GENERALIZED DERIVATION DI RING SEMIPRIMA

SKRIPSI

Oleh :

MUHAMMAD ISLAHUL MUKMIN

0410940036-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2010

GENERALIZED DERIVATION DI RING SEMIPRIMA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
MUHAMMAD ISLAHUL MUKMIN
0410940036-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

GENERALIZED DERIVATION **DI RING SEMIPRIMA**

Oleh :
MUHAMMAD ISLAHUL MUKMIN
0410940036-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 29 Januari 2010
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dra. Ari Andari, MS	**Drs. Bambang Sugandi M.Si**
NIP. 196105161987012001	**NIP. 195905151992031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 196908071994121001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: MUHAMMAD ISLAHUL MUKMIN**
NIM	**: 0410940036-94**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: *GENERALIZED DERIVATION* DI RING SEMIPRIMA**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama - nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 29 Januari 2010
Yang menyatakan,

(Muhammad Islahul Mukmin)
NIM. 0410940036-94

GENERALIZED DERIVATION DI RING SEMIPRIMA

ABSTRAK

Ring semiprima merupakan struktur aljabar yang dikembangkan dari teori ring. Ring semiprima merupakan struktur aljabar yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner yang memiliki sifat $aRa = (0)$ maka $a = 0$, dan dinotasikan dengan $(R, +, \cdot)$ atau cukup ditulis R. Misalkan R adalah ring semiprima yang berkarakteristik selain 2. Jika $G: R \longrightarrow R$ adalah *additive mapping* yang memenuhi relasi
$G(x^2) = G(x)x + xD(x), \forall x \in R$, dengan D adalah derivation. Maka G adalah *generalized derivation*.

Kata kunci: ring semiprima, *additive mapping*, *generalized derivation*.

ON GENERALIZED DERIVATION IN SEMIPRIMERING

ABSTRACT

Semiprime ring is a new algebra structure developed from ring theory. Semiprime ring consists of a non empty set with two binary operations whose $aRa = (0)$ then $a = 0$. Let,R is semiprime ring of characteristic not 2. Moreover, $G: R \longrightarrow R$ is additive mapping such that $G(x^2) = G(x)x + xD(x)$, for each $x \in R$ whereas D is a derivation. Then, G is generalized derivation.

Keyword: semiprime ring, additive mapping, generalized derivation.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil’aalamiin,segala puji hanya milik Allah *Subhaanahu wa Ta’aala, Rabbil Izzati Dzil Jalaali wal Ikraam.* Shalawat dan salam senantiasa dilimpahkan kepada Nabi Muhammad *Sallaahu ’Alaihi Wasallam.* Dengan hidayah dan ma’unah Allah, skripsi yang berjudul ***”Generalized Derivation* di Ring Semiprima”** dapat terselesaikan dengan baik. Skripsi ini disusun sebagai syarat untuk meraih gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penulisan Skripsi ini dapat terwujud karena dukungan dari berbagai pihak,baik secara material, maupun moral dan spiritual. Oleh karena itu, ungkapan terima kasih disampaikan kepada:

1. Dra. Ari Andari, M.S dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen pembimbing I dan II atas bimbingan dan motivasi yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini,
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr. Wuryansari Muharini K.,M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika,
3. Prof.Dr.Marjono,M.Phil.,Dr.Abdul Rouf Alghofari,M.Sc,dan Syaiful Anam,S.Si.,M.T selaku dosen penguji,
4. Bapak dan Ibu dosen di jurusan Matematika, dan seluruh civitas akademika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya Malang,
5. Abah dan Umi’ atas doa, bimbingan, dan ridlonya selama ini.
6. *Syaikhuna Muhyiddin Syaikh Akbar* Muhammad Daud Dahlan,
7. Prof. Dr. Kyai H. Ahmad Mudlor, S.H, selaku Pengasuh Lembaga Tinggi Pesantren Luhur Malang, segenap Dewan *Masyayikh*, dan seluruh guru-guru yang telah mendidik penulis dengan ikhlas.

Dengan semangat ”*likulli yaumin ziyaadatan minal ’ilmi, wasbah fi buhuuril fawaaidi*”, kritik dan saran dari pembaca sangat diharapkan demi perbaikan selanjutnya.Semoga Skripsi ini dapat memberikan kontribusi yang berarti *(’ilmun yuntafa’u bih)* di masa mendatang.

Malang, 29 Januari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
DAFTAR SIMBOL xv

BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 2
1.3. Batasan Masalah 2
1.4. Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1. Relasi, Pemetaan dan Operasi Biner 3
2.2. Semigrup 4
2.3 Grup 6
2.4. Ring 8
2.5 Subring 11
2.6 Ideal 11

BAB III PEMBAHASAN 17
3.1. Ring Semiprima 17
3.2. *Centralizer Kiri dan Centralizer Kanan* 18
3.3 *Centralizer Kiri Jordan dan Centralizer Kanan Jordan* 20
3.4. *Generalized Derivation* di Ring Semiprima 24

BAB IV KESIMPULAN 39

DAFTAR PUSTAKA 41

DAFTAR SIMBOL

$\in$	: elemen (anggota)
$\forall$	: untuk setiap
$\emptyset$	: himpunan kosong
$\subset$	: subset
$\ni$	: sedemikian sehingga
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika
$\mathbb{Z}^+$	: himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}$	: himpunan bilangan bulat
$\mathbb{N}$	: himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan riil
$\mathbb{Z}[x]$	: himpunan polinomial atas $\mathbb{Z}$ (koefisien merupakan elemen $\mathbb{Z}$)
$\blacksquare$	: akhir sebuah bukti

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Struktur aljabar adalah suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan suatu operasi biner dan memenuhi suatu aksioma. Dengan kata lain struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen, yaitu himpunan, operasi dan aksioma. Banyaknya operasi atau banyaknya aksioma menjadi pembeda antara struktur aljabar yang satu dengan yang lain, sebagai contoh grup, semiring, ring (Arifin, 2000).

Ring merupakan perluasan dari konsep grup. Berbeda dengan grup yang merupakan sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dan satu operasi, ring merupakan sistem matematika yang terdiri satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian. Di dalam ring, terdapat subring dan ideal. Ideal ada dua macam yaitu ideal kanan dan ideal kiri. Jika suatu ideal memenuhi kedua jenis ideal tersebut maka disebut ideal dua sisi. Konsep tentang ring mengalami perkembangan, salah satunya yaitu ring semiprima.

Sejalan dengan konsep-konsep dasar di atas, maka konsep ring semiprima terus berkembang dengan lahirnya teori baru dan terbentuknya struktur aljabar yang baru.

Pada tahun 2007, M.N. Daif dan M.S. Tammam El-Sayiad memperkenalkan gagasan baru tentang *Generalized Derivation* di ring semiprima di dalam jurnal yang berjudul *On Generalized Derivation in Semiprime Ring.* Oleh karena itu, pada skripsi ini akan dipaparkan pembahasan mengenai sifat-sifat *Generalized Derivation* di ring semiprima yang meliputi definisi, lema, dan teorema tentang *Generalized Derivation* di ring semiprima.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, permasalahan yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat *Generalized Derivation* di ring semiprima dengan karakteristik selain 2 beserta bukti-buktinya.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini, permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada definisi-definisi dan teorema-teorema tentang ring semiprima dan *Generalized Derivation* di ring semiprima dengan karakteristik selain 2.

1.4 Tujuan

Tujuan pembahasan skripsi ini adalah menjelaskan definisi ring semiprima, *Generalized Derivation* di ring semiprima dan membuktikan teorema yang berhubungan dengan *Generalized Derivation* di ring semiprima dengan karakteristik selain 2.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Sebagai dasar untuk memahami *Generalized Derivation di Ring Semiprima*, perlu untuk dipahami beberapa istilah yang terkait di dalamnya. Oleh karena itu, pada bab ini akan diberikan definisi dan teorema yang digunakan sebagai acuan dalam pembahasan, antara lain relasi, pemetaan, dan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut (x, y), dengan $x \in A$ dan $y \in B$ disebut hasil kali Kartesius dari A dan B. Selanjutnya, dinyatakan dengan

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Definisi 2.1.2 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong, dan misalkan R adalah himpunan bagian *(subset)* dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

Definisi 2.1.3 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Suatu relasi f dari A ke B disebut pemetaan jika untuk setiap elemen x di A mempunyai kawan tepat satu elemen y di B. Pemetaan f dari A ke B dinyatakan dengan

$$f: A \longrightarrow B.$$

Definisi2.1.4 (http://en.wikipedia.org/ additive mapping, 2008)
Misalkan A dan B adalah himpunan tak kosong. Pemetaan f dari A ke B disebut *additive mapping* jika untuk setiap elemen x, y di A memenuhi

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Definisi 2.1.5 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Suatu pemetaan $*: S \times S \longrightarrow S$

$$(a,b) \longmapsto * (a,b) = a * b$$
disebut operasi biner pada himpunan S.

2.2 Semigrup

Semigrup merupakan struktur aljabar yang paling sederhana dan dilengkapi satu operasi biner. Pada subbab ini diberikan definisi, teorema-teorema di semigrup. Untuk memberikan gambaran yang lebih jelas, diberikan contoh beserta buktinya. Adapun definisi semigrup adalah sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Whitelaw,1995)
Misalkan M adalah himpunan tak kosong dan didefinisikan operasi biner $*$. $(M,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika:
1. $(M,*)$ tertutup : $a * b \in M$, untuk setiap $a, b \in M$,
2. $(M,*)$ assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$.

Contoh 2.2.2
Jika diberikan himpunan $S = Z^{+} \cup \{0\}$. Dan diberikan operasi $\oplus$ yang didefinisikan sebagai berikut : $x \oplus y = x + y + 2xy, \forall x, y \in S$.. Maka akan ditunjukkan himpunan $S = Z^{+} \cup \{0\}$ pada operasi $\oplus$ adalah semigrup.

Bukti:
(1) Ambil sebarang $x, y \in S$. Maka $x \oplus y = x + y + 2xy \in S$.
(2) Ambil sebarang $x, y, z \in S$. Maka
$$\begin{aligned}(x \oplus y) \oplus z &= (x + y + 2xy) \oplus z \\ &= x + y + 2xy + z + 2(x + y + 2xy)z \\ &= x + y + z + 2xy + 2xz + 2yz + 4xyz.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (y + z + 2yz) \\ &= x + y + z + 2yz + 2x(y + z + 2yz) \\ &= x + y + z + 2xy + 2yz + 2xz + 4xyz.\end{aligned}$$
Dari (1) dan (2) terbukti bahwa $(S, \oplus)$ semigrup. ■

Contoh 2.2.3

Misalkan $T = Z^+ \cup \{0\}$ adalah himpunan. Dan diberikan operasi $*$ yang didefinisikan $x * y = x + 2y, \forall x, y \in T$. pada himpunan T. Maka akan ditunjukkan T semigrup.

Bukti:

(1) Ambil sebarang $x, y \in T$. maka $x * y = x + 2y \in T$.

(2) Ambil sebarang $x, y, z \in T$. maka

$$x * (y * z) = x * (y + 2z)$$
$$= x + 2(y + 2z) = x + 2y + 4z \neq x + 2y + 2z$$

Jadi, $(T,*)$ bukan semigrup. ■

Definisi 2.2.4 (Whitelaw,1995)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan H adalah himpunan bagian dari M. H disebut subsemigrup dari M jika dan hanya jika $(H,*)$ merupakan semigrup.

Contoh 2.2.5

$(\mathbb{N},\cdot)$ merupakan subsemigrup $(\mathbb{Z},\cdot)$.

Teorema 2.2.6 (Whitelaw,1995)

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan H adalah himpunan bagian dari M. Maka $(H,*)$ membentuk subsemigrup dari $(M,*)$ jika dan hanya jika H tertutup terhadap operasi $*$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ Jika $(H,*)$ merupakan subsemigrup dari $(M,*)$ maka $(H,*)$ merupakan suatu semigrup. Berdasarkan Definisi 2.2.1 maka H tertutup terhadap operasi $*$.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan H tertutup terhadap operasi $*$. Karena $(M,*)$ adalah semigrup, dan berlaku sifat asosiatif

$$(a * b) * c = a(b * c), \forall a, b, c \in M.$$

Maka

$$(a * b) * c = a(b * c), \forall a, b, c \in H.$$

Berdasarkan definisi 2.2.1 maka $(H,*)$ merupakan semigrup. Jadi terbukti bahwa $(H,*)$ subsemigrup dari $(M,*)$. ■

Definisi 2.2.7

Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup. Maka $(M,*)$ disebut semigrup komutatif jika $a * b = b * a, \forall a, b, c \in M$.

Contoh 2.2.8
$(\mathbb{R},+)$ dan $(\mathbb{R},\times)$ adalah semigrup komutatif. Tetapi, $(\mathbb{R},-)$ tidak membentuk semigrup komutatif karena terdapat $a, b \in \mathbb{R}$ yang tidak memenuhi $a - b = b - a$.

Definisi 2.2.9
Misalkan $(M,*)$ adalah semigrup dan mempunyai elemen identitas e sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in M$. Maka $(M,*)$ disebut semigrup *monoid*.

Elemen identitas pada semigrup $(M,+)$ biasanya disebut *zero* dan dinotasikan dengan 0 sedemikian sehingga memenuhi: $0 + m = m + 0$, untuk setiap $a \in M$. Sedangkan pada semigrup $(M,\times)$ biasanya dinotasikan dengan 1 sedemikian sehingga memenuhi $1.m = m.1 = m$ untuk setiap $m \in M$.

Teorema 2.2.10 (Whitelaw,1995)
Elemen identitas di semigrup adalah tunggal.

Bukti:
Jika e dan f adalah elemen identitas pada semigrup $(M,*)$. Maka
$$e = e * f = f * e.$$
$$f = f * e = e * f.$$
Sehingga $e = f$. Jadi, terbukti bahwa suatu semigrup hanya memiliki satu elemen identitas. ■

2.3 Grup

Pada subbab ini akan dibahas mengenai definisi grup, teorema-teorema yang berlaku di grup. Untuk memberikan deskripsi yang lebih jelas, dibahas contoh yang berkaitan dengan definisi dan teorema tentang grup.

Definisi 2.3.1 (Durbin,1992).
Misalkan G adalah himpunan tak kosong. Maka G disebut grup jika pada operasi * memenuhi aksioma-aksioma :

(i) tertutup: jika $a, b \in G,$ maka $a * b \in G$.
(ii) assosiatif: $a * (b * c) = (a * b) * c,\ \forall\, a, b, c \in G$.
(iii) elemen identitas: $\exists e \in G \ni a * e = e * a = a \,\forall\, a \in G$.
(iv) adanya elemen invers: $\forall a \in G \,\exists\, a' \ni a * a' = a' * a = e$.

Dari definisi 2.3.1, dapat disimpulkan bahwa suatu grup pasti merupakan suatu semigrup. Akan tetapi, tidak berlaku sebaliknya, yaitu tidak semua semigrup merupakan suatu grup. Misalkan $(G, +)$ adalah suatu semigrup. Maka $(G, +)$ dapat dsebut sebagai grup jika syarat berikut dipenuhi, yaitu:

1) adanya elemen identitas di G,
2) adanya invers untuk setiap elemen di G.

Contoh 2.3.2
Himpunan bilangan bulat positif atas operasi penjumlahan tidak membentuk grup karena tidak memiliki elemen identitas.

Contoh 2.3.3
Himpunan $(M,\cdot)$ didefinisikan sebagai berikut :

$$M_{2\times 2} = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+ \right\}.$$

Maka M merupakan suatu semigrup tetapi bukan merupakan grup.

Bukti :
Jelas M merupakan semigrup karena tertutup dan asosatif terhadap operasi $(\cdot)$. Selanjutnya, untuk dapat disebut sebagai suatu grup, semigrup M harus memenuhi dua syarat di atas. Misalkan A' elemen identitas dari M sehingga

$$A' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}^+.$$

Telah diketahui bahwa elemen identitas suatu matriks terhadap operasi perkalian adalah $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sehingga $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Karena $0 \notin \mathbb{Z}^+$ dan $A' \notin M$, maka M tidak memiliki elemen identitas. Oleh karena itu, M bukan merupakan grup. ■

Teorema 2.3.4 (Durbin, 1992)
Misalkan G adalah grup. Jika grup G dengan operasi perkalian membentuk suatu grup, maka

(1) elemen identitas dari G adalah tunggal,

(2) setiap elemen di grup memiliki invers tunggal.

Bukti:

(1) Misalkan e dan f adalah elemen identitas di G. Karena e merupakan elemen identitas dari G maka $e.a = a.e = a$, untuk setiap $a \in G$. Dan karena f juga merupakan elemen identitas dari G maka $f.a = a.f = a$, untuk setiap $a \in G$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $e = f$.

(2) Misalkan x, y adalah elemen invers di G. dan e adalah elemen identitas di G. Maka $a.x = x.a = e$ dan $a.y = y.a = e$ untuk setiap a di G. Jadi $x = y$. ■

Definisi 2.3.5 (Durbin, 1992)

Misalkan $(G,\cdot)$ adalah suatu grup. G disebut suatu grup komutatif jika dan hanya jika operasi biner pada G bersifat komutatif.

Definisi 2.3.6 (Durbin, 1992)

Didefinisikan bahwa H himpunan bagian dari G. Maka H adalah suatu subgrup dari G jika H membentuk suatu grup dengan operasi yang sama pada G.

Contoh 2.3.7

Misalkan $G = \{1, -1, i, -i\}$ dan $(G,\cdot)$ merupakan grup. Maka $\{1, -1\}$ adalah subgrup dari G. Akan tetapi $\{i, -i\}$ bukan merupakan subgrup dari G karena sifat tertutup terhadap G tidak dipenuhi, yaitu $i.i = -1 \notin \{i, -i\}$.

2.4 Ring

Berbeda dengan grup yang merupakan sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dan satu operasi biner, ring merupakan sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner.

Definisi 2.4.1 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)

Ring R adalah himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, yakni operasi penjumlahan dan perkalian yang memenuhi sifat berikut:

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif,
2. $(R,\cdot)$ merupakan semigrup,
3. $(R, +,\cdot)$ bersifat distributif pergandaan terhadap penjumlahan,yaitu

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ dan $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ untuk setiap $a, b, c \in R$.

Pada subbab ring ini sampai pada pembahasan selanjutnya, operasi biner yang digunakan adalah operasi penjumlahan dan perkalian. Selanjutnya, ring $(R, +, \cdot)$ cukup disebut sebagai ring R.

Definisi 2.4.2 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Misalkan R adalah ring. Ring R disebut ring komutatif jika $ab = ba$ untuk setiap $a, b \in R$.

Teorema 2.4.4 (Hidayanto dan Santi Irawati,2000)
Misalkan R adalah ring. Jika untuk setiap $a \in R$ berlaku $a^2 = a$, maka R adalah ring komutatif.

Bukti:
Ambil sebarang $a, b \in R$, maka

$$\begin{aligned}
(a + a)^2 &= a^2 + aa + aa + a^2 \\
a + a &= a + a^2 + a^2 + a \\
a + a &= a + a + a + a \\
a + a &= 0 \\
a &= -a
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
(a + b)^2 &= a^2 + ab + ba + b^2 \\
a + b &= a + ab + ba + b \\
a + b &= a + b + ab + ba \\
0 &= ab + ba \\
-ba &= ab \\
b(-a) &= ab \\
ba &= ba
\end{aligned}$$

■

Definisi 2.4.5 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Ring dengan elemen identitas adalah ring R di mana $(R, \cdot)$ adalah suatu semigrup dengan elemen identitas , yaitu terdapat elemen identitas e sedemikian sehingga $r \cdot e = e \cdot r = r$ untuk setiap $r \in R$.

Definisi 2.4.6 (Hidayanto dan Santi Irawati,2000)

Misalkan R adalah ring. Karakteristik ring R adalah bilangan bulat positif terkecil n sedemikian sehingga $n.a = 0$, untuk setiap $a \in R$, dengan $n.a = \underbrace{a + a + a + a \dots + a}_{n\,suku}$.

Selanjutnya, jika tidak terdapat $n \in \mathbb{Z}^+ \ni n.a = 0, \forall a \in R,$ maka karakteristik ring adalah nol.

Contoh 2.4.7

Karakteristik $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ adalah 2, karakteristik $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ adalah 6, dan karakteristik $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah nol.

Teorema 2.4.8 (Hidayanto dan Santi Irawati,2000)

Misalkan R adalah ring dengan elemen satuan 1. R mempunyai karakteristik $n > 0$ jika dan hanya jika n bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $n.1 = 0$.

Bukti:

$(\Longrightarrow)$ R mempunyai karakteristik $n > 0$. Berdasarkan definisi 2.4.6, n bilangan bulat positif terkecil sehingga $n.a = 0$, untuk setiap $a \in R$. Pilih $a = 1$, maka diperoleh $n.1 = 0$.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan n bilangan bulat positif terkecil sehingga $n.1 = 0$. Ambil sebarang $a \in R$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} n.a &= a + a + \cdots + a \\ &= a(1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= a(n.1) \\ &= a.0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, $n.a = 0$, untuk setiap $a \in R$. ■

2.5 Subring

Pada subbab ini akan dibahas tentang subring, ideal yang terbentuk dari ring.

Definisi 2.5.1 (Hidayanto dan Santi Irawati,2000)

Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. S adalah himpunan tak kosong dan $S \subset R$. Maka S disebut subring jika $(S, +, \cdot)$ membentuk ring.

Teorema 2.5.2 (Hidayanto dan Santi Irawati,2000)
Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring.Maka $S \subset R$ disebut subring jika
(i) $S \neq \emptyset$
(ii) $x - y \in S,\ \forall\, x, y \in S$
(iii) $x \cdot y \in S,\ \forall\, x, y \in S$

Bukti:
(i) Misalkan $(R, +, \cdot)$ adalah ring. $S \subset R$ disebut subring dari R. Berdasarkan Definisi 2.5.1, $(S, +, \cdot)$ membentuk ring dengan operasi yang sama di $(R, +, \cdot)$. Karena $(S, +, \cdot)$ ring, maka pastilah $S \neq \emptyset$.
(ii) Selanjutnya, ambil sebarang $x, y \in S$. $y \in S$, berarti $-y \in S$. Karena $x, -y \in S$, maka $x + (-y) = x - y \in S$.
(iii) Ambil sebarang $x \in S$. Menurut (i)$y - y = 0 \in S$. Menurut (i) pula, $0 - x = -x \in S$. Sehingga apabila $x, y \in S$, maka $x, -y \in S$ dan $x - (-y) = x + y \in S$. Karena $S \subset R$ dan R adalah ring, maka elemen-elemen di S juga merupakan elemen di R. Di samping itu, juga memenuhi sifat asosiatif dan komutatif terhadap penjumlahan, asosiatif terhadap perkalian, dan distributif terhadap perkalian dan penjumlahan. Karena memenuhi sifat tersebut, maka S adalah ring. ■

2.6 Ideal

Definisi 2.6.1 (Bhattacharya, S.K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Diberikan I suatu himpunan tak kosong dan himpunan I bagian dari ring R. I disebut ideal kanan (kiri) jika memenuhi:
1. $a - b \in I$, untuk setiap $a, b \in I$.
2. $ar \in I$ $(ra \in I)$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$.

Contoh 2.6.2
Suatu himpunan $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$ merupakan suatu ring. $N = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ideal kanan di R.

Bukti:
1. Jelas $N \neq \emptyset$.

2. Ambil sebarang $P, Q \in N$ dan $T \in R$. Maka P, Q dan T dapat dinyatakan sebagai $P = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $x, y, z, w, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Maka

$$P - Q = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x - z & y - w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N$$

$$PT = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} xa + yc & xb + yd \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in N.$$

$$TP = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ax & ay \\ cx & cy \end{bmatrix} \notin N.$$

Jadi N adalah ideal kanan di R. ■

Contoh 2.6.3

$M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{Z} \right\}$ adalah ideal kiri di ring

$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$

Bukti:

1) Jelas $M \neq \emptyset$ dan $M \subseteq R$.
2) Ambil sebarang $P, Q \in M$ dan $T \in R$. Maka P, Q dan T dapat dinyatakan sebagai $P = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & w \end{bmatrix}$ dan $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan $x, y, z, w, a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Maka

$$P - Q = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & w \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & x - z \\ 0 & y - w \end{bmatrix} \in M$$

$$PT = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & ax + by \\ 0 & cx + dy \end{bmatrix} \in M.$$

$$
\begin{aligned}
TP &= \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} xc & xd \\ yc & yd \end{bmatrix} \notin M.
\end{aligned}
$$

Jadi M adalah ideal kiri di R. ∎

Definisi 2.6.4 (Hidayanto dan Santi Irawati,2000)
Didefinisikan $(a) = \{ar + na | r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$. Suatu ideal kanan I di ring R disebut ideal kanan pokok jika $I = (a)$, untuk suatu $a \in R$.

Jika R merupakan ring dengan elemen identitas e, maka dapat dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
ar + na &= ar + n(ea) \\
&= ar + \left(\underbrace{ea + ea + \cdots + ea}\right) \\
&= ar + e\left(\underbrace{a + a + \cdots + a}\right) \\
&= ar + (ne)a \\
&= a(r + ne) \\
&= ar'
\end{aligned}
$$

Sehingga (a) dapat dinyatakan sebagai $(a) = \{ar | r \in R\}$.

Definisi 2.6.5 (Whitelaw,1995)
Suatu ideal kanan I di ring R disebut ideal kanan prima di ring R jika untuk setiap A dan B ideal kanan di ring R sedemikian sehingga $AB \subseteq I$ maka $A \subseteq I$ atau $B \subseteq I$.

Definisi 2.6.6 (Whitelaw,1995)
Suatu ideal kanan I di ring R disebut ideal kanan semiprima di ring R jika untuk setiap A ideal kanan di ring R sedemikian sehingga $A^2 \subseteq I$ maka $A \subseteq I$.

Berdasarkan Definisi 2.6.5 dan Definisi 2.6.6 dapat dikatakan bahwa setiap ideal kanan prima di ring R adalah ideal kanan semiprima.

Contoh 2.6.7

$\mathbb{Z}[x]$ merupakan suatu ring. (x) merupakan ideal kanan prima di $\mathbb{Z}[x]$.

Bukti:

(1) Akan dibuktikan (x) ideal kanan di $\mathbb{Z}[x]$.

(i) Jelas bahwa dan $(x) \subseteq \mathbb{Z}[x]$dan $(x) \neq \emptyset$.

(ii) Ambil sebarang $f(x), g(x) \in (x)$. Maka $f(x)$ dan $g(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = xp(x)$ dan $g(x) = xq(x)$,dengan $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}[x]$.Sehingga $f(x) + g(x) = xp(x) + xq(x) = x\big(p(x) + q(x)\big)$, $p(x) + q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Jadi, $f(x) + g(x) \in (x)$.

(iii) Ambil sebarang $f(x) \in (x)$ dan $s(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = xp(x), p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Sehingga $f(x)s(x) = xp(x)s(x)$, dengan $p(x)s(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Jadi, $f(x)s(x) \in (x)$.

Dari (i), (ii), dan (iii) terbukti bahwa (x)ideal kanan di $\mathbb{Z}[x]$.

(2) Ambil sebarang ideal kanan A dan B di $\mathbb{Z}[x]$ sedemikian sehingga $AB \subseteq (x)$. Selanjutnya ambil sebarang $f(x) \in A$ dan $g(x) \in B$. Maka $f(x)g(x) \in AB \subseteq (x)$. Sehingga dapat dinyatakan dengan $f(x)g(x) = xh(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Misal

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots, a_i \in \mathbb{Z}.\ i = 0,1,2, \ldots$

$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots, b_i \in \mathbb{Z}.\ i = 0,1,2, \ldots$

$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots, c_i \in \mathbb{Z}.\ i = 0,1,2, \ldots$

Maka

$(a_0 + a_1x + \cdots)(b_0 + b_1x + \cdots) = x(c_0 + c_1x + \cdots)$

$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \cdots = c_0x + c_1x^2 + \cdots$

Berarti $a_0b_0 = 0$. Karena $\mathbb{Z}$ tidak mempunyai pembagi nol sejati, maka $a_0 = 0$ atau $b_0 = 0$ Sehingga

$f(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots = x(a_1 + a_2x + \cdots)$

atau

$g(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots = x(a_1 + b_2x + \cdots)$

Maka $f(x) \in (x)$ atau $g(x) \in (x)$. Karena untuk setiap $f(x) \in A$ dan $g(x) \in B$ berlaku $f(x) \in (x)$ atau $g(x) \in (x)$ maka $A \subseteq (x)$ atau $B \subseteq (x)$ Jadi terbukti (x) merupakan ideal kanan prima di di $\mathbb{Z}[x]$. ■

Contoh 2.6.8

$\bar{X} = \{2l | l \in \mathbb{Z}\}$ merupakan ideal kanan semiprima di ring $\mathbb{Z}$.

Bukti:
Jelas bahwa $\bar{X}$ merupakan ideal kanan di ring $\mathbb{Z}$. Ambil sebarang ideal kanan A di ring $\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $A^2 \subseteq \bar{X}$. Selanjutnya ambil sebarang $x \in A$. Maka $x \cdot x = x^2 \in A^2 \subseteq \bar{X}$. Hal ini berarti bahwa $x^2(x) \in \bar{X}$. Dengan kata lain x^2 merupakan bilangan genap atau nol. Maka x pasti merupakan bilangan bilangan genap atau nol. Dengan kata lain dapat dinyatakan sebagai $x = 2l, l \in \mathbb{Z}$. Jadi $x \in \bar{X}$. Karena untuk setiap $x \in A$ berlaku $x \in \bar{X}$, maka $A \subseteq \bar{X}$. Jadi, terbukti bahwa $\bar{X}$ merupakan ideal kanan semiprima di ring $\mathbb{Z}$. ■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi, teorema, dan lema yang berkaitan dengan *generalized derivation* di ring semiprima. Sebagai dasar atau acuan pembahasan pada bab ini terlebih dahulu diberikan definisi ring semiprima. Untuk memberikan deskripsi yang lebih detail, maka diberikan contoh dari definisi maupun teorema pada pembahasan skripsi ini.

3.1 Ring Semiprima

Definisi 3.1.1 (M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring. R disebut ring semiprima jika $aRa = (0)$, maka $a = 0$ untuk suatu $a \in R$.

Contoh 3.1.2
Himpunan $M = \left\{ M_1 \middle| M_1 = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R} \right\}$ adalah ring semiprima.

Bukti:
Ambil sebarang $M_1, X \in M$. Maka

$M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \neq 0, \quad a_1 \in \mathbb{R}$ dan $X = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} \neq 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$
Sehingga

$$\begin{aligned} M_1XM_1 &= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1x_1a_1 & 0 \\ 0 & a_1x_1a_1 \end{bmatrix} \neq 0. \end{aligned}$$

Jadi M adalah ring semiprima. ■

Lema 3.1.3 (M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima. Jika $a, b \in R \ni axb = 0$, maka $ab = ba = 0$, untuk setiap $x \in R$.

Bukti:
Ambil sebarang $x \in R$. Untuk setiap $x \in R$ berlaku

$$(ab)x(ab) = a(bxa)b = 0.$$

$$(ba)x(ba) = b(axb)b = 0.$$

Berdasarkan definisi 3.1.1 maka $ab = ba = 0$, untuk setiap $x \in R$.

■

3.2 *Centralizer* Kiri dan *Centralizer* Kanan

Di dalam jurnal yang berjudul *On Generalized Derivation in Semiprimering*, M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad mengemukakan definisi *centralizer* kiri dan *centralizer* kanan sebagai berikut.

Definisi 3.2.1 (M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima dan didefinisikan pemetaan $T: R \to R$. Jika untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi $T(xy) = T(x)y$. Maka $T: R \to R$ disebut *centralizer* kiri.

Definisi 3.2.2 (M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima dan didefinisikan pemetaan $T: R \to R$. Jika untuk setiap $x, y \in R$ memenuhi $T(xy) = xT(y)$. Maka $T: R \to R$ disebut *centralizer* kanan.

Contoh 3.2.3
Misalkan R adalah ring semiprima yang didefinisikan dengan $R = \left\{ M_1 \middle| M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $T: R \to R$, sedemikian sehingga $T(x) = Ax, \forall\, x, A \in R$,dan $A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ dengan $p \in \mathbb{R}$. Maka akan ditunjukkan

(1)$T(xy) = T(x)y$.

(2)$T(xy) = x\,T(y)$.

Bukti:
Ambil sebarang $M_1, X \in R$. Maka

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \neq 0, a_1 \in \mathbb{R} \text{ dan } X = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix} \neq 0, x_1 \in \mathbb{R}.$$

Sehingga

$$M_1XM_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} axa & 0 & 0 \\ 0 & axa & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \neq 0.$$

Jadi R adalah ring semiprima. ■

Selanjutnya

(1) Ambil sebarang $x, y \in R$. Untuk setiap $x, y \in R$, maka

$x = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} T(xy) &= Axy \\ &= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \\ &= T(xe)y \\ &= T(x)y. \end{aligned}$$

(2) Ambil sebarang $x, y \in R$. Untuk setiap $x, y \in R$, maka

$x = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$

sedemikian sehingga

$T(xy) = Axy$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= xAy$$

$$= xT(y).$$

Jadi $T: R \to R$ adalah *centralizer* kiri dan *centralizer* kanan. ■

3.3 *Centralizer* Kiri Jordan dan *Centralizer* Kanan Jordan

Definisi 3.3.1 (M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima dan didefinisikan pemetaan $T: R \to R$. Jika untuk setiap $x \in R$ memenuhi $T(x^2) = T(x)x$.. Maka $T: R \to R$ disebut *centralizer* kiri Jordan.

Definisi 3.3.2 (M.N. Daif dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima dan didefinisikan pemetaan $T: R \to R$. Jika untuk setiap $x \in R$ memenuhi $T(x^2) = xT(x)$.. Maka $T: R \to R$ disebut *centralizer* kanan Jordan.

Contoh 3.3.3
Misalkan R adalah ring semiprima berkarakteristik 2 dengan
$R = \left\{ M \middle| M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} a \in \mathbb{Z}_2 \right\}$. Didefinisikan $T: R \to R$, sedemikian sehingga $T(x) = Ax, \forall\, x, A \in R$, dengan $A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}$.
Maka akan ditunjukkan
(1) $T(x^2) = T(x)x$.
(2) $T(x^2) = x\,T(x)$.

Bukti:

(1) Ambil sebarang $x \in R$. Untuk setiap $x \in R$, maka $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}_2, A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}, p \in \mathbb{Z}_2$. Sehingga

$T(x^2) = Ax^2$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R.$$

$T(x^2) = Ax^2$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \in R.$$

(2) Ambil sebarang $x \in R$. Untuk setiap $x \in R$, maka $x = \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{Z}_2, A = \begin{bmatrix} p & 0 \\ p & 0 \end{bmatrix}, p \in \mathbb{Z}_2$. Sehingga

$T(x^2) = x^2 A$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R.$$

$T(x^2) = x^2 A$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \in R. \qquad \blacksquare$$

Contoh 3.3.4

Misalkan R adalah ring semiprima dengan $R = \left\{ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \middle| \, m_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3 \right\}$. Didefinisikan pemetaan $T: R \to R$, sedemikian sehingga $T(x) = Ax, \forall\, x, A \in R$, dengan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3$. Maka akan ditunjukkan

(1) $T(x^2) = T(x)x$.

(2) $T(x^2) = x\,T(x)$.

Bukti:
Ambil sebarang $A, X \in R$. Maka $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \neq 0$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $X = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \neq 0$, $m_{ij} \in \mathbb{R}$. Sehingga

$$AXA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \neq 0.\ b_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Jadi R adalah ring semiprima. $\blacksquare$
Selanjutnya

(1) Ambil sebarang $x \in R$. Untuk setiap $x \in R$, maka $x = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$, di mana $m_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = 1,2,3$. Sehingga

$$T(x^2) = Ax^2$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$= T(x)x.$$

(2) Ambil sebarang $x \in R$. Untuk setiap $x \in R$, maka $x = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$, di mana $m_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1,2,3$. Sehingga

$$T(x^2) = Ax^2$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$= xAx$$

$$= xT(x).$$

Jadi $T: R \rightarrow R$ adalah *centralizer* kiri Jordan dan *centralizer* kanan Jordan. ■

Definisi 3.3.5 (Bhattacharya, S. K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Misalkan R adalah ring. $Z(R) = \{a \in R | xa = ax, \forall x \in R\}$ adalah *center* dari ring R.

Teorema 3.3.6(Bhattacharya, S. K. Jain, dan S.R. Nagpaul, 1990)
Misalkan R adalah ring. $Z(R) = \{a \in R | xa = ax, \forall x \in R\}$ adalah subring dari R.

Bukti:
Misalkan R adalah ring dan $Z(R) = S$. Karena $0 \in S$, maka $S \neq \emptyset$.
Misalkan $a, b \in S, x \in R$. Maka
$(a - b)x = ax - bx = xa - xb = x(a - b)$. Jadi, $(a - b) \in S$.

$(ab)x = a(xb) = a(xb) = (ax)b = (xa)b = x(ab)$. Jadi $ab \in S$.
■

3.4 *Generalized Derivation* di Ring Semiprima

Pada subbab ini akan diuraikan tentang *generalized derivation* di ring semiprima. Namun, terlebih dahulu dibahas definisi *derivation*. Untuk memberikan deskripsi yang lebih detail, pada subbab ini dipaparkan contoh beserta buktinya.

Definisi 3.4.1 (M.N. Daif, dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima dan didefinisikan $D: R \to R$ adalah *additive mapping*. $D: R \to R$ disebut *derivation* jika untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Contoh 3.4.2
Diberikan ring semiprima R dan $R = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Diberikan pula fungsi $D: R \to R$ yang didefinisikan $D(x) = Ax - xA$, $x, A \in R$. Sehingga untuk setiap $x, y, A \in R$ akan ditunjukkan

$$D(xy) = D(x)y + xD(y).$$

Bukti:
Ambil sebarang $x, y, A \in R$. Maka

$$\begin{aligned} D(xy) &= Axy - xyA \\ &= Axy - xyA + Axy - Axy \\ &= Axy - xyA + Axy - xAy \\ &= Axy - xAy + Axy - xyA \\ &= Axy - xAy + xAy - xyA \\ &= (Ax - xA)y + x(Ay - yA) \\ &= D(x)y + xD(y). \end{aligned}$$
■

Definisi 3.4.3 (M.N. Daif, dan Tammam El-Sayiad, 2007)
Misalkan R adalah ring semiprima. Selanjutnya didefinisikan pemetaan $D: R \longrightarrow R$ adalah *additive mapping*. Pemetaan $G: R \longrightarrow R$ disebut *generalized derivation* jika berlaku $G(xy) = G(x)y + xD(y)$ untuk setiap $x, y \in R$.

Lema 3.4.4 (Zalar, 1991)

Misalkan R adalah ring semiprima dan $\theta, \varphi: R \times R \to R$ adalah *additive mapping*. Jika $\theta(x, y)\ w\ \varphi(x, y) = 0$ untuk setiap $x, y, w \in R$, maka $\theta\ (x, y) w\ \varphi(u, v) = 0$ untuk setiap $x, y, u, v, w \in R$.

Bukti:

(1) Jika $x = x + u$

$\theta(x + u, y)\ w\ \varphi(x + u, y) = 0.$

$\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y) + \theta(u, y)\ w\ \varphi(x, y) = 0.$

$\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y) = -\theta(u, y)\ w\ \varphi(x, y).$

$$\big(\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y)\big) z \big(\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y)\big)$$
$$= -\theta(u, y)\ w\ \varphi(u, y) z \theta(x, y)\ w\ \varphi(x, y) = 0.$$

Maka $\theta\ (x, y) w\ \varphi(u, v) = 0.$

(2) Jika $y = y + v$

$\theta(x, y + v)\ w\ \varphi(x, y + v) = 0.$

$\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y) = -\theta(u, y)\ w\ \varphi(x, y).$

$\big(\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y)\big) z \big(\theta(x, y)\ w\ \varphi(u, y)\big)$

$-\theta(u, y)\ w\ \varphi(u, y) = -\theta(x, y)\ w\ \varphi(x, y) = 0.$

Maka $\theta\ (x, y) w\ \varphi(u, v) = 0.$ ■

Lema 3.4.5 (Zalar, 1991)

Misalkan R adalah ring semiprima untuk suatu $a \in R$. Jika setiap $x, y \in R$ $a[x, y] = 0,$ maka terdapat ideal I di R sedemikian sehingga $a \in I \subset Z(R)$.

Bukti:

Didefinisikan $[x, y] = xy - yx$, dan diketahui $a[x, y] = 0$.

$$a[x, y] = 0$$
$$a(xy - yx) = 0$$
$$axy - ayx = 0$$
$$axy = ayx.$$

Maka $a \in Z(R)$. ■

Teorema 3.4.6 (M.N. Daif, dan Tammam El-Sayiad, 2007)

Misalkan R adalah ring semiprima dengan karakteristik selain 2. Diberikan $D: R \to R$ adalah *derivation*. Jika $G: R \to R$ adalah *additive mapping* yang memenuhi

$$G(x^2) = G(x)x + xD(x), \forall\ x \in R, \tag{3.1}$$

maka G adalah *generalized derivation.*

Bukti:

Jika disubstitusikan $x = x + y$ ke dalam persamaan (3.1), maka untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$G((x+y)^2) = \big(G(x+y)\big)(x+y) + (x+y)\big(D(x+y)\big)$$
$$G\big((x+y)(x+y)\big) = \big(G(x+y)\big)(x+y) + (x+y)\big(D(x+y)\big)$$
$$G(x^2 + xy + yx + y^2) = \big(G(x+y)\big)(x+y) + (x+y)\big(D(x+y)\big)$$

Karena $G: R \to R$ adalah *additive mapping* maka

$$G(x^2) + G(y^2) + G(xy + yx)$$
$$= \big(G(x) + G(y)\big)(x+y) + (x+y)\big(D(x) + D(y)\big)$$
$$G(x^2) + G(y^2) + G(xy + yx)$$
$$= G(x)x + G(x)y + G(y)x + G(y)y + xD(x) + xD(y) + yD(x) + yD(y) \quad (3.2)$$

Berdasarkan pada persamaan (3.1), untuk setiap $x, y \in R$

$$G(x^2) = G(x)x + xD(x).$$
$$G(y^2) = G(y)y + yD(y).$$

Selanjutnya dengan mensubtitusikan nilai $G(x^2)$ dan $G(y^2)$ ke dalam persamaan (3.2) diperoleh

$$G(x)x + xD(x) + G(y)y + yD(y) + G(xy + yx) = G(x)x + G(x)y + G(y)x + G(y)y + xD(x) + xD(y) + yD(x) + yD(y)$$

Dengan menggunakan kaidah kanselasi *(additive cancellative)* dihasilkan

$$G(xy + yx) = G(xy) + G(yx)$$
$$= G(x)y + G(y)x + xD(y) + yD(x). \quad (3.3)$$

Selanjutnya, jika $y = xy + yx$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3), maka

$$G(x(xy + yx) + (xy + yx)x) = G(x)(xy + yx) + G(xy + yx)x + xD(xy + yx) + (xy + yx)D(x)$$
$$G(x^2y + xyx + xyx + yx^2) = G(x)(xy + yx) + G(xy + yx)x + xD(xy + yx) + (xy + yx)D(x)$$
$$G(x^2y + yx^2 + xyx + xyx) = G(x)(xy + yx) + G(xy + yx)x + xD(xy + yx) + (xy + yx)D(x)$$
$$G(x^2y + yx^2 + 2xyx) = G(x)(xy + yx) + G(xy + yx)x +$$

$xD(xy + yx) + (xy + yx)D(x).$

Karena $G: R \to R$ adalah *additive mapping* maka

$$G(x^2y + yx^2) + 2G(xyx) = G(x)xy + G(x)yx + G(y)x^2 + xD(y)x + yD(x)x + xD(xy + x) + (xy + yx)D(x), \qquad (3.4)$$

Jika $x = x^2$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3) , maka

$$G(x^2y + yx^2) = G(x^2y) + G(yx^2)$$
$$= G(x^2)y + G(y)x^2 + x^2D(y) + yD(x^2),$$

untuk setiap $x, y \in R$. (3.5)

Selanjutnya jika kedua ruas pada persamaan (3.5) ditambahkan $2G(xyx)$, maka

$$G(x^2y + yx^2) + 2G(xyx) = G(x^2)y + G(y)x^2 + x^2D(y) + yD(x^2) + 2G(xyx). \qquad (3.6)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.4) dan persamaan (3.6) dihasilkan

$$G(x)xy + G(x)yx + G(y)x^2 + xD(y)x + yD(x)x + x\,D(xy + x) + (xy + yx)D(x) = G(x^2)y + G(y)x^2 + x^2D(y) + yD(x^2) + 2G(xyx).$$

Sehingga

$$G(xyx) = G(x)yx + xD(yx). \qquad (3.7)$$

Dengan mensubstitusi $x = x + z$ ke dalam persamaan (3.7) dihasilkan

$$G\big((x + z)y(x + z)\big) = G(x + z)y(x + z) + (x + z)D\big(y(x + z)\big)$$
$$G\big((xy + zy)(x + z)\big) = G(x + z)(yx + yz) + (x + z)D(yx + yz)$$
$$G(xyx + xyz + zyx + zyz) = \big(G(x) + G(z)\big)(yx + yz) + (x + z)\big(D(yx) + D(yz)\big)$$
$$G(xyx + xyz + zyx + zyz) = G(x)yx + G(x)yz + G(z)yx + G(z)yz + xD(yx) + xD(yz) + zD(yx) + zD(yz).$$

Karena $G: R \to R$ adalah *additive mapping* maka

$$G(xyx) + G(xyz) + G(zyx) + G(zyz) = (G(x)yx + G(x)yz + G(z)yx + G(z)yz) + \big(xD(yx) + xD(yz) + zD(yx) + zD(yz)\big).$$

$$(3.8)$$

Berdasarkan pada persamaan (3.2), jika $G(x^2) = G(x)x + xD(x)$, maka

$$G(xyx) = G(x)yx + xD(yx),$$
$$G(zyz) = G(z)yz + zD(yz).$$

Selanjutnya, jika nilai $G(xyx)$ dan $G(zyz)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.8), maka
$G(x)yx + xD(yx) + G(xyz) + G(zyx) + G(z)yz + zD(yz) = G(x)yx + G(x)yz + G(z)yx + G(z)yz + xD(yx) + xD(yz) + zD(yx) + zD(yz)$.

Dengan menggunakan kaidah kanselasi dihasilkan
$$G(xyz + zyx) = G(x)yz + G(z)yx + xD(yz) + zD(yx). \quad (3.9)$$

Misalkan $F = G(xyzyx + yxzxy)$.
Dengan menggunakan persamaan (3.7)
$$\begin{aligned} F &= G(xyzyx + yxzxy) \\ &= G(xyzyx) + G(yxzxy) \\ &= G(x)yzyx + xD(yzyx) + G(y)xzyx + yD(xzxy) \\ &= G(x)yzyx + G(y)xzyx + xD(yzyx) + yD(xzxy). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Selanjutnya dengan menggunakan persamaan (3.9) diperoleh
$$\begin{aligned} F &= G(xyzyx + yxzxy) \\ &= G(xyzyx) + G(yxzxy) \\ &= G(xy)zyx + xyD(yzx) + G(yx)zxy + +yxD(zxy) \\ &= G(xy)zyx + G(yx)zxy + xyD(yzx) + yxD(zxy). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.10) dan (3.11)
$G(xy)zyx + G(yx)zxy + xyD(yzx) + yxD(zxy) = G(x)yzyx + G(y)xzyx + xD(yzyx) + yD(xzxy)$
$G(xy)zyx + G(yx)zxy + xyD(yzx) + yxD(zxy) - G(x)yzyx - G(y)xzyx - xD(yzyx) - yD(xzxy) = 0.$
$$(3.12)$$

Dengan mendefinisikan $G(xy) - G(x)y - xD(y) = \theta(x, y)$, maka persamaan (3.12) dapat diubah ke dalam bentuk persamaan

$G(xy)zyx + G(yx)zxy + xyD(yzx) + yxD(zxy) - G(x)yzyx - G(y)xzyx - xD(yzyx) - yD(xzxy) = G(xy)zyx - G(x)yzyx - xD(y)zyx + G(yx)zxy - G(y)xzyx - yD(x)zxy + xyD(yzx) + yxD(zxy) = 0.$

Sehingga

$\big(G(xy) - G(x)y - xD(y)\big)zyx + \big(G(yx) - G(y)x - yD(x)\big)zxy + xyD(yzx) - yxD(zxy) = 0$

$\theta(x,y)zyx + \theta(y,x)zxy + xyD(yzx) - yxD(zxy) = 0.$

$x, y, z \in R.$ (3.13)

Dengan mendefinisikan $xy - yx = [x,y]$, maka

$$\begin{aligned} xyD(yzx) - yxD(zxy) &= xyD(yzx) - yxD(yzx) \\ &= (xy - yx)D(yzx) \\ &= [x,y]D(yzx). \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sehingga $\theta(x,y)zyx + \theta(y,x)zxy + xyD(yzx) - yxD(zxy) = 0.$

$$\theta(x,y)zyx + \theta(y,x)zxy - 0 = 0.$$

$$\theta(x,y)zyx + \theta(y,x)zxy = 0. \quad (3.14)$$

Berdasarkan pendefinisian $\theta(x,y) = G(xy) - G(x)y - xD(y)$, persamaan (3.3) dapat ditulis ke dalam persamaan $\theta(x,y) = -\theta(y,x)$, sehingga persamaan (3.14) menjadi

$$\begin{aligned} \theta(x,y)zyx + \theta(y,x)zxy &= 0 \\ -\theta(y,x)zyx + \theta(y,x)zxy &= 0 \\ \theta(y,x)zxy - \theta(y,x)zyx &= 0 \\ \theta(y,x)z(xy - yx) &= 0 \\ \theta(y,x)z[x,y] &= 0. \end{aligned} \quad \text{(i)}$$

Jika $\theta(y,x) = -\theta(x,y)$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.14), maka

$$\begin{aligned} \theta(x,y)zyx + \theta(y,x)zxy &= 0 \\ \theta(x,y)zyx - \theta(x,y)zxy &= 0 \\ \theta(x,y)(zyx - zxy) &= 0 \\ \theta(x,y)z(yx - xy) &= 0 \\ \theta(x,y)z[y,x] &= 0. \end{aligned} \quad \text{(ii)}$$

Sehingga dari (i) dan (ii) diperoleh

$$\theta(y,x)z[x,y] = \theta(x,y)z[y,x] = 0, \forall\, x, y, z \in R. \quad (3.15)$$

Berdasarkan Lema 3.4.4,

jika $\theta(y,x)z[x,y] = \theta(x,y)z[y,x]$ $x, y, z \in R$, maka

$\theta(x,y)z[u,v]=0,\;\; x,y,z,u,v\in R.$ (3.16)

Dan berdasarkan Lema 3.1.3,
jika $\theta(x,y)z[u,v]=0,\;\; x,y,z,u,v\in R$, maka
$\theta(x,y)[x,y]=0,\;\; x,y,u,v\in R.$ (3.17)
Untuk selanjutnya, $\theta(x,y)$ akan ditulis θ.

Misalkan b adalah elemen dari R, sehingga berdasarkan Lema 3.4.5 berlaku $b\theta=0$ dan $\theta b=0, \forall\theta\in R$.

$$x\theta^2 y=\theta^2 yx=y\theta^2 x=y\theta^2 x.$$
$$4G(x.\theta^2 y)=4(y\theta^2.x).$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3) diperoleh

$$\begin{aligned}
4G(x.\theta^2 y) &= 2G(2x.\theta^2 y)\\
&= 2G(x.\theta^2 y+\theta^2 y.x)\\
&= 2\{G(x.\theta^2 y)+G(\theta^2 y.x)\}\\
&= 2\{G(x)\theta^2 y+xD(\theta^2 y)+G(\theta^2 y)x+\theta^2 yD(x)\}\\
&= 2\{G(x)\theta^2 y+G(\theta^2 y)x+xD(\theta^2 y)+\theta^2 yD(x)\}\\
&= 2\big\{G(x)\theta^2 y+\big(G(\theta^2)y+\theta^2 D(y)\big)x+x\big(D(\theta^2)y+\\
&\quad \theta^2 D(y)\big)+\theta^2 yD(x)\big\}\\
&= 2\big\{G(x)\theta^2 y+(G(\theta^2)yx+\theta^2 D(y)x)+\big(xD(\theta^2)y+\\
&\quad x\theta^2 D(y)\big)+\theta^2 yD(x)\big\}\\
&= 2\Big\{G(x)\theta^2 y+\Big(\big(G(\theta)\theta+\theta D(\theta)\big)yx+\theta^2 D(y)x\Big)\\
&\quad +\Big(x\big(D(\theta)\theta+\theta D(\theta)\big)y+x\theta^2 D(y)\Big)+\theta^2 yD(x)\Big\}\\
&= 2\{G(x)\theta^2 y+G(\theta)\theta yx+\theta D(\theta)yx+\theta^2 D(y)x\\
&\quad +xD(\theta)\theta y+x\theta D(\theta)y+x\theta^2 D(y)+\theta^2 yD(x)\}\\
&= 2\{G(x)y\theta^2+G(\theta)\theta yx+\theta D(\theta)yx+yD(x)\theta^2 x+\\
&\quad xD(y)\theta^2+xD(\theta)\theta y+x\theta D(\theta)y+xD(y)\theta^2\}\\
&= 2\{G(x)y\theta^2+xD(y)\theta^2+yD(x)\theta^2+xD(y)\theta^2+\\
&\quad G(\theta)\theta yx+\theta D(\theta)yx+xD(\theta)\theta y+x\theta D(\theta)y\}\\
&= 2\big\{\big(G(x)y+xD(y)\big)\theta^2+yD(x)\theta^2+xD(y)\theta^2+\\
&\quad G(\theta)\theta yx+\theta D(\theta)yx+xD(\theta)\theta y+x\theta D(\theta)y\big\}
\end{aligned}\tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
4G(y.\theta^2 x) &= 2G(2y.\theta^2 x)\\
&= 2G(y.\theta^2 x+\theta^2 x.y)\\
&= 2\{G(y.\theta^2 x)+G(\theta^2 x.y)\}\\
&= 2\{G(y)\theta^2 x+yD(\theta^2 x)+G(\theta^2 x)y+\theta^2 xD(y)\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\{G(y)\theta^2x + G(\theta^2x)y + yD(\theta^2x) + \theta^2xD(y)\} \\
&= 2\{G(y)\theta^2x + \big(G(\theta^2)x + \theta^2D(x)\big)y + y\big(D(\theta^2)x + \\
&\quad \theta^2D(x)\big) + \theta^2xD(y)\} \\
&= 2\{G(y)\theta^2x + (G(\theta^2)xy + \theta^2D(x)y) + \big(yD(\theta^2)x + \\
&\quad y\theta^2D(x)\big) + \theta^2xD(y)\} \\
&= 2\left\{G(y)\theta^2x + \Big(\big(G(\theta)\theta + \theta D(\theta)\big)xy + \theta^2D(x)y\Big)\right. \\
&\quad \left. + \Big(y\big(D(\theta)\theta + \theta D(\theta)\big)x + y\theta^2D(x)\Big) + \theta^2xD(y)\right\} \\
&= 2\{G(y)\theta^2x + G(\theta)\theta xy + \theta D(\theta)xy + \theta^2D(x)y \\
&\quad + yD(\theta)\theta x + y\theta D(\theta)x + y\theta^2D(x) + \theta^2xD(y)\} \\
&= 2\{G(y)x\theta^2 + G(\theta)\theta xy + \theta D(\theta)xy + yD(x)\theta^2 \\
&\quad + yD(\theta)\theta x + y\theta D(\theta)x + yD(x)\theta^2 + xD(y)\theta^2\} \\
&= 2\{G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 + yD(x)\theta^2 + xD(y)\theta^2 \\
&\quad + G(\theta)\theta yx + \theta D(\theta)yx + xD(\theta)\theta y + x\theta D(\theta)y\} \\
&= 2\big(G(y)x + yD(x)\big)\theta^2 + yD(x)\theta^2 + xD(y)\theta^2 \\
&\quad G(\theta)\theta yx + \theta D(\theta)yx + xD(\theta)\theta y + x\theta D(\theta)y\}
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Dengan membandingkan persamaan (3.18) dan persamaan (3.19) dan dengan menggunakan persamaan

$$
\begin{gathered}
\theta yx = \theta y.x = x.\theta y = x\theta y = \theta xy, \\
\theta D(\theta)yx = D(\theta)\theta yx = D(\theta)\theta yx = \theta D(\theta)xy, \\
x\theta D(\theta)y = D(\theta)x\theta y = D(\theta)\theta xy = \theta D(\theta)yx = \theta yD(\theta)x = \\
y\theta D(\theta)x.
\end{gathered}
$$

Sehingga $4G(x.\theta^2y) = 4G(y.\theta^2x)$

$$
\begin{aligned}
&2\Big(\big(G(x)y + xD(y)\big)\theta^2 + yD(x)\theta^2 + xD(y)\theta^2 \\
&+G(\theta)\theta yx + \theta D(\theta)yx + xD(\theta)\theta y + x\theta D(\theta)y\} = \\
&2\Big(\big(G(y)x + yD(x)\big)\theta^2 + yD(x)\theta^2 + xD(y)\theta^2 \\
&+G(\theta)\theta yx + \theta D(\theta)yx + xD(\theta)\theta y + x\theta D(\theta)y\}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Dengan kaidah kanselasi *(cancellation)* dari persamaan (3.20) diperoleh

$$
\begin{aligned}
&G(x)\theta^2y + x\theta^2D(y) = G(y)\theta^2x + y\theta^2D(x), \\
&\big(G(x)y + xD(y)\big)\theta^2 = \big(G(y)x + yD(x)\big)\theta^2.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Dengan mendefinisikan $\varphi(x,y) = G(x)y + xD(y)$, dan
$\varphi(y,x) = G(y)x + yD(x)$ sehingga persamaan (3.21) menjadi
$$\varphi(x,y)\theta^2 = \varphi(y,x)\theta^2. \quad (3.22)$$

Selanjutnya, kedua ruas diuraikan dengan menggunakan persamaan (3.3).

$$\begin{aligned}
4G(xy\theta^2) &= 2G(2xy\theta^2) \\
&= 2G(xy\theta^2 + \theta^2 xy) \\
&= 2\big(G(xy\theta^2) + G(\theta^2 xy)\big) \\
&= 2\big(G(xy)\theta^2 + xyD(\theta^2) + G(\theta^2)xy + \theta^2 D(xy)\big) \\
&= 2\big(G(xy)\theta^2 + xy\big(D(\theta)\theta + \theta D(\theta)\big) + \\
&\quad \big(G(\theta)\theta + \theta D(\theta)\big)xy + \theta^2 D(xy)\big) \\
&= 2(G(xy)\theta^2 + xyD(\theta)\theta + xy\theta D(\theta) + G(\theta)\theta xy + \\
&\quad \theta D(\theta)xy + \theta^2 D(xy)\big) \\
&= 2(G(xy)\theta^2 + xyD(\theta)\theta + xyD(\theta)\theta + G(\theta)\theta xy + \\
&\quad xyD(\theta)\theta + D(xy)\theta^2) \\
&= 2(G(xy)\theta^2 + D(xy)\theta^2 + 3xyD(\theta)\theta + G(\theta)\theta xy) \\
&= 2\left(\big(G(xy) + D(xy)\big)\theta^2 + 3xyD(\theta)\theta + G(\theta)\theta xy\right)
\end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned}
4G(x\theta.y\theta) &= 2G(x\theta y\theta + y\theta x\theta) \\
&= 2\big(G(x\theta y\theta) + G(y\theta x\theta)\big) \\
&= 2\big(G(x\theta)y\theta + x\theta D(y\theta) + G(y\theta)x\theta + y\theta D(x\theta)\big) \\
&= 2\left(\big(G(x)\theta + xD(\theta)\big)y\theta + x\theta\big(D(y)\theta + yD(\theta)\big) + \right. \\
&= 2\big(G(y)\theta + yD(\theta)\big)x\theta + y\theta\big(D(x)\theta + xD(\theta)\big)\big) \\
&\quad (G(x)\theta y\theta + xD(\theta)y\theta + x\theta D(y)\theta + x\theta yD(\theta) \\
&= G(y)\theta x\theta + yD(\theta)x\theta + y\theta D(x)\theta + y\theta xD(\theta)\big) \\
&= 2(G(x)\theta y\theta + xyD(\theta)\theta + x\theta D(y)\theta + xy\theta D(\theta) + \\
&\quad G(y)\theta x\theta + xyD(\theta)\theta + y\theta D(x)\theta + xy\theta D(\theta)\big) \\
&= 2(G(x)\theta y\theta + xyD(\theta)\theta + xy\theta D(\theta) + xyD(\theta)\theta + \\
&\quad xyD(\theta)\theta + x\theta D(y)\theta + G(y)\theta x\theta + y\theta D(x)\theta) \\
&= (G(x)\theta y\theta + 4xyD(\theta)\theta + x\theta D(y)\theta + G(y)\theta x\theta + \\
&\quad y\theta D(x)\theta) \\
&= 2(G(x)y\theta^2 + 4xyD(\theta)\theta + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + \\
&\quad yD(x)\theta^2) \\
&= 2(G(x)y\theta^2 + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 +
\end{aligned}$$

$$4xyD(\theta)\theta) . \qquad (3.24)$$

Dengan membandingkan persamaan (3.23) dan (3.24). Karena $4G(xy\theta^2) = 4G(x\theta . y\theta)$, maka

$2\left(\left(G(xy) + D(xy)\right)\theta^2 + 3xyD(\theta)\theta + G(\theta)\theta xy\right) =$

$2(G(x)y\theta^2 + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 + 4xyD(\theta)\theta).$

$2(G(xy)\theta^2 + D(xy)\theta^2 + G(\theta)\theta xy) =$

$2(G(x)y\theta^2 + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 + xyD(\theta)\theta).$

$2G(xy)\theta^2 + 2D(xy)\theta^2 + 2G(\theta)\theta xy =$

$2(G(x)y\theta^2 + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 + xyD(\theta)\theta).$

$2G(xy)\theta^2 = 2\big(G(x)y\theta^2 + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 -$

$2D(xy)\theta^2 - 2G(\theta)\theta xy + \theta xyD(\theta)\big).$

Dengan kaidah kanselasi diperoleh

$$\begin{aligned} 2G(xy)\theta^2 &= G(x)y\theta^2 + xD(y)\theta^2 + G(y)x\theta^2 + yD(x)\theta^2 \\ &= \left(G(x)y + xD(y)\right)\theta^2 + \left(G(y)x + yD(x)\right)\theta^2. \\ &= \varphi(x,y)\theta^2 + \varphi(y,x)\theta^2. \end{aligned}$$

Jadi,$2G(xy)\theta^2 = \varphi(x,y)\theta^2 + \varphi(y,x),\ \forall\, x,y \in R.$ (3.25)

Sehingga persamaan (3.25) menjadi

$$\begin{aligned} 2G(xy)\theta^2 &= \varphi(x,y)\theta^2 + \varphi(x,y)\theta^2 \\ 2G(xy)\theta^2 &= 2\varphi(x,y)\theta^2 \\ G(xy)\theta^2 &= \varphi(x,y)\theta^2 \\ G(xy) &= \varphi(x,y). \qquad (3.26) \end{aligned}$$

Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku

$$\begin{aligned} G(xy) - G(x)y - xD(y) &= G(xy) - G(x)y - xD(y) \\ G(xy) - G(x)y - xD(y) &= G(xy) - \left(G(x)y + xD(y)\right) \\ \theta(x,y) &= G(xy) - \varphi(x,y). \qquad (3.27) \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.25)

$$\begin{aligned} 2G(xy)\theta^2 &= \varphi(x,y)\theta^2 + \varphi(y,x)\theta^2 \\ 2G(xy)\theta^2 - \varphi(x,y)\theta^2 - \varphi(y,x)\theta^2 &= 0. \end{aligned}$$

Karena $\varphi(x,y)\theta^2 = \varphi(y,x)\theta^2$, maka

$$\begin{aligned} 2G(xy)\theta^2 - \varphi(x,y)\theta^2 - \varphi(x,y)\theta^2 &= 0 \\ 2G(xy)\theta^2 - 2\varphi(x,y)\theta^2 &= 0 \\ 2\left(G(xy) - \varphi(x,y)\right)\theta^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\big(G(xy) - \varphi(x,y)\big)\theta^2 = 0$$
$$\theta\theta^2 = 0$$
$$\theta^3 = 0.$$

Karena $\theta^3 = 0$, maka $\theta^2 R\theta^2 = \theta^2\theta^2 R = \theta^4 R = (0).$
$$\theta R\theta = \theta\theta R = \theta^2 R = (0).$$
Berdasarkan definisi 3.1.1 $\theta = 0$. Hal ini berarti bahwa
$\theta(x,y) = G(xy) - G(x)y - xD(y) = 0.$
Sehingga $G(xy) = G(x)y + xD(y).$ ■

Akibat 3.4.7
Jika R adalah ring semiprima dengan karakteristik selain 2 dan $T: R \to R$ adalah *additive mapping* yang memenuhi $T(x^2) = T(x)x$ untuk setiap $x \in R$ maka T adalah *centralizer* kiri.

Bukti:
Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku
$T(x^2) = T(x)x.$ (3.28)
Jika $x = x + y$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.28), maka
$$T((x+y)^2) = \big(T(x+y)\big)(x+y)$$
$$T\big((x+y)(x+y)\big) = \big(T(x) + T(y)\big)(x+y)$$
$$T(x^2 + xy + yx + y^2) = T(x)x + T(x)y + T(y)x + T(y)y.$$

Karena $T: R \to R$ adalah *additive mapping* maka
$T(x^2) + T(xy + yx) + T(y^2) = T(x)x + T(x)y + T(y)x + T(y)y.$

Dengan menggunakan persamaan (3.28) untuk setiap $x, y \in R$

$$T(x)x + T(xy + yx) + T(y)y = T(x)x + T(x)y + T(y)x + T(y)y$$

Dengan kaidah kanselasi diperoleh
$T(xy + yx) = T(x)y + T(y)x.$ (3.29)

Jika $y = xy + yx$ dan disubstitusikan ke persamaan (3.29), maka
$$T(x(xy + yx) + (xy + yx)x) = T(x)(xy + yx) + T(xy + yx)x$$
$$T(x^2y + xyx + xyx + yx^2) = T(x)xy + T(x)yx + T(xy)x + T(yx)x$$
$$= T(x)xy + T(x)yx + T(x)yx + T(y)x^2.$$

Karena $T: R \to R$ adalah *additive mapping* maka

$$T(x^2y + xyx + xyx + yx^2) = T(x)xy + T(x)yx + T(x)yx + T(y)x^2.$$

$$T(x^2y) + T(xyx + xyx) + T(yx^2) = T(x)xy + T(x)yx + T(x)yx + T(y)x^2$$

$$T(x^2y + yx^2) + T(2xyx) = T(x)xy + T(x)yx + T(x)yx + T(y)x^2.$$

$$T(x^2y + yx^2) + 2T(xyx) = T(x)xy + T(x)yx + T(x)yx + T(y)x^2. \tag{3.30}$$

Jika $x = x^2$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.29) maka

$$T(x^2y + yx^2) = T(x^2)y + T(y)x^2. \tag{3.31}$$

Jika kedua ruas persamaan (3.31) ditambahkan $2T(xyx)$ maka

$$\begin{aligned} T(x^2y + yx^2) + 2T(xyx) &= T(x^2)y + T(y)x^2 + 2T(xyx) \\ &= T(x)xy + T(y)x^2 + 2T(xyx) \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dari persamaan (3.30) dan (3.32) dihasilkan

$$T(x)xy + T(x)yx + T(x)yx + T(y)x^2 = T(x)xy + T(y)x^2 + 2T(xyx).$$

Dengan kaidah kanselasi maka

$$T(xyx) = T(x)yx. \tag{3.33}$$

Jika disubstitusikan $x = x + z$ ke persamaan (3.33) maka

$$\begin{aligned} T\big((x+z)y(x+z)\big) &= \big(T(x+z)\big)y(x+z) \\ T\big((xy+zy)(x+z)\big) &= \big(T(x+z)\big)(yx+yz) \\ T(xyx + xyz + zyx + zyz) &= \big(T(x+z)\big)(yx+yz) \\ T(xyx + xyz + zyx + zyz) &= \big(T(x)+T(z)\big)(yx+yz) \\ T(xyx + xyz + zyx + zyz) &= T(x)yx + T(x)yz + T(z)yx + T(z) \end{aligned}$$

Karena $T: R \to R$ adalah *additive mapping* maka

$$\begin{aligned} &T(xyx + xyz + zyx + zyz) \\ &\qquad = T(x)yx + T(x)yz + T(z)yx + T(z)yz \\ &T(xyx) + T(xyz + zyx) + T(zyz) \\ &\qquad = T(x)yx + T(x)yz + T(z)yx + T(z)yz. \\ &\qquad = T(xyx) + T(x)yz + T(z)yx + T(zyz). \end{aligned}$$

Dengan kaidah kanselasi maka diperoleh

$$T(xyz + zyx) = T(x)yz + T(z)yx. \tag{3.34}$$

Misalkan $H = T(xyzyx + yxzxy)$.
Dengan menggunakan persamaan (3.33) diperoleh

$$\begin{aligned} H &= T(xyzyx + yxzxy) \\ &= T(xyzyx) + T(yxzxy) \\ &= T(x)yzyx + T(y)xzxy. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Sedangkan dengan menggunakan persamaan (3.34) diperoleh

$$\begin{aligned} H &= T(xyzyx + yxzxy) \\ &= T(xyzyx) + T(yxzxy) \\ &= T(xy)zyx + T(yx)zxy. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Dengan membandingkan persamaan (3.35) dan (3.36) dan dengan mendefinisikan $\tau(x,y) = T(xy) - T(x)y$ maka

$$T(xy)zyx + T(yx)zxy = T(x)yzyx + T(y)xzxy$$
$$T(xy)zyx + T(yx)zxy - T(x)yzyx - T(y)xzxy = 0$$
$$T(xy)zyx - T(x)yzyx + T(yx)zxy - T(y)xzxy = 0$$
$$(T(xy) - T(x)y)zyx + (T(yx) - T(y)x)zxy = 0$$
$$\tau(x,y)zyx + \tau(y,x)zxy = 0. \tag{3.37}$$

Dari persamaan (3.29) . $T: R \to R$ adalah *additive mapping* sehingga

$$T(xy + yx) = T(x)y + T(y)x$$
$$T(xy) + T(yx) = T(x)y + T(y)x$$
$$T(xy) + T(yx) - T(x)y - T(y)x = 0$$
$$T(xy) - T(x)y + T(yx) - T(y)x = 0$$

Dengan mendefinisikan

$$T(xy) - T(x)y = \tau(x,y)$$
$$T(yx) - T(y)x = \tau(y,x)$$

maka $T(xy) - T(x)y + T(yx) - T(y)x = 0$

$$\tau(x,y) + \tau(y,x) = 0.$$
$$\tau(x,y) = -\tau(y,x).$$

Selanjutnya dari persamaan (3.37)

$$\tau(x,y)zyx + \tau(y,x)zxy = 0$$
$$\tau(x,y)zyx - \tau(x,y)zxy = 0$$
$$\tau(x,y)z(yx - xy) = 0.$$

Dengan mendefinisikan $yx - xy = [x,y]$ maka

$$\tau(x,y)z(yx - xy) = \tau(x,y)z[x,y] = 0.$$

Dengan menggunakan Lema 3.4.3 dan Lema 3.1.3. Jika setiap $x, y, z \in R$ $\tau(x,y)z[x,y] = 0$ maka $\tau(x,y)z[u,v] = 0$ untuk setiap $x, y, z \in R$. Selanjutnya penulisan $\tau(x,y)$ akan ditulis τ.
Berdasarkan Lema 3.4.4 terdapat ideal I sedemikian sehingga $\tau \in I \subset Z(R)$. Artinya $b\tau, \tau b \in Z(R)$ untuk suatu $b \in R$. Sehingga

$$\begin{aligned} x.\tau^2 y &= \tau^2 y.x \\ &= y\tau^2.x \\ &= y.\tau^2 x \end{aligned}$$

Jadi $4T(x.\tau^2 y) = 4T(y.\tau^2 x)$.

Dengan menggunakan persamaan (3.33) maka diperoleh

$$4T(x.\tau^2 y) = 4T(y.\tau^2 x)$$
$$2T(x\tau^2 y + \tau^2 yx) = 2T(y\tau^2 x + \tau^2 xy)$$
$$2T(x)\tau^2 y + 2T(\tau^2 y)x = 2T(y)\tau^2 y + 2T(\tau^2 x)y$$
$$2T(x)\tau^2 y + 2T(\tau^2 y + y\tau^2)x = 2T(y)\tau^2 x + 2T(\tau^2 x + x\tau^2)y$$
$$2T(x)\tau^2 y + T(\tau)\tau yx + T(y)\tau^2 x = 2T(y)\tau^2 x + T(\tau)\tau xy + T(x)\tau^2 y$$

Sehingga $T(x)\tau^2 y + T(\tau)\tau yx = T(y)\tau^2 x + T(\tau)\tau xy$.

Jika $\tau yx = \tau y.x = x.\tau y = x\tau y = \tau xy$, maka $T(x)\tau^2 y = T(y)\tau^2 x$. (3.38)

Sehingga dihasilkan

$$4T(xy\tau^2) = 4T(x\tau.y\tau)$$
$$2T(xy\tau^2 + \tau^2 xy) = 2T(x\tau y\tau + y\tau x\tau)$$
$$2T(xy)\tau^2 + 2T(\tau)\tau xy = 2T(\tau x)\tau y + 2T(\tau y)\tau x$$
$$2T(xy)\tau^2 + 2T(\tau)\tau xy = T(x\tau + \tau x)\tau y + T(y\tau + \tau y)\tau x$$
$$2T(xy)\tau^2 + 2T(\tau) = \tau xy T(x)\tau^2 y + T(\tau)\tau xy + T(y)\tau^2 x + T(\tau)\tau xy$$
$$2T(xy)\tau^2 = T(x)y\tau^2 + T(y)x\tau^2$$
$$2T(xy)\tau^2 = T(x)y\tau^2 + T(x)y\tau^2$$
$$2T(xy)\tau^2 = 2T(x)y\tau^2$$
$$T(xy)\tau^2 = T(x)y\tau^2$$
$$T(xy)\tau^2 - T(x)y\tau^2 = 0$$
$$(T(xy) - T(x)y)\tau^2 = 0$$
$$\tau^3 = 0$$

Jika $\tau^3 = 0$ maka $\tau^2 R\tau^2 = \tau^2\tau^2 R = \tau^4 R = (0)$
$$\tau R\tau = \tau\tau R = \tau^2 R = (0).$$

Berdasarkan definisi 3.1.1, $\tau = 0$. Hal ini berarti bahwa
$\tau = \tau(x,y) = T(xy) - T(x)y = 0$

Sehingga $T(xy) = T(x)y$. ■

BAB IV
KESIMPULAN

4.1 Kesimpulan

Adapun kesimpulan dari pembahasan skripsi adalah sebagai berikut:

1. Jika R adalah ring semiprima dengan karakteristik selain 2. Didefinisikan $D: R \to R$ adalah *derivation*. Jika $G: R \to R$ adalah *additive mapping* yang memenuhi relasi $G(x^2) = G(x)x + xD(x)$ maka G adalah *generalized derivation*.
2. Jika R adalah ring semiprima dengan karakteristik selain 2 dan $T: R \to R$ adalah *additive mapping* $\ni T(x^2) = T(x)x, \forall x \in R$, maka T adalah *centralizer* kiri.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Penerbit ITB . Bandung.

Bhattacharya, Phani Bhushan, S.K. Jain, S.R. Nagpaul. 1990. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Daif, M.N. dan M.S. Tammam El-Sayiad. 2007. *An Identity Related* to *Generalized Derivation*. International Journal of Algebra, volum 1, no. 11, 547-550. Kairo.

Daif, M.N. dan M.S. Tammam El-Sayiad. 2007. *On Generalized Derivation in Semiprime Rings*. International Journal Contemp Mathematics and Science.volum 2, no. 30, 1481-1486. Kairo.

Durbin, John R. 1992. *Modern Algebra, An Introduction*. John Wiley & Sons,Inc.Kanada.

Hartley dan Hawkes. 1994. *Ring, Modules and Linear Algebra*. Chapman and Hall. London.

Hidayanto, Erry dan Santi Irawati. 2000. *Struktur Aljabar II*. Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Negeri Malang. Malang.

(http://en.wikipedia.org/ additive mapping, 2008).Tanggal Akses 18 Desember 2009

Jacobson, Nathan. 1951. *Lecture in Abstract Algebra*. D Van Nostrand Company, Inc.New Jersey.

Kosi, Irena. 2004. *A Remark on Centralizers in Semiprime Rings*. Glasnik Mathematick and Science.volum 39, no. 59, 21-26, University of Malibor. Slovenia.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall, Inc. New York.

Zalar, Borut. 1991. O*n Centralizers of Semiprime Rings*. Comment. Mathematics University.volum 34, no.4, 609-614.Carolinae.