah semigrup.
1. Ambil sebarang $a, b \in H$. Akan dibuktikan $a + b \in H$,

$a, b \in H$ maka dapat dinyatakan $a = 2n_1$ dan $b = 2n_2$ di mana $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga

$$\begin{aligned} a + b &= 2n_1 + 2n_2 \\ &= 2(n_1 + n_2) \end{aligned}$$

dengan mengambil $n_1 + n_2 = k$, maka

$$= 2k, \text{ di mana } k \in \mathbb{Z}^+$$

Jadi, H tertutup terhadap operasi penjumlahan.

2. Ambil sebarang $a, b, c \in H$. Akan dibuktikan assosiatif

$a, b, c \in H$ maka dapat dinyatakan $a = 2n_1$, $b = 3n_2$ dan $c = 2n_3$ di mana $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga

$$\begin{aligned} i)\ (a + b) + c &= (2n_1 + 2n_2) + 2n_3 \\ &= (2n_1 + 2n_2 + 2n_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii)\ a + (b + c) &= 2n_1(2n_2 + 2n_3) \\ &= 2n_1 + (2n_2 + 2n_3) \\ &= (2n_1 + 2n_2 + 2n_3) \end{aligned}$$

Dari i) dan ii) maka $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi, R terbukti assosiatif. Dari 1 dan 2 maka terbukti H adalah semigrup, sehingga H adalah subsemigrup dari $\mathbb{Z}^+$. ∎

Teorema 2.2.10 (Whitelaw,1995)
Misalkan H himpunan tak kosong dan H subset dari M di mana $(M, *)$ suatu semigrup. Maka $(H, *)$ subsemigrup dari $(M, *)$ jika dan hanya jika H tertutup terhadap operasi $*$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Jelas, jika $(H, *)$ subsemigrup dari $(M, *)$ maka $(H, *)$ merupakan suatu semigrup. Berdasarkan Definisi 2.2.8 maka H tertutup terhadap operasi $*$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan H tertutup terhadap operasi $*$. Karena $(M, *)$ suatu semigrup, maka berlaku: $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$. Selanjutnya karena H subset dari M maka juga berlaku : $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in H$. Berdasarkan Definisi 2.1.1 maka $(H, *)$

merupakan semigrup. Jadi, terbukti bahwa $(H,*)$ subsemigrup dari $(M,*)$. ■

Definisi 2.2.11 (Tero Harju,1996)
Misalkan M adalah semigrup dan ρ adalah relasi ekivalen pada M. Maka pernyataan berikut benar:

(i) Jika $x\rho y$ mengakibatkan $(zx)\rho(zy)$ untuk setiap $x,y,z \in M$, maka ρ disebut kongruen kiri pada M.

(ii) Jika $x\rho y$ mengakibatkan $(xz)\rho(yz)$ untuk setiap $x,y,z \in M$, maka ρ disebut kongruen kanan pada M.

Jika ρ memenuhi kongruen kiri dan kongruen kanan pada semigrup M, maka ρ disebut relasi kongruen pada semigrup M.

Teorema 2.1.12 (Tero Harju, 1996)
Relasi ekivalen ρ pada semigrup M disebut kongruen jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ memenuhi:

$$\left.\begin{matrix} x_1\rho y_1 \\ x_2\rho y_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x_1x_2)\rho(y_1y_2)$$

Bukti:
($\Rightarrow$) Diketahui ρ adalah kongruen, $x_1\rho y_1$ dan $x_2\rho y_2$. Akan dibuktikan $(x_1x_2)\rho(y_1y_2)$. Dari $x_1\rho y_1$ didapat $(x_1y_2)\rho(y_1y_2)$, sebab ρ kongruen kanan, sedangkan $x_2\rho y_2$ didapat $(x_1x_2)\rho(x_1y_2)$ sebab ρ kongruen kiri. Karena $(x_1x_2)\rho(x_1y_2)$ dan $(x_1y_2)\rho(y_1y_2)$, maka berdasarkan sifat transitif pada relasi ρ, didapat $(x_1x_2)\rho(y_1y_2)$.

($\Leftarrow$) Diketahui $x_1\rho y_1$ dan $x_2\rho y_2$ sehingga $(x_1x_2)\rho(y_1y_2)$. Akan dibuktikan ρ kongruen. Karena ρ relasi ekivalen, serta untuk $x_1\rho y_1$ dan $x_2\rho y_2$ berlaku $(x_1x_2)\rho(y_1y_2)$, maka berdasarkan sifat transitif pada relasi ekivalen ρ, terdapat suatu $x_1, y_2 \in M$ sehingga $(x_1x_2)\rho(x_1y_2)$ dan $(x_1y_2)\rho(y_1y_2)$

1. Karena $x_1\rho y_1$ berlaku $(x_1y_2)\rho(y_1y_2)$, maka berdasarkan Definisi 2.2.11 (ii) disimpulkan kongruen kanan.
2. Karena $x_2\rho y_2$ berlaku $(x_1x_2)\rho(x_1y_2)$, maka berdasarkan Definisi 2.2.11 (i) disimpulkan kongruen kiri. ■

Definisi 2.2.13 (Tero Harju, 1996)
Misalkan ρ adalah relasi kongruen pada semigrup M dan $x \in M$. Himpunan semua elemen M yang berelasi dengan x oleh ρ, disebut kelas kongruen dari ρ, ditulis M/ρ, dan disebut himpunan *quotient* pada M oleh ρ. Dalam notasi himpunan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$M/\rho = \{x\rho | x \in M\}.$$

Teorema 2.2.14 (Burns, 2002)
Misalkan ρ adalah kongruen pada semigrup M dan operasi binari $" \cdot "$ pada himpunan *quotient* M/ρ didefinisikan $x\rho \cdot y\rho = (xy)\rho$, maka M/ρ adalah semigrup dan disebut semigrup *quotient*.

Bukti:
Akan dibuktikan pada M/ρ berlaku tertutup dan assosiatif.
(i) Jelas pada M/ρ berlaku tertutup, sebab $x\rho \cdot y\rho = (xy)\rho \in M/\rho$, untuk setiap $x\rho, y\rho \in M/\rho$.
(ii) Selanjutnya akan ditunjukkan berlaku assosiatif pada M/ρ. Ambil sebarang $x\rho, y\rho, z\rho \in M/\rho$

$$\begin{aligned} x\rho \cdot (y\rho \cdot z\rho) &= x\rho \cdot (yz)\rho \\ &= \big(x(yz)\big)\rho \\ &= \big((xy)z\big)\rho \\ &= (xy)\rho \cdot z\rho \\ &= (x\rho \cdot y\rho) \cdot z\rho \end{aligned}$$

Dengan kata lain, M/ρ memenuhi sifat assosiatif. Karena M/ρ memenuhi sifat (i) dan (ii) maka M/ρ semigrup. ■

Definisi 2.2.15 (Grillet, 2001)
Pangkat adalah kasus khusus dari hasil kali. Jika a adalah elemen dari semigrup M dan n adalah bilangan bulat positif maka a^n adalah hasil kali n-elemen dari semigrup M terhadap operasi perkalian sehingga $a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n\,suku}.$ Selanjutnya pada semigrup M terhadap operasi penjumlahan hasil kali dari $aa \dots a$ didefinisikan sebagai

jumlah $\underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\ suku}$. Kemudian pangakat a^n dapat dinyatakan sebagai perkalian na.

Jika suatu semigrup komutatif terhadap operasi penjumlahan M dibangun oleh subset X, maka setiap elemen dari semigrup M adalah jumlah perkalian bilangan bulat positif dari satu atau lebih elemen berbeda dari himpunan X.

Definisi 2.2.16 (Grillet, 2001)
Misalkan M adalah semigrup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan $X \subseteq M$, kemudian M disebut bebas pada X jika setiap elemen di M dapat ditulis secara tunggal sebagai jumlah perkalian bilangan bulat positif dari satu atau lebih elemen berbeda dari X. Kemudian M disebut semigrup komutatif bebas.

Contoh 2.2.17
$M = \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$ adalah semigrup komutatif bebas pada $X = \{1\}$ jika diberikan operasi penjumlahan pada semigrup M.

2.3 Semiring

Semiring adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan dua operasi binari yaitu penjumlahan dan perkalian. Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan semiring.

Definisi 2.3.1 (Kandasamy, 2002)
Misalkan R himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan dua operasi binari, yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi :
1. $(R, +)$ semigrup komutatif,
2. $(R, \cdot)$ semigrup, dan
3. untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dan $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Maka $(R, +, \cdot)$ disebut semiring.

Contoh 2.3.2
Himpunan $R = (\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$ merupakan suatu semiring.

Bukti:
Himpunan R dapat dituliskan menjadi $R = \{n|n \in \mathbb{Z}^+\}$, sehingga $a, b, c \in R$ maka dapat dinyatakan $a = n_1,\ b = n_2$ dan $c = n_3$ di mana $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$.

1. Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:
   (i) $a + b = n_1 + n_2$
   $= k$, di mana $k \in \mathbb{Z}^+$, memenuhi sifat tertutup,
   (ii) $(a + b) + c = (n_1 + n_2) + n_3$
   $= n_1 + (n_2 + n_3)$
   $= a + (b + c)$, memenuhi sifat assosiatif,
   (iii) $a + b = n_1 + n_2$
   $= n_2 + n_1$
   $= b + a$, memenuhi sifat komutatif,
   Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R, +)$ merupakan semigrup komutatif.
2. Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:
   (i) $a \cdot b = n_1 \cdot n_2$
   $= z$, di mana $z \in R$, memenuhi sifat tertutup,
   (ii) $(a \cdot b) \cdot c = (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3$
   $= n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$
   $= a \cdot (b \cdot c)$, memenuhi sifat assosiatif,
   Dari (i) dan (ii) maka $(R, \cdot)$ merupakan semigrup.
3. Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:
   $(a + b) \cdot c = (n_1 + n_2) \cdot n_3$
   $= n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3$, dan
   $a \cdot (b + c) = n_1 \cdot (n_2 + n_3)$
   $= n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$, berlaku sifat distributif,

Dari (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa R merupakan suatu semiring. ■

Berikut ini diberikan beberapa definisi serta contoh mengenai semiring komutatif, semiring dengan elemen identitas, dan subsemiring.

Definisi 2.3.3 (Kandasamy, 2002)
Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah suatu semiring. $(R, +, \cdot)$ disebut semiring komutatif jika $(R, \cdot)$ adalah semigrup komutatif.

Definisi 2.3.4 (Kandasamy, 2002)
R disebut semiring dengan elemen identitas jika memenuhi:
1. $(R, +)$ semigrup komutatif,
2. $(R,\cdot)$ semigrup *monoid*,
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dan $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Contoh 2.3.5
Himpunan $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, max, min)$ dengan $a \oplus b = max\{a, b\}$ dan $a \odot b = min\{a, b\}$ merupakan suatu semiring komutatif dengan *zero element* 0 dan *identity element* ∞.

Bukti:
1. Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:
   (i) $a \oplus b = max\{a, b\} \in R$,
   (ii) $$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= max\{a, b\} \oplus c\\ &= max\{a, b, c\}\\ &= max\{a, (b, c)\}\\ &= a \oplus max\{b, c\}\\ &= a \oplus (b \oplus c),\end{aligned}$$
   (iii) $a \oplus b = max\{a, b\} = max\{b, a\} = b \oplus a$,
   (iv) $0 \oplus a = max\{0, a\} = max\{a, 0\} = a \oplus 0 = a$.
   Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R,\oplus)$ merupakan semigrup komutatif.
2. Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:
   (i) $a \odot b = min\{a, b\} \in R$,
   (ii) $$\begin{aligned}(a \odot b) \odot c &= min\{a, b\} \odot c\\ &= min\{a, b, c\}\\ &= min\{a, (b, c)\}\\ &= a \odot min\{b, c\}\\ &= a \odot (b \odot c),\end{aligned}$$
   (iii) $a \odot b = min\{a, b\} = min\{b, a\} = b \odot a$,
   (iv) $\infty \odot b = min\{\infty, b\} = min\{b, \infty\} = b \odot \infty = b$.
   Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R,\odot)$ merupakan semigrup komutatif.
3. Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka:

$$(a \oplus b) \odot c = max\{a, b\} \odot c = min\{max\{a, b\}, c\},$$
$$\begin{aligned}(a \odot c) \oplus (b \odot c) &= min\{a, c\} \oplus min\{b, c\}\\ &= max\{min\{a, c\}, min\{b, c\}\}.\end{aligned}$$

Untuk kemungkinan-kemungkinan yang ada yaitu $(a < b < c, a<c<b, b<c<a, b<a<c, c<a<b, (c<b<a)$ dipenuhi

$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$
$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Dari (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa R merupakan suatu semiring komutatif dengan *zero element* 0 dan *identity element* ∞. ■

Definisi 2.3.6 (Kandasamy, 2002)
Misalkan suatu semiring R dan Q adalah *subset* dari R.Kemudian Q disebut subsemiring dari R jika Q bersama dengan operasi yang sama dengan R membentuk semiring.

Definisi 2.3.7(Dummit dan Foote, 2002)
Misalkan R dan S adalah semiring. Homomorfisma semiring adalah suatu pemetaan $\varphi : R \to S$ yang memenuhi:
(i) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$, untuk setiap $a, b \in R$ dan
(ii) $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$, untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 2.3.8 (Hartley dan Hawkes, 1994)
Homomorfisma yang bijektif disebut isomorfisma.

Untuk selanjutnya penulisan $a \cdot b$ atau perkalian a dengan b cukup ditulis dengan ab, untuk mempersingkat penulisan.

Definisi 2.3.9 (Shabir dkk, 2004)
Misalkan R semiring dan I subset tak kosong dari R. Maka I disebut ideal kiri (kanan) dalam R jika

$a + b \in I$, untuk setiap $a, b \in I$

$ra \in I$ $(ar \in I)$, untuk setiap $a, b \in I$ dan untuk setiap $r \in R$.

Jika I adalah ideal kiri dan ideal kanan dalam R, maka I disebut ideal dua sisi dalam R, atau cukup disebut dengan ideal dalam R.

Contoh 2.3.10

$I = \{2a \mid a \in R\}$ adalah ideal dua sisi dalam $R = \{\mathbb{Z}^+, +, .\}$.

Bukti:

Jelas bahwa $I \neq \phi$ dan I subset dari R. Ambil sebarang $k \in R$ dan $x, y \in I$. Sehingga x dan y dapat dinyatakan sebagai $x = 2a$ dan $y = 2b$ di mana $a, b \in R$. Maka

$$\begin{aligned} x + y &= 2a + 2b \\ &= 2\,(a+b), \quad a + b = c \in R \\ &= 2c \in I \end{aligned}$$

Pandang

$$\begin{aligned} x \cdot k &= 2a \cdot k, \quad a \cdot k = d \in R \\ &= 2d \in I \\ k \cdot x &= k \cdot 2a, \\ &= 2a \cdot k, \quad a \cdot k = d \in R \\ &= 2d \in I \end{aligned}$$

Jadi, I merupakan ideal kanan dan juga ideal kiri dalam R. Dengan kata lain terbukti bahwa I merupakan ideal dua sisi dalam semiring R. ■

Definisi 2.3.11 (Shabir, 2007)

Suatu ideal I dalam semiring R disebut ideal prima jika dan hanya jika untuk setiap ideal J dan K dalam R sedemikian sehingga $JK \subseteq I$ maka $J \subseteq I$ atau $K \subseteq I$.

Definisi 2.3.12 (Shabir, 2007)

Suatu ideal I dalam semiring R disebut ideal semiprima jika untuk setiap ideal H dalam R sedemikian sehingga $H^2 \subseteq I$ maka $H \subseteq I$.

Contoh 2.3.13

$I = \{2a \mid a \in R\}$ merupakan ideal prima dan ideal semiprima dalam $R = Z^{+}$.

Bukti:

I merupakan ideal dua sisi dalam semiring R (berdasarkan Contoh 2.3.10). Ambil sebarang J dan K ideal dalam R sedemikian sehingga $JK \subseteq I$. Selanjutnya ambil sebarang $a \in J$ dan $b \in K$, maka $a \cdot b \in JK \subseteq I$, sehingga $a \cdot b \in I$. Kemudian pergandaan tersebut dapat dinyatakan $a \cdot b = 2c,\ c \in R$. Dengan kata lain $a \cdot b$ adalah bilangan genap positif. Sehingga $a = 2c\ /\ b$ atau $b = 2c\ /\ a$, dengan mengambil $c/b = u$ atau $c/a = v$, di mana $u, v \in R$. Kemudian dapat dinyatakan $a = 2u$ atau $b = 2v$. Jadi terbukti $a \in I$ atau $b \in I$, I ideal prima dalam R.

Ambil sebarang ideal H dalam R sedemikian sehingga $H^2 \subseteq I$. Selanjutnya ambil sebarang $x \in H$. Maka $x \cdot x = x^2 \in H^2 \subseteq I$. Jadi $x^2 \in I$. Maka x^2 dapat dinyatakan sebagai $x^2 = 2y,\ y \in R$. Dengan kata lain x^2 merupakan bilangan genap positif atau 0. Jadi x pasti bilangan genap positif. Berarti x dapat dinyatakan sebagai $x = 2z,\ z \in R$. Dengan kata lain $x \in I$. Maka $H \subseteq I$. Jadi terbukti bahwa I ideal semiprima dalam R. ■

2.4 Γ-semiring

Γ-semiring adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan operasi ternari. Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan Γ-semiring.

Definisi 2.4.1 (Dutta dan Sardar, 2000)

Misalkan S dan Γ adalah semigrup komutatif terhadap operasi penjumlahan yang sama. Maka S disebut Γ-semiring jika terdapat pemetaan

$$\varphi : S \times \Gamma \times S \to S$$

$$(a, \alpha, b) \to a\alpha b, \text{ untuk setiap } a, b \in S$$

dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, yang memenuhi aksioma-aksioma:

1. $a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$
2. $(a + b)\alpha c = a\alpha c + b\alpha c$

3. $a(\alpha + \beta)c = a\alpha c + a\beta c$
4. $a\alpha(b\beta c) = (a\alpha b)\beta c$, untuk setiap $a, b, c \in S$ dan untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Definisi 2.4.2 (Rao, 1995)
Suatu Γ-semiring S dikatakan komutatif jika $a\alpha b = b\alpha a$, untuk setiap $a, b \in S$ dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$.

Contoh 2.4.3
Himpunan $S = \{n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan $\Gamma = \{3n | n \in \mathbb{Z}^+\}$. Maka S adalah $\Gamma -$semiring jika terdapat pemetaan

$$\varphi : S \times \Gamma \times S \to S.$$

Bukti:
Diketahui S dan Γ adalah semigrup komutatif atas penjumlahan menurut Contoh 2.2.2. Tinggal membuktikan S adalah $\Gamma -$semiring. Kemudian bentuk pemetaan φ, yaitu

$$\varphi : S \times \Gamma \times S \to S$$
$$(a, \alpha, b) \to \varphi\,(a, \alpha, b) = a\alpha b.$$

Akan ditunjukkan φ memenuhi aksioma-aksioma $\Gamma -$semiring pada Definisi 2.4.1.
Ambil sebarang $a, b, c \in S$ dan $\alpha, \beta \in \Gamma$, maka dapat dinyatakan $a = n_1$, b $= n_2$, $c = n_3$, $\alpha = 3n_4$ dan $\beta = 3n_5$ di mana $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga

1. $a\alpha(b + c) = n_1 3n_4(n_2 + n_3)$
   $= n_1 n_4(n_2 + n_3)$
   $= 3n_1 n_4(n_2 + n_3)$
   Misalkan $n_2 + n_3 = n_6$ di mana $n_6 \in \mathbb{Z}^+$
   $= n_1 n_4 n_6$
   $a\alpha b + a\alpha c = n_1 3n_4 n_2 + n_1 3n_4 n_3$
   $= 3n_1 n_4 n_2 + 3n_1 n_4 n_3$
   $= 3n_1 n_4(n_2 + n_3)$
   $= 3n_1 n_4 n_6$
   Sehingga diperoleh: $a\alpha(b + c) = a\alpha b + a\alpha c$.
2. $(a + b)\alpha c = (n_1 + n_2)3n_4 n_3$
   $= 3n_1 n_4 n_3 + 3n_2 n_4 n_3$
   $= 3n_4 n_3(n_1 + n_2)$

Misalkan $n_1 + n_2 = n_7$ di mana $n_7 \in \mathbb{Z}^+$

$$= 3n_4n_3n_7$$

$$a\alpha c + b\alpha c = 2n_1 3n_4 2n_3 + 2n_2 3n_4 2n_3$$
$$= 3n_1n_4n_3 + 3n_2n_4n_3$$
$$= 3n_4n_3(n_1 + n_2)$$
$$= 3n_4n_3n_7$$

Sehingga diperoleh: $(a + b)\alpha c = \ a\alpha c + b\alpha c.$

3. $a(\alpha + \beta)c \ = n_1(3n_4 + 3n_5)n_3$
$$= 3n_1n_4n_3 + 3n_1n_5n_3$$
$$= 3n_1n_3(n_4 + n_5)$$

Misalkan $n_4 + n_5 = n_8$ di mana $n_8 \in \mathbb{Z}^+$

$$= 3n_1n_3n_8$$

$$a\alpha c + a\beta c = n_1 3n_4 2n_3 + n_1 3n_5 n_3$$
$$= 3n_1n_4n_3 + 3n_1n_5n_3$$
$$= 3n_1n_3(n_4 + n_5)$$
$$= 3n_1n_3n_8$$

Sehingga diperoleh: $a(\alpha + \beta)c = \ a\alpha c + a\beta c.$

4. $a\alpha(b\beta c) = n_1 3n_4(n_2 3n_5 n_3)$
$$= n_1 3n_4 3(n_2n_5n_3)$$
$$= 9n_1n_4n_2n_5n_3$$

$$(a\alpha b)\beta c = (n_1 3n_4 n_2)3n_5n_3$$
$$= (3n_1n_4n_2)3n_5n_3$$
$$= 9n_1n_4n_2n_5n_3$$

Sehingga diperoleh: $a\alpha(b\beta c) = \ (a\alpha b)\beta c.$

Karena S dan Γ semigrup komutatif terhadap operasi penjumlahan dan terdapat pemetaan $\varphi : S \times \Gamma \times S \to S$ yang memenuhi aksioma-aksioma Γ-semiring maka terbukti R adalah $\Gamma -$semiring. ■

Lemma 2.4.4 (Chinram, 2008)

Misalkan S adalah semiring dan Γ adalah sebarang himpunan tak kosong. Didefinisikan pemetaan $S \times \Gamma \times S \to S$ dengan $a\gamma b = ab$, untuk setiap $a, b \in S$, dan untuk setiap $\gamma \in \Gamma$. Maka S adalah Γ-semiring.

Bukti:

Misalkan diberikan sebarang $a, b, c \in S$ dan $\gamma, \mu \in \Gamma$.

1. Karena S adalah semiring sehingga sudah jelas bahwa $(S, +)$ adalah semigrup komutatif (Definisi 2.3.1).
2. Dari definisi pemetaan jelas $a\gamma b = ab \in S$.

$$\begin{aligned} a\gamma(b+c) &= a(b+c) && \text{(definisi pemetaan)} \\ &= ab + ac && \text{(distributif)} \\ &= a\gamma b + a\gamma c && \text{(definisi pemetaan)} \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} (a+b)\gamma c &= (a+b)c && \text{(definisi pemetaan)} \\ &= ac + \mathrm{b}c && \text{(distributif)} \\ &= a\gamma c + b\gamma c && \text{(definisi pemetaan)} \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} a(\gamma + \mu)c &= a\alpha c && \text{(dimana } \gamma + \mu = \alpha\text{)} \\ &= ac && \text{(definisi pemetaan)} \\ &= a\gamma c + a\mu c && \text{(definisi pemetaan } \gamma + \mu = \alpha\text{)} \end{aligned}$$

5. Selanjutnya,
$$\begin{aligned} (a\gamma b)\mu c &= (ab)\mu c && \text{(definisi pemetaan)} \\ &= a(b\mu c) && \text{(asosiatif)} \\ &= a(bc) && \text{(definisi pemetaan)} \\ &= (ab)c && \text{(asosiatif)} \\ &= (a\gamma b)c && \text{(definisi pemetaan)} \\ &= a\gamma(bc) && \text{(asosiatif)} \\ &= a\gamma(b\mu c) && \text{(definisi pemetaan)} \end{aligned}$$

Dari kelima bukti di atas, terbukti bahwa S adalah Γ-semiring. ■

Definisi 2.4.5 (Chinram, 2008)

Misalkan S adalah Γ-semiring dan T subset tak kosong dari S. Maka T disebut subΓ-semiring dari S jika T adalah subsemigrup dari $(S, +)$ dan $a\gamma b \in T$, untuk setiap $a, b \in T$ dan untuk setiap $\gamma \in \Gamma$, atau dengan kata lain $T\Gamma T \subseteq T$.

Contoh 2.4.6

$T = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah subΓ-semiring dari Γ-semiring $S = \{n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan $\Gamma = \{3n | n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Bukti:
Diketahui $T \subseteq S$, akan dibuktikan T merupakan subΓ-semiring. Menurut Contoh 2.2.9 $(T,+)$ merupakan subsemigrup dari $(S,+)$. Kemudian cukup dibuktikan $a\gamma b \in T$, untuk setiap $a,b \in T$. Ambil sebarang $a,b \in T$ dan $\gamma \in \Gamma$, sehingga dapat dinyatakan $a = 2n_1$, $\mathrm{b} = 2n_2$ dan $\gamma = 3n_3$ di mana $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga

$$\begin{aligned} a\gamma b &= 2n_1 3n_3 2n_2 \\ &= 2(6n_1 n_3 n_2) \end{aligned}$$

karena $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga $6n_1 n_3 n_2 = k$, di mana $k \in \mathbb{Z}^+$,

$$= 2k \in T$$

Jadi, terbukti T merupakan subΓ-semiring dari Γ-semiring S. ■

Definisi 2.4.7 (Rao, 1995)
Sebuah himpunan bagian A dari $\Gamma-$semiring S adalah ideal kanan (kiri) dari S jika A adalah subsemigrup atas penjumlahan dari S dan $A\Gamma S(S\Gamma A) \subseteq A$. Jika A adalah ideal kanan dan kiri dari S maka A adalah ideal dua sisi atau biasa disebut ideal dari S.

Contoh 2.4.8
$A = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah ideal dua sisi dari Γ-semiring $S = \{n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan $\Gamma = \{3n | n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Bukti:
Diketahui $A \subseteq S$, akan dibuktikan A adalah ideal dua sisi dari $\Gamma-$semiring S. Menurut Contoh 2.4.6 diketahui A merupakan subsemigrup dari S. Kemudian cukup dibuktikan $a\gamma s(s\gamma a) \in A$, untuk setiap $a \in A, s \in S$ dan $\gamma \in \Gamma$. Ambil sebarang $a \in A, s \in S$ dan $\gamma \in \Gamma$, sehingga dapat dinyatakan $a = 2n_1, s = n_2$ dan $\gamma = 3n_3$ di mana $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}^+$. Untuk ideal kanan

$$\begin{aligned} a\gamma s &= 2n_1 3n_3 n_2 \\ &= 2(n_1 3n_3 n_2) \end{aligned}$$

karena $n_1, n_3, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga $n_1 3n_3 n_2 = c$

$$= 2c, \text{ di mana } c \in \mathbb{Z}^+$$

Jadi, terbukti $a\gamma s \in A$. Untuk ideal kiri

$$\begin{aligned} s\gamma a &= n_2 3n_3 2n_1 \\ &= 2(n_2 3n_3 n_1) \end{aligned}$$

karena $n_1, n_3, n_2 \in \mathbb{Z}^+$, sehingga $n_2 3n_3 n_1 = d$

$$= 2d, \text{ di mana } c \in \mathbb{Z}^+$$

Jadi, terbukti $s\gamma a \in A$.

Karena A adalah ideal kanan dan ideal kiri dari Γ-semiring S sehingga A adalah ideal dua sisi dari Γ-semiring S. ■

2.5 Semiring Operator Kiri dari Γ −Semiring

Semiring operator kiri adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan Γ −semiring. Pada bagian ini diberikan definisi yang berkaitan dengan Semiring operator kiri.

Definisi 2.5.1 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah Γ −semiring dan F merupakan semigrup komutatif bebas terhadap penjumlahan yang dibangun oleh $S \times \Gamma$. Didefinisikan relasi ρ atas F sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i,\alpha_i)\rho\sum_{j=1}^{n}(y_j,\beta_j) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i\alpha_i\, a = \sum_{j=1}^{n} y_j\beta_j a$$

untuk setiap $x_i, a \in S, \alpha_i \in \Gamma, (m,n \in \mathbb{Z}^+)$, maka relasi ρ disebut kongruen pada F. Kemudian kelas kongruen yang memuat $\sum_{i=1}^{m}(x_i,\alpha_i)$ dinotasikan

$$\sum_{i=1}^{m}(x_i,\alpha_i)\rho = \sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i].$$

Maka F/ρ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan.

Contoh 2.5.2
Misalkan Γ −semiring $S = \{1,2,\dots,m,\dots\}$ dan $\Gamma = \{3,6,\dots 3m,\dots\}$, $S \times \Gamma = \{(1,3),(2,3),\dots,(m,3m),\dots\}$ di mana $m \in \mathbb{Z}^+$. Maka $F = S \times \Gamma$ adalah semigrup komutatif bebas yang dibangun oleh $X = \{(1,3),(2,3),\dots(m,3),\dots,(1,6),(1,9),\dots(1,3m),\dots\} \subseteq S \times \Gamma$ jika F merupakan semigrup terhadap operasi penjumlahan.

Definsi 2.5.3 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan F/ρ suatu semiring, di mana F merupakan semigrup komutatif bebas terhadap penjumlahan dibangun oleh $S \times \Gamma$ dan relasi ρ kongruen pada F, dengan operasi penjumlahan didefinisikan sebagai berikut

$$[x,\alpha]+[y,\alpha]=[x+y,\alpha] \text{ dan } [x,\alpha]+[x,\beta]=[x,\alpha+\beta],$$

kemudian untuk pergandaan didefinisikan sebagai berikut

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j]\right) = \sum_{i,j}[x_i\alpha_i y_j,\beta_j],$$

untuk setiap $\alpha_i, \beta_j \in \Gamma$ dan untuk setiap $x_i, y_j \in S$. $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]$ dinotasikan dengan L, yaitu semiring operator kiri dari Γ −semiring S, yaitu

$$L = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \middle| \alpha_i \in \Gamma, x_i \in S, i = 1,2, \dots, m; m \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Untuk $N \subseteq S$ dan $\Delta \subseteq \Gamma$, dinotasikan $[N, \Delta]$ adalah himpunan dari semua jumlah berhingga $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] \in L$, di mana $x_i \in N$ dan $\alpha_i \in \Delta$. Jadi pada kenyataannya $[S, \Gamma] = L$. Untuk lebih sederhananya $[\{x\}, \Gamma]$ dinyatakan dengan $[x, \Gamma]$. Untuk $P \subseteq L$ dedefinisikan

$$P^+ = \{a \in S | [a, \Gamma] \subseteq P\},$$

kemudian untuk $Q \subseteq S$ didefinisikan

$$Q^{+'} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \in L \middle| \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \right) S \subseteq Q \right\}.$$

Di mana $(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i])S$ merupakan himpunan dari semua jumlah berhingga $\sum_{i,k} x_i \alpha_i s_k$, di mana $s_k \in S$.

Lemma 2.5.4 (Dutta dan Sardar, 2002)
$[x, \Gamma] \subseteq P$ jika dan hanya jika $[x, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, di mana $P \subseteq L$ dan $x \in S$.

Bukti:
($\Rightarrow$) Diketahui: $[x, \Gamma] \subseteq P$. Akan dibuktikan: $[x, \alpha] \in P$. Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x, \alpha_i] \in [x, \Gamma]$.

$$\sum_{i=1}^{m} [x, \alpha_i] = [x, \alpha_1] + [x, \alpha_2] + \cdots + [x, \alpha_m] \in [x, \Gamma].$$

Ambil m=1 maka $\sum_{i=1}^{m}[x, \alpha_1] \in [x, \Gamma]$ dan $\alpha_1 = \alpha$ maka $[x, \alpha] \in [x, \Gamma]$. Karena $[x, \Gamma] \subseteq P$ dan $[x, \alpha] \in [x, \Gamma]$ Maka $[x, \alpha] \in P$.

($\Leftarrow$) Diketahui $[x, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Akan dibuktikan $[x, \Gamma] \subseteq P$. Diketahui bahwa Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan sehingga jika terdapat $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$ maka $\alpha_1 + \alpha_2 \in \Gamma$ sedemikian sehingga $[x, \alpha_1 + \alpha_2] \in P$, di mana

$$[x, \alpha_1 + \alpha_2] = \sum_{i=1}^{2} [x, \alpha_i],$$

jika terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \Gamma$ maka $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \in \Gamma$ sedemikian sehingga $[x, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] \in P$, di mana

$$[x, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3] = \sum_{i=1}^{3} [x, \alpha_i],$$

kemudian jika terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \Gamma$ maka $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m \in \Gamma$ sedemikian sehingga $[x, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m] \in P$, di mana

$$[x, \alpha_1 + \cdots + \alpha_m] = \sum_{i=1}^{m} [x, \alpha_i].$$

Sehingga

$$\left\{ [x, \alpha_1], \sum_{i=1}^{2} [x, \alpha_i], \dots, \sum_{i=1}^{m} [x, \alpha_i] \right\} \subseteq P.$$

Diketahui juga $\sum_{i=1}^{m} [x, \alpha_i] \in [x, \Gamma]$ sehingga

$$\left\{ [x, \alpha_1], \sum_{i=1}^{2} [x, \alpha_i], \dots, \sum_{i=1}^{m} [x, \alpha_i] \right\} \subseteq [x, \Gamma] \subseteq P.$$

Karena $P \subseteq L$ dan $[x, \alpha] \in P$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma$ maka jelas bahwa $[x, \Gamma] \subseteq P$. ■

Lemma 2.5.5 (Dutta dan Sardar, 2002)
$(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i])S \subseteq Q$ jika dan hanya jika $\sum_i x_i \alpha_i s \in Q$ untuk setiap $s \in S$ di mana $m \in \mathbb{Z}^+$ dan $Q \subseteq S$.

Bukti:
($\Rightarrow$) Diketahui $(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i])S \subseteq Q$. Akan dibuktikan: $\sum_i x_i \alpha_i s \in Q$, untuk setiap $s \in S$. Diketahui $(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i])S$ merupakan himpunan dari semua jumlah berhingga $\sum_{i,k} x_i \alpha_i s_k$, di mana $s_k \in S$, maka

$$\left\{ \sum_i x_i \alpha_i s, \dots, \sum_i x_i \alpha_i (s_1 + \cdots + s_k) \right\} \subseteq \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \right) S$$

karena $(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i])S \subseteq Q$, sehingga

$$\left\{ \sum_i x_i \alpha_i s, \dots, \sum_i x_i \alpha_i (s_1 + \cdots + s_k) \right\} \subseteq Q.$$

Ambil $k = 1$ maka $\sum_{i,k} x_i \alpha_i s_1 \in Q$, di mana $s_1 \in S$ dan $s_1 = s$ maka $\sum_i x_i \alpha_i s \in Q$.

(⇐) Diketahui $\sum_i x_i\alpha_i s \in Q$, untuk setiap $s \in S$. akan dibuktikan:

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)S \subseteq Q$$

$\sum_i x_i\alpha_i s \in Q$, di mana $s \in S$.
$\sum_i x_i\alpha_i(s_1 + \cdots + s_k) \in Q$, di mana $s_1 + \cdots + s_k \in S$.
Jadi,

$$\left\{\sum_{i,k} x_i\alpha_i s\,, \dots, \sum_i x_i\alpha_i(s_1 + \cdots + s_k)\right\} \subseteq Q.$$

Dan diketahui juga bahwa $(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i])S$ adalah himpunan dari semua jumlah berhingga $\sum_{i,k} x_i\alpha_i s_k$, sehingga

$$\left\{\sum_{i,k} x_i\alpha_i s\,, \dots, \sum_i x_i\alpha_i(s_1 + \cdots + s_k)\right\} \subseteq \left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)S$$

Jadi, terbukti $(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i])S \subseteq Q$. ■

Definisi 2.5.6 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah $\Gamma -$semiring. Jika terdapat elemen $0 \in S$ maka 0 disebut elemen nol dari $\Gamma -$semiring S sedemikian sehingga $0 + x = x$ dan $0\alpha x = x\alpha 0 = 0$ untuk setiap $x \in S$ dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$.

Lemma 2.5.7 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah $\Gamma -$semiring dengan elemen nol dan L merupakan semiring operator kiri. Maka untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, $[0,\alpha]$ adalah elemen nol dari L.

Bukti:
Ambil sebarang $\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i] \in L$, untuk setiap $x_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i \in \Gamma$. Diberikan S adalah $\Gamma -$semiring dengan elemen nol maka terdapat elemen $0 \in S$ sedemikian sehingga $0 + x = x$ dan $0\alpha x = x\alpha 0 = 0$ untuk setiap $x \in S$ dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Karena S adalah $\Gamma -$semiring menurut Definisi 2.4.1, maka Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan. Ambil sebarang $\alpha_i \in \Gamma; i = 1,2,3, \dots. m$, karena Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan maka bersifat tertutup atas operasi penjumlahan, sehingga $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = \alpha \in \Gamma$.

$$(i) \quad [0,\alpha] + \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right) = \sum_{i=1}^{m} [0, \alpha_i] + \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [0 + x_i, \alpha_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]$$

$$(ii) \quad [0,\alpha] \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right) = \left(\sum_{i=1}^{m} [0, \alpha_i]\right)\left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right)$$

$$= \sum_{i} [0\alpha_i x_i, \alpha_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [0, \alpha_i]$$

$$= [0, \alpha_1] + [0, \alpha_2] + \cdots + [0, \alpha_m]$$

$$= [0, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m].$$

Karena Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan maka bersifat tertutup, sehingga

$$= [0, \alpha]$$

$$(iii) \quad \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right)[0,\alpha] = \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right)\left(\sum_{i=1}^{m} [0, \alpha_i]\right)$$

$$= \sum_{i} [x_i \alpha_i 0, \alpha_i]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} [0, \alpha_i]$$

$$= [0, \alpha_i].$$

Karena Γ adalah semigrup komutatif terhadap penjumlahan maka bersifat tertutup, sehingga

$$= [0, \alpha]$$

Dari (i), (ii), dan (iii) menurut Definisi 2.5.6 maka $[0, \alpha]$ adalah elemen nol dari semiring operator kiri S. ■

Definisi 2.5.8 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah Γ −semiring dan L merupakan semiring operator kiri dari S. Jika terdapat elemen $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i] \in L$, sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \delta_i a = a.$$

Untuk setiap $a \in S$, maka S dikatakan mempunyai elemen satuan kiri $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$.

Proposisi 2.5.9 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah Γ −semiring dan L merupakan semiring operator kiri dari S. Jika $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dari S, maka $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan dari L.

Bukti:
Diberikan $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dari S, maka

$$\sum_{i=1}^{m} e_i \delta_i a = a$$

(dari Definisi 2.5.8). Akan dibuktikan $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan dari L. Maka harus dibuktikan bahwa $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dan elemen satuan kanan dari L.

(i) Akan dibuktikan: $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dari L. Ambil sebarang $\sum_{j=1}^{n}[x_j, \alpha_j] \in L$, sehingga

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{n}[x_j, \alpha_j]\right) = \sum_{i,j}[e_i \delta_i x_j, \alpha_j]$$

Karena $\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dari S dan untuk setiap $x_j \in S$, maka $\sum_{i=1}^{m} e_i \delta_i x_j = x_j$.
Jadi,

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[e_i, \delta_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{n}[x_j, \alpha_j]\right) = \sum_{i,j}[x_j, \alpha_j]$$

Terbukti $\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dari L.

(ii) Akan dibuktikan: $\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]$ adalah elemen satuan kanan dari L. Ambil sebarang $\sum_{j=1}^{n}[x_j,\alpha_j], \sum_{k=1}^{p}[y_k,\beta_k] \in L$, sehingga

$$\left(\sum_{j=1}^{n}[x_j,\alpha_j]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]\right) = \sum_{i,j}[x_j\alpha_j e_i,\delta_i]$$

$$\left(\sum_{i,j}[x_j\alpha_j e_i,\delta_i]\right)\left(\sum_{k=1}^{p}[y_k,\beta_k]\right) = \sum_{i,j,k}[x_j\alpha_j e_i\delta_i y_k,\beta_k].$$

Karena $\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]$ adalah elemen satuan kiri dari S dan $x_j, y_k \in S$, maka $\sum_{i=1}^{m} e_i\delta_i y_k = y_k$

$$\left(\sum_{j=1}^{n}[x_j,\alpha_j]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]\right)\left(\sum_{k=1}^{p}[y_k,\beta_k]\right) = \sum_{j,k}[x_j\alpha_j y_k,\beta_k]$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}[x_j,\alpha_j]\right)\left(\sum_{k=1}^{p}[y_k,\beta_k]\right).$$

Dengan hukum kanselasi maka diperoleh

$$\left(\sum_{j=1}^{n}[x_j,\alpha_j]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}[x_j,\alpha_j]\right)$$

Terbukti $\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]$ adalah elemen satuan kanan dari L. Dari (i) dan (ii) maka terbukti bahwa $\sum_{i=1}^{m}[e_i,\delta_i]$ adalah elemen satuan dari L. ■

Teorema 2.5.10 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah $\Gamma-$semiring dengan elemen identitas dan elemen nol. Jika S adalah $\Gamma-$semiring komutatif, maka L semiring operator kiri yang komutatif.

Bukti:
Diberikan S adalah $\Gamma-$semiring komutatif. Maka $a\alpha b = b\alpha a$, untuk setiap $a, b \in S$ dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Akan dibuktikan L semiring operator kiri adalah komutatif.

Ambil $(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]), (\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j]), (\sum_{k=1}^{p}[z_k,\gamma_k]) \in L$, maka

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j]\right) = \sum_{i,j}[x_i\alpha_i y_j,\beta_j]$$

$$\left(\sum_{i,j}[x_i\alpha_i y_j,\beta_j]\right)\left(\sum_{k=1}^{p}[z_k,\gamma_k]\right) = \sum_{i,j,k}[x_i\alpha_i y_j\beta_j z_k,\gamma_k]$$

$$= \sum_{i,j,k}[x_i\alpha_i(y_j\beta_j z_k),\gamma_k]$$

$$= \sum_{i,j,k}[y_j\beta_j z_k\alpha_i x_i,\gamma_k]$$

$$= \sum_{i,j,k}[y_j\beta_j x_i\alpha_i z_k,\gamma_k]$$

$$= \sum_{i,j}[y_j\beta_j x_i,\alpha_i]\left(\sum_{k=1}^{p}[z_k,\gamma_k]\right).$$

Dengan hukum kanselasi maka diperoleh

$$\sum_{i,j}[x_i\alpha_i y_j,\beta_j] = \sum_{i,j}[y_j\beta_j x_i,\alpha_i]$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j]\right) = \left(\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right).$$

Jadi, terbukti L semiring operator kiri dari $\Gamma-$semiring S adalah komutatif. ■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas tentang definisi-definisi dan teorema-teorema dari ideal semiprima dari $\Gamma-$semiring yang dipelajari melalui semiring operator kiri dari $\Gamma-$semiring beserta buktinya.

3.1 Ideal Semiring Operator kiri dari Γ −semiring

Ideal P dari semiring operator kiri dari $\Gamma-$semiring S adalah subset dari semiring operator kiri L yang memenuhi sifat ideal dalam semiring. Kemudian pada bagian ini akan diberikan proposisi-proposisi tentang keterkaitan ideal dari semiring operator kiri dan ideal dari $\Gamma-$semiring S.

Proposisi 3.1.1(Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah $\Gamma-$semiring, L merupakan semiring operator kiri dari S dan untuk $P \subseteq L$ didefinisikan

$$P^+ = \{a \in S | [a, \Gamma] \subseteq P\}.$$

(i) Jika P adalah ideal kanan (kiri) dari L, maka P^+ adalah ideal kanan (kiri) dari S.
(ii) Jika P adalah ideal dari L, maka P^+ adalah ideal dari S.

Bukti:
(i) a) Akan dibuktikan: P^+ adalah ideal kanan dari S.

- Misalkan P adalah ideal kanan dari L, maka $[0, \alpha] \in P$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, sehingga $0 \in P^+$. Jadi, P^+ tak kosong.

- Misal $x, y \in P^+$, maka $[x, \Gamma], [y, \Gamma] \subseteq P$ dan menurut Lemma 2.5.4, $[x, \alpha], [y, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Kemudian
$$[x, \alpha] + [y, \alpha] = [x + y, \alpha] \in P,$$
untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Sehingga $x + y \in P^+$.

- Misal $x \in P^+$, maka $[x, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Karena P ideal kanan dari L dan $[s, \beta] \in L$, maka $[x, \alpha][s, \beta] \in P$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan $s \in S$. Sehingga $[x\alpha s, \beta] \in P$. Dan ini mengakibatkan $x\alpha s \in P^+$, $P^+\Gamma S \subseteq P^+$ karena itu P^+ adalah ideal kanan dari S.

b) Akan dibuktikan: P^+ adalah ideal kiri dari S.

- Misalkan P adalah ideal kiri dari L, Maka $[0, \alpha] \in P$ untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Sehingga $0 \in P^+$. Jadi P^+ tak kosong.

- Misal $x, y \in P^+$, maka $[x, \Gamma], [y, \Gamma] \subseteq P$ dan menurut Lemma 2.5.4, $[x, \alpha], [y, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Kemudian
$$[x, \alpha] + [y, \alpha] = [x + y, \alpha] \in P$$
untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Sehingga $x + y \in P^+$.

- Misal $x \in P^+$, maka $[x, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha \in \Gamma$. Karena P ideal kiri dari Ldan $[s, \beta] \in L$, maka $[s, \beta][x, \alpha] \in P$, untuk setiap $\alpha, \beta \in \Gamma$ dan $s \in S$. Sehingga $[s\beta x, \alpha] \in P$. Dan ini mengakibatkan $s\beta x \in P^+$, $S\Gamma P^+ \subseteq P^+$ karena itu P^+ adalah ideal kiri dari S.

(ii) Akan dibuktikan: P^+ adalah ideal dari S, yaitu P^+ adalah ideal kanan dan kiri dari S. P adalah ideal dari L, maka P adalah ideal kanan dan ideal kiri dari L. Jadi jika P ideal kanan maka P^+ memiliki ideal kanan dan jika P ideal kiri maka P^+ memiliki ideal kiri di S (Proposisi 3.1.1(i)). Jadi, P^+ adalah ideal dari S. ■

Proposisi 3.1.2 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan S adalah Γ −semiring, L merupakan semiring operator kiri dari S dan untuk $Q \subseteq S$ didefinisikan
$$Q^{+'} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \in L \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \right) S \subseteq Q \right\}.$$
(i) Jika Q adalah ideal kanan (kiri) dari S, maka $Q^{+'}$adalah ideal kanan (kiri) dari L.
(ii) Jika Q adalah ideal dari S, maka $Q^{+'}$ adalah ideal dari L.

Bukti:
(i) a) Akan dibuktikan: $Q^{+'}$ adalah ideal kanan dari L.

- Misalkan Q adalah ideal kanan dari S, Maka $0 \in Q$ berarti $0 = 0\alpha s \in Q$, untuk setiap $s \in S$ dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, sehingga $[0, \alpha] \in Q^{+'}$. Jadi, $Q^{+'}$ tak kosong.

- Misal $\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i], \sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i] \in Q^{+'}$. Akan dibuktikan
$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)+\left(\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]\right)\in Q^{+'}.$$
Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\,S$ dan $\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]S$ maka menurut Lemma 2.5.5 $(\sum_i x_i\alpha_i s), (\sum_j y_j\beta_j s) \in Q,$ untuk setiap $x_i, y_j, s \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_j \in \Gamma$. Kemudian karena Q ideal kanan dari S, sehingga
$$\begin{aligned}\sum_i x_i\alpha_i s+\sum_i y_i\beta_i s &= \sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\,S+\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]S\\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]+\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]\right)S\end{aligned}$$
sehingga mengakibatkan
$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)+\left(\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]\right)\in Q^{+'}$$

- Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i] \in Q^{+'}$ dan $\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j] \in L$. Akan dibuktikan
$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)\left(\sum_{j=1}^{n}[y_j,\beta_j]\right)\in Q^{+'}.$$

Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\,S$ maka menurut Lemma 2.5.5 $\sum_i x_i\alpha_i s \in Q,$ untuk setiap $s \in S$. Kemudian karena $y_j \in S$ sehingga $\sum_i x_i\alpha_i y_i \in Q$. Ini mengakibatkan $\sum_i x_i\alpha_i y_i\beta_j s \in Q$, untuk setiap $s \in S$. Sehingga
$$\sum_{i,j}[x_i\alpha_i y_j,\beta_j]\in Q^{+'}$$
$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[y_j,\beta_j]\right)\in Q^{+'}.$$

Jadi, $Q^{+'}$ adalah ideal kanan dari L.

b) Akan dibuktikan: $Q^{+'}$ adalah ideal kiri dari L.

- Misalkan Q adalah ideal kiri dari S, Maka $0 \in Q$ berarti $0 = s\alpha 0 \in Q$, untuk setiap $a \in \mathrm{S}$ dan untuk setiap $\alpha \in \Gamma$, sehingga $[0, \alpha] \in Q^{+'}$. Jadi, $Q^{+'}$ tak kosong.

- Misal $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i], \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i] \in Q^{+'}$. Akan dibuktikan

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right) + \left(\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right) \in Q^{+'}.$$

Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\, S$ dan $\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i] S$ maka menurut Lemma 2.5.5 $(\sum_i x_i\alpha_i s), (\sum_j y_j\beta_j s) \in Q$, untuk setiap $x_i, y_j, s \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_j \in \Gamma$. Kemudian karena Q ideal kanan dari S, maka

$$\begin{aligned}\sum_i x_i\alpha_i s + \sum_i y_i\beta_i s &= \sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\, S + \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i] S \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] + \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right) S\end{aligned}$$

sehingga mengakibatkan

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right) + \left(\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right) \in Q^{+'}$$

- Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] \in Q^{+'}$ dan $\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i] \in L$. Akan dibuktikan

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right) \in Q^{+'}.$$

Ambil $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\, S$ maka menurut Lemma 2.5.4 $\sum_i x_i\alpha_i s \in Q, \forall\, s \in S$. Kemudian karena $y_i \in S$ maka $\sum_i y_i\beta_i x_i \in Q$. Ini mengakibatkan $\sum_i y_i\beta_i x_i\alpha_i s \in Q$, untuk setiap $s \in S$. Sehingga

$$\sum_i [y_i\beta_i x_i, \alpha_i] \in Q^{+'}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}[y_j, \beta_j]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right) \in Q^{+'}.$$

Jadi, $Q^{+'}$ adalah ideal kiri dari L.

(ii) Akan dibuktikan: $Q^{+'}$ adalah ideal dari L, yaitu $Q^{+'}$ adalah ideal kanan dan kiri dari L. Q adalah ideal dari S, maka Q adalah ideal kanan dan ideal kiri dari S. Jadi jika Q ideal kanan maka $Q^{+'}$ memiliki ideal kanan dan jika Q ideal kiri maka $Q^{+'}$ memiliki ideal kiri di L (Proposisi 3.1.2(i)). Jadi $Q^{+'}$ adalah ideal dari L. ■

3.2 Ideal Prima

Pada definisi berikut ini akan diperkenalkan suatu ideal prima dari Γ −semiring dan membahasnya melalui semiring operator kiri dari S.

Definisi 3.2.1 (Dutta dan Sardar, 2000)
Misalkan S adalah Γ −semiring. Suatu ideal P dari S dikatakan prima jika untuk sebarang ideal H dan K dari S, $H\Gamma K \subseteq P$ maka $H \subseteq P$ atau $K \subseteq P$.

Contoh 3.2.2
$P = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah ideal prima dari Γ-semiring $S = \{n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan $\Gamma = \{3n | n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Bukti:
Diketahui $P = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$, akan dibuktikan P adalah ideal prima dari Γ −semiring S. Menurut Contoh 2.4.8 P adalah ideal dua sisi dari S. Selanjutnya ambil sebarang ideal H dan K dari S sedemikian sehingga $H\Gamma K \subseteq P$. Selanjutnya ambil sebarang $a \in H, b \in K$ dan $\gamma \in \Gamma$, maka $a\gamma b \in H\Gamma K \subseteq P$, sehingga $a\gamma b \in P$. Kemudian perkalian tersebut dapat dinyatakan $a\gamma b = 2c$, $c \in \mathbb{Z}^+$. Dengan kata lain $a\gamma b$ adalah bilangan genap positif. Kemudian karena $\gamma \in \Gamma$ sehingga $a = 2c \,/\, \gamma b$ atau $b = 2c \,/\, \gamma a$, dengan mengambil $c/\gamma b = u$ atau $c/\gamma a = v$, di mana $u, v \in \mathbb{Z}^+$. Kemudian dapat dinyatakan $a = 2u$ atau $b = 2v$. Jadi terbukti $a \in P$ atau $b \in P$ sehingga $H \subseteq P$ atau $K \subseteq P$. Jadi, P ideal prima dari Γ -semiring S. ■

Lemma 3.2.3 (Dutta dan Sardar, 2000)
Misalkan S adalah suatu Γ −semiring dan L merupakan semiring operator kiri dari S. Jika P adalah suatu ideal prima dari L maka P^+ adalah suatu ideal prima dari S.

Bukti:
Diketahui S adalah suatu Γ −semiring dan L semiring operator kiri dari S, dan didefinisikan

$$P^+ = \{a \in S | [a, \Gamma] \subseteq P\}$$

Jika P adalah ideal dari L, maka P^+ adalah ideal dari S (Proposisi 3.1.1). Diberikan P adalah ideal prima dari L. Akan dibuktikan P^+ adalah suatu ideal prima dari S. Misalkan $A\Gamma B \subseteq P^+$ di mana A dan B adalah sebarang ideal dari S. Karena $A\Gamma B \subseteq P^+$ maka $A\Gamma B$ dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$\{a_i \gamma b_i \in S | [a_i \gamma b_i, \Gamma] \subseteq P\},$$

untuk setiap $a_i \in A, b_i \in B,\ \gamma \in \Gamma$, sehingga $[A\Gamma \mathrm{B}, \Gamma] \subseteq P$. Karena $[A\Gamma \mathrm{B}, \Gamma] \subseteq P$ maka $[A, \Gamma][B, \Gamma] \subseteq P$ (berdasarkan sifat perkalian pada L). Karena P adalah ideal prima dari semiring operator kiri L (dari Definisi 2.3.11) maka diperoleh $[A, \Gamma] \subseteq P$ atau $[B, \Gamma] \subseteq P$ sehingga $A \subseteq P^+$ atau $B \subseteq P^+$. Dapat dilihat jika $A\Gamma B \subseteq P^+$ maka $A \subseteq P^+$ atau $B \subseteq P^+$. Jadi, P^+ adalah ideal prima dari S. ■

Lemma 3.2.4 (Dutta dan Sardar, 2002)
Jika Q adalah suatu ideal prima dari suatu Γ −semiring S maka ${Q^+}'$adalah ideal prima dari semiring operator kiri L.

Bukti:
Didefinisikan

$$Q^+ = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \in L \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \right) S \subseteq Q \right\}.$$

Jika Q adalah ideal dari S, maka ${Q^+}'$ adalah ideal dari L (Proposisi 3.1.2). Diberikan Q adalah ideal prima dari S. Akan dibuktikan ${Q^+}'$ adalah suatu ideal prima dari L. Misalkan $AB \subseteq L \ni AB \subseteq Q^+$di mana A dan B adalah sebarang ideal dari L. Akan ditunjukkan $A \subseteq Q^+$ atau $B \subseteq Q^+$. Langkah pertama akan dibuktikan $ALB \subseteq AB \subseteq L$. Ambil sebarang $x \in ALB$ maka

$$x = [a, \beta][s, \alpha][b, \gamma],$$

untuk setiap $a \in A^+, b \in B^+, s \in S$ dan untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

$$x = [a\beta s, \alpha][b, \gamma]$$
$$x = [a\beta s\alpha b, \gamma],$$

karena $a\beta s$ ideal dari S (dari Definisi 2.4.7), sehingga $a\beta s \in A^+$. Sekarang misal $a\beta s = p$ maka $p \in A^+$. Jadi dapat ditulis

$$x = [p\alpha b, \gamma]$$
$$x = [p, \alpha][b, \gamma],$$
untuk setiap $p \in A^+, b \in B^+$ dan untuk setiap $\alpha, \gamma \in \Gamma$. Jadi, terbukti bahwa $x \in AB$ sehingga $ALB \subseteq AB$. Kemudian karena $L = [S, \Gamma]$ dan $AB \subseteq Q^{+'}$ maka
$$A[S,\Gamma]B \subseteq Q^{+'} \text{sehingga } (A[S,\Gamma]B)S \subseteq Q$$
$$(AS\Gamma \mathrm{B}S) \subseteq Q$$
$$(AS)\Gamma(\mathrm{B}S) \subseteq Q$$
karena Q adalah ideal prima dari S menurut Definisi 3.2.1 diperoleh A$S \subseteq Q$ atau (BS) $\subseteq Q$ sehingga $A \subseteq Q^{+'}$ atau $B \subseteq Q^{+'}$(dari definisi $Q^{+'}$). Dapat dilihat jika $AB \subseteq Q^{+'}$ maka $A \subseteq Q^{+'}$ atau $B \subseteq Q^{+'}$. Jadi, $Q^{+'}$ adalah ideal prima dari L. ■

Teorema 3.2.5 (Dutta dan Sardar, 2002)
Misalkan adalah suatu $\Gamma -$semiring dan L merupakan semiring operator kiri dari S. Maka terdapat suatu pemetaan isomorfik $\theta : Q \to Q^{+'}$ diantara semua himpunan ideal prima dari S dan semua himpunan ideal prima dari L, dimana Q adalah ideal prima dari S.

Bukti:
Diberikan S adalah suatu $\Gamma -$semiring dan L merupakan semiring operator kiri. Didefinisikan
$$Q^{+'} = \left\{\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \in L \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right) S \subseteq Q\right\}.$$
Menurut Lemma 2.5.5 $\sum_i x_i \alpha_i s \in Q$, kemudian didefinisikan pemetaan
$$\theta : Q \to Q^{+'}$$
$$\sum_i x_i \alpha_i s \to \theta(\sum_i x_i \alpha_i s) = \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]$$

(i) Akan dibuktikan θ adalah pemetaan
Diketahui $\sum_i x_i \alpha_i s, \sum_i y_i \beta_i s \in Q$, untuk setiap $s, x_i, y_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, ambil
$$\sum_i x_i \alpha_i s = \sum_j y_j \beta_j s$$

Menurut Lemma 2.5.5, maka

$$\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]S = \sum_{j=1}^{m}[y_j, \beta_j]S$$

Dengan hukum kanselasi maka didapat

$$\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] = \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]$$

$$\theta(\sum_{i} x_i \alpha_i s) = \theta(\sum_{i} y_i \beta_i s)$$

Jadi, terbukti θ adalah pemetaan.

(ii) Akan dibuktikan θ adalah injektif

Diketahui $(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]), (\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]) \in Q^{+'}$, untuk setiap $x_i, y_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, ambil

$$\theta(\sum_{i} x_i \alpha_i s) = \theta(\sum_{i} y_i \beta_i s)$$

$$\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] = \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]$$

$$\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\, S = \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\, S.$$

Menurut Lemma 2.5.5 maka

$$\sum_{i} x_i \alpha_i s = \sum_{i} y_i \beta_i s$$

Jadi, terbukti θ adalah injektif.

(iii) Akan dibuktikan θ adalah surjektif.

Diketahui $\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] \in Q^{+'}$ menentukan $\sum_i x_i \alpha_i s \in Q$. Sehingga

$$\theta(\sum_{i} x_i \alpha_i s) = \sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i].$$

Jadi, θ surjektif.

(iv) Akan dibuktikan θ adalah homomorfisma

Diketahui $\sum_i x_i\alpha_i s, \sum_i y_i\beta_i s \in Q$, untuk setiap $s, x_i, y_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$.

$$\theta\left(\sum_i x_i\alpha_i s + \sum_i y_i\beta_i s\right) = \theta\left(\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right)S + \left(\sum_{j=1}^{m}[y_j, \beta_j]\right)S\right)$$

$$= \theta\left(\left(\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right) + \left(\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right)\right)S\right)$$

dengan mengambil

$$\sum_i^m [z_i, \gamma_i] = \left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right) + \left(\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right),$$

maka

$$= \theta\left(\sum_i^m [z_i, \gamma_i]\, S\right)$$

$$= \theta\left(\sum_i z_i\,\gamma_i s\right)$$

$$= \sum_i^m [z_i, \gamma_i],$$

sehingga

$$= \sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i] + \sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]$$

$$= \theta(\sum_i x_i\alpha_i s) + \theta(\sum_i y_i\beta_i s).$$

Selanjutnya

$$\theta\left(\left(\sum_i x_i\alpha_i s\right)\left(\sum_i y_j\beta_j s\right)\right) = \theta(\sum_i x_i\alpha_i\, y_i\beta_i ss)$$

karena S adalah $\Gamma-$semiring, ambil $z_i, a \in S$ sehingga $z_i = x_i\alpha_i y_i$ dan $a = ss \in S$ sifat tertutup pada semigrup, maka

$$= \theta\left(\sum_{i} z_i\, \beta_i a\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} [z_i, \beta_i],$$

sehingga

$$= \sum_{i=1}^{m} [x_i \alpha_i y_i, \beta_i]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\right)\left(\sum_{i=1}^{m} [y_i, \beta_i]\right)$$

$$= \theta\left(\sum_{i} x_i \alpha_i s\right) \theta\left(\sum_{j} y_j \beta_j s\right)$$

Jadi, terbukti θ adalah homomorfisma.

Kemudian karena θ pemetaan yang injektif, surjektif dan homomorfisma maka θ adalah pemetaan yang isomorfik. ■

3.3 Ideal Semiprima

Pada definisi berikut ini akan diperkenalkan suatu ideal semiprima dari $\Gamma-$semiring dan membahasnya melalui semiring operator kiri dari S.

Definisi 3.3.1 (Dutta dan Sardar, 2000)
Misalkan S adalah $\Gamma-$semiring. Suatu ideal P dari S dikatakan semiprima jika untuk sebarang ideal H dari S, $H\Gamma H \subseteq P$ maka $H \subseteq P$.

Contoh 3.3.2
$P = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah ideal semiprima dari Γ-semiring $S = \{n | n \in \mathbb{Z}^+\}$ dan $\Gamma = \{3n | n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Bukti:
Diketahui $P = \{2n | n \in \mathbb{Z}^+\}$, akan dibuktikan P adalah ideal semiprima dari $\Gamma-$semiring S. Menurut Contoh 2.4.8 P adalah ideal dua sisi dari S. Selanjutnya ambil sebarang ideal H dari S sedemikian sehingga $H\Gamma H \subseteq P$. Selanjutnya ambil sebarang $a \in H$ dan $\gamma \in \Gamma$,

maka $a\gamma a \in H\Gamma H \subseteq P$, sehingga $a\gamma a \in P$. Kemudian pergandaan tersebut dapat dinyatakan $a\gamma a = 2c$, di mana $c \in \mathbb{Z}^+$. Dengan kata lain $a\gamma a$ adalah bilangan genap positif. Kemudian karena $\gamma \in \Gamma$, sehingga $a = 2v$, di mana $v \in \mathbb{Z}^+$. Dengan kata lain $a \in P$, sehingga $H \subseteq P$. Jadi, P ideal semiprima dari Γ-semiring S. ■

Lemma 3.3.3 (Dutta dan Sardar, 2000)
Misalkan S adalah suatu $\Gamma-$semiring dan L merupakan semiring operator kiri dari S. Jika P adalah suatu ideal semiprima dari L maka P^+ adalah suatu ideal semiprima dari S.

Bukti:
Diketahui S adalah $\Gamma-$semiring dan L semiring operator kiri dari S. Dan didefinisikan

$$P^+ = \{a \in S | [a, \Gamma] \subseteq P\}.$$

Jika P adalah ideal dari L, maka P^+ adalah ideal dari S (Proposisi 3.1.1). Diberikan P adalah ideal semiprima dari L. Akan dibuktikan P^+ adalah suatu ideal semiprima dari S. Misalkan $A\Gamma A \subseteq P^+$ di mana A adalah ideal dari S. Karena $A\Gamma A \subseteq P^+$ maka $A\Gamma A$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$\{a_i \gamma a_i \in S : [a_i \gamma a_i, \Gamma] \subseteq P\},$$

untuk setiap $a_i \in S, \gamma \in \Gamma$, sehingga $[A\Gamma \mathrm{A}, \Gamma] \subseteq P$. Karena $[A\Gamma \mathrm{A}, \Gamma] \subseteq P$ sehingga $[A, \Gamma][A, \Gamma] \subseteq P$ (berdasarkan sifat perkalian pada L). Karena P adalah ideal semiprima dari L menurut Definisi 2.3.12 diperoleh $[A, \Gamma] \subseteq P$ sehingga $A \subseteq P^+$. Dapat dilihat jika $A\Gamma A \subseteq P^+$ maka $A \subseteq P^+$. Jadi, P^+ adalah ideal semiprima dari S. ■

Lemma 3.3.4 (Dutta dn Sardar, 2000)
Jika Q adalah suatu ideal semiprima dari suatu $\Gamma-$semiring S maka $Q^{+'}$adalah ideal semiprima dari semiring operator kiri L.

Bukti:
Didefinisikan

$$Q^{+'} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \in L \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \right) S \subseteq Q \right\}.$$

Jika Q adalah ideal dari S, maka $Q^{+'}$ adalah ideal dari L (Proposisi 3.1.2). Diberikan Q adalah ideal semiprima dari S. Akan dibuktikan $Q^{+'}$ adalah suatu ideal semiprima dari L. Misalkan $A^2 \subseteq L \ni A^2 \subseteq$

$Q^{+'}$ di mana A adalah sebarang ideal dari L. Akan ditunjukkan $A \subseteq Q^{+'}$. Langkah pertama akan dibuktikan $ALA \subseteq A^2 \subseteq L$. Ambil sebarang $x \in ALA$ maka

$$x = [a, \beta][s, \alpha][b, \gamma],$$

untuk setiap $a, b \in A^+, s \in S$ dan untuk setiap $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma$.

$$x = [a\beta s, \alpha][b, \gamma]$$
$$x = [a\beta s\alpha b, \gamma],$$

karena $a\beta s$ adalah ideal pada S (dari Definisi 2.4.7), sehingga $a\beta s \in A^+$. Sekarang misalkan $a\beta s = h$ maka $h \in A^+$. Jadi, dapat ditulis

$$x = [h\alpha b, \gamma]$$
$$x = [h, \alpha][b, \gamma],$$

untuk setiap $h, b \in A^+$ dan untuk setiap $\alpha, \gamma \in \Gamma$. Jadi, terbukti bahwa $x \in A^2$ sehingga $ALA \subseteq A^2$. Kemudian karena $L = [S, \Gamma]$ dan $A^2 \subseteq Q^{+'}$ sehingga

$$A[S, \Gamma]A \subseteq Q^{+'} \text{sehingga } (A[S, \Gamma]A)S \subseteq Q$$
$$(AS\Gamma AS) \subseteq Q$$
$$(AS)\Gamma(AS) \subseteq Q$$

karena Q adalah ideal semiprima pada S menurut Definisi 3.3.1 diperoleh $AS \subseteq Q$ sehingga $A \subseteq Q^{+'}$ (dari definisi $Q^{+'}$). Dapat dilihat jika $A^2 \subseteq Q^{+'}$ maka $A \subseteq Q^{+'}$.

Jadi, $Q^{+'}$ adalah ideal semiprima dari S. ■

Teorema 3.3.5 (Dutta dan Sardar, 2002)

Misalkan S adalah suatu $\Gamma-$semiring dan L merupakan semiring operator kiri dari S. Maka terdapat suatu pemetaan isomorfik $\theta : Q \to Q^{+'}$ diantara semua himpunan ideal semiprima dari S dan semua himpunan ideal semiprima dari L, dimana Q adalah ideal semiprima dari S.

Bukti:

Diberikan S adalah suatu Γ $-$semiring dan L merupakan semiring operator kiri. Didefinisikan

$$Q^{+'} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \in L \,\middle|\, \left(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] \right) S \subseteq Q \right\}.$$

Menurut Lemma 2.5.5 $\sum_i x_i \alpha_i s \in Q$, kemudian didefinisikan pemetaan

$$\theta : Q \rightarrow Q^{+'}$$
$$\sum_i x_i\alpha_i s \rightarrow \theta(\sum_i x_i\alpha_i s) = \sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]$$

(i) Akan dibuktikan θ adalah pemetaan

Diketahui $\sum_i x_i\alpha_i s, \sum_i y_i\beta_i s \in Q$, untuk setiap $s, x_i, y_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, ambil

$$\sum_i x_i\alpha_i s = \sum_j y_j\beta_j s,$$

menurut Lemma 2.5.5, maka

$$\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]S = \sum_{j=1}^{m} [y_j, \beta_j]S.$$

Dengan hukum kanselasi maka didapat

$$\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] = \sum_{i=1}^{m} [y_i, \beta_i]$$
$$\theta(\sum_i x_i\alpha_i s) = \theta(\sum_i y_i\beta_i s).$$

Jadi, terbukti θ adalah pemetaan.

(ii) Akan dibuktikan θ adalah injektif

Diketahui $(\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]), (\sum_{i=1}^{m} [y_i, \beta_i]) \in Q^{+'}$, untuk setiap $x_i, y_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$, ambil

$$\theta(\sum_i x_i\alpha_i s) = \theta(\sum_i y_i\beta_i s)$$
$$\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i] = \sum_{i=1}^{m} [y_i, \beta_i]$$
$$\sum_{i=1}^{m} [x_i, \alpha_i]\, S = \sum_{i=1}^{m} [y_i, \beta_i]\, S.$$

Menurut Lemma 2.5.5 maka

$$\sum_i x_i\alpha_i s = \sum_i y_i\beta_i s.$$

Jadi, terbukti θ adalah injektif.

(iii) Akan dibuktikan θ adalah surjektif.

Diketahui $\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i] \in Q^{+'}$ menentukan $\sum_i x_i\alpha_i s \in Q$. Sehingga

$$\theta(\sum_i x_i\alpha_i s) = \sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i].$$

Jadi, θ surjektif.

(iv) Akan dibuktikan θ adalah homomorfisma

Diketahui $\sum_i x_i\alpha_i s, \sum_i y_i\beta_i s \in Q$, untuk setiap $s, x_i, y_i \in S$ dan untuk setiap $\alpha_i, \beta_i \in \Gamma$.

$$\theta\left(\sum_i x_i\alpha_i s + \sum_i y_i\beta_i s\right) = \theta\left(\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right)S + \left(\sum_{j=1}^{m}[y_j,\beta_j]\right)S\right)$$

$$= \theta\left(\left(\left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right) + \left(\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]\right)\right)S\right),$$

dengan mengambil

$$\sum_i^m [z_i,\gamma_i] = \left(\sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i]\right) + \left(\sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]\right),$$

maka

$$= \theta\left(\sum_i^m [z_i,\gamma_i]\,S\right)$$

$$= \theta\left(\sum_i z_i\,\gamma_i s\right)$$

$$= \sum_i^m [z_i,\gamma_i],$$

sehingga

$$= \sum_{i=1}^{m}[x_i,\alpha_i] + \sum_{i=1}^{m}[y_i,\beta_i]$$

$$= \theta(\sum_i x_i\alpha_i s) + \theta(\sum_i y_i\beta_i s).$$

Selanjutnya

$$\theta\left(\left(\sum_i x_i\alpha_i s\right)\left(\sum_i y_j\beta_j s\right)\right) = \theta(\sum_i x_i\alpha_i\, y_i\beta_i ss)$$

karena S adalah $\Gamma -$semiring, ambil $z_i, a \in S$ sehingga $z_i = x_i\alpha_i y_i$ dan $a = ss \in S$ sifat tertutup pada semigrup, maka

$$= \theta\left(\sum_i z_i\,\beta_i a\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}[z_i, \beta_i],$$

sehingga

$$= \sum_{i=1}^{m}[x_i\alpha_i y_i, \beta_i]$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m}[x_i, \alpha_i]\right)\left(\sum_{i=1}^{m}[y_i, \beta_i]\right)$$

$$= \theta\left(\sum_i x_i\alpha_i s\right)\theta\left(\sum_j y_j\beta_j s\right)$$

Jadi, terbukti θ adalah homomorfisma.

Kemudian karena θ pemetaan yang injektif, surjektif dan homomorfisma maka θ adalah pemetaan yang isomorfik. ■

BAB IV
KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan:

1. Jika P adalah suatu ideal prima (ideal semiprima) dari semiring operator kiri L maka P^+ adalah suatu ideal prima (ideal semiprima) dari $\Gamma -$semiring S. Jika Q adalah suatu ideal prima (ideal semiprima) dari suatu $\Gamma -$semiring S maka $Q^{+'}$ adalah ideal prima (ideal semiprima) dari semiring operator kiri L
2. Misalkan S adalah Γ-semiring L semiring operator kiri dari S, maka terdapat suatu pemetaan isomorfik $\theta : Q \to Q^{+'}$ antara semua himpunan ideal prima (ideal semiprima) dari S dan semua himpunan ideal prima (ideal semiprima) dari L.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P.B., S.K. Jain dan S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Burns, Brenda. 2002. *The Staircase Decomposition For Reductive Monoids*. North Carolina State University. North Carolina.

Chinram, Ronnason. 2008. *A Note on Quasi-Ideals in* Γ *-Semirings*. International Mathematical Forum 3 No. 26: 1253-1259.

Dummit, D. S. dan Richard M. Foote. 2002. *Abstract Algebra* 2^{nd} *ed*. John Wiley & Sons, Inc. Singapore.

Dutta, T.K. dan Sardar, S. K. 2000.*Semiprime ideals and Irreducible ideals of* Γ *-Semirings*.Southeast Novi Sad Journal Mathematics. 30: 97-108.

Dutta, T.K. dan Sardar, S.K. 2002.*On the Operator Semiring of a* Γ *-Semirings*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 26: 203-213.

Grillet, P.A. 2001. *Commutative Semigroups*. Kluwer Academic Publisher. AH Dordrecht. Netherlands.

Harju, Tero. 1996. *Lecture Notes On Semigroups*. Departement of Mathematics University of Turku. Finland.

Hartley dan Hawkes. 1994. *Ring, Module and Linear Algebra*. Chapman and Hall. London.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Semirings, Semifield, and Semivector Spaces*. Departement of Mathematics Indian Institute of Technology. Madras.

Lipschut, Seymour. 1976. *Discrete Mathematics*. McGraw-Hill Book Company. New York.

Rao, M. K. 1995. Γ *-semiring I*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 19: 49-54.

Shabir, M., M. Ali, dan S. Batool. 2004. *A Note on Quasi-Ideals in Semirings*. Southeast Asian Bulletin of Mathematics 27: 923-928.

Shabir, M. dan M.S. Iqbal. 2007. One-Sided Prime Ideals in Semirings. *Kyungpook Math*. 47:473-480.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall, Inc. New York.