GENERALISASI INTEGRAL NEWTON

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:

NURUR ROHMAH
0610940044-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

GENERALISASI INTEGRAL NEWTON

Oleh:
NURUR ROHMAH
0610940044-94

Telah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 01 Nopember 2010
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Drs. M. Muslikh, M.Si	**Dr. Wuryansari M.K., M.Si**
NIP.195910311989121001	**NIP. 196607281993032001**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 196908071994121001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Nurur Rohmah**
NIM	**: 0610940044-94**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**: Generalisasi Integral Newton**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 01 Nopember 2010
Yang menyatakan,

(Nurur Rohmah)
NIM. 0610940044-94

GENERALISASI INTEGRAL NEWTON

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas generalisasi definisi integral Newton, yang diperoleh dengan cara memodifikasi integral Newton. Modifikasi dilakukan dengan mengubah persyaratan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$ menjadi $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$ kecuali di takberhingga banyaknya titik-titik $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam (a, b). Proses modifikasi tersebut menggunakan konsep *covering relation*. Meskipun pada modifikasi definisi integral Newton digunakan syarat yang lebih lemah namun dapat diperlihatkan bahwa fungsi yang memenuhi syarat tersebut tetap memenuhi definisi integral Newton.

Kata kunci: *Covering relation*, integral Newton, takberhingga titik.

THE GENERAL NEWTON INTEGRAL

ABSTRACT

This research concerns with generalization on the definition of Newton integral, which is obtained by modifying the definition of Newton integral. The modification is done by replacing the condition $F'(x) = f(x)$ for every $x \in (a, b)$ with $F'(x) = f(x)$ for every $x \in (a, b)$ except for infinite points of $e_1, e_2, e_3, \ldots$ in (a, b). The modification process needs definition of covering relation. It can be shown that the weaker condition in the modification still cover all the conditions in the definition of Newton integral.

Keywords : Covering relation, Newton integral, infinite point.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur ke hadirat Allah SWT yang telah memberikan bimbingan dan petunjuk-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan lancar. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan, bimbingan serta motivasi dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih kepada:

1. Drs. M. Muslikh, M.Si, selaku pembimbing I atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Wuryansari Muharini K., MSi, selaku pembimbing II, dosen penasehat akademik sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas segala bimbingan, nasihat, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
3. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc.,Ph.D, Dra. Ari Andari, MS, dan Kwardiniya A.,SSi.,MSi selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Seluruh bapak/ibu dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan ilmunya kepada penulis, serta segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
5. Bapak, Ibu, kakak-kakakku dan adikku tersayang atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan nasihat yang telah diberikan.
6. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis dengan senang hati menerima masukan, saran dan kritik yang membangun melalui email penulis nururrohmah.mathub@gmail.com. Akhir kata, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 01 Nopember 2010

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Rumusan Masalah

Penggunaan Teorema Dasar Kalkulus merupakan hal yang rutin dalam perhitungan integral baik di sekolah lanjutan atau di perguruan tinggi. Namun demikian, pelajar sering mengalami kesulitan dalam perhitungan integral, khususnya bila menghadapi fungsi-fungsi tertentu yang tidak mempunyai antiturunan.

Teorema Dasar Kalkulus menyatakan bahwa

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

jika f adalah fungsi real yang kontinu pada selang $[a,b]$ dan F adalah fungsi yang merupakan antiturunan dari f pada selang $[a,b]$, yaitu $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a,b)$.

Dalam teori integral, Teorema Dasar Kalkulus sering dianggap sebagai definisi deskriptif untuk fungsi-fungsi yang terintegralkan. Oleh karena itu Teorema tersebut sering disebut sebagai definisi Integral Newton atau dikenal pula sebagai definisi Integral Newton Klasik (Smithee, 2006:1).

Dalam definisi Integral Newton Klasik tersebut terdapat dua syarat penting. Pertama, fungsi f harus kontinu untuk setiap $x \in [a,b]$ dan yang ke dua adalah berlakunya kesamaan $F'(x) = f(x)$ pada selang (a,b).

Kedua persyaratan di atas telah dimodifikasi menjadi fungsi f terdefinisi pada (a,b) kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga dalam (a,b) dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a,b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga dalam (a,b) (Sari, 2009:26-29).

Dalam skripsi ini kedua persyaratan di atas dimodifikasi lebih lanjut sehingga keberlakuannya menjadi lebih umum, yaitu bagaimana jika fungsi real f terdefinisi pada (a,b) kecuali di titik-titik yang takberhingga banyaknya $e_1, e_2, e_3, ...$ dalam (a,b) dan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik takberhingga banyaknya $e_1, e_2, e_3, ...$ dalam (a,b).

1.2 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah memodifikasi definisi Integral Newton (klasik) menjadi lebih umum.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Fungsi Bernilai Real

Definisi 2.1.1 (Fungsi Bernilai Real)
Sebuah fungsi *f* adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap obyek *x* di suatu himpunan, yang disebut *daerah asal*, dengan sebuah nilai tunggal *f*(*x*) pada himpunan ke dua yang disebut daerah kawan. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut *daerah nilai* (jelajah) fungsi tersebut. Jika himpunan semua nilai fungsi adalah himpunan bagian dari himpunan bilangan real, maka fungsi tersebut dinamakan *fungsi bernilai real* atau disingkat dengan fungsi real (Purcell dan Varberg, 1991:44).

Fungsi yang dibahas selanjutnya adalah fungsi yang terdefinisi pada selang tertutup $[a, b] \subset \mathbb{R}$ atau selang terbuka $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

2.2 Limit dan Kekontinuan Fungsi

Definisi 2.2.1
Misalkan *f* sebuah fungsi yang terdefinisi pada selang (a, b) kecuali mungkin di suatu titik ξ. Dikatakan bahwa limit *f*(*x*) untuk *x* mendekati ξ adalah *L*, dan ditulis
$$\lim_{x \to \xi} f(x) = L$$
jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in (a, b)$ dengan $0 < |x - \xi| < \delta$ berlaku
$$|f(x) - L| < \varepsilon$$
(Leithold, 1992: 89-90).

Sifat 2.2.1 (Stewart, 2001: 93):
jika *L*, *M*, ξ dan *k* adalah bilangan real,
$$\lim_{x \to \xi} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to \xi} g(x) = M,$$
maka
1. $\lim_{x \to \xi} [kf(x)] = k \lim_{x \to \xi} f(x) = kL$
2. $\lim_{x \to \xi} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to \xi} f(x) \pm \lim_{x \to \xi} g(x) = L \pm M$
3. $\lim_{x \to \xi} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to \xi} f(x) \lim_{x \to \xi} g(x) = LM$

4. $\lim_{x\to\xi}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to\xi} f(x)}{\lim_{x\to\xi} g(x)} = \frac{L}{M}$, asalkan $M \neq 0$.

Berikut ini diberikan definisi dan sifat-sifat fungsi kontinu yang mengacu pada Bartle dan Sherbert, (1999).

Definisi 2.2.2
Suatu fungsi real f dikatakan kontinu di $\xi \in [a, b]$ jika $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ sehingga $\forall x \in [a, b]$ dengan $|x - \xi| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon.$$

Fungsi f dikatakan kontinu pada selang terbuka (a,b) jika fungsi real f kontinu di setiap titik dalam (a,b).

Teorema 2.2.1
Jika $E \subset \mathbb{R}$ adalah himpunan kompak, maka E tertutup dan terbatas.

Teorema 2.2.2
Misalkan E himpunan kompak dan $f: E \to \mathbb{R}$. Jika f kontinu pada E maka $f(E)$ kompak.

Teorema 2.2.3
Jika f adalah fungsi real yang kontinu pada selang kompak $[a, b]$ dan

$$M = \sup f(x) \text{ untuk } x \in [a, b],$$
$$m = \inf f(x) \text{ untuk } x \in [a, b],$$

maka terdapat p dan q di dalam $[a, b]$ sehingga $f(p) = M$ dan $f(q) = m$. Dengan kata lain f mencapai nilai maksimum di p dan nilai minimum di q pada $[a, b]$.

Bukti:
Karena f kontinu pada $[a, b]$ dan $[a, b]$ kompak, maka $f([a, b])$ kompak. Karena $f([a, b])$ kompak berarti $f([a, b])$ tertutup dan terbatas.
Karena $M = \sup f([a, b])$ dan $m = \inf f([a, b])$ maka

$$M \in f([a, b]) \text{ dan } m \in f([a, b]).$$

Jadi, terdapat $p \in [a, b]$ sehingga $f(p) = M$ dan $q \in [a, b]$ sehingga $f(q) = m$.

2.3 Turunan Fungsi

Dalam sub bab ini dibicarakan turunan fungsi bernilai real yang didefinisikan pada suatu selang di $\mathbb{R}$.

Definisi 2.3.1
Diberikan fungsi real *f* yang didefinisikan pada selang $[a, b]$ dan titik $\xi \in (a, b)$. Fungsi *f* dikatakan terdiferensial (*differentiable*) di titik ξ jika

$$\lim_{x \to \xi} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi}$$

ada dan selanjutnya nilai limit tersebut dinotasikan sebagai $f'(\xi)$ yang disebut turunan fungsi *f* di titik ξ.

Suatu fungsi dikatakan terdiferensial pada selang (a, b) jika ia terdiferensial di setiap titik dalam selang tersebut (Stewart, 2001: 159).

Teorema 2.3.1 (Teorema Fermat)
Misalkan fungsi real f kontinu pada selang terbuka (a, b) dan $\xi \in (a, b)$. Jika fungsi f mencapai nilai maksimum atau nilai minimum di ξ dan fungsi f terdiferensial di ξ maka $f'(\xi) = 0$.

Bukti:
Diasumsikan fungsi f mencapai nilai maksimum di ξ maka $\forall x \in (a, b)$ dengan $|x - \xi| < \delta$ berlaku $f(\xi) \geq f(x)$ atau $f(x) - f(\xi) \leq 0$.
Karena fungsi f terdiferensial di ξ, maka diperoleh

$$f'(\xi) = f'_{-}(\xi) = \lim_{x \to \xi^{-}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

dan

$$f'(\xi) = f'_{+}(\xi) = \lim_{x \to \xi^{+}} \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0.$$

Ini mengakibatkan $f'(\xi) \leq 0 \leq f'(\xi)$ sehingga $f'(\xi) = 0$.
Dengan cara yang sama dapat digunakan untuk membuktikan bila fungsi *f* mencapai nilai minimum (Leithold, 1992:279).

Teorema 2.3.2 (Teorema Rolle)
Misalkan fungsi real *f* memenuhi tiga hipotesis berikut

i. f kontinu pada $[a,b]$

ii. f terdiferensial pada (a,b)

iii. $f(a) = f(b)$

maka terdapat $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(\xi) = 0$.

Bukti:

Di sini terdapat tiga kasus, yaitu $f(x) = k$, $f(x) > f(a)$, atau $f(x) < f(a)\ \forall x \in (a, b)$.

Jika $f(x) = k$, maka $f'(x) = 0\ \ \forall x \in (a, b)$. Jika dipilih $x = \xi \in (a, b)$, maka $f'(\xi) = 0$.

Jika $f(x) > f(a)\ \ \forall x \in (a, b)$, maka menurut Teorema 2.2.3, f mempunyai nilai maksimum pada $[a, b]$, sebab f kontinu pada $[a, b]$. Dari hipotesis (iii) diketahui bahwa $f(a) = f(b)$, sehingga f akan mempunyai nilai maksimum untuk suatu ξ pada (a, b). Karena $f'(\xi)$ ada berdasarkan (ii), maka menurut Teorema 2.3.1, $f'(\xi) = 0$.

Jika $f(x) < f(a)\ \ \forall x \in (a, b)$, maka menurut Teorema 2.2.3, f mempunyai nilai minimum pada $[a, b]$, sebab f kontinu pada $[a, b]$. Dari hipotesis (iii) diketahui bahwa $f(a) = f(b)$, sehingga f akan mempunyai nilai minimum untuk suatu ξ pada (a, b). Karena $f'(\xi)$ ada berdasarkan (ii), maka menurut Teorema 2.3.1 $f'(\xi) = 0$ (Stewart, 2001:261-262).

Teorema 2.3.3 (Teorema Nilai Rata-rata)

Jika fungsi real f terdiferensial pada selang terbuka (a,b) dan f kontinu pada $[a,b]$ maka terdapat titik $\xi \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

Bukti:

Misalkan fungsi F didefinisikan pada $[a,b]$ sebagai

$$F(x) = f(x) - kx \text{ , untuk setiap } x \in [a,b]$$

dengan k konstanta.

Karena f kontinu pada $[a, b]$ dan f terdiferensial pada (a,b), maka F juga kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a,b).

Jika $F(a) = F(b)$ maka

$$f(a) - ka = f(b) - kb$$
$$f(b) - f(a) = kb - ka$$
$$f(b) - f(a) = k(b - a)$$

$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Menurut Teorema Rolle, terdapat $\xi \in (a, b)$ dan $F'(\xi) = 0$. Hal ini berkibat

$$F'(\xi) = f'(\xi) - k = 0.$$

Karena $k = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$,

maka

$$f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

atau

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Jadi terbukti $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$
(Purcell dan Varberg, 1991:221).

2.4 Integral

Newton mendefinisikan integral sebagai antiturunan (*invers derivatif*).

Definisi 2.4.1

Fungsi $F: (a, b) \to \mathbb{R}$ disebut antiturunan dari f pada selang (a, b) jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam (a, b) (Smithee, 2006:1).

Fungsi *F* yang memenuhi Definisi 2.4.1 disebut juga sebagai integral taktentu dari *f*.

Definisi 2.4.2

Jika *f* suatu fungsi kontinu pada selang $[a, b]$ dan F integral taktentu f pada $[a, b]$ maka $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tentu *f* pada selang $[a, b]$, dan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(Smithee, 2006:1).

Definisi 2.4.2 dikenal sebagai Teorema Dasar Kalkulus atau Teorema Hitung Integral.

2.5 *Covering relation*

Berikut ini diberikan definisi, teorema, dan lemma dari *covering relation*, *full cover*, dan *cousin cover* yang mengacu pada Smithee, (2006).

Definisi 2.5.1
Koleksi pasangan selang-titik $([c,d],x)$ dimana selang $[c,d]$ kompak dan $x \in [c,d]$ disebut *covering relation* dan dapat dinyatakan sebagai himpunan

$$\beta = \{([c,d],x) | c \leq x \leq d,\ [c,d] \text{ kompak}\}.$$

Contoh 2.5.1a
Partisi selang [*a*,*b*] dengan

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

maka koleksi pasangan selang-titik

$$\beta = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) |\ t_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \ldots n\}$$

merupakan *covering relation*, sebab selang $[x_{i-1}, x_i]$ kompak dan $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap *i* =1,2, ..., *n*.

Contoh 2.5.1b
Pasangan selang-titik

$$\beta = \{([-1,1], -1), ([-1,1], 0), ([-1,1], 1/2), ([-1,1], 1)\}$$

merupakan *covering relation*, sebab selang [-1,1] kompak dan titik-titik -1, 0, ½ dan 1 di dalam [-1,1].

Contoh 2.5.1c
Koleksi pasangan selang-titik

$$\beta = \{([-1/n, 1/n], 0) |\ n \in \mathbb{N}\}$$

merupakan *covering relation*, sebab selang $[-1/n, 1/n]$ kompak dan $0 \in [-1/n, 1/n]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.5.2
Covering relation β disebut *full* di titik x_0 jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga semua pasangan $([c,d], x_0) \in \beta$ untuk $0 < d - c < \delta$ dan $x_0 \in [c,d]$.

Covering relation β dikatakan *full cover* pada himpunan E jika β *full* di setiap titik $x \in E$.

Contoh 2.5.2
Diberikan *covering relation*

a. $\beta = \{([-1/n, 1/n], 0) | \, n \in \mathbb{N}\}$
b. $\gamma = \{([0, 1/n], x) | \, 0 \leq x \leq 1/n \text{ dan } n \in \mathbb{N}\}$

maka β *full* di titik *x* = 0 dan γ tidak *full* di *x* = ¾.

Bukti:
Untuk bagian (a) dipilih $\delta = 3$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku $1/n - (-1/n) = 2/n < 3 = \delta$. Karena untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, pasangan $([-1/n, 1/n], 0) \in \beta$, terbukti β *full* di *x* = 0.

Untuk bagian (b) diambil sebarang $\delta > 0$, maka menurut sifat Archimides terdapat bilangan $n \in \mathbb{N}$ dan $n > 1/\delta$ atau $1/n < \delta$. Pilih selang $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ yang memuat $\frac{3}{4}$ dan terdapat $n = 2 \in \mathbb{N}$ sehingga $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < \delta$. Akan tetapi pasangan selang-titik $\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right], \frac{3}{4}\right)$ bukan anggota γ. Jadi γ tidak *full* di $x = \frac{3}{4}$.

Definisi 2.5.3
Diberikan *covering relation*
$$\beta_1 = \{([c_1, d_1], x) | c_1 \leq x \leq d_1\}$$
dan
$$\beta_2 = \{([c_2, d_2], x) | c_2 \leq x \leq d_2\}.$$
Irisan β_1 dengan β_2 adalah himpunan
$$\beta_1 \cap \beta_2 = \{([c, d], x) | [c, d] = [c_1, d_1] \cap [c_2, d_2], c \leq x \leq d\}.$$

Contoh 2.5.3
Diberikan *covering relation*
$$\beta_1 = \{([-4,3], 1) | 1 \in [-4,3]\}$$
dan
$$\beta_2 = \{([-1,5], 1) | 1 \in [-1,5]\},$$
irisan β_1 dengan β_2 adalah
$$\beta_1 \cap \beta_2 = \{([-1,3], 1) | [-1,3] = [-4,3] \cap [-1,5], 1 \in [-1,3]\}.$$

Definisi 2.5.4
Diberikan *covering relation*
$$\beta_1 : \{([c_1, d_1], x) | c_1 \leq x \leq d_1\}$$
dan
$$\beta_2 : \{([c_2, d_2], x) | c_2 \leq x \leq d_2\}.$$

Gabungan β_1 dengan β_2 adalah himpunan

$$\beta_1 \cup \beta_2 = \{([c,d],x)|[c,d] = [c_1,d_1] \cup [c_2,d_2], c \leq x \leq d\}.$$

Contoh 2.5.4

Diberikan *covering relation*

$$\beta_1 = \{([-4,3],1)|1 \in [-4,3]\}$$

dan

$$\beta_2 = \{([-1,5],1)|1 \in [-1,5]\},$$

gabungan β_1 dengan β_2 adalah

$$\beta_1 \cup \beta_2 = \{([-4,5],1)|[-4,5] = [-4,3] \cup [-1,5], 1 \in [-4,5]\}.$$

Teorema 2.5.1

Jika $\beta_1 = \left\{([c_1,d_1],x_0)\middle|c_1 \leq x_0 \leq d_1, d_1 - c_1 < \delta_1\right\}$ dan $\beta_2 = \{([c_2,d_2],x_0)|c_2 \leq x_0 \leq d_2, d_2 - c_2 < \delta_2\}$ *full* di titik x_0 maka $\beta_1 \cup \beta_2$ *full* di x_0.

Bukti:

β_1 *full* di x_0 maka terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga untuk $0 < d_1 - c_1 < \delta_1$ dan $x_0 \in [c_1,d_1]$, semua pasangan $([c_1,d_1],x_0) \in \beta_1$.

β_2 *full* di x_0 maka terdapat $\delta_2 > 0$ sedemikian sehingga untuk $0 < d_2 - c_2 < \delta_2$ dan $x_0 \in [c_2,d_2]$, semua pasangan $([c_2,d_2],x_0) \in \beta_2$.

Misal $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$,

karena $x_0 \in [c_1,d_1]$ dan $x_0 \in [c_2,d_2]$ maka $x_0 \in [c_1,d_1] \cup [c_2,d_2] = [c,d]$,

dipilih

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 > 0$$

maka $0 < d - c < \delta$ dan $([c,d],x_0) \in \beta$.

Jadi terbukti β *full* di x_0.

Teorema 2.5.2

Jika $\beta_1 = \left\{([c_1,d_1],x)\middle|c_1 \leq x \leq d_1, d_1 - c_1 < \delta_1\right\}$ dan $\beta_2 = \{([c_2,d_2],x)|c_2 \leq x \leq d_2, d_2 - c_2 < \delta_2\}$ *full cover* pada himpunan E maka $\beta_1 \cup \beta_2$ *full cover* pada E.

Bukti:

Ambil sebarang $x \in E$, menurut Teorema 2.5.1 $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ *full* di x.

Karena x sebarang di E maka β *full cover* pada E.

Pada teorema berikut ini, kekontinuan dan keterdiferensialan fungsi pada himpunan E dapat disajikan melalui *covering relation*.

Teorema 2.5.3
Jika $F: E \to \mathbb{R}$ kontinu di $x_0 \in E$, dan

$$\beta = \{([c,d],x_0): c \leq x_0 \leq d, |F(d) - F(c)| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

maka β *full* di x_0.

Bukti:
Ambil $\varepsilon > 0$, karena F kontinu di x_0 maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\forall x \in E$ dengan $|x - x_0| < \delta$ berlaku

$$|F(x) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jika $x_0 \in [c,d] \subset E$ dan $0 < d - c < \delta$ maka $x_0 - c < \delta$ dan $d - x_0 < \delta$.
Karena F kontinu di x_0, maka berlaku

$$|F(x_0) - F(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$|F(d) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} |F(d) - F(c)| &= |F(d) - F(x_0) + F(x_0) - F(c)| \\ &\leq |F(d) - F(x_0)| + |F(x_0) - F(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa semua pasangan $([c,d],x_0) \in \beta$, dimana $0 < d - c < \delta$ dan $x_0 \in [c,d]$. Jadi β *full* di x_0.

Teorema 2.5.4
Jika $F: E \to \mathbb{R}$ kontinu pada E, dan

$$\beta = \{([c,d],x): c \leq x \leq d, |F(d) - F(c)| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$$

maka β *full cover* pada E.

Bukti:
Ambil $x \in E$, menurut Teorema 2.5.3 β *full* di x.
Karena x sebarang di E maka β *full cover* pada E.

Teorema 2.5.5
Jika $F: E \to \mathbb{R}$ terdiferensial di $x_0 \in E$, dan

$$\beta = \{([c,d],x_0): c \le x_0 \le d, |F(d) - F(c) - F'(x_0)(d-c)| < \varepsilon(d-c), \varepsilon > 0\}$$

maka β *full* di x_0.

Bukti:

Ambil $\varepsilon > 0$, karena F terdiferensial di x_0 maka terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga

$\forall x \in E$ dengan $|x - x_0| < \delta$ berlaku

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - F'(x_0)\right| < \varepsilon$$

atau

$$|F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x - x_0)| \le \varepsilon|x - x_0|.$$

Jika $x_0 \in [c,d] \subset E$ dan $0 < d - c < \delta$, maka $x_0 - c < \delta$ dan $d - x_0 < \delta$.

Karena F terdiferensial di x_0, maka berlaku

$$|F(x_0) - F(c) - F'(x_0)(x_0 - c)| \le \varepsilon|x_0 - c|$$

dan

$$|F(d) - F(x_0) - F'(x_0)(d - x_0)| \le \varepsilon|d - x_0|.$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
&|F(d) - F(c) - F'(x_0)(d-c)| \\
&= |F(d) - F(x_0) + F(x_0) - F(c) - F'(x_0)(d - x_0 + x_0 - c)| \\
&= |F(d) - F(x_0) + F(x_0) - F(c) - F'(x_0)(d - x_0) + F'(x_0)(x_0 - c)| \\
&\le |F(d) - F(x_0) - F'(x_0)(d - x_0)| + |F(x_0) - F(c) - F'(x_0)(x_0 - c)| \\
&\le \varepsilon|d - x_0| + \varepsilon|x_0 - c| = \varepsilon(|d - x_0| + |x_0 - c|) \\
&\le \varepsilon\{(d - x_0) + (x_0 - c)\} = \varepsilon(d - c) \\
&\le \varepsilon|d - c|.
\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa semua pasangan $([c,d],x_0) \in \beta$, dimana $0 < d - c < \delta$ dan $x_0 \in [c,d]$. Jadi β *full* di x_0.

Teorema 2.5.6

Jika $F: E \to \mathbb{R}$ terdiferensial di setiap titik anggota E, dan

$$\beta = \{([c,d],x): x \in [c,d] \subset E, |F(d) - F(c) - F'(x)(d-c)| < \varepsilon(d-c), \varepsilon > 0\}$$

maka β *full cover* pada E.

Bukti:
Ambil sebarang $x \in E$, menurut Teorema 2.5.5 β *full* di x.
Karena $x \in E$ sebarang, maka β *full cover* pada himpunan E.

Definisi 2.5.5
Covering relation β pada selang $[a, b]$ disebut *cousin cover* pada selang $[a, b]$ jika setiap titik x di $[a, b]$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga semua pasangan $([c, d], x) \in \beta$ dimana $c \leq x \leq d$, $[c, d] \subset [a, b]$, dan $0 < d - c < \delta$.

Contoh 2.5.5
Partisi selang [*a*,*b*] dengan
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$
dan barisan sub selang $[a, b] \supset [x_{i-1}, x_{i-1}] \supset \cdots [x_i, x_i]$ maka terdapat $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, n$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga koleksi pasangan selang-titik
$$\beta = \{([x_{i-1}, x_i], t_i) |\, t_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2, \dots n\}$$
merupakan *cousin cover* pada $[a, b]$.

Berikut ini akan diberikan Lemma eksistensi *cousin cover* pada selang $[a, b]$. Untuk membuktikan Lemma tersebut diperlukan Lemma berikut.

Lemma 2.5.1 (*Nested Interval*)
Jika $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$ adalah barisan *nested* pada selang kompak dan mempunyai limit jarak
$$\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$$
maka terdapat $z \in [a_n, b_n]$ untuk setiap n.

Lemma 2.5.2 (Eksistensi *Cousin Cover*)
Misal β adalah *full cover* pada $[a, b]$ maka β memuat suatu partisi π pada $[a, b]$, yaitu
$$\pi = \{([a_i, b_i], \xi_i) \colon i = 1,2, \dots, n\} \subset \beta$$
sedemikian sehingga selang $[a_i, b_i]$ tidak tumpang tindih dan membentuk selang $[a, b]$.
Bukti:
Andaikan β tidak memuat partisi pada $[a, b]$, maka β juga tidak memuat partisi pada sub selang $[a, b]$.
Pilih sub selang $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ dengan

$$(b_1 - a_1) \leq \frac{1}{2}(b - a).$$

Selanjutnya, pilih $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ dengan

$$(b_2 - a_2) \leq \frac{1}{2}(b_1 - a_1) \leq \frac{1}{2^2}(b - a)$$

dan seterusnya.

Untuk sub selang $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$ mempunyai jarak

$$(b_n - a_n) \leq \frac{1}{2^n}(b - a)$$

membentuk barisan sub selang

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$$

sedemikian sehingga β tidak memuat partisi pada $[a_n, b_n]$ untuk setiap n.

Sesuai Lemma 2.5.1, maka terdapat $z \in [a_n, b_n]$ untuk setiap n.

Karena β *full cover* maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga β memuat pasangan $([a_n, b_n], z)$ dengan $[a_n, b_n]$ kompak $\subset [a, b]$ dan $|b_n - a_n| < \delta$. Dengan demikian β memuat semua $([a_n, b_n], z)$, untuk n yang cukup besar maka $(b_n - a_n) < \delta$.

Himpunan $\pi = \{([a_n, b_n], z)\}$ mengandung elemen tunggal z yang merupakan partisi dari $[a, b]$, sehingga β memuat partisi.

Hal ini kontradiksi dengan pengandaian, jadi β harus memuat partisi pada $[a, b]$.

Lemma 2.5.3

Diberikan $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan barisan $\langle e_i \rangle \subset [a, b]$.

Jika $F'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik $e_1, e_2, e_3, \ldots$, maka F fungsi konstan.

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Dimisalkan $E_1 = [a, b] \backslash (e_1, e_2, e_3, \ldots)$ sehingga $F'(x) = 0$ untuk setiap $x \in E_1$.

Ambil *covering relation*

$$\beta_1 = \left\{([c, d], x): a < c \leq x \leq d < b, x \in E_1, \text{dan } |F(d) - F(c)| < \frac{\varepsilon}{2n}, \varepsilon > 0\right\}.$$

Karena F kontinu pada $[a, b]$, maka β_1 *full cover* pada E_1.

Dimisalkan $E_2 = e_1, e_2, e_3, \ldots \subset [a, b]$.

Ambil sebarang *covering relaion*

$\beta_2 = \left\{([e,f],e_i): e \le e_i \le f \text{ dan } |F(f) - F(e)| < \varepsilon 2^{-1-i}, \varepsilon > 0\right\}$.

Karena F kontinu pada $[a,b]$, maka β_2 *full cover* pada E_2.

Menurut Lemma 2.5.2, karena $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ *full cover* pada $[a,b] = E_1 \cup E_2$ maka terdapat partisi $\pi \subset \beta$ pada $[a,b]$ dengan

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Penjumlahan terhadap partisi π diperoleh

$$(\pi)\sum_{i=1}^{n-1} F(x_{i+1}) - F(x_i) = F(b) - F(a)$$

sehingga

$$|F(b) - F(a)| = \left|(\pi)\sum_{i=1}^{n-1}[F(x_{i+1}) - F(x_i)]\right|$$

$$\le (\pi)\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1}) - F(x_i)|.$$

Karena $\pi = \{(x_i, x_{i+1}), \xi_i\} \subset \beta = \beta_1 \cup \beta_2$ maka

$$|F(b) - F(a)| = (\pi)\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1}) - F(x_i)|$$

$$= (\beta_1)\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1}) - F(x_i)| + (\beta_2)\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1}) - F(x_i)|. \quad (2.1)$$

Karena

$$(\beta_1)\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2n} = n\frac{\varepsilon}{2n} = \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$(\beta_2)\sum_{i=1}^{n-1}|F(x_{i+1}) - F(x_i)| \le (\beta_2)\sum_{i=1}^{\infty}|F(x_{i+1}) - F(x_i)| < \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{1+i}}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{\varepsilon}{2}$$

maka dari persamaan (2.1) diperoleh

$$|F(b) - F(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Untuk $\varepsilon > 0$ sebarang maka $F(b) = F(a)$.

Jadi, terbukti bahwa F konstan pada $[a,b]$.

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Integral Newton Klasik

Pendefinisian integral dapat dilakukan melalui dua cara, yaitu secara deskriptif dan konstruktif. Newton mendefinisikan integral sebagai antiturunan (integral taktentu). Pendefinisian ini dikenal sebagai definisi deskriptif. Sementara itu Riemann mendefinisikan integral dengan mengambil jumlah dan kemudian dilimitkan. Cara ini dikenal dengan cara konstruktif.

Definisi 3.1.1
Diberikan fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan terintegral Newton pada $[a, b]$ jika terdapat fungsi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$. Fungsi F disebut integral taktentu dari f pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

disebut integral tentu f pada $[a, b]$ (Peng-Yee, 1989).

Dengan definisi di atas diperlukan pengetahuan, bagaimana cara menentukan integral taktentu F dari fungsi f pada $[a, b]$? Apabila F telah ditemukan, kemudian diselidiki apakah F kontinu pada $[a, b]$? Selanjutnya diperiksa apakah

$$F'(x) = f(x)$$

untuk setiap $x \in (a, b)$?
Langkah terakhir yang dilakukan adalah menghitung $F(b) - F(a)$.

Keberadaan integral taktentu F tidak tunggal. Hal ini diperlihatkan antara lain oleh Lemma 3.1.2 di bawah. Untuk keperluan pembuktian, terlebih dahulu diperlihatkan lemma berikut ini.

Lemma 3.1.1
Jika fungsi F kontinu pada selang $[a, b]$ dan $F'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$, maka F merupakan fungsi konstan pada selang $[a, b]$.

Bukti:
Andaikan F bukan fungsi konstan pada selang $[a, b]$, maka terdapat dua bilangan x_1 dan x_2 pada $[a, b]$ dengan $x_1 < x_2$ sehingga
$$F(x_1) \neq F(x_2).$$
Karena $F'(x) = 0$ untuk setiap x dalam (a, b) maka berlaku juga untuk setiap x di dalam $[x_1, x_2] \subset (a, b)$.
Diketahui F terdeferensial pada selang $[a, b]$ maka juga terdeferensial pada selang bagian (x_1, x_2), sehingga menurut Teorema Nilai Rata-rata terdapat ξ dengan $x_1 < \xi < x_2$, dan berlaku
$$F^{'}(\xi) = \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2}. \tag{3.1}$$
Karena $F'(x) = 0$ untuk setiap x dalam (x_1, x_2) dan $\xi \in (x_1, x_2)$, maka $F'(\xi) = 0$. Dari persamaan (3.1) diperoleh $F(x_1) = F(x_2)$. Hasil ini kontradiksi dengan $F(x_1) \neq F(x_2)$. Jadi haruslah F fungsi konstan pada $[a, b]$ (Leithold, 1992:386).

Lemma 3.1.2
Jika f mempunyai integral taktentu pada suatu selang $[a, b]$ maka integral taktentu tersebut lebih dari satu. Artinya jika F adalah salah satu integral taktentu dari f maka $F + k$ (k konstanta) juga integral taktentu dari f pada suatu selang $[a, b]$.

Bukti:
Misalkan G suatu integral taktentu dari f pada $[a, b]$, maka
$$G'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b). \tag{3.2}$$
Karena F merupakan integral taktentu dari f pada $[a, b]$, maka
$$F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b). \tag{3.3}$$
Dari persamaan (3.2) dan (3.3) berlaku
$$G'(x) = F'(x), \qquad \forall x \in (a, b).$$
Dimisalkan
$$H(x) = G(x) - F(x), \qquad \forall x \in (a, b),$$
oleh karena itu,
$$H'(x) = G'(x) - F'(x),\ \forall x \in (a, b).$$
Karena $G'(x) = F'(x)$ maka $H'(x) = 0$.
Dengan menerapkan Lemma 3.1.1 pada H, maka terdapat konstanta k sedemikian sehingga
$$H(x) = k, \qquad \forall x \in [a, b]$$
akibatnya,
$$G(x) = F(x) + k.$$

Karena G menyatakan sebarang integral taktentu dari f pada $[a, b]$, maka semua integral taktentu dapat diperoleh dari $F(x) + k$ dengan k sebarang konstanta (Leithold, 1992:387).

Definisi 3.1.1 menyatakan situasi tertentu dengan menggunakan “integral taktentu” dan “integral tentu”, tidak menyatakan bagaimana fungsi f yang diberikan memiliki atau tidak memiliki salah satu dari integral taktentu atau integral tentu.

Pernyataan berikut merupakan istilah lain dari integral Newton Klasik. Secara faktual definisi integral Newton Klasik menyatakan adanya integral taktentu F dari fungsi f. Sementara itu eksistensi F dapat dinyatakan sebagaimana Lemma berikut.

Lemma 3.1.3
Jika F dan G fungsi kontinu pada selang $[a,b]$ dan $F'(x) = G'(x)$ untuk setiap $a < x < b$ maka
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Bukti:
Dimisalkan fungsi H sebagai berikut
$$H = F - G.$$
Karena F dan G kontinu pada $[a,b]$ maka H juga kontinu pada $[a,b]$.
Diketahui $F'(x) = G'(x), \forall x \in (a, b)$ maka $H'(x) = 0, \forall x \in (a, b)$.
Menurut Teorema Nilai Rata-rata terdapat $t \in (a, b)$ dan
$$H(b) - H(a) = H'(t)\,(b - a)$$
karena $t \in (a, b)$ dan $H'(t) = 0$ maka
$$H(b) - H(a) = 0.$$
Karena $H = F - G$, maka berlaku
$$H(b) - H(a) = \big(F(b) - G(b)\big) - \big(F(a) - G(a)\big).$$
Terbukti bahwa
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$
(Smithee, 2006:2).

Lemma di atas menyatakan suatu fungsi dapat memiliki banyak integral taktentu namun hanya memiliki satu integral tentu
$$\int_a^b f(x)dx$$

yang dapat dihitung dengan mengambil salah satu integral taktentu F dan kemudian menghitung nilai $F(b) - F(a)$.

Fakta di atas dapat diperluas dengan mengganti persyaratan $F'(x) = G'(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$ menjadi untuk semua $x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga di dalam (a, b). Berikut Lemma yang menyatakan hal tersebut.

Lemma 3.1.4

Diberikan fungsi-fungsi real F dan G kontinu pada $[a, b]$. Jika $F'(x) = G'(x)$, $\forall x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga di dalam $[a, b]$ maka

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Bukti:

Dimisalkan untuk $i = 1,2, .., n$, $t_i \in (a, b)$ dengan

$$a < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < b,$$

dan

$$F'(t_i) \neq G'(t_i)$$

untuk $i = 1,2, .., n$.

Berdasarkan yang diketahui maka untuk setiap $i = 1,2, .., n - 1$ dan $x \in (t_i, t_{i+1})$ berlaku

$$F'(x) = G'(x).$$

Menurut Lemma 3.1.3 untuk setiap $i = 1,2, .., n - 1$ dan $x_i \neq t_i \in (a, b)$ berlaku

$$F(x_1) - F(a) = G(x_1) - G(a), \tag{3.4}$$

$$F(x_2) - F(x_1) = G(x_2) - G(x_1), \tag{3.5}$$

$$F(x_3) - F(x_2) = G(x_3) - G(x_2), \tag{3.6}$$

$$\vdots$$

$$F(b) - F(x_{n-1}) = G(b) - G(x_{n-1}). \tag{3.7}$$

Jika persamaan (3.4), (3.5), sampai dengan (3.7) dijumlahkan dan $x_0 = a, x_n = b$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) - G(x_{i-1})$$

$$F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$
$$G(x_1) - G(x_0) + G(x_2) - G(x_1) + \cdots + G(x_n) - G(x_{n-1}).$$

Karena nilai-nilai $F(x_i)$ dan $G(x_i)$ dalam persamaan di atas saling menghilangkan untuk setiap $i = 1,2, .., n - 1$, maka

$$F(x_n) - F(x_0) = G(x_n) - G(x_0)$$
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$
Dengan demikian Lemma terbukti (Smithee, 2006:3).

Dengan berlakunya Lemma 3.1.4 di atas, definisi Integral Newton Klasik (Definisi 3.1.1) dapat dikembangkan untuk $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga di dalam (a, b), apabila F adalah integral taktentu dari f pada $[a, b]$. Oleh karena itu berdasarkan Lemma 3.1.4, Definisi 3.1.1 dapat diperluas sebagaimana definisi berikut.

Definisi 3.1.2
Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang (a, b) kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga di dalam (a, b). Fungsi f dikatakan terintegral Newton-I pada $[a, b]$ jika terdapat fungsi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya berhingga di dalam (a, b) dan
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
disebut integral tentu f pada $[a.b]$ (Smithee, 2006:3).

Berikut ini sebuah contoh yang memenuhi kriteria Definisi 3.1.2.

Contoh 3.1.2
Diberikan $f: (-1,4) \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$, $\forall x \neq 0 \in (-1,4)$.
Hitunglah $\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$?

Penyelesaian:
Untuk fungsi di atas $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ dapat ditentukan integral taktentu f pada $[-1,4]$ sebagai berikut
$$F(x) = \begin{cases} -2\sqrt{-x} & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 2\sqrt{x} & , \quad 0 < x \leq 4 \end{cases}.$$
Fungsi F kontinu pada $[-1,4]$. Dalam hal ini cukup ditinjau kekontinuan di $x = 0$ yaitu
$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = \lim_{x \to 0^-} -2\sqrt{-x} = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} = 0.$$

Karena

$$\lim_{x \to 0^-} F(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} F(x)$$

maka F kontinu pada $[-1,4]$.

Tampak bahwa $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}} = f(x),\ \forall x \in (-1,4)$ kecuali di $x = 0$.

Berdasarkan Definisi 3.1.2 diperoleh

$$\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx = F(4) - F(-1) = (4) - (-2) = 6.$$

Jadi, nilai $\int_{-1}^{4} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx$ adalah 6.

Lemma 3.1.4 sangat memungkinkan untuk diperluas menjadi lebih umum. Dengan demikian, kemungkinan mengembangkan integral Newton yang lebih umum terbuka luas.

Berikut adalah sebuah lemma yang menjadi dasar perluasan integral Newton. Pembuktian lemma berikut tidak mengunakan Teorema Nilai Rata-rata sebagaimana pembuktian Lemma 3.1.3 dan Lemma 3.1.4.

Lemma 3.1.5

Diberikan fungsi-fungsi real F dan G kontinu pada $[a,b]$. Jika $F'(x) = G'(x),\ \forall x \in (a,b)$ kecuali di titik-titik anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam $[a,b]$ maka

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a).$$

Bukti:

Dimisalkan fungsi $H\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai

$$H(x) = F(x) - G(x).$$

Karena F dan G kontinu pada $[a,b]$ maka H juga kontinu pada $[a,b]$.

Diketahui $F'(x) = G'(x),\ \forall x \in (a,b)$ kecuali di titik-titik anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam $[a,b]$ maka $H'(x) = 0,\ \forall x \in (a,b)$ kecuali di titik-titik anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam $[a,b]$.

Sesuai Lemma 2.5.3 diperoleh H adalah konstan sehingga

$$H(b) = H(a)$$
$$H(b) - H(a) = 0.$$

Karena $H(x) = F(x) - G(x), \forall x \in [a,b]$, maka diperoleh

$$H(b) - H(a) = \big(F(b) - F(a)\big) - (G(b) - G(a))$$
$$\big(F(b) - F(a)\big) - (G(b) - G(a)) = 0$$
$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

(Smithee,2006:4).

Lemma ini digunakan untuk memeriksa jika F dan G memenuhi syarat menjadi integral taktentu dari f pada selang $[a,b]$, maka F dan G hanya dibedakan oleh suatu konstanta sehingga $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$. Dengan begitu, integral tentu dapat dihitung.

Dari Lemma 3.1.5 dapat dilakukan modifikasi Definisi 3.1.2 menjadi lebih umum. Dengan bahasa sebagaimana modifikasi pertama maka dapat disusun definisi sebagai berikut.

Definisi 3.1.3
Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang (a,b) kecuali di titik-titik yang banyaknya takberhingga anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ di dalam (a,b). Fungsi f dikatakan terintegral Newton-II pada $[a,b]$ jika terdapat fungsi $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a,b]$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya takberhingga anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam (a,b) dan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

disebut integral tentu f pada $[a.b]$ (Smithee, 2006:4).

Definisi 3.1.3 merupakan definisi integral yang lebih luas dan meliputi semua versi definisi Integral Newton.

Untuk menjustifikasi Definisi 3.1.3, di bawah ini dibuktikan suatu Teorema.

Teorema 3.1.1
Diberikan Fungsi f dan F terdefinisi pada selang $[a,b]$. Jika fungsi $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ yang kontinu pada $[a,b]$ dan $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya takberhingga

anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam (a, b) maka f terintegral pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Bukti:

Misal $\varepsilon > 0$. Bangun β_1, β_2, β_3, dan β_4

$$\beta_1 = \{([a,c],a) | |F(c) - F(a) - f(a)(c-a)| < \varepsilon/4\}$$
$$\beta_2 = \{([c,b],b) | |F(b) - F(c) - f(b)(b-c)| < \varepsilon/8\},$$

untuk mendefinisikan β_3 memanfaatkan $F'(x) = f(x),\ \forall x \in (a, b)$,

$$\beta_3 = \{([c,d],x) \colon |F(d) - F(c) - f(x)(d-c)| < \eta(d-c)\}$$

dimana

$$\eta = \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

dan

$$\beta_4 = \left\{\left([c,d], e_p\right) \middle| \left|F(d) - F(c) - f(e_p)(d-c)\right| < \varepsilon 2^{-p-2}\right\}$$

dengan $p = 1,2,3 \ldots$.

Misal

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3 \cup \beta_4$$

karena $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, dan β_4 adalah *full cover* maka menurut Teorema 2.5.2, *covering relation* β adalah *full cover*.

Akibatnya sesuai Lemma 2.5.2, β memuat suatu partisi π pada $[a, b]$

$$\pi = \{([a_i, b_i], x_i) \colon i = 1,2, \ldots, n\} \subset \beta.$$

Didefinisikan

$\gamma_1 = \pi \cap \beta_1, \gamma_2 = \pi \cap \beta_2, \gamma_3 = \pi \cap \beta_3$, dan $\gamma_4 = \pi \cap \beta_4$

sehingga

$$\left|(\pi)\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b) - F(a)]\right|$$
$$= \left|(\pi)\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b) - F(a)]\}\right|$$
$$\leq |f(x_1)(b_1 - a_1) - [F(b) - F(a)] + (f(x_n)(b_n - a_n) - [f(b) - f(a)]|$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b) - F(a)]|$$
$$\leq (\gamma_1)\sum + (\gamma_2)\sum + (\gamma_3)\sum + (\gamma_4)\sum$$

dimana

$$(\gamma_1)\sum = \sum_{([a_i,b_i],x_i)\in\gamma_1} |f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b_i) - F(a_i)]| < \frac{\varepsilon}{4}$$

$$(\gamma_2)\sum = \sum_{([a_i,b_i],x_i)\in\gamma_2} |f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b_i) - F(a_i)]| < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$\begin{aligned}(\gamma_3)\sum &= \sum_{([a_i,b_i],x_i)\in\gamma_3} |f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b_i) - F(a_i)]| \\ &< \eta\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \le \eta(b-a) \\ &\le \frac{\varepsilon(b-a)}{8(b-a)} = \frac{\varepsilon}{8}\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}(\gamma_4)\sum &= \sum_{([a_i,b_i],x_i)\in\gamma_4} |f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b_i) - F(a_i)]| \\ &< \varepsilon 2^{-p-2} < \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b) - F(a)]\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(b_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n}[F(b_i) - F(a_i)]\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^{n}\{f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b) - F(a)]\}\right| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)(b_i - a_i) - [F(b) - F(a)]| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan pendekatan jumlah Riemann, ketaksamaan terakhir menunjukkan bahwa f terintegral pada $[a, b]$ dan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

(Smithee, 2006:23).

Contoh 3.1.3

Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \text{ rasional } \in [0,1] \\ 0 & , \ x \text{ irrasional } \in [0,1]. \end{cases}$$

Hitunglah $\int_0^1 f(x)\,dx$?

Penyelesaian:

Untuk fungsi di atas $f(x)$ dapat ditentukan integral taktentu f.

Didefinisikan $F(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Karena F fungsi konstan, maka F kontinu pada [0,1].

Tampak bahwa

$$F'(x) = 0 = f(x), \ \ x \text{ irrasional}$$

dan

$$F'(x) = 1 \neq f(x), \ \ x \text{ rasional.}$$

Sehingga $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [0,1]$ kecuali di titik x rasional (takberhingga banyaknya).

Berdasarkan Definisi 3.1.3 diperoleh

$$\int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0 - 0 = 0.$$

Jadi, nilai $\int_0^1 f(x)\,dx$ adalah 0.

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan dengan terbuktinya Lemma berikut:

Diberikan fungsi-fungsi real F dan G kontinu pada $[a, b]$ dan jika $F'(x) = G'(x)$ $\forall x \in [a, b]$ kecuali di titik-titik anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam $[a, b]$ maka

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a),$$

diperoleh versi perbaikan definisi Integral Newton yang memuat semua versi Integral Newton paling lemah. Definisi tersebut adalah

Diberikan fungsi f terdefinisi pada selang (a, b) kecuali di titik-titik yang banyaknya takberhingga anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ di dalam (a, b). Fungsi f dikatakan terintegral Newton-II pada $[a, b]$ jika terdapat fungsi $F: [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ sedemikian sehingga $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a, b)$ kecuali di titik-titik yang banyaknya takberhingga anggota himpunan $e_1, e_2, e_3, \ldots$ dalam (a, b) dan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

disebut integral tentu f pada $[a. b]$.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R.G. dan D.R. Sherbert, 1999. *Introduction to Real Analysis, third edition*, John Wiley & Sons, Inc, New York

Leithold, L. 1992. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik, Edisi Kelima, Jilid 1*, Erlangga, Jakarta.

Peng-Yee, L. 1989. *Lanzhou Lectures on Henstock Integration*, National University of Singapore.

Purcell, E.J. dan D. Varberg, 1991. *Kalkulus dan Geometri Analitis, Edisi Kelima, Jilid 1*, Erlangga, Jakarta.

Sari, A. 2009. *Modifikasi Teorema Dasar Kalkulus*, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya. Malang.

Smithee, A. 2006. *The Integral Calculus*, (Online), (http://www.classicalrealanalysis.com diakses tanggal 7 Januari 2009).

Stewart, J. 2001. *Kalkulus*, Erlangga. Jakarta.