PENERAPAN ALGORITMA BROWN DALAM PENENTUAN STRATEGI OPTIMAL PADA TEORI PERMAINAN

SKRIPSI

Oleh:
DEDY WAHYUDI
0610940010-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

PENERAPAN ALGORITMA BROWN DALAM PENENTUAN STRATEGI OPTIMAL PADA TEORI PERMAINAN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
DEDY WAHYUDI
0610940010-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENERAPAN ALGORITMA BROWN DALAM PENENTUAN STRATEGI OPTIMAL PADA TEORI PERMAINAN

Oleh:
DEDY WAHYUDI
0610940010-94

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 29 Desember 2010
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Drs. Marsudi, MS	**Prof. Dr. Marjono, M.Phil**
NIP. 196101171988021002	**NIP.196211161988031004**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M. Sc
NIP. 196908071994121001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Dedy Wahyudi
NIM	: 0610940010-94
Jurusan	: Matematika
Penulis Skripsi berjudul	: Penerapan Algoritma Brown dalam Penentuan Strategi Optimal pada Teori Permainan

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 29 Desember 2010
Yang menyatakan,

(Dedy Wahyudi)
NIM. 0610940010-94

PENERAPAN ALGORITMA BROWN DALAM PENENTUAN STRATEGI OPTIMAL PADA TEORI PERMAINAN

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas penentuan strategi optimal pada permainan menggunakan algoritma Brown. Algoritma ini mampu digunakan untuk menyelesaikan matriks *payoff* berorde besar, yaitu matriks yang ordenya di atas 3×3, $2 \times n$, dan $m \times 2$, di mana $n, m \geq 3$. Kasus-kasus yang akan diselesaikan diambil dari tiga bidang yang berbeda, yaitu ekonomi, politik, dan militer. Kasus-kasus tersebut diselesaikan menggunakan program Delphi. Solusi optimalnya sangat bagus (selisih antara batas atas dan batas bawah sangat kecil) pada iterasi 500-1000. Secara umum, algoritma ini akan menghasilkan solusi optimal yang sama meskipun dipilih baris yang berbeda pada awal permainan.

Kata kunci : teori permainan, strategi optimal, matriks *payoff*, algoritma Brown, iterasi.

APPLICATION OF BROWN ALGORITHM FOR OPTIMUM STRATEGY DECISION IN GAME THEORY

ABSTRACT

Determining optimal strategy of the game by using Brown algorithm is discussed in this final project. This algorithm can be used to solve large order pay-off matrix, i.e the matrix by order more than 3×3, $2\times n$, and $m\times2$, where $n,m\geq3$. The cases are solved by using the algorithm taken from three different fields, such as economics, politics, and military. The cases are solved by using Delphi program. The optimal solution is really good (the difference of upper bound and lower bound is very small) in 500-1000 iterations. Generally, this algorithm will yield the same optimal solution although choose different row in initial game.

Keywords : game theory, optimal strategy, pay-off matrix, brown algorithm, iterations.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. Marsudi, MS, selaku pembimbing I sekaligus dosen penasehat akademik atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Prof. Dr. Marjono, M.Phil, selaku pembimbing II sekaligus Dekan Fakultas MIPA atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc., Drs. Imam Nurhadi P, MT dan Syaiful Anam, S.Si., MT selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Ayah, Ibunda, adikku tersayang dan sahabat terdekatku atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
6. Teman-teman Matematika Angkatan 2006 atas kebersamaan dan kekompakan selama ini.
7. Keluarga dan teman-teman kos bendungan sigura-gura V/26 atas kebersamaan, kekompakan dan bantuan yang telah diberikan.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran melalui email penulis dedy.math@gmail.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 29 Desember 2010

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori permainan adalah bagian dari matematika yang pertama kali dikemukakan oleh seorang ahli matematika Perancis yang bernama Emile Borel pada tahun 1921. Kemudian, dikembangkan lebih lanjut oleh Oskar Morgenstern dan John Von Neumann. Teori permainan merupakan suatu model matematika yang digunakan dalam situasi konflik atau persaingan antara berbagai kepentingan yang saling berhadapan sebagai pesaing. Teori ini dikembangkan untuk menganalisis proses pengambilan keputusan dari situasi-situasi persaingan yang berbeda-beda dan melibatkan dua kepentingan atau lebih. Misalnya, para manajer pemasaran yang bersaing dalam memperebutkan pangsa pasar, para pimpinan dan manajemen yang terlibat dalam penawaran kolektif, para jendral tentara yang ditugaskan dalam perencanaan dan pelaksanaan perang, dan para pemain catur, yang semua terlibat dalam usaha untuk memenangkan permainan (Subagyo *dkk*, 1990).

Dalam permainan, peserta adalah pesaing. Keuntungan untuk pemain yang satu merupakan kerugian untuk pemain yang lain. Setiap peserta memilih dan melaksanakan strategi-strateginya yang di percaya akan menghasilkan kemenangan. Diasumsikan setiap pemain mempunyai kemampuan untuk mengambil keputusan secara bebas dan rasional. Sedangkan untuk model-model permainan dapat dibedakan berdasarkan jumlah pemain, jumlah keuntungan atau kerugian, dan jumlah strategi yang digunakan dalam permainan. Apabila jumlah pemain adalah dua, permainan disebut sebagai permainan dua pemain. Begitu juga, bila jumlah pemain adalah N (dengan $N \geq 3$), permainan disebut permainan N pemain. Apabila jumlah keuntungan dan kerugian adalah nol, disebut permainan jumlah nol atau jumlah konstan. Sebaliknya bila tidak sama dengan nol, permainan disebut permainan bukan jumlah nol (Aminudin, 2005).

Pada dasarnya pemecahan masalah teori permainan dapat dilakukan dengan metode grafik, metode analitis, metode aljabar matriks atau metode pemrograman linier. Pada skripsi ini akan dibahas penyelesaian teori permainan menggunakan metode khusus yaitu algoritma Brown. Algoritma Brown merupakan salah satu metode yang mampu menyelesaikan permasalahan permainan dalam bentuk matriks *payoff* dengan orde besar yaitu di atas 3×3, $2\times n$ dan $m\times 2$, di mana $n,m\geq 3$ (Gillet, 1976). Ide dasar algoritma Brown adalah bahwa hasil pemilihan strategi yang sekarang merupakan pedoman bagi pemilihan strategi selanjutnya. Software yang digunakan untuk membantu menyelesaikan masalah dengan algoritma Brown pada skripsi ini adalah program Delphi.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, pokok permasalahan yang dibahas dalam penulisan skripsi ini adalah bagaimana menentukan strategi optimal bagi kedua pemain dalam teori permainan $m\times n$ menggunakan algoritma Brown dengan menyelesaikan beberapa kasus di bidang ekonomi, bidang politik dan bidang militer.

1.3 Batasan Masalah

Skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Jumlah pemain diasumsikan hanya dua pemain dengan jumlah nol (keuntungan satu pihak sama dengan kerugian pihak lainnya)
2. Strategi yang digunakan adalah strategi permainan campuran dengan algoritma Brown.

1.4 Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah menentukan strategi optimal bagi kedua pemain atau pesaing dalam suatu teori permainan mxn menggunakan algoritma Brown dengan menyelesaikan beberapa kasus di bidang ekonomi, bidang politik dan bidang militer.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Matriks

Definisi 2.1.1 Matriks adalah susunan bilangan berbentuk persegi panjang, dinyatakan dengan huruf besar sedangkan unsur-unsurnya dinyatakan dengan huruf kecil.

Contoh 2.1 Diberikan matriks A sebagai berikut:

$$A = \left[a_{ij}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriks A di atas terdiri atas m baris dan n kolom, dikatakan A berukuran $m \times n$ dan ditulis $A_{m\times n}$ (Sutawidjaja *dkk*, 2005).

Definisi 2.1.2 Matriks kolom adalah matriks yang hanya memiliki satu kolom, dinotasikan dengan $a_{m\times 1}$. **Matriks baris** adalah matriks yang hanya memiliki satu baris, dinotasikan dengan $a_{1\times n}$ (Anton, 1991).

Contoh 2.2

$$a_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \qquad a_{1\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

2.2 Teori Permainan

Teori permainan membahas perilaku dua orang atau lebih yang sedang terlibat dalam adu strategi di mana pemilihan strategi salah satu pemain akan mempengaruhi pemilihan strategi pemain yang lain hingga masing-masing pemain menemukan pilihan strategi yang akan memaksimumkan kesejahteraan mereka. Secara umum situasi ini dapat ditampilkan ke dalam matriks *payoff* pada Tabel 2.1.

Dalam teori permainan, dua pembuat keputusan yang saling berlawanan mengetahui atau paling sedikit mempunyai informasi mengenai perilaku lawannya dan mengetahui pula nilai permainannya. Di samping itu, sebagai layaknya sebuah permainan atau persaingan, seorang pemain akan selalu memposisikan dirinya sebagai pihak yang harus memenangkan permainan. Oleh karena itu, dalam teori permainan, pemain I diposisikan sebagai pemain yang akan memaksimumkan kemenangannya dan pemain II diposisikan sebagai pemain yang akan meminimumkan kekalahan. Secara rasional, masing-masing pemain akan bereaksi untuk memilih strategi yang paling menguntungkan. Dalam hal ini, para pembuat keputusan mengetahui strategi yang akan diambil oleh lawan, demikian pula kemungkinan nilai hasil keputusan atau *payoff* untuk setiap strategi yang akan diambil (Siswanto, 2007).

Tabel 2.1 Matriks *Payoff* Dua Pemain Jumlah Nol

Pemain I	**Pemain II**					
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n
a_1	p_{12}	p_{12}	...	p_{1j}	...	p_{1n}
a_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2j}	...	p_{2n}
$\vdots$	....					
a_i	p_{i1}	p_{i2}	...	P_{ij}	...	p_{in}
$\vdots$	....					
a_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mj}	...	p_{mn}

Keterangan:

a_i : Strategi yang dipilih Pemain I (pemain baris)

b_j : Strategi yang dipilih Pemain II (pemain kolom)

p_{ij} : Payoff dari pemain II kepada pemain I jika pemain I memilih strategi a_i dan pemain II memilih strategi b_j

2.3 Unsur-Unsur Dasar Teori Permainan

Menurut Subagyo *dkk* (1990), unsur-unsur dasar teori permainan adalah sebagai berikut :

1. Angka-angka dalam matriks *payoff*, menunjukkan hasil dari strategi-strategi permainan yang berbeda-beda. Dalam permainan dua pemain jumlah-nol, bilangan-bilangan positif menunjukkan keuntungan bagi pemain baris, dan merupakan kerugian bagi pemain kolom.
2. Suatu strategi permainan adalah rangkaian kegiatan atau rencana yang menyeluruh dari seorang pemain, sebagai reaksi atas aksi yang mungkin dilakukan oleh pemain lain yang menjadi pesaingnya. Dalam hal ini dianggap bahwa suatu strategi tidak dapat dirusak oleh para pesaing atau faktor lain.
3. Aturan-aturan permainan menggambarkan kerangka dengan mana para pemain memilih strategi mereka.
4. Nilai permainan adalah hasil yang diperkirakan per permainan atau *payoff* rata-rata dari sepanjang rangkaian permainan, di mana kedua pemain mengikuti atau mempergunakan strategi mereka yang paling baik atau optimal.
5. Suatu strategi dikatakan dominan bila setiap *payoff* dalam strategi adalah superior terhadap setiap *payoff* yang berhubungan dalam suatu strategi alternatif.
6. Suatu strategi optimal adalah rangkaian kegiatan, atau rencana yang menyeluruh, yang menyebabkan seorang pemain dalam posisi yang paling menguntungkan tanpa memperhatikan kegiatan-kegiatan para pesaingnya.
7. Tujuan dari model permainan adalah mengidentifikasikan strategi atau rencana optimal untuk setiap pemain.

2.4 Sifat-sifat Permainan

Dalam suatu permainan, ada beberapa sifat yang harus dipenuhi sehingga permainan tersebut dapat berjalan dengan baik dan lancar. Sifat-sifat tersebut adalah sebagai berikut (Hasan, 2004).

1. Jumlah pemain terbatas.
2. Untuk setiap pemain terdapat sejumlah kemungkinan yang terbatas.
3. Terdapat pertentangan kepentingan antara pemain.

4. Aturan permainan untuk mengatur di dalam memilih tindakan diketahui oleh setiap pemain.
5. Hasil seluruh kombinasi tindakan yang mungkin dilakukan berupa bilangan positif, negatif atau nol.

2.5 Kriteria Minimaks dan Maksimin

Menurut Gillet (1976), setiap pemain tahu bahwa pemain yang lain memiliki tujuan yang sama, yakni untuk memaksimumkan nilai *payoff* dari pemain lain. Oleh sebab itu, setiap pemain seharusnya memutuskan untuk menggunakan kriteria minimaks yang bersifat konservatif dalam menentukan suatu tindakan. Pemain I memeriksa setiap baris pada matriks *payoff* dan memilih elemen minimum pada tiap baris, dan selanjutnya memilih nilai maksimum dari elemen-elemen minimum, katakanlah sebagai p_{rs}. Secara matematis dirumuskan

$$\underline{v} = p_{rs} = \max_i \left[\min_j \left(p_{ij} \right) \right]$$
$$\text{untuk } i = 1, 2, \ldots, m \text{ dan } j = 1, 2, \ldots, n$$

di mana m merupakan banyaknya strategi yang dipilih pemain I dan n banyaknya strategi yang dipilih pemain II.

Elemen p_{rs} tersebut disebut nilai maksimin dari permainan dan keputusan untuk memainkan baris r disebut strategi murni maksimin. Sama halnya dengan pemain I, pemain II memeriksa kolom pada matriks *payoff* untuk menentukan kerugian maksimum yang akan pemain II derita manakala memainkan kolom tersebut. Lalu pemain II memutuskan untuk memainkan kolom tersebut dengan nilai terkecil dari kerugian maksimum yang ada. Misalkan

$$\overline{v} = p_{tu} = \min_j \left[\max_i \left(p_{ij} \right) \right]$$
$$\text{untuk } j = 1, 2, \ldots, n \text{ dan } i = 1, 2, \ldots, m$$

p_{tu} disebut nilai minimaks dari permainan dan keputusan untuk memainkan kolom u disebut strategi murni minimaks. Dari sini terlihat bahwa nilai minimaks $\overline{v}$ selalu lebih besar atau sama dengan nilai maksimin $\underline{v}$. Nilai $\underline{v}$ menyatakan batas bawah pada suatu jumlah yang disebut nilai permainan, dan $\overline{v}$ merupakan batas atas pada nilai permainan.

Contoh 2.3

Diberikan matriks *payoff* 3×4

$$\begin{array}{cc} & \text{Pemain B} \\ & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \text{Pemain A} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 9 & 5 \\ 6 & 5 & 7 & 18 \\ 7 & 3 & -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{array}{l} 2 \\ 5 \;\text{maksimin} \\ -4 \end{array} \\ & \begin{array}{cccc} 8 & 5 & 9 & 18 \end{array} \\ & \text{minimaks} \end{array}$$

Ketika pemain A memainkan strategi pertamanya, pemain A akan memperoleh keuntungan setidaknya sebesar min {8, 2, 9, 5} = 2 tanpa bergantung pada strategi yang dipilih pemain B. Demikian pula jika pemain A memainkan strateginya yang kedua, pemain A dijamin memperoleh setidaknya min {6, 5, 7, 18} = 5, dan jika pemain A memainkan strategi yang ketiga diperoleh setidaknya min {7, 3, 4, 10} = -4. Sebaliknya, pemain B ingin meminimumkan kerugiannya. Pemain B menyadari jika memainkan strategi murni pertamanya, pemain B akan merugi tidak lebih dari maks {8, 6, 7} = 8 tanpa bergantung pada strategi yang dipilih pemain A. Demikian pula jika pemain B memainkan strategi yang kedua, pemain B dijamin memperoleh kerugian maks {2, 5, 3} = 5, jika pemain B memainkan strategi ketiga diperoleh kerugian maks {9, 7, -4} = 9, dan jika pemain B memainkan strategi keempat maka diperoleh kerugian tidak lebih dari maks {5, 18, 10} = 18. Dari strategi-strategi yang telah dimainkan pemain A dan pemain B, diperoleh nilai maksimin dan minimaks untuk pemain A dan pemain B yaitu maks {2, 5, -4}=5 dan min {8, 5, 9, 18}=5 (Taha, 1996).

Karena pemain A bertujuan untuk memaksimumkan keuntungan, maka pemain A memilih elemen minimum tiap baris matriks *payoff* (2, 5, 4), sedangkan pemain B memilih elemen maksimum tiap kolom matriks *payoff* (8, 5, 9, 18) untuk meminimumkan kerugiannya. Sehingga dapat disimpulkan bahwa nilai minimaks matriks *payoff* akan selalu lebih besar atau sama dengan nilai maksimin matriks *payoff*nya.

2.6 Permainan Dua Pemain Jumlah Nol

Permainan dua pemain jumlah nol adalah model konflik yang paling umum dalam dunia bisnis. Disebut permainan jumlah nol karena keuntungan pemain yang satu adalah sama dengan kerugian pemain lainnya, sehingga jumlah total keuntungan dan kerugian adalah nol.

Ada dua macam permainan ini, pertama jenis permainan strategi murni dan jenis kedua adalah permainan strategi campuran (Aminudin, 2005).

2.6.1 Permainan Strategi Murni

Strategi permainan murni adalah strategi permainan di mana masing-masing pemain memiliki satu strategi optimal yang memiliki nilai permainan sama. Dalam permainan strategi murni, pemain baris mengidentifikasikan strategi optimalnya melalui aplikasi kriteria maksimin, sedangkan pemain kolom menggunakan kriteria minimaks untuk mengidentifikasikan strategi optimalnya (Subagyo *dkk*, 1990).

Dari kondisi yang mengatur kriteria minimaks, nilai minimaks (nilai atas) adalah lebih besar atau sama dengan nilai maksimin (nilai bawah). Dalam kasus di mana persamaan berlaku, yaitu, **nilai minimaks = nilai maksimin**, strategi murni yang bersangkutan disebut strategi optimal dan permainan tersebut dikatakan memiliki titik pelana (*saddle point*). Nilai permainan ini, dengan dipilihnya strategi murni yang optimal tersebut, adalah sama dengan nilai maksimin dan minimaks tersebut. Optimalitas di sini menyatakan bahwa tidak satu pun pemain tergoda untuk mengubah strateginya, karena lawannya dapat melakukan tindakan balik dengan memilih strategi lain yang memberikan hasil yang kurang menarik (Taha, 1996).

Contoh 2.4 Diberikan sebuah matriks *payoff* 2×3

$$\begin{array}{ccc} & \text{Pemain 2} & \\ \text{Pemain 1} & \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 8 & 5 & 4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \text{minimum baris} \\ & \begin{array}{ccc} 8 & 9 & 4 \end{array} & \\ & \text{Maksimum kolom} & \end{array}$$

Sehingga elemen maksimin baris adalah 4 dan elemen minimaks kolom juga 4. Jadi nilai maksimin = nilai minimaks = 4 adalah titik pelana. Dan nilai permainannya adalah 4. Artinya, pemain I mendapatkan keuntungan 4 dan pemain II mendapatkan kerugian 4.

2.6.2 Permainan Strategi Campuran

Menurut Siswanto (2007), Nilai hasil sebuah permainan ditentukan dan diketahui oleh kedua pemain atau pesaing. Jika nilai permainan itu tidak memiliki titik pelana kuda, maka masing-masing pemain tidak mungkin memilih strategi optimal yang memiliki nilai. Masing-masing pemain akan bertahan pada strategi masing-masing yang memberikan nilai terbaik di mana nilai terbaik itu berbeda untuk masing-masing pemain. Strategi permainan semacam ini dinamakan strategi permainan campuran.

Kegagalan strategi minimaks-maksimin (strategi murni), pada umumnya, untuk memberikan pemecahan optimal pada permainan telah mengarah pada gagasan penggunaan strategi campuran. Setiap pemain bukannya hanya memilih satu strategi murni, melainkan dapat memainkan semua strateginya sesuai dengan sekelompok probabilitas yang sudah ditentukan sebelumnya. Diasumsikan $x_1, x_2, ..., x_m$ dan $y_1, y_2, ..., y_n$ adalah probabilitas baris dan kolom *A* dan *B*, secara berurutan, memilih strategi murni mereka. Jadi

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$x_i \geq 0, \quad y_j \geq 0$, untuk semua *i* dan *j*.

Jadi jika p_{ij} mewakili entri ke-(i, j) dari matriks *payoff* ini, x_i dan y_j akan tampak seperti dalam matriks berikut ini:

B

		y_1	y_2	...	y_n
A	x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
	x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
	...	...	...	...	...
	x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Menurut Taha (1996), pemecahan masalah strategi campuran juga didasari oleh kriteria minimaks. Satu-satunya perbedaan adalah bahwa A memilih x_i yang memaksimumkan hasil terkecil yang diperkirakan dalam sebuah kolom, sementara B memilih y_j yang meminimumkan hasil terbesar yang diperkirakan dalam sebuah baris. Secara matematis, kriteria minimaks untuk kasus strategi campuran adalah seperti berikut ini. Pemain A memilih x_i ($x_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$) yang akan menghasilkan

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i,\ \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots,\ \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)\right\}$$

dan pemain B memilih y_j ($y_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$) yang menghasilkan

$$\min_{y_j}\left\{\max\left(\sum_{j=1}^{n} p_{1j}y_j,\ \sum_{j=1}^{n} p_{2j}y_j, \ldots,\ \sum_{j=1}^{n} p_{mj}y_j\right)\right\}$$

Nilai-nilai ini secara berturut-turut disebut sebagai nilai maksimin dan minimaks yang diperkirakan.

Seperti dalam kasus strategi murni, hubungan hasil minimaks yang diperkirakan ≥ hasil maksimin yang diperkirakan berlaku. Ketika x_i dan y_j bersesuaian dengan pemecahan optimal, persamaan berlaku dan nilai-nilai yang dihasilkan menjadi sama dengan nilai (optimal) yang diperkirakan dari permainan itu. Hasil ini disimpulkan dari teorema minimaks. Jika x_i^* dan y_j^* adalah pemecahan optimal untuk kedua pemain, setiap elemen hasil p_{ij} akan berkaitan dengan probabilitas $\left(x_i^*, y_j^*\right)$. Jadi nilai optimal yang diperkirakan dari permainan ini adalah

$$v^* = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i^* y_j^*$$

Sehingga, ketika kedua pemain menggunakan strategi optimal, pemain A dapat mengharapkan untuk memperoleh keuntungan sebesar *v* unit, dan pemain B dapat mengharapkan kerugian *v* unit.

Meskipun kita dapat mendefinisikan strategi minimaks optimal, tidaklah selalu mudah untuk mendapatkannya, atau untuk hal tersebut yakni untuk menyelidiki apakah suatu strategi optimal atau tidak, khususnya untuk permainan besar. Untuk permainan 2×2 dan 3×3 algoritma tertentu telah dikembangkan untuk menentukan strategi minimaks optimal. Demikian juga, strategi minimaks optimal untuk permainan $2 \times n$ dan $m \times 2$ dapat diperoleh menggunakan prosedur grafik. Sedangkan untuk permainan besar kita harus menggunakan pemrograman linier atau suatu prosedur berulang-ulang misalnya algoritma Brown.

2.7 Solusi Permainan 2×2

Diberikan permainan 2×2 dengan matriks *payoff*

$$\begin{array}{cc} & \text{Pemain II} \\ \text{Pemain I} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Misalkan x_i merupakan probabilitas pemain I memainkan baris i dengan $i = 1, 2$ dan misalkan y_j merupakan probabilitas pemain II memainkan kolom j dengan $j = 1, 2$. Karena $\sum_{i=1}^{2} x_i = 1$ dan $\sum_{j=1}^{2} y_j = 1$, maka

$$\begin{aligned} x_2 &= 1 - x_1 \\ y_2 &= 1 - y_1 \end{aligned}.$$

Hal ini dapat ditunjukkan bahwa Algoritma 2.1 akan menghasilkan strategi minimaks optimal.

Algoritma 2.1 solusi permainan 2×2

- Langkah 1

  Periksa apakah matriks *payoff* mempunyai titik pelana? Jika terdapat satu atau lebih, strategi minimaks optimalnya adalah strategi murni. Strategi didapatkan dengan memainkan baris dan kolom yang terdapat titik pelana di dalamnya dengan peluang 1, serta baris dan kolom dengan probabilitas 0. Titik pelana menentukan nilai sebuah permainan. Jika titik pelana tidak ada, lanjut ke Langkah 2.

- Langkah 2
  Hitunglah

$$x_1^* = \frac{p_{22} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \qquad y_1^* = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}}$$

$$x_2^* = 1 - x_1^* \qquad y_2^* = 1 - y_1^*$$

  Ini akan menjadi strategi minimaks optimal untuk pemain I dan II
- Langkah 3
  Nilai dari permainannya adalah

$$v = x_1^* y_1^* p_{11} + x_1^* \left(1 - y_1^*\right) p_{12} + \left(1 - x_1^*\right) y_1^* p_{21} + \left(1 - x_1^*\right)\left(1 - y_1^*\right) p_{22}$$

  (Gillet, 1976).

Contoh 2.5

Diberikan matriks *payoff* 2×2

$$\begin{array}{cc} & \text{Pemain II} \\ \text{Pemain I} & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matriks di atas tidak memiliki titik pelana, maka misalkan

$$x_1^* = \frac{4-1}{3+4-2-1} = \frac{3}{4} \qquad y_1^* = \frac{4-2}{3+4-2-1} = \frac{1}{2}$$

$$x_2^* = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \qquad y_2^* = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Nilai dari permainannya adalah

$$\begin{aligned} v &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i^* y_j^* p_{ij} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(3) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(2) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(4) \\ &= 2\frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.8 Dominansi

Menurut Gillet (1976), meskipun permainan 2×2 dapat diselesaikan dengan sangat mudah, solusi dari permainan yang lebih besar biasanya membutuhkan teknik yang berbeda dan lebih panjang. Akibatnya, disarankan untuk mereduksi permainan yang berukuran mxn sebelum menyelesaikannya, jika mungkin. Secara sederhana, dapat dikatakan bahwa baris *i* mendominasi baris k pada matriks *payoff* jika

$$p_{ij} \geq p_{kj} \qquad \text{untuk } j = 1, 2, ..., n$$

pada kasus ini, baris *k* dapat dieliminasi dari asumsi sebelumnya. Hal ini dikatakan baris *k* tidak akan menghasilkan suatu *payoff* yang lebih besar untuk pemain I daripada baris *i*, dengan mengabaikan apa yang dilakukan oleh pemain II, kemudian mengeliminasinya.

Dengan memperhatikan kolom, dikatakan bahwa kolom *j* mendominasi kolom *k* pada matriks *payoff* jika

$$p_{ij} \geq p_{ik} \qquad \text{untuk } i = 1, 2, ..., n$$

pada kasus ini, kolom *j* dapat dieliminasi dari asumsi sebelumnya. Hal ini sangat beralasan karena pemain II tidak pernah ingin memainkan kolom yang kemungkinan akan menghasilkan *payoff* yang lebih besar untuk pemain I, dengan mengabaikan baris mana yang dimainkan pemain I.

Contoh 2.6 (Hasan, 2004)

Diberikan matriks *payoff* 3×3

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 20 & 50 & 70 \\ -10 & 20 & 40 \\ 60 & 10 & 90 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dari matriks *payoff* di atas diketahui bahwa :

- Strategi B_3 didominasi oleh B_2, sehingga kolom B_3 dapat dieliminasi.
- Setelah kolom B_3 dieliminasi, maka strategi A_2 didominasi oleh strategi A_1, sehingga baris A_2 juga dapat dieliminasi.

Sehingga matriks *payoff* 3×3 di atas telah berubah menjadi matriks *payoff* 2×2, seperti berikut ini

$$\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{B}_1 & \mathrm{B}_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 50 \\ 60 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Istilah dominansi dapat dikembangkan untuk kasus yang mana suatu baris didominasi oleh kombinasi konveks dari baris lain dan untuk kasus yang mana suatu kolom mendominasi kombinasi konveks dari kolom yang lain. Dengan kombinasi konveks, dapat diasumsikan suatu kombinasi linier dari baris atau kolom di mana jumlah koefisen=1. Secara khusus, dapat dikatakan bahwa baris *k* didominasi jika terdapat himpunan λ_i^* sedemikian hingga

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} \lambda_i p_{ij} \geq p_{kj} \quad \text{untuk semua} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

di mana $\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} \lambda_i = 1$. Dalam kasus ini, baris *k* dapat dieliminasi.

Contoh 2.7

Diberikan matriks *payoff* 3×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

kombinasi konveks

$$\frac{1}{3}(\text{baris } 1) + \frac{2}{3}(\text{baris } 2) = \frac{1}{3}[2 \quad 4] + \frac{2}{3}[5 \quad 1]$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= [4 \quad 2]$$

adalah lebih besar dari baris 3, elemen per elemen, sehingga baris 3 dapat dieliminasi.

Kolom k dikatakan mendominasi suatu kombinasi konveks terhadap kolom yang lain jika terdapat himpunan λ_i sedemikian hingga

$$p_{ik} \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j p_{ij} \quad \text{untuk semua } i = 1, 2, \ldots, m$$

di mana $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \lambda_j = 1$. Dalam kasus ini, kolom k dapat dieliminasi.

Contoh 2.8

Diberikan matriks *payoff* 2×3

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

kolom 3 lebih besar atau sama dengan kombinasi konveks

$$\frac{3}{4}(\text{kolom } 1) + \frac{1}{4}(\text{kolom } 2) = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{18}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{6}{4} \\ \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{20}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\frac{1}{4} \\ 5 \end{bmatrix}$$

elemen per elemen, sehingga kolom 3 dapat dieliminasi Gillet (1976).

2.9 Solusi Permainan $2 \times n$

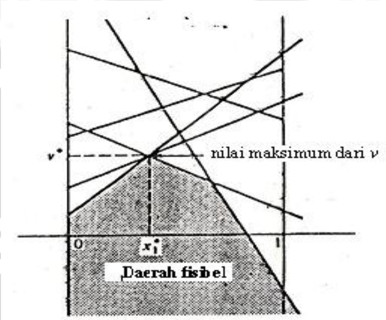
Diberikan permainan $2 \times n$ dengan matriks *payoff*

$$
\begin{array}{ccc}
 & & \text{Pemain II} \\
 & & \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{array} \\
\text{Pemain I} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 = 1 - x_1 \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Algoritma 2.2 Solusi Permainan $2 \times n$

- Langkah 1
  Periksa matriks *payoff*, apakah terdapat titik pelana? Jika terdapat satu atau lebih, maka strategi minimaks optimalnya adalah strategi murni. Mereka diperoleh dengan memainkan baris dan kolom yang memuat titik pelana di dalamnya dengan peluang 1, serta baris dan kolom lain dengan peluang 0. Titik pelana adalah nilai permainannya. Jika titik pelana tidak ada, maka dilanjutkan ke Langkah 2.
- Langkah 2
  Periksa untuk dominansi kolom. Eliminasi setiap kolom yang mendominasi kolom lain. Langkah ini jelas untuk mereduksi ukuran permainan dan tidak esensial untuk prosedur grafik. Lanjutkan ke Langkah 3.
- Langkah 3
  Tulislah kendala-kendala yang muncul
  $x_1 p_{1j} + (1 - x_1) p_{2j} \geq v$ j berhubungan dengan kolom yang tidak dieliminasi dalam langkah 2 atau $v - (p_{1j} - p_{2j}) x_1 \leq p_{2j}$.
- Langkah 4
  Tulis kendala-kendala dalam langkah 3 sebagai persamaan
  $$v - (p_{1j} - p_{2j}) x_1 = p_{2j}$$
- Langkah 5
  Plot persamaan pada langkah 4. Persamaan-persamaan ini membentuk batas atas pada daerah fisibel yang dideskripsikan oleh kendala-kendala dalam langkah 3 untuk 0 ≤ x ≤ 1, jika *v*

digambarkan sebagai fungsi x_1 . Gambar 2.2 mengilustrasikan daerah fisibel.



Gambar 2.1 Daerah Fisibel untuk Permainan $2\times n$

Nilai permainannya adalah nilai maksimum dari *v* dalam daerah fisibel. Nilai maksimum *v* dapat diperoleh ketika $x_1^* = 0, x_1^* = 1$, atau di manapun dalam interval $0 < x_1^* < 1$ (Gillet, 1976).

2.10 Solusi Permainan $m\times 2$

Diberikan permainan $m\times 2$ dengan matriks *payoff*

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Pemain II} \\ & & \begin{array}{cc} y_1 & y_2 = 1 - y_1 \end{array} \\ \text{Pemain I} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \\ \vdots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Prosedur grafik untuk menyelesaikan permainan $m\times 2$ mirip dengan solusi dari permainan $2\times n$. Pengecualiannya adalah *v* diplot sebagai fungsi dari y_1 menggunakan baris-baris dari matriks *payoff* yang tidak dieliminasi oleh dominansi. Sebuah daerah fisibel dikonstruksi dan nilai terkecil dari *v*, katakan *v** dalam daerah fisibel adalah nilai dari permainannya. Misalkan y_1^* adalah nilai dari y_1 yang menghasilkan nilai permainannya. Baris-baris dalam permainan semula berhubungan dengan dua persamaan dengan gradien berlawanan yang memotong pada $\left(y_1^*, v^*\right)$ dan akan menghasilkan strategi-strategi optimal untuk pemain I dan II (Gillet, 1976).

2.11 Algoritma Brown

Diberikan suatu permainan $m \times n$ dengan matriks *payoff*

$$\begin{array}{cc} & \text{Pemain II} \\ \text{Pemain I} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Algoritma 2.3 (Algoritma Brown) Solusi Permainan $m \times n$ (Gillet, 1976)

- Langkah 1
  Pemain I memilih sebuah baris untuk dimainkan, dan pemain 2 kemudian memainkan kolom yang terkait dengan elemen minimum pada baris tersebut.
- Langkah 2
  Selanjutnya pemain I memilih baris untuk dimainkan yang terkait terhadap elemen maksimum pada kolom yang dimainkan oleh pemain II pada langkah 1.
- Langkah 3
  Pemain II menjumlahkan baris yang telah dimainkan pemain I sejauh itu, dan memainkan kolom yang terkait terhadap jumlah elemen minimum.
- Langkah 4
  Pemain I menjumlahkan kolom yang telah dimainkan pemain II sejauh itu, dan memainkan baris yang terkait terhadap suatu jumlah elemen maksimum. Jika jumlah iterasi yang digunakan terpenuhi lanjut ke langkah 5. Sebaliknya, kembali ke langkah 3.

- Langkah 5

  Hitung batas atas dan batas bawah, $\overline{v}$ dan $\underline{v}$, secara berturut-turut:

$$\overline{v} = \frac{\text{jumlah elemen maksimum dari langkah 4}}{\text{banyaknya memainkan permainan}}$$

$$\underline{v} = \frac{\text{jumlah elemen minimum dari langkah 3}}{\text{banyaknya memainkan permainan}}$$

- Langkah 6

  Misalkan x_i merupakan proporsi waktu pemain I memainkan baris i dengan $i = 1, 2, \ldots, m$ dan misalkan y_j merupakan proporsi waktu pemain II memainkan kolom j dengan $j = 1, 2, \ldots, n$. Strategi-strategi ini mendekati strategi minimaks optimal. Batas atas dan batas bawah pada nilai permainan adalah

$$\underline{v} \le v \le \overline{v}$$

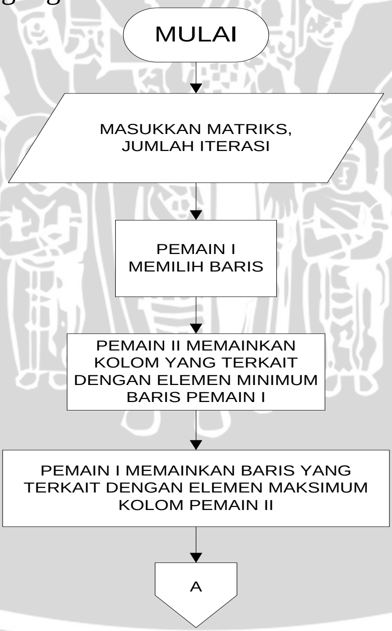
  di mana $\underline{v}$ dan $\overline{v}$ dihitung pada langkah 5. Berhenti.

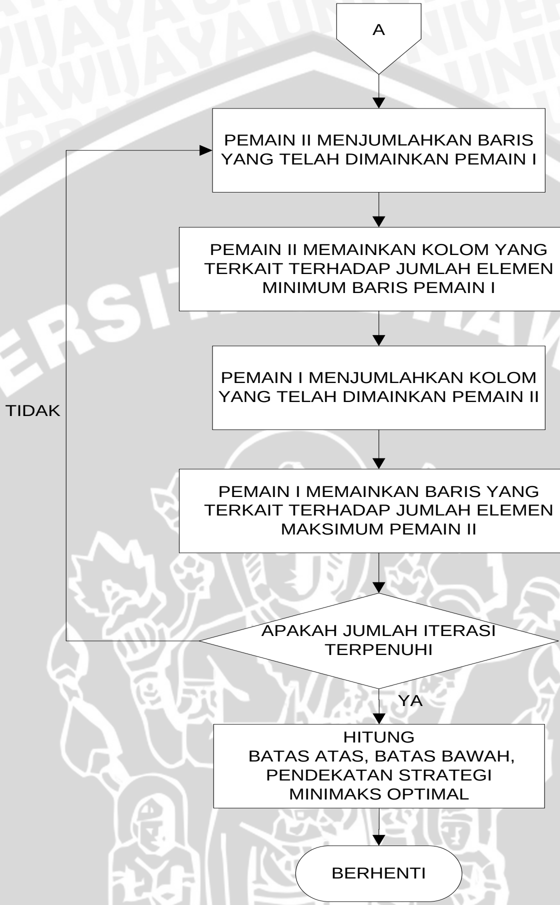
BAB III
PEMBAHASAN

Di dalam bab ini akan dibahas tentang langkah-langkah dalam menyelesaikan teori permainan menggunakan algoritma Brown, menyelesaikan kasus permainan serta menganalisis penyelesaian algoritma Brown menggunakan program delphi.

3.1 Metode Algoritma Brown

Algoritma Brown adalah algoritma optimasi yang dapat digunakan untuk menyelesaikan model-model teori permainan yang mempunyai matriks berukuran lebih besar dari 3×3, $2\times n$ dan $m\times 2$. Meskipun ada juga metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan model teori permainan berukuran besar, tetapi algoritma Brown lebih mudah digunakan dan prosesnya lebih cepat. Algoritma Brown ini mengasumsikan bahwa kejadian yang lalu dapat menjadi petunjuk untuk yang akan datang. Berikut adalah diagram alir algoritma Brown yang digunakan:





Gambar 3.1 Diagram Alir Algoritma Brown

Diagram alir algoritma Brown di atas merupakan langkah-langkah yang digunakan untuk menentukan solusi pendekatan strategi optimal. Pada pembahasan skripsi ini, algoritma di atas akan digunakan untuk menyelesaikan teori permainan berukuran $m \times n$ dalam beberapa kasus diantaranya di bidang ekonomi, bidang politik dan bidang militer.

3.2 Penerapan Algoritma Brown pada Teori Permainan

3.2.1 Studi Kasus Di Bidang Ekonomi

Aplikasi-aplikasi teori permainan banyak ditemukan dalam bidang ekonomi. Misal, persaingan antar perusahaan dalam memasarkan produknya, persaingan antar pemimpin perusahaan dalam memperebutkan pangsa pasar, persaingan antar pemimpin perusahaan untuk memajukan perusahaannya serta yang lainnya. Dalam kasus ini akan di gambarkan dua perusahaan yang saling bersaing dalam memperebutkan pasar penjualan dari produk-produknya.

Permasalahan:

Misalkan dua perusahaan sepatu bersaing memperebutkan pasar penjualan dari produk-produknya. Masing-masing perusahaan merencanakan memasarkan untuk bulan depan dan berusaha merebut pasar penjualan dari perusahaan lawan. Jumlah total penjualan produk relatif tetap sehingga perusahaan hanya dapat meningkatkan penjualannya dengan memenangkan persaingan dari lawan. Setiap perusahaan mempertimbangkan beberapa kemungkinan yaitu memperbaiki kemasan produk, memasang iklan melalui media, menambah promosi berupa hadiah langsung, dan memberikan diskon. Dampak dari setiap kombinasi alternatif untuk perusahaan I dalam persentase kenaikan penjualan diperkirakan sebagai berikut:

Tabel 3.1 Kenaikan Penjualan dari Setiap kombinasi

Perusahaan I	Perusahaan II			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2	1	3	-2
a_2	4	2	-1	1
a_3	3	4	1	5
a_4	5	3	1	-1

Keterangan Tabel 3.1
a_1 dan b_1 : perusahaan memperbaiki kemasan produk
a_2 dan b_2 : perusahaan memasang iklan melalui media
a_3 dan b_3 : perusahaan menambah promosi berupa hadiah langsung
a_4 dan b_4 : perusahaan memberikan diskon

Setiap perusahaan harus menentukan pilihannya sebelum mengetahui keputusan lawan. Tentukan strategi optimal bagi kedua perusahaan untuk bisa merebut pasar penjualan?

Penyelesaian:

- Langkah 1
  Menuliskan Tabel 3.1 ke dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- Langkah 2
  Mengecek nilai minimaks dan maksimin dari matriks tersebut. Pada matriks di atas diketahui nilai minimaksnya adalah 3 dan nilai maksiminnya adalah 1. Karena nilai minimaks tidak sama dengan nilai maksimin maka matriks tersebut tidak mempunyai titik pelana.
- Langkah 3
  Mengecek dominansi kolom dan baris. Pada matriks di atas tidak ada baris atau kolom yang dominan terhadap baris atau kolom yang lain.
- Langkah 4
  Menentukan solusi pendekatan strategi optimalnya. Untuk mendapatkan solusi pendekatan strategi optimal perusahaan I dan perusahaan II maka dibutuhkan proses perulangan yang berkali-kali. Pada proses perulangan ini jumlah iterasi yang digunakan adalah 10 iterasi.

Adapun proses iterasi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Perusahaan I memulai permainan dengan memilih baris ketiga dari matriks *payoff* 4×4 (dapat memilih baris manapun untuk memulai permainan)
2. Perusahaan II memilih kolom ketiga yang terkait dengan elemen minimum pada baris yang telah dimainkan perusahaan I

3. Perusahaan I memilih baris pertama yang terkait dengan elemen maksimum pada kolom yang telah dimainkan perusahaan II
4. Perusahaan II menjumlahkan baris yang dimainkan perusahaan I, selanjutnya perusahaan II memilih kolom keempat yang terkait dengan jumlah elemen minimum pada baris yang telah dimainkan perusahaan I
5. Perusahaan I menjumlahkan kolom yang telah dimainkan perusahaan II, selanjutnya perusahaan I memilih baris ketiga yang terkait dengan jumlah elemen maksimum pada kolom yang telah dimainkan perusahaan II
6. Iterasi berlanjut hingga iterasi ke-10 dengan proses yang sama seperti pada point 1-5 (dapat dilihat pada Tabel 3.2)

Setelah dilakukan perhitungan sebanyak 10 iterasi didapatkan solusi pendekatan strategi optimal untuk perusahaan I dan perusahaan II yaitu

$$X^* = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Y^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,8 & 0,2 \end{bmatrix}$$

dengan batas atas $\frac{20}{10} = 2$ dan batas bawah $\frac{18}{10} = 1,8$ pada nilai permainan. Dalam kasus ini,

$$1,8 \le v \le 2$$

sehingga dapat dihitung nilai permainan dari matriks di atas adalah

$$\begin{aligned} v = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} x_i^* y_j^* p_{ij} = x_1^* y_1^* p_{11} + x_1^* y_2^* p_{12} + x_1^* y_3^* p_{13} + x_1^* y_4^* p_{14} + x_2^* y_1^* p_{21} \\ + x_2^* y_2^* p_{22} + x_2^* y_3^* p_{23} + x_2^* y_4^* p_{24} + x_3^* y_1^* p_{31} + x_3^* y_2^* p_{32} \\ + x_3^* y_3^* p_{33} + x_3^* y_4^* p_{34} + x_4^* y_1^* p_{41} + x_4^* y_2^* p_{42} + x_4^* y_3^* p_{43} \\ + x_4^* y_4^* p_{44} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0,5.0.2 + 0,5.0.1 + 0,5.0,8.3 + 0,5.0,2.(-2) \\
&\quad + 0.0.4 + 0.0.2 + 0.0,8.(-1) + 0.0,2.1 + 0,5.0.3 \\
&\quad + 0,5.0.4 + 0,5.0,8.1 + 0,5.0,2.5 + 0.0.5 + 0.0.3 \\
&\quad + 0.0,8.1 + 0.0,2.(-1) \\
&= 1,9
\end{aligned}
$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan dua hal. Pertama, dengan mempergunakan strategi campuran dapat dicapai titik kesetimbangan di mana keuntungan yang diharapkan (per permainan) oleh perusahaan I sama dengan kerugian yang diharapkan (per permainan) oleh perusahaan II yaitu 1,9%. Kedua, dengan mempergunakan strategi campuran, kedua perusahaan dapat memperbaiki posisi mereka. Jadi dapat diketahui dari solusi pendekatan strategi optimal untuk perusahaan I dan perusahaan II, di mana perusahaan I dengan menggunakan strategi memperbaiki kemasan produk serta menambah promosi berupa hadiah langsung telah menaikkan keuntungan yang diharapkan dari 1% menjadi 1,9% dan perusahaan II dengan menggunakan strategi menambah promosi berupa hadiah langsung serta memberikan diskon telah mengurangi kerugian yang diharapkan dari 3% menjadi 1,9%.

Tabel 3.2 Perhitungan Matriks *Payoff* 4×4 dengan Algoritma Brown

Matriks				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	1	3	-2	$\boxed{3}$	1	4	7	$\boxed{10}$	$\boxed{13}$	$\boxed{16}$	14	17	$\boxed{20}$	0,5
4	2	-1	1	-1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-4	-5	-6	0
3	4	1	5	1	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$	9	10	11	$\boxed{16}$	$\boxed{17}$	18	0,5
5	3	1	-1	1	0	1	2	3	4	5	4	5	6	0

1	3	4	1	5
2	5	5	4	3
3	8	9	5	8
4	11	13	6	13
5	14	17	7	18
6	16	18	10	16
7	18	19	13	14
8	20	20	16	12
9	23	24	17	17
10	26	28	18	22
	0	0	0,8	0,2

Keterangan: - angka di dalam oval menunjukkan elemen minimum pemain baris
- angka di dalam persegi menunjukkan elemen maksimum pemain kolom

3.2.2 Studi Kasus Di Bidang Politik

Persaingan-persaingan dalam bidang politik sering kali terjadi. Mulai dari tingkat daerah hingga tingkat internasional yang selalu bersaing untuk memperebutkan kekuasaan. Kasus-kasus dalam bidang politik tersebut dapat dimodelkan ke dalam bentuk teori permainan. Seperti yang akan dibahas pada bagian ini yaitu kasus yang menggambarkan persaingan kedua pasang calon bupati untuk mendapatkan perolehan suara dalam pemilihan.

Permasalahan:

Dua pasang calon bupati Banyuwangi akan memulai kampanye untuk memperebutkan jabatan bupati periode 2010-2015. Kedua pasang calon bupati harus memilih isu tertentu sebagai tema utama dalam kampanyenya. Masing-masing pasangan memiliki lima pilihan isu, tetapi keefektifan dari isu tersebut bergantung pada isu yang dipilih lawannya. Perkiraan perolehan suara bagi calon pasangan I (dinyatakan dengan persentase suara total) dari semua kombinasi isu diberikan pada tabel *payoff* berikut:

Tabel 3.3 Perolehan Suara Total dari Semua Kombinasi Isu

Pasangan I	Pasangan II				
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	4	1	7	0	2
a_2	1	-1	1	2	3
a_3	5	2	1	-1	2
a_4	2	3	1	-2	2
a_5	3	2	6	1	1

Keterangan Tabel 3.3

a_1 dan b_4 : isu kampanye pemberantasan kemiskinan
a_2 dan b_3 : isu kampanye menaikkan gaji pegawai
a_3 : isu kampanye menurunkan harga sembako
a_4 dan b_1 : isu kampanye perbaikan fasilitas umum
a_5 dan b_5 : isu kampanye pemberantasan korupsi
b_2 : isu kampanye memberikan pelayanan kesehatan dan pendidikan gratis

Karena dibutuhkan pertimbangan tim suksesnya untuk meneliti dan merumuskan isu yang dipilih, maka setiap pasang calon bupati harus menentukan pilihannya sebelum mempelajari pilihan lawan. Tentukan strategi optimal bagi kedua pasang calon bupati?

Penyelesaian:

- Langkah 1
  Menuliskan Tabel 3.3 ke dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Langkah 2
  Mengecek nilai minimaks dan maksimin dari matriks tersebut. Pada matriks di atas diketahui nilai minimaksnya adalah 2 dan nilai maksiminnya adalah 1. Karena nilai minimaks tidak sama dengan nilai maksimin maka matriks tersebut tidak mempunyai titik pelana.
- Langkah 3
  Mengecek dominansi kolom dan baris. Pada matriks di atas tidak ada baris atau kolom yang dominan terhadap baris atau kolom yang lain.
- Langkah 4
  Menentukan solusi pendekatan strategi optimalnya. Untuk mendapatkan solusi pendekatan strategi optimal pasanganI dan pasangan II maka dibutuhkan proses perulangan yang berkali-kali. Pada proses perulangan ini jumlah iterasi yang digunakan adalah 10 iterasi.

Adapun proses iterasi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Pasangan I memulai permainan dengan memilih baris ketiga dari matriks *payoff* 4×4 (dapat memilih baris manapun untuk memulai permainan)
2. Pasangan II memilih kolom keempat yang terkait dengan elemen minimum baris yang telah dimainkan pasangan I
3. Pasangan I memilih baris kedua yang terkait dengan elemen maksimum pada kolom yang telah dimainkan pasangan II

4. Pasangan II menjumlahkan baris yang dimainkan pasangan I, selanjutnya pasangan II memilih kolom kedua yang terkait dengan jumlah elemen minimum pada baris yang telah dimainkan pasangan I
5. Pasangan I menjumlahkan kolom yang telah dimainkan pasangan II, selanjutnya pasangan I memilih baris kelima yang terkait dengan jumlah elemen maksimum pada kolom yang telah dimainkan pasangan II
6. Iterasi berlanjut hingga iterasi ke-10 dengan proses yang sama seperti pada point 1-5 (dapat dilihat pada Tabel 3.4)

Setelah dilakukan perhitungan sebanyak 10 iterasi didapatkan solusi pendekatan strategi optimal untuk pasangan I dan pasangan II yaitu

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7 \end{bmatrix} \qquad Y^* = \begin{bmatrix} 0 & 0,3 & 0 & 0,7 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan batas atas $\frac{13}{10} = 1,3$ dan batas bawah $\frac{11}{10} = 1,1$ pada nilai permainan. Dalam kasus ini,

$$1,1 \le v \le 1,3$$

dari solusi pendekatan strategi optimal didapatkan nilai permainannya adalah

$$\begin{aligned} v = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_i^* y_j^* p_{ij} &= x_1^* y_1^* p_{11} + x_1^* y_2^* p_{12} + x_1^* y_3^* p_{13} + x_1^* y_4^* p_{14} + x_1^* y_5^* p_{15} \\ &+ x_2^* y_1^* p_{21} + x_2^* y_2^* p_{22} + x_2^* y_3^* p_{23} + x_2^* y_4^* p_{24} + x_2^* y_5^* p_{25} \\ &+ x_3^* y_1^* p_{31} + x_3^* y_2^* p_{32} + x_3^* y_3^* p_{33} + x_3^* y_4^* p_{34} + x_3^* y_5^* p_{35} \\ &+ x_4^* y_1^* p_{41} + x_4^* y_2^* p_{42} + x_4^* y_3^* p_{43} + x_4^* y_4^* p_{44} + x_4^* y_5^* p_{45} \\ &+ x_5^* y_1^* p_{51} + x_5^* y_2^* p_{52} + x_5^* y_3^* p_{53} + x_5^* y_4^* p_{54} + x_5^* y_5^* p_{55} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 0.0.4 + 0.0,3.1 + 0.0.7 + 0.0,7.0 + 0.0.2 + 0,3.0.1 \\
&\quad + 0,3.0,3.(-1) + 0,3.0.1 + 0,3.0,7.2 + 0,3.0.3 + 0.0.5 \\
&\quad + 0.0,3.2 + 0.0.1 + 0.0,7.(-1) + 0.0.(-1) + 0.0.2 \\
&\quad + 0.0,3.3 + 0.0.1 + 0.0,7.(-2) + 0.0.2 + 0,7.0.3 \\
&\quad + 0,7.0,3.2 + 0,7.0.6 + 0,7.0,7.1 + 0,7.0.1 \\
&= 1,24
\end{aligned}
$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan dua hal. Pertama, dengan mempergunakan strategi campuran dapat dicapai titik kesetimbangan di mana keuntungan yang diharapkan (per permainan) oleh pasangan I sama dengan kerugian yang diharapkan (per permainan) oleh pasangan II yaitu 1,24%. Kedua, dengan mempergunakan strategi campuran, kedua pasangan dapat memperbaiki posisi mereka. Jadi dapat diketahui solusi pendekatan strategi optimal untuk pasangan I dan pasangan II, di mana pasangan I dengan menggunakan strategi isu kampanye menaikkan gaji pegawai serta pemberantasan korupsi telah menaikkan keuntungan yang diharapkan dari 1% menjadi 1,24% dan pasangan II dengan menggunakan strategi isu kampanye memberikan pelayanan kesehatan, pendidikan gratis serta pemberantasan kemiskinan telah mengurangi kerugian yang diharapkan dari 2% menjadi 1,24%.

Tabel 3.4 Perhitungan Matriks *Payoff* 5×5 dengan Algoritma Brown

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
0	1	1	1	1	1	2	3	3	3	0
$\boxed{2}$	1	3	5	$\boxed{7}$	$\boxed{9}$	8	9	11	13	0,3
-1	1	0	-1	-2	-3	-1	1	0	-1	0
-2	1	-1	-3	-5	-7	-4	1	-3	-5	0
1	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	6	7	$\boxed{9}$	$\boxed{11}$	$\boxed{12}$	$\boxed{13}$	0,7

1	5	2	1	-1	2
2	6	1	2	1	5
3	9	3	8	2	6
4	12	5	14	3	7
5	15	7	20	4	8
6	16	6	21	6	11
7	17	7	22	8	14
8	20	9	28	9	15
9	23	11	34	10	16
10	26	13	40	11	17
	0	0,3	0	0,7	0

Keterangan: - angka di dalam oval menunjukkan elemen minimum pemain baris
- angka di dalam persegi menunjukkan elemen maksimum pemain kolom

3.2.3 Studi Kasus Di Bidang Militer

Aplikasi-aplikasi nyata yang paling sukses dari teori permainan banyak ditemukan dalam militer. Aplikasi ini digunakan oleh para jendral tentara untuk merencanakan dan melaksanakan strategi perang. Merencanakan dan melaksanakan strategi adalah sangat penting dalam sebuah pertempuran karena sebuah negara pun masih bisa kalah dalam medan pertempuran meskipun strategi perang yang digunakan sudah terkoordinasi baik, strategi militernya tepat, dan strategi operasinya terancang baik. Pada kasus ini akan dibahas simulasi pertempuran angkatan bersenjata yang dibagi dua devisi.

Permasalahan:

Angkatan bersenjata yang dibagi menjadi dua devisi, yaitu devisi merah dan devisi putih melakukan simulasi pertempuran. Devisi putih berada di pihak penyerangan dan devisi merah memegang posisi bertahan. Hasil dari simulasi pertempuran tersebut diukur dalam jumlah tentara devisi merah yang hilang untuk setiap strategi pertempuran yang tersedia untuk masing-masing devisi.

Tabel 3.5 Banyaknya Tentara yang Hilang

Devisi Putih	Devisi Merah			
	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	2000	1600	700	300
a_2	1500	1000	300	800
a_3	1800	2000	600	200
a_4	1000	1200	1600	1700
a_5	1800	1500	800	200
a_6	700	1000	900	1200

Keterangan Tabel 3.5:

a_1 : serangan frontal
a_2 : serangan perembesan
a_3 : serangan lintas udara
a_4 : serangan melingkar
a_5 : serangan udara
a_6 : serangan pendaratan amphibi

b_1 : pertahanan wilayah
b_2 : pertahanan linier
b_3 : pertahanan berlapis
b_4 : pertahanan udara

Tentukan strategi optimal untuk kedua devisi dan jumlah tentara yang hilang yang diperkirakan akan dialami oleh devisi merah?

Penyelesaian:

- Langkah 1
  Menuliskan Tabel 3.5 ke dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 2000 & 1600 & 700 & 300 \\ 1500 & 1000 & 300 & 800 \\ 1800 & 2000 & 600 & 200 \\ 1000 & 1200 & 1600 & 1700 \\ 1800 & 1500 & 800 & 200 \\ 700 & 1000 & 900 & 1200 \end{bmatrix}$$

- Langkah 2
  Mengecek nilai minimaks dan maksimin dari matriks tersebut. Pada matriks di atas diketahui nilai minimaksnya adalah 1600 dan nilai maksiminnya adalah 1000. Karena nilai minimaks tidak sama dengan nilai maksimin maka matriks tersebut tidak mempunyai titik pelana.
- Langkah 3
  Mengecek dominansi kolom dan baris. Pada matriks di atas tidak ada baris atau kolom yang dominan terhadap baris atau kolom yang lain.
- Langkah 4
  Menentukan solusi pendekatan strategi optimalnya. Untuk mendapatkan solusi pendekatan strategi optimal devisi putih dan devisi merah maka dibutuhkan proses perulangan yang berkali-kali. Pada proses perulangan ini jumlah iterasi yang digunakan adalah 10 iterasi.

Adapun proses iterasi yang dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Devisi putih memulai permainan dengan memilih baris ketiga dari matriks *payoff* 4×4 (dapat memilih baris manapun untuk memulai permainan)
2. Devisi merah memilih kolom keempat yang terkait dengan elemen minimum pada baris yang telah dimainkan devisi putih

3. Devisi putih memilih baris keempat yang terkait dengan elemen maksimum pada kolom yang telah dimainkan devisi merah
4. Devisi merah menjumlahkan baris yang dimainkan devisi putih, selanjutnya devisi merah memilih kolom keempat yang terkait dengan jumlah elemen minimum pada baris yang telah dimainkan devisi putih
5. Devisi putih menjumlahkan kolom yang telah dimainkan devisi merah, selanjutnya devisi putih memilih baris keempat yang terkait dengan jumlah elemen maksimum pada kolom yang telah dimainkan devisi merah
6. Iterasi berlanjut hingga iterasi ke-10 dengan proses yang sama seperti pada point 1-5 (dapat dilihat pada Tabel 3.6)

Setelah dilakukan perhitungan sebanyak 10 iterasi didapatkan solusi pendekatan strategi optimal untuk devisi putih dan devisi merah yaitu

$$X^* = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad Y^* = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}$$

dengan batas atas $\frac{13200}{10} = 1320$ dan batas bawah $\frac{12700}{10} = 1270$ pada nilai permainan. Dalam kasus ini,

$$1270 \le v \le 1320$$

dari solusi pendekatan strategi optimal didapatkan nilai permainannya adalah

$$v = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} x_i^* y_j^* p_{ij} = x_1^* y_1^* p_{11} + x_1^* y_2^* p_{12} + x_1^* y_3^* p_{13} + x_1^* y_4^* p_{14} + x_2^* y_1^* p_{21}$$
$$+ x_2^* y_2^* p_{22} + x_2^* y_3^* p_{23} + x_2^* y_4^* p_{24} + x_3^* y_1^* p_{31} + x_3^* y_2^* p_{32}$$
$$+ x_3^* y_3^* p_{33} + x_3^* y_4^* p_{34} + x_4^* y_1^* p_{41} + x_4^* y_2^* p_{42} + x_4^* y_3^* p_{43}$$

$$
\begin{aligned}
&+x_4^* y_4^* p_{44} + x_5^* y_1^* p_{51} + x_5^* y_2^* p_{52} + x_5^* y_3^* p_{53} + x_5^* y_4^* p_{54} \\
&+x_6^* y_1^* p_{61} + x_6^* y_2^* p_{62} + x_6^* y_3^* p_{63} + x_6^* y_4^* p_{64} \\
&= 0,3.0,6.2000 + 0,3.0.1600 + 0,3.0.700 + 0,3.0,4.300 \\
&+ 0.0,6.1500 + 0.0.1000 + 0.0.300 + 0.0,4.800 \\
&+ 0.0,6.1800 + 0.0.2000 + 0.0.600 + 0.0,4.200 \\
&+ 0,7.0,6.1000 + 0,7.0.1200 + 0,7.0.1600 \\
&+ 0,7.0,4.1700 + 0.0,6.1800 + 0.0.1500 + 0.0.800 \\
&+ 0.0,4.200 + 0.0,6.700 + 0.0.1000 + 0.0.900 \\
&+ 0.0,4.1200 \\
&= 1292
\end{aligned}
$$

Dari uraian di atas dapat disimpulkan dua hal. Pertama, dengan mempergunakan strategi campuran dapat dicapai titik kesetimbangan di mana keuntungan yang diharapkan (per permainan) oleh devisi putih sama dengan kerugian yang diharapkan (per permainan) oleh devisi merah yaitu 1292 tentara. Kedua, dengan mempergunakan strategi campuran, kedua devisi dapat memperbaiki posisi mereka. Jadi dapat diketahui dari solusi pendekatan strategi optimal devisi putih dan devisi merah, di mana devisi putih dengan menggunakan strategi serangan frontal serta serangan melingkar telah menaikkan kemenangan yang diharapkan dari 1000 tentara menjadi 1292 tentara dan devisi merah dengan menggunakan strategi pertahanan wilayah serta pertahanan udara telah mengurangi kekalahan yang diharapkan dari 1600 tentara menjadi 1292 tentara.

Tabel 3.6 Perhitungan Matriks *Payoff* 6×4 dengan Algoritma Brown

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2000	1600	700	300	300	600	900	2900	4900	6900	8900	$\boxed{10900}$	$\boxed{12900}$	$\boxed{13200}$	0,3
1500	1000	300	800	800	1600	2400	3900	5400	6900	8400	9900	11400	12200	0
1800	2000	600	200	200	400	600	2400	4200	6000	7800	9600	11400	11600	0
1000	1200	1600	1700	$\boxed{1700}$	$\boxed{3400}$	$\boxed{5100}$	$\boxed{6100}$	$\boxed{7100}$	$\boxed{8100}$	$\boxed{9100}$	10100	11100	12800	0,7
1800	1500	800	200	200	400	600	2400	4200	6000	7800	9600	11400	11600	0
700	1000	900	1200	1200	2400	3600	4300	5000	5700	6400	7100	7800	9000	0

1	1800	2000	600	200
2	2800	3200	2200	1900
3	3800	4400	3800	3600
4	4800	5600	5400	5300
5	5800	6800	7000	7000
6	6800	8000	8600	8700
7	7800	9200	10200	10400
8	8800	10400	11800	12100
9	10800	12000	12500	12400
10	12800	13600	13200	12700
	0,6	0	0	0,4

Keterangan:
- angka di dalam oval menunjukkan elemen minimum pemain baris
- angka di dalam persegi menunjukkan elemen maksimum pemain kolom

3.2.4 Studi Kasus Lainnya

Pada beberapa kasus teori permainan ada model-model kasus yang mana elemen-elemen dalam matriks *payoff*nya dapat didominasi oleh elemen-elemen yang lain. Hal ini menyebabkan ukuran dari matriks *payoff* tersebut bisa lebih kecil dari ukuran yang sebenarnya. Sehingga dengan lebih sederhananya ukuran dari matriks *payoff* tersebut, penyelesaian teori permainan dapat dilakukan dengan menggunakan beberapa algoritma yang telah di jelaskan pada bab sebelumnya.

Permasalahan:

Suatu perusahaan sedang menghadapi tuntutan kenaikan gaji dari para karyawannya. Dengan demikian, terdapat dua pihak pemain, yaitu pihak manajemen dan pihak karyawan. Pihak karyawan menuntut kenaikan upah dan pihak manajemen menghendaki penambahan jam kerja lembur. Masing-masing pihak memiliki empat strategi. Datanya ditampilkan pada Tabel 3.7.

Tabel 3.7 Strategi Karyawan dan Manajemen

Strategi Karyawan	Strategi Manajemen			
	M_1	M_2	M_3	M_4
K_1	150	200	130	93
K_2	240	120	115	85
K_3	160	180	75	100
K_4	175	205	100	110

Tentukan nilai permainannya!

Penyelesaian:

- Langkah 1
  Menuliskan Tabel 3.7 ke dalam matriks

$$\begin{bmatrix} 150 & 200 & 130 & 93 \\ 240 & 120 & 115 & 85 \\ 160 & 180 & 75 & 100 \\ 175 & 205 & 100 & 110 \end{bmatrix}$$

- Langkah 2
  Mengecek nilai minimaks dan maksimin dari matriks tersebut. Pada matriks di atas diketahui nilai minimaksnya adalah 110

dan nilai maksiminnya adalah 100. Karena nilai minimaks tidak sama dengan nilai maksimin maka matriks tersebut tidak mempunyai titik pelana.

- Langkah 3

  Mengecek dominansi kolom dan baris. Pada matriks di atas diketahui bahwa :
  - Strategi kolom M_1 dan M_2 didominasi oleh kolom M_3, sehingga kolom M_1 dan M_2 dapat dihilangkan.
  - Setelah kolom M_1 dan M_2 dihilangkan, maka strategi baris K_2 didominasi oleh baris K_1 dan strategi baris K_3 didominasi baris K_4, sehingga strategi K_2 dan K_3 juga dapat dihilangkan. Matriks p*ayoff*nya telah berubah menjadi permainan 2×2, seperti berikut ini

$$\begin{bmatrix} 130 & 93 \\ 100 & 110 \end{bmatrix}$$

- Langkah 4

  Matriks *payoff* 2×2 dapat diselesaikan menggunakan Algoritma 2.1. Di mana strategi minimaks optimal untuk pemain I dan pemain II adalah

$$X_1^* = \frac{110-100}{130+110-93-100} = \frac{10}{47}$$

$$X_2^* = 1 - \frac{10}{47} = \frac{37}{47}$$

$$Y_1^* = \frac{110-93}{130+110-93-100} = \frac{17}{47}$$

$$Y_2^* = 1 - \frac{17}{47} = \frac{30}{47}$$

Sehingga nilai permainannya adalah

$$v = x_1^* y_1^* p_{11} + x_1^* y_2^* p_{12} + x_2^* y_1^* p_{21} + x_2^* y_2^* p_{22}$$

$$= \frac{10}{47}\frac{17}{47}130 + \frac{10}{47}\frac{30}{47}93 + \frac{37}{47}\frac{17}{47}100 + \frac{37}{47}\frac{30}{47}110$$

$$= 106,38$$

Sedangkan dengan menggunakan algoritma Brown dapat pula ditentukan nilai permainan dari kasus 3.2.4. Setelah dilakukan perhitungan sebanyak 10 iterasi (lihat Lampiran 9) didapatkan solusi pendekatan strategi optimal untuk pemain I dan pemain II yaitu

$$X^* = \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,8 \end{bmatrix} \qquad Y^* = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,8 \end{bmatrix}$$

dari solusi pendekatan strategi optimal didapatkan nilai permainannya adalah

$$v = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i^* y_j^* p_{ij} = x_1^* y_1^* p_{11} + x_1^* y_2^* p_{12} + x_2^* y_1^* p_{21} + x_2^* y_2^* p_{22}$$

$$= 0,2.0,2.130 + 0,2.0,8.93 + 0,8.0,2.100 + 0,8.0,8.110$$

$$= 106,48$$

Nilai permainan dari kedua metode di atas adalah sama. Sehingga dapat dikatakan bahwa metode algoritma Brown juga dapat digunakan untuk menyelesaikan matriks *payoff* ukuran kecil. Tetapi metode ini kurang efisien, karena dibutuhkan proses iterasi yang cukup panjang.

3.3 Perbandingan Komputasi Berdasarkan Pemilihan Baris dan Jumlah Iterasi

Program algoritma Brown digunakan untuk mendapatkan pendekatan strategi minimaks optimal untuk pemain I dan pemain II dengan menghitung terus menerus batas atas dan batas bawah nilai permainan. Nilai pendekatan ditentukan dari banyaknya iterasi yang diinginkan pengguna program untuk menjalankannya. Program algoritma Brown ini dibuat dengan Delphi 7 dengan spesifikasi komputer *processor* Intel Celeron M 360 @1.80GHz, 256MB of RAM. Pada beberapa kasus teori permainan yang penyelesaiannya menggunakan algoritma Brown, iterasi yang digunakan untuk mendapatkan hasil yang cukup bagus tidak hanya berhenti sebatas 10 iterasi, melainkan hingga banyak iterasi. Hal ini agar nilai batas atas dan batas bawahnya tampak mendekati nilai permainannya bahkan diharapkan nilainya hampir sama. Untuk itu, pada bagian ini akan dibahas bagaimana perilaku nilai batas atas dan batas bawah permainan berdasarkan banyaknya jumlah iterasi yang dilakukan yaitu 10, 100, 500 dan 1000 iterasi serta membandingkan hasilnya sesuai dengan pemilihan baris awal permainan. Berdasarkan banyaknya iterasi dan pemilihan baris awal permainan diperoleh hasil sebagai berikut (lihat Lampiran 1 hingga Lampiran 8).

a. Matriks *Payoff* 4×4

Matriks *payoff* 4×4 ini merupakan studi kasus teori permainan di atas yaitu pada bidang ekonomi yang melibatkan dua perusahaan sepatu. Adapun matriksnya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dan hasil komputasinya dapat dilihat pada Tabel 3.8 berikut

Tabel 3.8 Hasil Komputasi Matriks *Payoff* 4×4

Pilih Baris	Jumlah Iterasi	Nilai Permainan	
		Batas Bawah	Batas Atas
1	10	1,2	2
	100	1,82	1,9
	500	1,88	1,9
	1000	1,88	1,89
2	10	1,4	2
	100	1,78	1,92
	500	1,884	1,904
	1000	1,886	1,892
3	10	1,8	2
	100	1,88	1,9
	500	1,884	1,89
	1000	1,888	1,89
4	10	1,6	2
	100	1,76	1,9
	500	1,876	1,89
	1000	1,886	1,896

b. Matriks *Payoff* 5×5

Matriks *payoff* 5×5 ini merupakan studi kasus teori permainan di atas yaitu pada bidang politik yang melibatkan dua pasang calon bupati Banyuwangi dalam perebutan jabatan bupati periode 2010-2015. Adapun matriksnya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dan hasil komputasinya dapat dilihat pada Tabel 3.9 berikut

Tabel 3.9 Hasil Komputasi Matriks *payoff* 5×5

Pilih Baris	Jumlah Iterasi	Nilai Permainan	
		Batas Bawah	Batas Atas
1	10	1	1,3
	100	1,24	1,27
	500	1,248	1,254
	1000	1,248	1,251
2	10	1	1,3
	100	1,22	1,25
	500	1,244	1,25
	1000	1,248	1,251
3	10	1,1	1,3
	100	1,23	1,25
	500	1,246	1,25
	1000	1,248	1,25
4	10	1	1,4
	100	1,23	1,26
	500	1,246	1,252
	1000	1,247	1,25
5	10	1	1,3
	100	1,25	1,27
	500	1,25	1,254
	1000	1,249	1,251

c. Matriks *payoff* 6×4

Matriks *payoff* 6×4 ini merupakan contoh kasus teori permainan di atas yaitu pada bidang militer yang melibatkan dua Devisi angkatan bersenjata dalam simulasi pertempuran. Adapun matriksnya sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2000 & 1600 & 700 & 300 \\ 1500 & 1000 & 300 & 800 \\ 1800 & 2000 & 600 & 200 \\ 1000 & 1200 & 1600 & 1700 \\ 1800 & 1500 & 800 & 200 \\ 700 & 1000 & 900 & 1200 \end{bmatrix}$$

dan hasil komputasinya dapat dilihat pada Tabel 3.10 berikut

Tabel 3.10 Hasil Komputasi Matriks *Payoff* 6×4

Pilih Baris	Jumlah Iterasi	Nilai Permainan	
		Batas Bawah	Batas Atas
1	10	1280	1320
	100	1290	1308
	500	1288	1294
	1000	1289	1292
2	10	1170	1430
	100	1281	1314
	500	1286	1294
	1000	1290	1293
3	10	1270	1320
	100	1288	1301
	500	1291	1294
	1000	1290	1292
4	10	1280	1350
	100	1280	1301
	500	1291	1297
	1000	1290	1293

Pilih Baris	Jumlah Iterasi	Nilai Permainan	
		Batas Atas	Batas Bawah
5	10	1270	1320
	100	1288	1301
	500	1291	1293
	1000	1290	1292
6	10	1170	1360
	100	1287	1293
	500	1289	1293
	1000	1289	1292

Dari ketiga hasil komputasi di atas (Tabel 3.8, Tabel 3.9 dan Tabel 3.10) tampak bahwa semakin besar jumlah iterasi yang digunakan maka solusi pendekatan dari nilai permainannya semakin bagus (Selisih antara nilai batas atas dan nilai batas bawah sangat kecil). Solusi pendekatan dari nilai permainan ditentukan dengan banyaknya iterasi yang digunakan.

Berdasarkan Tabel 3.8 menunjukkan bahwa pada iterasi 500-1000 solusi pendekatan nilai permainannya sudah sangat bagus, di mana nilai batas atasnya adalah 1,88 dan nilai batas bawahnya adalah 1,89. Begitu juga hal yang sama ditunjukkan oleh Tabel 3.9 dan Tabel 3.10, di mana pada iterasi 500-1000 solusi pendekatan nilai permainannya juga sangat bagus. Pada Tabel 3.9 nilai permainannya berkisar antara 1,247 hingga 1,251. Sedangkan pada Tabel 3.10 nilai permainannya berkisar antara 1289 hingga 1293.

Selain adanya perbedaan jumlah iterasi, solusi pendekatan nilai permainan dapat juga dilihat dari pemilihan baris awal permainan yang berbeda. Dari ketiga tabel di atas menunjukkan bahwa pada 10 iterasi pertama batas atas dan batas bawah permainan masih terlihat berbeda. Misalnya dapat dilihat pada Tabel 3.8 yaitu pada pemilihan baris 1, solusi pendekatan nilai permainannya berkisar antara 1,2 hingga 2. Sedangkan pada pemilihan baris 3 solusi pendekatan nilai permainannya hanya berkisar antara 1,8 hingga 2. Dari perbedaan itu dapat dikatakan bahwa pemilihan baris awal permainan harus tepat, agar solusi pendekatannya dapat terlihat cukup bagus walaupun hanya menggunakan 10 iterasi. Secara umum, pengambilan baris awal permainan boleh di mulai dari baris manapun.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Pada ketiga studi kasus penerapan algoritma Brown pada teori permainan didapatkan solusi pendekatan nilai permainan tiap-tiap kasus adalah sebagai berikut:
   a. Kasus pertama pada bidang ekonomi didapatkan nilai permainannya adalah 1,9%. Sehingga dengan mempergunakan strategi campuran, kedua perusahaan tersebut telah dapat memperbaiki posisi mereka. Jadi dapat diketahui dari solusi pendekatan strategi optimal untuk perusahaan I dan perusahaan II, di mana perusahaan I dengan menggunakan strategi memperbaiki kemasan produk serta menambah promosi berupa hadiah langsung telah menaikkan keuntungan yang diharapkan dari 1% menjadi 1,9% dan perusahaan II dengan menggunakan strategi menambah promosi berupa hadiah langsung serta memberikan diskon telah mengurangi kerugian yang diharapkan dari 3% menjadi 1,9%.
   b. Kasus kedua pada bidang politik didapatkan nilai permainannya adalah 1,24%. Dengan mempergunakan strategi campuran, kedua pasangan telah memperbaiki posisi mereka. Jadi dapat diketahui solusi pendekatan strategi optimal untuk pasangan I dan pasangan II, di mana pasangan I dengan menggunakan strategi isu kampanye menaikkan gaji pegawai serta pemberantasan korupsi telah menaikkan keuntungan yang diharapkan dari 1% menjadi 1,24% dan pasangan II dengan menggunakan strategi isu kampanye memberikan pelayanan kesehatan, pendidikan gratis serta pemberantasan kemiskinan telah mengurangi kerugian yang diharapkan dari 2% menjadi 1,24%.
   c. Kasus Ketiga pada bidang militer didapatkan nilai permainannya adalah 1292 tentara. Dengan mempergunakan strategi campuran, kedua devisi telah memperbaiki posisi mereka. Jadi dapat diketahui dari solusi pendekatan strategi optimal devisi putih dan devisi merah, di mana devisi putih dengan menggunakan strategi serangan frontal serta serangan

melingkar telah menaikkan kemenangan yang diharapkan dari 1000 tentara menjadi 1292 tentara dan devisi merah dengan menggunakan strategi pertahanan wilayah serta pertahanan udara telah mengurangi kekalahan yang diharapkan dari 1600 tentara menjadi 1292 tentara.

2. Algoritma Brown merupakan salah satu metode penyelesaian teori permainan yang sangat baik digunakan untuk solusi komputasi. Secara umum pendekatan dari solusinya sangat bagus pada 500-1000 iterasi. Dan untuk memulai melakukan iterasi dapat di mulai dari baris manapun pada matriks *payoff*nya.

4.2 Saran

Pada penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan algoritma Brown dengan jumlah pemain lebih dari dua yaitu N pemain di mana $N \geq 3$.

DAFTAR PUSTAKA

Aminudin. 2005. *Prinsip-Prinsip Riset Operasi.* Jakarta : Erlangga.

Anton, H. 1991. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi kelima. Alih bahasa: Pantur Silaban dan Nyoman Susila. Jakarta : Erlangga.

Gillet, Billy L. 1976. *Introduction to Operations research: A Computer-Oriented Algorithmic Approach*. New York : McGraw-Hill Inc.

Hasan, Iqbal M. 2004. *Pokok-Pokok Materi Teori Pengambilan Keputusan*. Bogor : Ghalia Indonesia.

Siswanto. 2007. *Operations Research, jilid 2*. Jakarta : Erlangga.

Subagyo, P., Marwan Asri dan T. Hani Handoko. 1990. *Dasar-Dasar Operations Research*. Yogyakarta : BPFE.

Sutawidjaja, A. dan Sudirman. 2005. *Program Linear*. Penerbit Universitas Negeri Malang (UM PRESS). Malang.

Taha, Hamdy A. 1996. *Riset Operasi, jilid 2*. Edisi Kelima. Alih bahasa : Daniel Wirajaya. Jakarta : Binarupa Aksara.

LAMPIRAN

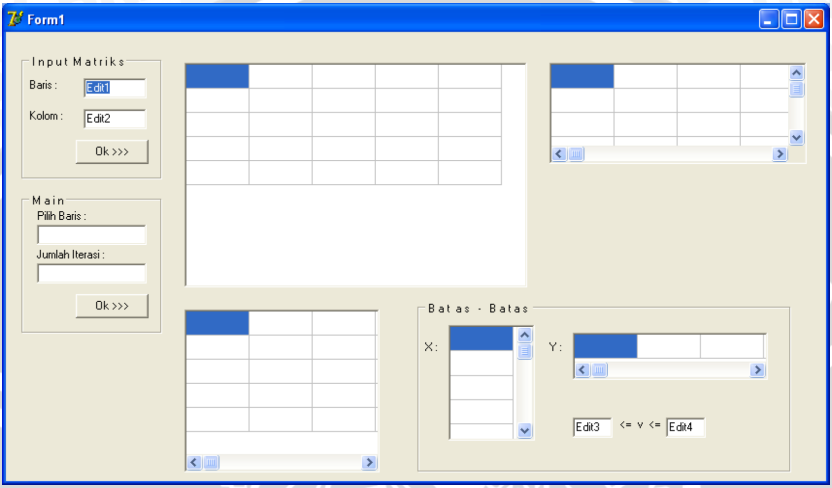
Lampiran 1. Listing Program Algoritma Brown Menggunakan Bahasa Pemrograman Delphi

```
unit Unit1;

interface

uses
  Windows,  Messages,  SysUtils,  Variants,  Classes,  Graphics,
Controls, Forms,
  Dialogs, Grids, StdCtrls, ExtCtrls;

type
  TForm1 = class(TForm)
    GroupBox1: TGroupBox;
    Edit1: TEdit;
    Edit2: TEdit;
    Label1: TLabel;
    Label2: TLabel;
    Button1: TButton;
    StringGrid1: TStringGrid;
    GroupBox2: TGroupBox;
    LabeledEdit1: TLabeledEdit;
    Button2: TButton;
    LabeledEdit2: TLabeledEdit;
    StringGrid2: TStringGrid;
    StringGrid3: TStringGrid;
    GroupBox3: TGroupBox;
    Label3: TLabel;
    StringGrid4: TStringGrid;
    Label4: TLabel;
    StringGrid5: TStringGrid;
    Edit3: TEdit;
    Label5: TLabel;
    Edit4: TEdit;
    procedure Button1Click(Sender: TObject);
    procedure Button2Click(Sender: TObject);
  private
    { Private declarations }
  public
    { Public declarations }
  end;

var
  Form1: TForm1;
  brs,klm,i,j,plhbrs,k,plhklm,iterasi:integer;
  cek1,cek2:real;
  A:array[0..1000, 0..1000] of real;
  B,C:array[0..1000] of integer;
```

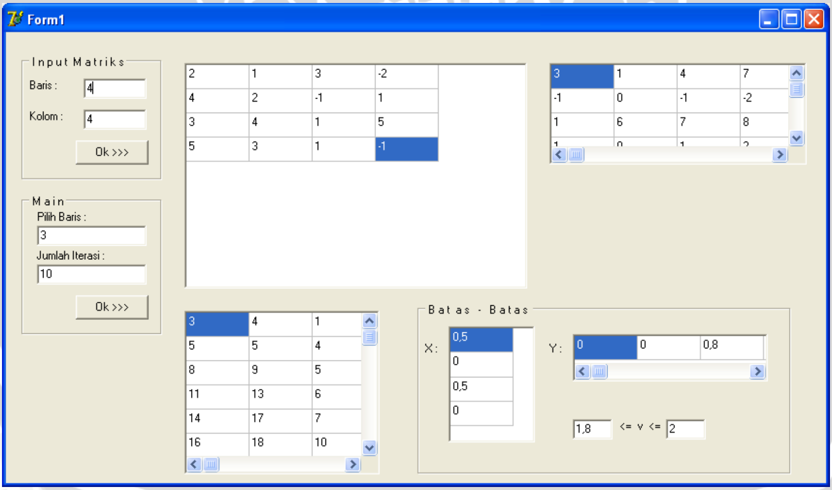
```
implementation
{$R *.dfm}

procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
begin
brs:=StrToInt(Edit1.Text);
klm:=StrToInt(Edit2.Text);
StringGrid1.RowCount:=brs;
StringGrid1.ColCount:=klm;
StringGrid2.ColCount:=klm;
StringGrid3.RowCount:=brs;
StringGrid4.RowCount:=brs;
StringGrid5.ColCount:=klm;
end;

procedure TForm1.Button2Click(Sender: TObject);
begin
for i:=0 to brs-1 do
 for j:=0 to klm-1 do
  A[j,i]:=StrToFloat(StringGrid1.Cells[j,i]);

plhbrs:=StrToInt(LabeledEdit1.Text)-1;
iterasi:=StrToInt(LabeledEdit2.Text);

for i:=0 to klm-1 do
 B[i]:=0;
for i:=0 to brs-1 do
 C[i]:=0;

for i:=0 to iterasi-1 do
 begin
 for j:=0 to klm-1 do
  if i=0 then
   StringGrid2.Cells[j,i]:=FloatToStr(A[j,plhbrs])
   else

StringGrid2.Cells[j,i]:=FloatToStr(A[j,plhbrs]+StrToFloat(StringG
rid2.Cells[j,i-1]));
 cek1:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[0,i]);
 plhklm:=0;
 for j:=0 to klm-1 do
  if cek1 > StrToFloat(StringGrid2.Cells[j,i]) then
   begin
   cek1:=StrToFloat(StringGrid2.Cells[j,i]);
   plhklm:=j;
   end;
 B[plhklm]:=B[plhklm]+1;

 for j:=0 to brs-1 do
  if i=0 then
   StringGrid3.Cells[i,j]:=FloatToStr(A[plhklm,j])
   else

StringGrid3.Cells[i,j]:=FloatToStr(A[plhklm,j]+StrToFloat(StringG
rid3.Cells[i-1,j]));
```

```
 cek2:=StrToFloat(StringGrid3.Cells[i,0]);
 plhbrs:=0;
 for j:=0 to brs-1 do
  if cek2 <= StrToFloat(StringGrid3.Cells[i,j]) then
   begin
   cek2:=StrToFloat(StringGrid3.Cells[i,j]);
   plhbrs:=j;
   end;
  C[plhbrs]:=C[plhbrs]+1;
 end;

StringGrid2.RowCount:=iterasi;
StringGrid3.ColCount:=iterasi;

for i:=0 to brs-1 do
 StringGrid4.Cells[0,i]:=FloatToStr(C[i]/iterasi);
for i:=0 to klm-1 do
 StringGrid5.Cells[i,0]:=FloatToStr(B[i]/iterasi);

Edit3.Text:=FloatToStr(StrToFloat(StringGrid2.Cells[plhklm,iteras
i-1])/iterasi);
Edit4.Text:=FloatToStr(StrToFloat(StringGrid3.Cells[iterasi-
1,plhbrs])/iterasi);
end;
end.
```

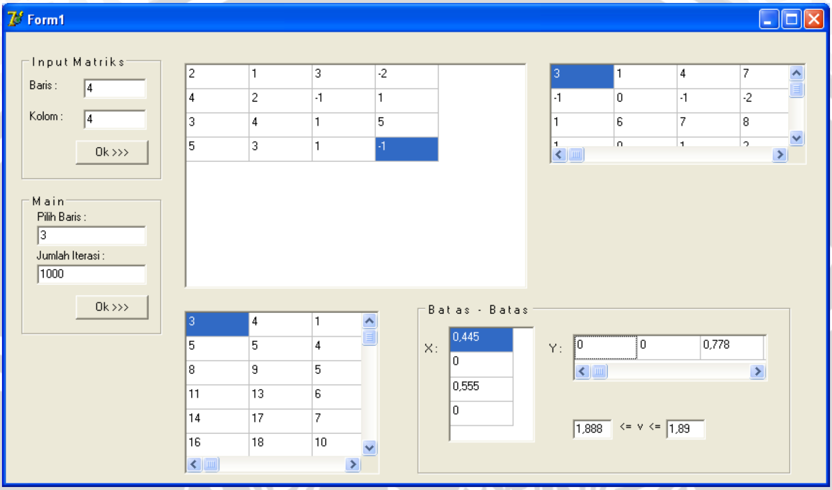
Lampiran 2. Desain *Interface* Program Algoritma Brown Menggunakan Bahasa Pemrograman Delphi



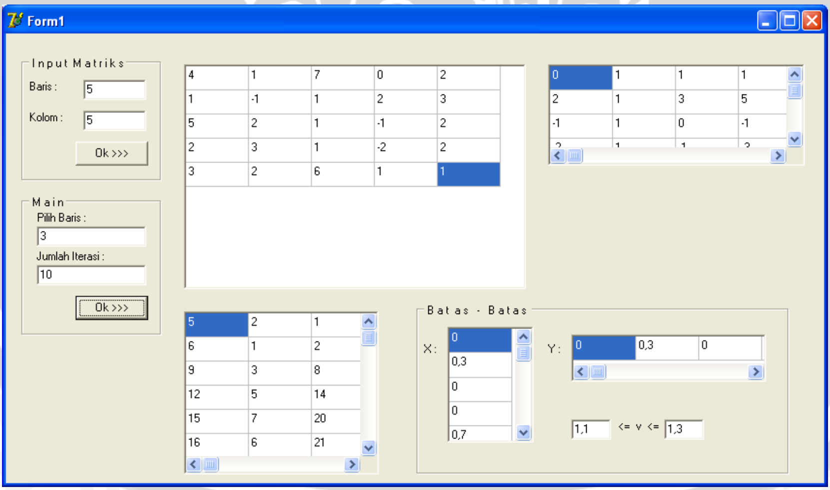
Lampiran 3. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 4×4 pada Iterasi ke-10



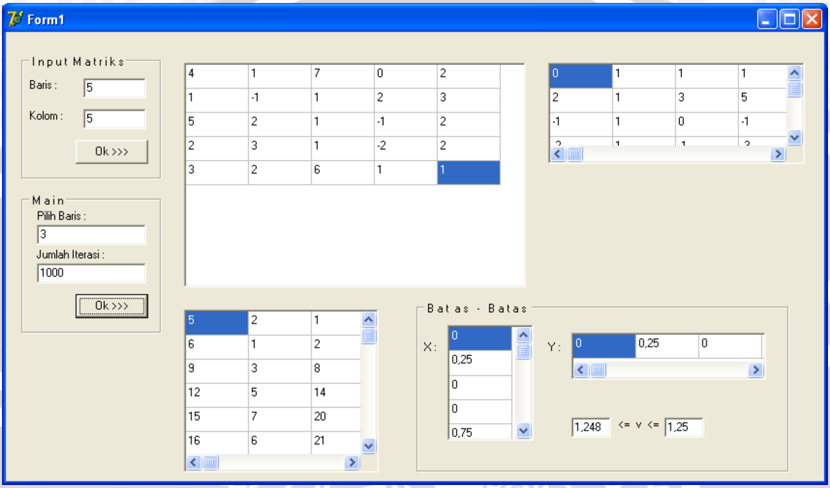
Lampiran 4. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 4×4 pada Iterasi ke-1000



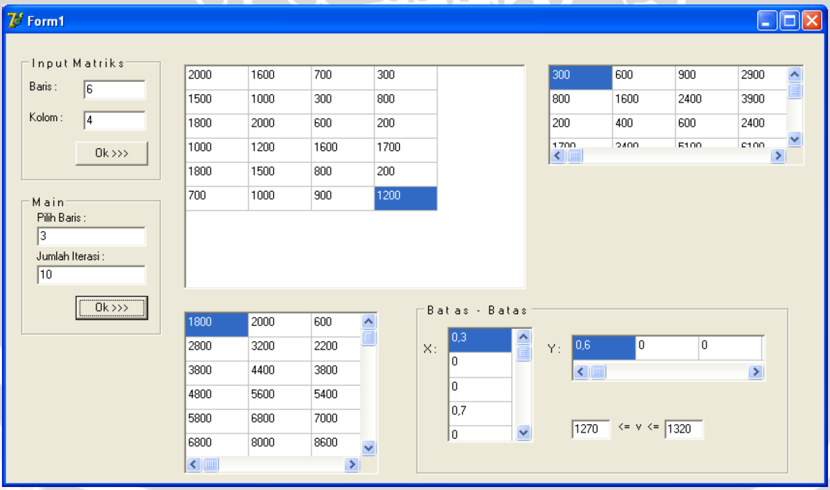
Lampiran 5. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 5×5 pada Iterasi ke-10



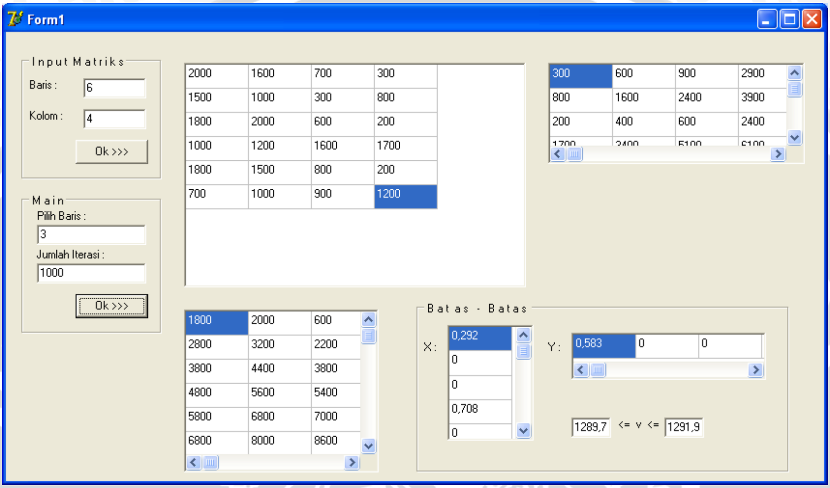
Lampiran 6. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 5×5 pada Iterasi ke-1000



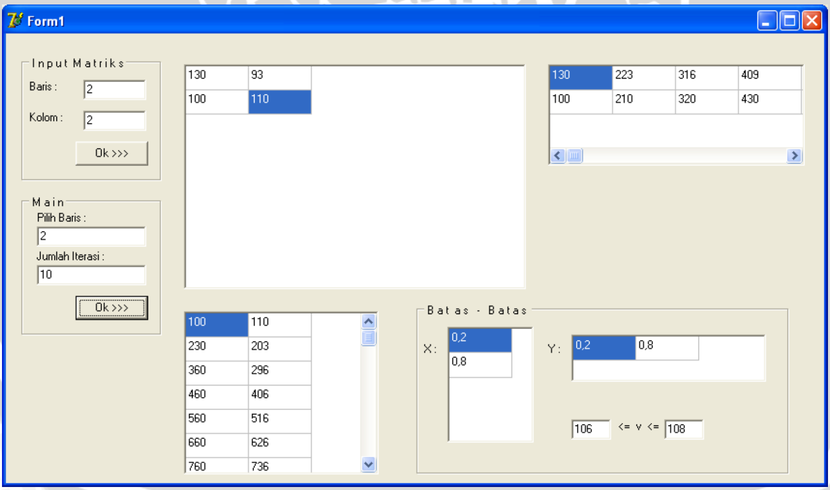
Lampiran 7. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 6×4 pada Iterasi ke-10



Lampiran 8. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 6×4 pada Iterasi ke-1000



Lampiran 9. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 2×2 pada Iterasi ke-10



Lampiran 10. Hasil Perhitungan Komputasi Matriks *Payoff* 2×2 pada Iterasi ke-1000