OSCILLATORY PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER VERSI RIEMANN-WEBER *DELAY*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :
BAMBANG SULISTIYONO
0410940010-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

OSCILLATORY PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER VERSI RIEMANN-WEBER *DELAY*

Oleh :

BAMBANG SULISTIYONO
0410940010-94

Telah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 21 Desember 2010
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Wuryansari M.K., M.Si.	**Drs. M. Muslikh, M.Si.**
NIP. 196607281993032001	NIP.195910311989121001

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc.
NIP. 196908071994121001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : BAMBANG SULISTIYONO
NIM : 0410940010
Jurusan : MATEMATIKA
Penulis Skripsi berjudul : *OSCILLATORY* PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER VERSI RIEMANN-WEBER *DELAY*

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi skripsi yang saya buat adalah benar - benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama - nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 21 Desember 2010
Yang menyatakan,

(Bambang Sulistiyono)
NIM. 0410940010

OSCILLATORY PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL EULER VERSI RIEMANN-WEBER *DELAY*

ABSTRAK

Persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber adalah salah satu persamaan diferensial yang solusinya diduga bersifat *oscillatory*. Khususnya dalam skripsi ini diselidiki sifat *oscillatory* pada solusi persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber dengan *delay*. Dengan memanfaatkan suatu teorema, sifat *oscillatory* solusi persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber dengan *delay* dapat diselidiki melalui eksistensi sifat *oscillatory* solusi persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay*. Dengan cara tersebut, diperoleh syarat perlu dan cukup agar solusi *non-trivial* persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber dengan *delay* bersifat *oscillatory*.

Kata kunci : Persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber, *delay, oscillatory,* solusi *non-trivial*

OSCILLATORY OF EULER DIFFERENTIAL EQUATIONS OF RIEMANN-WEBER VERSION WITH _DELAY_

ABSTRACT

Euler differential equation Riemann-Weber version be inferred have a solution which oscillatory. Existency of oscillatory property on the solution of Euler differential equation Riemann-Weber version delay will be investigated through the non-delay equation by using a theorem. It is found a necessary and sufficient condition for the existency of oscillatory property on the solution of Euler differential equation Riemann-Weber version both for non-delay and delay cases.

Keywords: Euler differential equation Riemann-Weber version, delay, oscillatory, nontrivial solution.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT karena berkat segala rahmat serta hidayah yang telah dilimpahkanNya sehingga skripsi yang berjudul **”*Oscillatory* pada Persamaan Diferensial Euler versi Riemann-Weber dengan *delay* ”** dapat diselesaikan. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Dr. Wuryansari, M. K., M.Si. selaku pembimbing I sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan, waktu dan segala sesuatu yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Drs. M. Muslikh, M.Si. selaku pembimbing II atas bimbingan, saran, kesabaran, perhatian, nasihat dan dukungan yang selalu diberikan sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.
3. Prof. Dr. Marjono, M.Phil., Dra. Endang Wahyu H. M.Si., dan Dra. Ari Andari, MS. selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Dr. Agus Suryanto, MSc. selaku Ketua Jurusan Matematika atas segala bantuan serta motivasi yang telah diberikan.
5. Segenap bapak dan ibu dosen yang telah mendidik dan mengamalkan ilmunya.
6. Dra. Ari Andari, MS selaku dosen penasihat akademik atas nasihat dan perhatiannya selama penulis melaksanakan studi.
7. Orang tua, guru, beserta saudara yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasihat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesainya skripsi ini.
8. Teman – teman, khususnya dari program studi Matematika angkatan 2004-2008, atas dukungan dan semangat yang senantiasa mereka berikan.
9. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu, yang telah membantu dalam penulisan skripsi ini.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan sehingga belum dapat dikatakan sempurna. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 21 Desember 2010

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL i
HALAMAN PENGESAHAN iii
HALAMAN PERNYATAAN v
ABSTRAK vii
ABSTRACT ix
KATA PENGANTAR xi
DAFTAR ISI xiii
BAB I PENDAHULUAN 1
1.1. Latar Belakang 1
1.2. Rumusan Masalah 2
1.3. Tujuan 2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA 3
2.1. Fungsi 3
2.2. Himpunan Fungsi 5
2.3. Barisan 6
2.4. Persamaan Diferensial 6
2.4.1 Persamaan Diferensial Euler 7
2.4.2 Persamaan Diferensial *Delay* 7
2.5. *Oscillatory* 8
2.6. Persamaan Diferensial Euler Versi Riemann-Weber 11

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN 13
3.1. Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler versi Riemann-Weber *Non-Delay* 13
3.2. *Oscillatory* pada Solusi Persamaan Diferensial Euler Versi Riemann-Weber *Non Delay* 18
3.3. *Oscillatory* pada Solusi Persamaan Diferensial Euler Versi Riemann-Weber *Delay* 20

BAB IV KESIMPULAN 25
DAFTAR PUSTAKA 27

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Persamaan diferensial merupakan salah satu bidang kajian matematika yang mempunyai kontribusi besar dalam pengembangan matematika maupun bidang ilmu lainnya. Persamaan diferensial seringkali digunakan untuk menentukan solusi berbagai persoalan seperti mekanika, kedokteran, rangkaian listrik dan ilmu terapan lainnya. Persamaan diferensial *delay* didefinisikan sebagai sebuah persamaan diferensial yang memuat hubungan ketergantungan antara dua waktu yang berbeda. Dibandingkan dengan persamaan diferensial *non-delay*, persamaan diferensial *delay* lebih jarang dibahas, karena solusi persamaan diferensial *delay* cukup sulit ditentukan secara eksak. Padahal banyak fenomena di alam yang dimodelkan dengan persamaan diferensial *delay*.

Dalam kehidupan sehari-hari banyak peristiwa yang berkaitan dengan fenomena osilasi yang dalam fisika osilasi sering diartikan sebagai gerak bolak-balik. Sebagai contoh, osilasi dapat diamati pada getaran senar gitar yang dimainkan oleh gitaris. Nada atau bunyi berasal dari getaran pada senar gitar yang dipetik, sehingga getaran dapat diartikan pula sebagai osilasi atau gerak bolak-balik. Fenomena osilasi dalam matematika lebih dikenal dengan nama *oscillatory*. *Oscillatory* adalah suatu sifat yang menyatakan bahwa solusi suatu persamaan diferensial berosilasi. Di antara sekian banyak bentuk dan jenis persamaan diferensial, hanya sedikit terdapat persamaan diferensial yang bersifat *oscillatory*. *S*alah satu persamaan diferensial yang diduga mempunyai solusi yang berosilasi adalah persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber, dengan bentuk umum

$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{1}{4t^2}y(t) + \frac{\delta}{(t\ln t)^2}y(ct) = 0, t > 0, \qquad (1.1)$$

di mana δ dan c adalah parameter yang memenuhi kondisi $\delta > 0$ dan $0 < c \leq 1$. Bila c = 1, maka persamaan (1.1) disebut persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay,* sedangkan bila $0 < c < 1$, maka persamaan (1.1) disebut persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *delay*.

Pada skripsi ini pembahasan lebih difokuskan pada persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *delay*. *Oscillatory* pada persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *delay* cukup sulit diperlihatkan secara langsung, sebab solusi eksaknya sulit ditentukan. Sebagai salah satu alternatif, digunakan pendekatan *oscillatory* pada persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay*. Dengan demikian akan diselidiki terlebih dahulu terjadinya *oscillatory* pada persamaan diferensial *non-delay*. Kemudian hasil yang diperoleh digunakan untuk menyelidiki *oscillatory* pada persamaan diferensial *delay*.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, pokok permasalahan yang dikemukakan dalam skripsi ini adalah menentukan kondisi yang menyebabkan solusi *non-trivial* persamaan diferensial versi Riemann-Weber *non-delay* maupun persamaan diferensial versi Riemann-Weber *delay* bersifat *oscillatory*.

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menghasilkan syarat perlu dan cukup untuk parameter δ agar solusi *non-trivial* persamaan diferensial versi Riemann-Weber *non-delay* bersifat *oscillatory*.
2. Menghasilkan syarat perlu dan cukup untuk parameter δ dan c agar solusi *non-trivial* persamaan diferensial versi Riemann-Weber *delay* bersifat *oscillatory*.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan dasar-dasar teori yang dipergunakan untuk mengkaji persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber, serta *oscillatory* pada solusinya. Dasar-dasar teori tersebut meliputi definisi dan uraian singkat beberapa teori penunjang skripsi ini.

2.1. Fungsi

Definisi 2.1.1
Misal A, B himpunan. Fungsi dari A ke B didefinisikan sebagai aturan yang memetakan setiap $a \in A$ dengan tepat satu elemen $b \in B$.

Definisi 2.1.2
Misalkan *f* fungsi yang terdefinisi pada suatu selang terbuka yang mengandung *c*. Fungsi *f* dikatakan kontinu di *c* jika $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Definisi 2.1.3
Suatu fungsi $f(t)$ dikatakan periodik dengan periode *T*, jika untuk setiap *t* di domain *f*,

$$f(t+T) = f(t).$$

Definisi 2.1.4
Fungsi trigonometri sinus dan cosinus dapat dihubungkan dengan fungsi eksponensial oleh kesamaan Euler, yaitu

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \text{ dengan } i = \sqrt{-1}.$$

Definisi 2.1.5
Diberikan fungsi $f : A \to \Re$, dengan $A \subseteq \Re$.

1. Fungsi f dikatakan monoton naik pada A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Fungsi f dikatakan monoton turun pada A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) > f(x_2)$.

3. Fungsi f dikatakan monoton tak turun pada A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) \leq f(x_2)$.
4. Fungsi f dikatakan monoton tak naik pada A jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Definisi 2.1.6
Dimisalkan $f : A \to \Re$, dan $c \in A$. Turunan fungsi f di titik c didefinisikan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}\ .$$

Lemma 2.1.7
Misalkan f fungsi kontinu pada $I:[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b). Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka terdapat titik $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$.

Teorema 2.1.8 (Teorema nilai rata-rata)
Jika f fungsi kontinu pada $I:[a,b]$ dan terdiferensial pada (a,b), maka terdapat titik c pada (a,b) sedemikian sehingga

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)\,.$$

Bukti:
Definisikan φ sebagai

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a) \text{ dimana } x \in I\ .$$

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\ .$$

$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-a)$$

$$= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Karena φ kontinu pada $I:[a,b]$, terdiferensial pada (a,b) dan $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, maka berdasar Lemma 2.1.7 terdapat titik c pada (a,b) sedemikian sehingga

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Akibatnya $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Terbukti

2.2 Himpunan Fungsi

Himpunan fungsi adalah himpunan yang elemennya berupa fungsi.

Definisi 2.2.1

$C_0 = \{ f : (0,\infty) \to \Re \mid f \text{ kontinu pada } (0,\infty) \}$

Definisi 2.2.2

$C_0^+ = \{ f \in C_0 \mid f \text{ tak negatif} \}$

Definisi 2.2.3

$C_0^- = \{ f \in C_0 \mid f \text{ fungsi tak positif} \}$.

Definisi 2.2.4

Fungsi $f \in C_0$ dikatakan *concave* jika $\forall \alpha \in [0,1]$ dan $t, s \in (0,\infty)$, maka berlaku $\alpha f(t) + (1-\alpha) f(s) \le f(\alpha t + (1-\alpha)s)$.

Definisi 2.2.5

$Y = \{ y \in C_0 \mid y \text{ fungsi positif dan } concave \}$

Teorema 2.2.6

Misal f kontinu pada $I : [a,b]$, terdiferensial pada (a,b). Jika f fungsi monoton naik pada interval I, maka $f'(x) > 0$, untuk setiap $x \in I$.

Bukti:

Diketahui fungsi f monoton naik pada I, maka untuk setiap $x_1,\ x_2 \in I$ dan $x_1 < x_2$, berlaku $f(x_1) < f(x_2)$ atau $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Karena f terdiferensial pada I dan kontinu pada I, maka menurut teorema nilai rata-rata terdapat $c \in (x_1,\ x_2)$, sedemikian sehingga

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Karena $f(x_2) - f(x_1) > 0$, maka $f'(c) > 0$. Terbukti

2.3 Barisan

Barisan dalam himpunan S merupakan sebuah fungsi yang *domain*nya $\aleph = \{1,2,3\ldots\}$ dan *range*nya di dalam S. Barisan bilangan riil adalah fungsi yang didefinisikan dalam $\aleph = \{1,2,3\ldots\}$ dengan range himpunan bilangan riil.

2.4 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan suatu fungsi yang tidak diketahui. Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde n apabila turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial itu merupakan turunan ke-n. Suatu persamaan diferensial dikatakan mempunyai derajat k apabila turunan tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut berderajat k.

Contoh

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 5 = 0$ (persamaan diferensial orde 2)
2. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4 + 4\frac{dy}{dx} = 0$ (persamaan diferensial orde 2 berderajat 4).

Apabila suatu persamaan diferensial menyatakan hubungan antara fungsi dengan satu variabel bebas dan satu atau lebih turunan fungsi itu terhadap variabel bebas tersebut, maka persamaan tersebut disebut sebagai persamaan diferensial biasa. Di sisi lain, apabila suatu persamaan diferensial menyatakan hubungan antara fungsi dengan sejumlah variabel bebas dan satu atau lebih turunan parsial fungsi itu terhadap variabel bebasnya, maka persamaan tersebut disebut sebagai persamaan diferensial parsial (Weisstein, Eric W. 2004).

Bentuk umum persamaan diferensial biasa orde n adalah

$$y^{(n)} = F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n-1)}\right),$$

dengan $y, y', y'', \ldots. y^{(n)}$ fungsi dari x (Finizio dan Ladas).

Suatu persamaan diferensial linear orde *n* adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n(x)y^{(n)}(x)+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x)+......a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=f(x), \quad (2.1)$$

dengan $a_n(x), a_{n-1}(x)...a_0(x)$ adalah koefisien-koefisien, dan fungsi $f(x)$ merupakan fungsi kontinu. Jika fungsi $f(x)=0,$ maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial linear *homogen*. Sedangkan jika $f(x)\neq 0$, maka persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial linear *nonhomogen.*

Skripsi ini hanya membahas persamaan diferensial biasa, sehingga selanjutnya persamaan diferensial biasa disebut persamaan diferensial saja.

2.4.1 Persamaan Diferensial Euler

Persamaan diferensial yang berbentuk

$$a_n x^n y^{(n)}(x)+a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)}(x)+...+a_1 xy'(x)+a_0 y(x)=f(x),$$

adalah salah satu bentuk persamaan diferensial Euler orde *n* dengan variabel bebas *x*, dengan $a_n, a_{n-1}..., a_0$ adalah konstanta dan $a_n \neq 0$ (N. Finizio dan G. Ladas).

2.4.2 Persamaan Diferensial *Delay*

Suatu persamaan diferensial disebut persamaan diferensial *delay*, apabila pada persamaan tersebut terdapat hubungan ketergantungan dari waktu sebelum dan waktu sekarang atau dengan kata lain terdapat hubungan ketergantungan antara dua waktu yang berbeda pada persamaannya. Sebagai contoh, persamaan $y''(t)=y(t-\tau)$ dengan $\tau>0$ merupakan persamaan diferensial *delay*.

Perhatikan $$y''(t)+q(t)y\big(t-\tau(t)\big)=0, \quad (2.2)$$

dengan $q\in C_0^+$ dan $\tau(t)$ sebagai *delay*. Persamaan (2.2) disebut persamaan diferensial *delay*. Solusi persamaan (2.2) adalah fungsi yang kontinu pada (t_0,∞) dengan $t_0 \geq 0$.

Misal $y(t)$ solusi persamaan (2.2).

1. Solusi $y(t)$ dikatakan *non-trivial*, jika untuk setiap $r > 0$, terdapat t dengan $t > r$, sedemikian sehingga $y(t) \neq 0$.
2. Solusi $y(t)$ dikatakan solusi positif jika terdapat t_0, sedemikian sehingga $y(t) > 0$, untuk $t > t_0$, dan dikatakan solusi negatif jika $y(t) < 0$ untuk $t > t_0$.

Lemma 2.4.3

Dimisalkan $q \in C_0^+$ dan τ *delay*. Jika $y \in C_0^+$ dan terdiferensial untuk setiap $t > t_1$, serta memenuhi

$$y'(t) > \int_t^\infty q(s)y\big(s-\tau(s)\big)ds,\ \forall t > t_1$$

di mana $t_0 \geq 0$ dan $t-\tau(t) > t_0, \forall t > t_1$, maka persamaan (2.2) mempunyai solusi positif *v* yang memenuhi $v(t) \leq y(t),\ \forall t > t_0$ dan $\lim_{t\to\infty} v'(t) = 0$.

Lemma 2.4.4

Dimisalkan $t_0 \geq 0$, dan *u* fungsi positif dan *concave* di dalam C_{t_0}, sedemikian sehingga

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0(t),$$

maka terdapat $t_1 > t_0$ dan fungsi positif $y \in Y$, sehingga $y(t) = u(t)$, untuk $t \geq t_1$.

2.5 *Oscillatory*

Misal $y(t)$ adalah suatu fungsi kontinu. Fungsi $y(t)$ disebut *oscillatory* jika terdapat barisan $\{t_n\}$ yang menuju ∞, sedemikian sehingga fungsi $y(t_n) = 0$. Dengan kata lain suatu fungsi $y(t)$ dikatakan bersifat *oscillatory* jika fungsi tersebut mempunyai pembuat nol yang tak berhingga banyaknya pada suatu interval $[a,\infty)$, dengan $a > 0$. Sedangkan $y(t)$ dikatakan *non-oscillatory* jika $y(t)$ mempunyai pembuat nol yang berhingga banyaknya pada suatu interval $[a,\infty)$. Suatu persamaan diferensial dikatakan bersifat *oscillatory* jika solusinya bersifat *oscillatory*.

Teorema 2.5.1

Dimisalkan $q_1, q_2, \tau_1, \tau_2 \in C_0^+$. Untuk setiap $y \in Y$ dengan $y > 0$, terdapat bilangan tak negatif M_1, M_2 sedemikian sehingga untuk t yang sangat besar, berlaku

$y(t) - M_2 > 0$, dan $q_1(t)[y\{t - \tau_1(t) - M_1\} - M_2] \le q_2(t)y\{t - \tau_2(t)\}$.

Jika

$$y''(t) + q(t)y(t - \tau_1(t)) = 0, \tag{2.3}$$

oscillatory, maka

$$y''(t) + q(t)y(t - \tau_2(t)) = 0 \tag{2.4}$$

oscillatory.

Bukti:

Teorema ini akan dibuktikan dengan menggunakan kontraposisi. Misalkan persamaan (2.4) *non-oscillatory*, akan dibuktikan persamaan (2.3) *non-oscillatory*. Karena persamaan (2.4) *non-oscillatory*, maka terdapat solusi u dari persamaan (2.4) dan $u(t) \neq 0$ untuk t yang sangat besar. Tanpa mengurangi umumnya pembuktian, dapat diasumsikan solusi u adalah positif. Pilih bilangan t_1 dan t_2, sedemikian sehingga $u(t) > 0$ untuk setiap $t > t_1$ dan $t - \tau_2(t) > t_1$ untuk setiap $t > t_2$. Karena $u(t)$ semakin besar kepositifannya, maka $u'(t) \ge 0$. Karena $u(t)$ solusi persamaan (2.4), maka

$$u''(t) = -q_2(t)u(t - \tau_2(t)). \tag{2.5}$$

Untuk $t > t_2$ berlaku $q_2(t) \ge 0$ dan $u(t - \tau_2(t)) > 0$, sehingga dari persamaan (2.5) didapat $u''(t) \le 0$ untuk $t > t_2$. Dengan mengintegralkan persamaan (2.5) untuk $t_2 \le t < x$, maka diperoleh

$$\int_t^x u''(s) = \int_t^x -q_2(s)u(s - \tau_2(s))ds$$

atau

$$u'(x) - u'(t) = -\int_t^x q_2(s)u(s - \tau_2(s))ds$$

atau

$$u'(t) - u'(x) = \int_t^x q_2(s)u\big(s - \tau_2(s)\big)ds. \qquad (2.6)$$

Karena $u'(t)$ monoton turun untuk setiap $t > t_2$, maka untuk $t_2 \le t < x$ berlaku $u'(t) - u'(x) \le u'(t)$, sehingga dari persamaan (2.6) diperoleh

$$\int_t^x q_2(s)u\big(s - \tau_2(s)\big)ds \le u'(t) \text{ untuk } t > t_2, \qquad (2.7)$$

dan untuk $x \to \infty$

$$\int_t^\infty q_2(s)u\big(s - \tau_2(s)\big)ds < \infty.$$

Berdasarkan pertidaksamaan (2.7), maka menurut Lemma (2.4.3) berlaku $\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0$. Akibatnya

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = 0(t).$$

Menurut Lemma (2.4.4) terdapat t_3 dengan $t_3 > t_2$ dan $y(t)$ positif sedemikian sehingga $u(t) = y(t)$, untuk setiap $t > t_3$. Menurut hipotesis terdapat konstanta tak-negatif M_1 dan M_2. Oleh karena itu, pilih t_3 dengan $t_3 \ge t_2 + M_1$ sedemikian sehingga berlaku $t - \tau_2(t) > t_2$ dan $t - \tau_1(t) > t_2 + M_1$ atau $t - \tau_1(t) - M_1 > t_2$.

Karena $u(t) = y(t)$ untuk setiap $t > t_3$, maka dari hipotesis juga berlaku

$$u\big(t - \tau_1(t) - M_1\big) - M_2 > 0,$$

dan

$$q_1(t)\big[u\big(t - \tau_1(t) - M_1\big) - M_2\big] \le q_2(t)u\big(t - \tau_2(t)\big) \qquad (2.8)$$

untuk setiap $t > t_3$. Dipilih $y(t) = u\big(t - M_1\big) - M_2$, maka

$$q_1(t)y\big(t - \tau_1(t)\big) = q_1(t)\big[u\big(t - \tau_1(t) - M_1\big) - M_2\big].$$

Dari persamaan (2.8) diperoleh

$$q_1(t)y\big(t - \tau_1(t)\big) \le q_2(t)u\big(t - \tau_2(t)\big), \qquad (2.9)$$

untuk setiap $t > t_3$. Jika pertidaksamaan (2.9) diintegral, maka diperoleh

$$\int_t^\infty q_1(s)y\big(t - \tau_1(s)\big)ds \le \int_t^\infty q_2(s)u\big(t - \tau_2(s)\big)ds. \qquad (2.10)$$

Dari pertidaksamaan (2.7), maka pertidaksamaan (2.10) menjadi

$$\int_t^{\infty} q_1(s)y(t-\tau_1(s))ds \le \int_t^{\infty} q_2(s)u(t-\tau_2(s))ds \le u'(t) = u'(t-M_1) = y'(t),$$

untuk setiap $t > t_3$. Berdasarkan Lemma (2.4.3), maka persamaan (2.3) mempunyai solusi positif, dengan kata lain persamaan (2.3) *non-oscillatory*.

Bila $\tau_1(t) = 0$ dan $\tau_2(t) = \tau$ dengan $\tau > 0,$ maka persamaan (2.3) adalah persamaan diferensial *non-delay* dan persamaan (2.4) adalah persamaan diferensial *delay*. Dengan demikian, teorema (2.5.1) menunjukkan bahwa konstanta *delay* yang disimbolkan τ tidak memberikan efek pada eksistensi sifat *oscillatory* kedua persamaan diferensial tersebut. Jadi, bila solusi persamaan diferensial *non-delay* bersifat *oscillatory*, maka demikian pula halnya dengan solusi persamaan diferensial *delay*.

2.6 Persamaan Diferensial Euler Versi Riemann-Weber

Persamaan diferensial versi Riemann-Weber secara umum dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{d^2y}{dt} + \frac{1}{4t^2}y(t) + \frac{\delta}{(t\ln t)^2}y(ct) = 0, t > 0, \tag{2.11}$$

dengan δ dan c adalah parameter yang memenuhi kondisi $\delta > 0$ dan $0 < c \le 1$. Jika $0 < c < 1$, maka persamaan (2.11) disebut persamaan diferensial versi Riemann-Weber *delay*. Sedangkan bila c=1, maka persamaan (2.11) disebut persamaan diferensial versi Riemann-Weber *non-delay*, atau dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{(\ln t)^2}\right)y(t) = 0\,,\ t > 0, \tag{2.12}$$

dengan δ adalah parameter yang memenuhi kondisi $\delta > 0$.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Penyelesaian Persamaan Diferensial Euler versi Riemann-Weber *Non-Delay*

Perhatikan Persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay* (2.12).

Dimisalkan $s = \ln t$ atau $t = e^s$, maka

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t}\frac{dy}{ds} = \frac{1}{e^s}\frac{dy}{ds} = e^{-s}\frac{dy}{ds}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left(-e^{-s}\frac{dy}{ds} + e^{-s}\frac{d^2y}{ds^2}\right)e^{-s}$$
$$= \left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\right)e^{-2s}.$$

Jika $\frac{d^2y}{dt^2}$ disubstitusikan ke persamaan (2.12), diperoleh

$$\left(\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\right)e^{-2s} + \frac{1}{e^{2s}}\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{s^2}\right)y(s) = 0$$

yang ekivalen dengan

$$\left[\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{s^2}\right)y(s)\right]e^{-2s} = 0. \qquad (3.1)$$

Karena $e^{-2s} \neq 0$, maka persamaan (3.1) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} + \frac{1}{4}y(s) + \frac{\delta}{s^2}y(s) = 0. \qquad (3.2)$$

Dimisalkan $x(s) = y(s)e^{-\frac{s}{2}}$, maka

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{ds}e^{-\frac{s}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{s}{2}}y(s) = \left(\frac{dy}{ds} - \frac{1}{2}y(s)\right)e^{-\frac{s}{2}}$$

dan

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=\frac{d\left[\left(\frac{dy}{ds}-\frac{1}{2}y(s)\right)e^{-\frac{s}{2}}\right]}{ds}$$

$$=\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{2}\frac{dy}{ds}\right)e^{-\frac{s}{2}}+\left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{s}{2}}\right)\left(\frac{dy}{ds}-\frac{1}{2}y(s)\right)$$

$$=\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{1}{2}\frac{dy}{ds}-\frac{1}{2}\frac{dy}{ds}+\frac{1}{4}y(s)\right)e^{-\frac{s}{2}}=\left(\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}+\frac{1}{4}y(s)\right)e^{-\frac{s}{2}}$$

atau $\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}+\frac{1}{4}y(s)=\frac{d^2x}{ds^2}e^{-\frac{s}{2}}.$

Jika $\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}+\frac{1}{4}y(s)=\frac{d^2x}{ds^2}e^{-\frac{s}{2}}$ disubstitusikan ke persamaan (3.2), maka diperoleh persamaan diferensial berbentuk

$$\frac{d^2x}{ds^2}e^{-\frac{s}{2}}+\frac{\delta}{s^2}x(s)e^{-\frac{s}{2}}=0,$$

yang ekivalen dengan

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\delta}{s^2}x(s)\right)e^{-\frac{s}{2}}=0. \qquad (3.3)$$

Mengingat $e^{-\frac{s}{2}}\neq 0,$ maka persamaan (3.3) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\delta}{s^2}x(s)=0 \qquad (3.4)$$

Dimisalkan $u=\ln s$ maka $s=e^u$, dan $\frac{du}{ds}=\frac{1}{s}=\frac{1}{e^u}=e^{-u}$.

Dengan demikian

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{du}\frac{du}{ds}=\frac{dx}{du}\frac{1}{s}=\frac{dx}{du}e^{-u},$$

dan

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{ds}=\frac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{du}\frac{du}{ds}=\frac{d\left(\frac{dx}{du}e^{-u}\right)}{du}\frac{du}{ds}$$
$$=\left(\frac{d^2x}{du^2}e^{-u}-\frac{dx}{du}e^{-u}\right)e^{-u}=\left(\frac{d^2x}{du^2}-\frac{dx}{du}\right)e^{-2u}.$$

Sebagai akibatnya, persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai

$$\left(\frac{d^2x}{du^2}-\frac{dx}{du}\right)e^{-2u}+\delta\, x(u)\, e^{-2u}=0\,. \tag{3.5}$$

Karena $e^{-2u}\neq 0,$ maka persamaan (3.5) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2x}{du^2}-\frac{dx}{du}+\delta x(u)=0. \tag{3.6}$$

Dimisalkan solusi persamaan (3.6) adalah $x=Ae^{Ku}$, maka $\frac{dx}{du}=AKe^{Ku}$ dan $\frac{d^2x}{du}=AK^2e^{Ku}$. Substitusikan x, $\frac{dx}{du}$ dan $\frac{d^2x}{du^2}$ ke persamaan (3.6), maka akan dihasilkan persamaan karakteristik $K^2-K+\delta=0.$ Dengan akar-akar persamaan karakteristik sebagai berikut

$$K_1=\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2} \text{ dan } K_2=\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}.$$

Berdasarkan nilai K_1 dan K_2 yang diperoleh, terdapat tiga kemungkinan nilai δ , yaitu $\delta=\frac{1}{4}$, $\delta<\frac{1}{4}$ atau $\delta>\frac{1}{4}$.

Bila $\delta<\frac{1}{4}$, maka $K_1=\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}$ dan $K_2=\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}$, sehingga dihasilkan solusi

$$x(u)=A_1e^{\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}u}+A_2e^{\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}u}.$$

Karena $u=\ln s$, maka

$$x(s) = A_1 e^{\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}\ln s} + A_2 e^{\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}\ln s} = A_1 s^{\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}} + A_2 s^{\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}}.$$

Mengingat $y(s) = x(s)e^{\frac{s}{2}}$, maka dapat ditulis

$$y(s) = \left(A_1 s^{\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}} + A_2 s^{\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}} \right) e^{\frac{s}{2}}.$$

Karena $s = \ln t$, maka

$$y(t) = \left(A_1 (\ln t)^{\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}} + A_2 (\ln t)^{\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}} \right) e^{\frac{\ln t}{2}} = \left(A_1 (\ln t)^{\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}} + A_2 (\ln t)^{\frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}} \right) t^{\frac{1}{2}}.$$

Misalkan $z = \dfrac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}$ dan $1 - z = \dfrac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}$, maka $y(t)$ dapat ditulis sebagai

$$y(t) = \left(A_1 (\ln t)^z + A_2 (\ln t)^{1-z} \right) t^{\frac{1}{2}} = \left(A_1 (\ln t)^z + A_2 (\ln t)^{1-z} \right) \sqrt{t}\,. \qquad (3.7)$$

Jadi untuk $\delta < \dfrac{1}{4}$, persamaan (3.7) adalah solusi persamaan (2.12).

Bila $\delta = \dfrac{1}{4}$, maka diperoleh $K_1 = K_2 = \dfrac{1}{2}$, sehingga

$$x(u) = A_3 u e^{\frac{1}{2}u} + A_4 e^{\frac{1}{2}u}.$$

Karena $u = \ln s$, maka

$$x(s) = A_3 \ln s\, e^{\frac{\ln s}{2}} + A_4 e^{\frac{\ln s}{2}} = \left(A_3 \ln s + A_4 \right) s^{\frac{1}{2}}.$$

Mengingat $y(s) = x(s)e^{\frac{s}{2}}$, maka dapat ditulis

$$y(s) = \left(A_3 \ln s + A_4 \right) s^{\frac{1}{2}} e^{\frac{s}{2}}.$$

Karena $s = \ln t$, maka

$$y(t) = \left\{ A_3 \ln(\ln t) + A_4 \right\} (\ln t)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\ln t}{2}} = \left\{ A_3 \ln(\ln t) + A_4 \right\} (\ln t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ A_3 \ln(\ln t) + A_4 \right\} (t \ln t)^{\frac{1}{2}} = \left\{ A_3 \ln(\ln t) + A_4 \right\} \sqrt{(t \ln t)}\,. \qquad (3.8)$$

Jadi, untuk $\delta = \dfrac{1}{4}$, persamaan (3.8) adalah solusi persamaan (2.12).

Bila $\delta > \frac{1}{4}$, maka $K_1 = \frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}$ dan $K_2 = \frac{1-\sqrt{1-4\delta}}{2}$. Karena $\delta > \frac{1}{4}$, maka diperoleh K_1, K_2 adalah bilangan kompleks. Misalkan $m = 4\delta - 1$, maka $K_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-m}}{2} = \frac{1}{2} \pm ni$, dengan $n = \frac{\sqrt{m}}{2}$.

Dengan demikian solusi persamaan (3.6) adalah

$$x(u) = A_5 e^{\frac{1}{2}u} \cos nu + A_6 e^{\frac{1}{2}u} \sin nu .$$

Karena $u = \ln s$, maka

$$\begin{aligned} x(s) &= A_5 e^{\frac{\ln s}{2}} \cos(n \ln s) + A_6 e^{\frac{\ln s}{2}} \sin(n \ln s) \\ &= A_5 s^{\frac{1}{2}} \cos(n \ln s) + A_6 s^{\frac{1}{2}} \sin(n \ln s) \\ &= \left(A_5 \cos(n \ln s) + A_6 \sin(n \ln s)\right) s^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Mengingat $y(s) = x(s) e^{\frac{s}{2}}$, maka dapat ditulis

$$y(s) = \left(A_5 \cos(n \ln s) + A_6 \sin(n \ln s)\right) s^{\frac{1}{2}} e^{\frac{s}{2}} .$$

Karena $s = \ln t$, maka

$$\begin{aligned} y(t) &= \left[A_5 \cos\left(n \ln(\ln t)\right) + A_6 \sin\left(n \ln(\ln t)\right)\right] (\ln t)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\ln t}{2}} \\ &= \left[A_5 \cos\left(n \ln(\ln t)\right) + A_6 \sin\left(n \ln(\ln t)\right)\right] (\ln t)^{\frac{1}{2}} t^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[A_5 \cos\left(n \ln(\ln t)\right) + A_6 \sin\left(n \ln(\ln t)\right)\right] \sqrt{t \ln t} . \qquad (3.9) \end{aligned}$$

Jadi untuk $\delta > \frac{1}{4}$, persamaan (3.9) adalah solusi persamaan (2.12).

Jika dirangkum, maka solusi umum persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay* adalah

$$y(t) = \begin{cases} \left(A_1 (\ln t)^z + A_2 (\ln t)^{1-z}\right)\sqrt{t}, & \text{jika } \delta < \frac{1}{4} \\ \left(A_3 \ln(\ln t) + A_4\right)\sqrt{(t \ln t)}, & \text{jika } \delta = \frac{1}{4} \\ \left[A_5 \cos\left(n \ln(\ln t)\right) + A_6 \sin\left(n \ln(\ln t)\right)\right]\sqrt{t \ln t}, & \text{jika } \delta > \frac{1}{4} \end{cases} \qquad (3.10)$$

dengan A_i , (i=1,2,3,4,5,6) adalah konstanta sembarang,

$n=\dfrac{\sqrt{4\delta-1}}{2}$ dan $z=\dfrac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}$.

3.2 *Oscillatory* pada Solusi Persamaan Diferensial Euler Versi Riemann-Weber *Non-delay*

Pada sub-bab sebelumnya telah diperoleh tiga bentuk solusi persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay* yang dibedakan oleh nilai parameter δ. Dalam sub-bab ini akan diselidiki apakah ketiga bentuk tersebut bersifat *oscillatory*. Dengan cara memeriksa banyaknya nilai *t* yang membuat *y(t)* bernilai nol.

Untuk $\delta<\dfrac{1}{4}$, diperoleh solusi $y(t)=\left(A_1(\ln t)^z+A_2(\ln t)^{1-z}\right)\sqrt{t}$.

Agar $y(t)=0$ haruslah

$$\left(A_1(\ln t)^z+A_2(\ln t)^{1-z}\right)\sqrt{t}=0$$

$$A_1(\ln t)^z+A_2(\ln t)^{1-z}=0$$

$$A_1(\ln t)^z=-A_2(\ln t)^{1-z}$$

$$\frac{(\ln t)^z}{(\ln t)^{1-z}}=\frac{-A_2}{A_1}$$

$$(\ln t)^{2z-1}=-\frac{A_2}{A_1}$$

karena $z=\dfrac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}$, maka dapat ditulis

$$(\ln t)^{2\left(\frac{1+\sqrt{1-4\delta}}{2}\right)-1}=-\frac{A_2}{A_1}$$

$$(\ln t)^{1+\sqrt{1-4\delta}-1}=-\frac{A_2}{A_1}$$

$$(\ln t)^{\sqrt{1-4\delta}}=-\frac{A_2}{A_1}$$

$$\ln(\ln t)^{\sqrt{1-4\delta}}=\ln\left|-\frac{A_2}{A_1}\right|$$

$$\sqrt{1-4\delta}\left(\ln(\ln t)\right)=\ln\left|-\frac{A_2}{A_1}\right|$$

$$\ln\left(\ln t\right)=\frac{\ln\left|-\frac{A_2}{A_1}\right|}{\sqrt{1-4\delta}}.$$

Misal $B_1=\dfrac{\ln\left|-\frac{A_2}{A_1}\right|}{\sqrt{1-4\delta}}$, maka

$$\ln\left(\ln t\right)=B_1$$

$$\ln t=e^{B_1}.$$

Sehingga diperoleh $t=e^{e^{B_1}}=B_2$. Jadi himpunan pembuat nol persamaan (3.7) adalah $\{t=B_2\}$, yang merupakan himpunan berhingga. Sesuai dengan definisi *oscillatory*, untuk $\delta<\frac{1}{4}$ solusi persamaan (2.12) bersifat *non -oscillatory*.

Untuk $\delta=\frac{1}{4}$, diperoleh solusi $y(t)=\left(A_3\ln(\ln t)+A_4\right)\sqrt{(t\ln t)}$.

Agar $y(t)=0$ haruslah

$$\left(A_3\ln(\ln t)+A_4\right)\sqrt{(t\ln t)}=0$$

$$A_3\ln(\ln t)+A_4=0,$$

dengan demikian $\ln(\ln t)=-\frac{A_4}{A_3}$. Misal $B_3=-\frac{A_4}{A_3}$, maka $\ln t=e^{B_3}$, yang mengakibatkan $t=e^{e^{B_3}}=B_4$. Jadi himpunan pembuat nol persamaan (3.8) adalah $\{t=B_4\}$, yang merupakan himpunan berhingga. Sesuai dengan definisi *oscillatory*, untuk kasus $\delta=\frac{1}{4}$ solusi persamaan (2.12) bersifat *non-oscillatory*.

Untuk $\delta>\frac{1}{4}$, diperoleh solusi

$$y(t)=\left[A_5\cos\left(n\ln(\ln t)\right)+A_6\sin\left(n\ln(\ln t)\right)\right]\sqrt{t\ln t}.$$

Agar $y(t)=0$ haruslah

$$\sqrt{t\ln t}\left[A_5\cos\left(n\ln(\ln t)\right)+A_6\sin\left(n\ln(\ln t)\right)\right]=0$$

$$A_5 \cos\left(n \ln(\ln\ t)\right) + A_6 \sin\left(n \ln(\ln\ t)\right) = 0$$

$$\frac{\sin\left(n \ln(\ln t)\right)}{\cos\left(n \ln(\ln t)\right)} = -\frac{A_5}{A_6}$$

$$\tan\left(n \ln(\ln t)\right) = -\frac{A_5}{A_6}$$

$$n \ln(\ln\ t) = \arctan\left(-\frac{A_5}{A_6}\right) + c\pi \text{, untuk } c=0,1,2...$$

$$\ln(\ln t) = \frac{\arctan\left(-\frac{A_5}{A_6}\right)}{n} + \frac{c\pi}{n} \text{, untuk } c=0,1,2...$$

$$(\ln t) = \exp\left(\frac{\arctan\left(-\frac{A_5}{A_6}\right)}{n} + \frac{c\pi}{n}\right) \text{, untuk } c=0,1,2...$$

$$t = e^{f(c)} \text{, dengan } f(c) = \exp\left(\frac{\arctan\left(-\frac{A_5}{A_6}\right) + \frac{c\pi}{n}}{n}\right) \text{ untuk } c=0,1,2...$$

Jadi himpunan pembuat nol persamaan (3.9) adalah $\{t \mid t = e^{f(c)}, c = 0,1,2,\ldots\}$, yang merupakan himpunan tak berhingga. Sesuai dengan definisi *oscillatory*, untuk kasus $\delta > \frac{1}{4}$ solusi persamaan (2.12) bersifat *oscillatory*.

3.3 *Oscillatory* pada Solusi Persamaan Diferensial Euler Versi Riemann-Weber *Delay*

Persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *delay* tidak sederhana atau mudah jika diselesaikan secara langsung, sehingga diperlukan teorema untuk menyelesaikannya.

Teorema 3.3.1

Semua solusi *non-trivial* persamaan (2.11) bersifat *oscillatory* jika $\delta > \dfrac{1}{4\sqrt{c}}$.

Bukti:

Misal $s = \ln(t)$, $r = -\ln c$, dan $u(s) = y(e^s) = y(t)$, maka $t = e^s$ dan $c = e^{-r}$. Dengan demikian $y(ct) = y(e^{s-r}) = u(s-r)$, dan

$$\frac{dy}{dt} = \frac{du}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{du}{ds}\frac{1}{t} = \frac{du}{ds}\frac{1}{e^s} = \frac{du}{ds}e^{-s}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dt}\right)}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\left(\dfrac{du}{ds}e^{-s}\right)}{ds}\frac{ds}{dt} = \left(\frac{d^2u}{ds^2}e^{-s} + (-e^{-s})\frac{du}{ds}\right)e^{-s}$$

$$= \left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right)e^{-2s}.$$

Substitusikan *y(ct)* dan $\dfrac{d^2y}{dt^2}$ ke persamaan (2.11), untuk mendapatkan

$$\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds}\right)e^{-2s} + \frac{1}{4e^{2s}}u(s) + \frac{\delta}{e^{2s}s^2}u(s-r) = 0$$

yang ekivalen dengan

$$\left(\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds} + \frac{1}{4}u(s) + \frac{\delta}{s^2}u(s-r)\right)e^{-2s} = 0. \qquad (3.11)$$

Karena $e^{-2s} \neq 0$, maka persamaan (3.11) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2u}{ds^2} - \frac{du}{ds} + \frac{1}{4}u(s) + \frac{\delta}{s^2}u(s-r) = 0\,. \qquad (3.12)$$

Misalkan $u(s) = x(s)e^{\frac{s}{2}}$, maka

$$\frac{du}{ds} = \frac{dx}{ds}e^{\frac{s}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{s}{2}}x(s) = \left(\frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}$$

dan

$$\frac{d^2u}{ds^2}=\frac{d\left(\frac{du}{ds}\right)}{ds}=\frac{d\left(\left(\frac{dx}{ds}+\frac{1}{2}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}\right)}{ds}$$

$$=\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{ds}\right)e^{\frac{s}{2}}+\left(\frac{1}{2}e^{\frac{s}{2}}\right)\left(\frac{dx}{ds}+\frac{1}{2}x(s)\right)$$

$$=\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{1}{2}\frac{dx}{ds}+\frac{1}{2}\frac{dx}{ds}+\frac{1}{4}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}$$

$$=\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dx}{ds}+\frac{1}{4}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}.$$

Jadi $\frac{d^2u}{ds^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dx}{ds}+\frac{1}{4}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}$, $\frac{du}{ds}=\left(\frac{dx}{ds}+\frac{1}{2}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}$

dan $u(s)=x(s)e^{\frac{s}{2}}$. Akibatnya persamaan (3.12) dapat ditulis sebagai

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dx}{ds}+\frac{1}{4}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}-\left(\frac{dx}{ds}+\frac{1}{2}x(s)\right)e^{\frac{s}{2}}+\frac{1}{4}x(s)e^{\frac{s}{2}}+\frac{\delta}{s^2}x(s-r)e^{\frac{(s-r)}{2}}=0$$

yang ekivalen dengan

$$\frac{d^2x}{ds^2}e^{\frac{s}{2}}+\frac{\delta e^{-\frac{r}{2}}}{s^2}x(s-r)e^{\frac{s}{2}}=0,$$

yang ekivalen juga dengan

$$\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\delta e^{-\frac{r}{2}}}{s^2}x(s-r)\right)e^{\frac{s}{2}}=0. \qquad (3.13)$$

Mengingat $e^{s/2}\neq 0$, maka persamaan (3.13) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{\delta e^{-\frac{r}{2}}}{s^2}x(s-r)=0. \qquad (3.14)$$

Misal $w = \delta e^{-\frac{r}{2}}$, maka persamaan (3.14) dapat ditulis menjadi

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{w}{s^2}x(s-r) = 0 \tag{3.15}$$

Dengan memanfaatkan teorema (2.5.1), jika solusi persamaan (3.4) bersifat *oscillatory*, maka solusi persamaan (3.15) bersifat *oscillatory*. Jika solusi persamaan (3.4) bersifat *oscillatory* pada $\delta > \frac{1}{4}$, maka solusi persamaan (3.15) bersifat *oscillatory* pada $w > \frac{1}{4}$.

Sehingga $w = \delta e^{-\frac{r}{2}} > \frac{1}{4}$. Karena $r = -\ln c$, maka

$$\delta e^{-\frac{r}{2}} = \delta e^{\frac{\ln c}{2}} = \delta\sqrt{c} > \frac{1}{4},$$

yang ekivalen dengan

$$\delta > \frac{1}{4\sqrt{c}}.$$

Berdasarkan teorema (3.2.1), diperoleh bahwa solusi persamaan (2.11) bersifat *oscillatory* untuk $\delta > \frac{1}{4\sqrt{c}}$.

BAB IV
KESIMPULAN

Dari analisis yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Solusi *non-trivial* persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *non-delay* bersifat *oscillatory* jika dan hanya jika $\delta > \frac{1}{4}$.
2. Solusi *non-trivial* persamaan diferensial Euler versi Riemann-Weber *delay* bersifat *oscillatory* jika dan hanya jika $\delta > \frac{1}{4\sqrt{c}}$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. and D. R. Sherbert. 1999. *Introduction to Real Analysis Third Edition.* New York : John Wiley and Sons, Inc.

Brands, J. J. A. M. 1978. *Oscillation Theorems for Second-Order Functional Differential Equtions*: J Math. Appl.. 54-56.

Edwards, C. H. and D. E. Penney. 2001. *Differential Equations and Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Finizio, N. and G. Ladas. 1989. *Ordinary Differential Equation with Modern Applications Second Edition*: Waddsworth Publishing Company.

Nagle, R. K. and E. B. Saff. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problem*: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Ross, S. L. 1984. *Differential Equation*. New York: John Willey and Sons, Inc.

Sugie, J. and M. Iwasaki. 2000. *Oscillation of the Riemann-Weber version of Euler Differential Equations with Delay*. Tokyo: Georgian Mathematical Journal. 577-584.