SUBMODUL PRIMA DALAM MODUL PERKALIAN

SKRIPSI

Oleh:
SHINTA SUNARTO PUTRI
0610940057-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

SUBMODUL PRIMA DALAM MODUL PERKALIAN

SKRIPSI
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
SHINTA SUNARTO PUTRI
0610940057-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2010

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

SUBMODUL PRIMA DALAM MODUL PERKALIAN

Oleh:
SHINTA SUNARTO PUTRI
0610940057-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 10 Februari 2010
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Dosen Pembimbing I	Dosen Pembimbing II
Dr. Abdul Rouf Alghofari, MSc	**Drs. Bambang Sugandi, MSi**
NIP. 196709071992131001	**NIP. 195905151992031002**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP.196908071994121001

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	**: Shinta Sunarto Putri**
NIM	**: 0610940057-94**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis skripsi berjudul	**: Submodul Prima dalam Modul Perkalian**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Skripsi ini adalah benar-benar karya sendiri, dan bukan hasil plagiat karya orang lain. Karya-karya yang tercantum dalam Daftar Pustaka Skripsi ini, semata-mata digunakan sebagai acuan/referensi.**
2. **Apabila di kemudian hari diketahui bahwa isi Skripsi saya merupakan hasil plagiat, maka saya bersedia menanggung akibat hukum dari keadaan tersebut.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 10 Februari 2010
Yang menyatakan,

(Shinta Sunarto Putri)
NIM. 0610940057

SUBMODUL PRIMA DALAM MODUL PERKALIAN

ABSTRAK

Dalam teori modul dikenal suatu modul khusus, yaitu modul perkalian (*multiplication modules*). Misalkan R adalah ring komutatif dengan identitas dan M adalah $R-$modul, maka M disebut $R-$modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M terdapat ideal I di R sehingga berlaku $N = IM$. Ideal I ini kemudian disebut ideal presentasi dari submodul N. Selain itu, dikenal suatu submodul prima yang ada dalam suatu $R-$modul M. Di dalam skripsi ini akan dibahas tentang kaitan antara submodul prima dengan modul perkalian.

Kata kunci: modul perkalian, submodul prima

PRIME SUBMODULES IN MULTIPLICATION MODULES

ABSTRACT

In modules theory, it is known special modules, i.e., multiplication modules. Let R be a commutative ring with identity and M be a R −module, then M is said to be a multiplication module if for each submodule N of M there exists an ideal I of R such that $N = IM$. Then, this ideal I is called a presentation ideal of N. On the other hand, it also known prime submodules. This final project will discuss the relationship between prime submodules and multiplication modules.

Keywords: multiplication modules, prime submodules

KATA PENGANTAR

Assalamu'alaykum Wr.Wb.

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat ALLAH SWT yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan, dan petunjukNya sehingga skripsi yang berjudul **"Submodul Prima dalam Modul Perkalian"** ini dapat diselesaikan dengan baik. Sholawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, keluarga, sahabat, serta umat Beliau yang senantiasa istiqomah memegang Alquran dan Assunnah.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika. Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini mungkin tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc, selaku dosen Pembimbing I dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si, selaku dosen Pembimbing II, atas segala bimbingan, motivasi serta kesabaran yang telah diberikan selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika sekaligus dosen penguji dan Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku Ketua Prodi Matematika yang telah memberikan pertimbangan-pertimbangan waktu dan saran bagi kelancaran studi penulis.
3. Drs.Imam Nurhadi Purwanto, MT. dan Dra. Ari Andari, MS. selaku dosen penguji atas segala saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
4. Mama dan Papa tercinta, atas kasih sayang dan do'a yang tiada henti demi kesuksesan putrinya, kakakku, Mas Bhima, dan Mas Yordan atas kesabaran, dorongan, semangat, dan pengorbanan yang diberikan selama penulisan skripsi ini.
5. Indah Yanti, S.Si, selaku Penasihat Akademik yang telah banyak memberikan bimbingan dan masukan demi kelancaran kuliah penulis selama menempuh kuliah.
6. Seluruh dosen pengajar Fakultas MIPA Universitas Brawijaya yang telah membagikan ilmunya kepada penulis.
7. Segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika (Pak Ni, dkk.) atas segala bantuannya.

8. Rohmah, Sekar, Desta, Deny, Suryo, Pasha, Ahmed, Deddy, dan Nonny, atas segala kebaikan, pengertian, dukungan, semangat, do'a, dan bantuan yang diberikan kepada penulis.
9. Teman-teman Prodi Matematika Angkatan 2006 (MaT[6]ic) dan Angkatan 2005, atas semua do'a dan semangat yang diberikan kepada penulis.
10. Rista, Dew-dew, Luluk, Talita, Dicka, Sanda, Febri, dan semua teman di WA1, atas do'a, dukungan, dan semangat yang diberikan kepada penulis.
11. Krucil dan Gek Iren, atas do'a dan semangat yang diberikan kepada penulis.
12. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan sehingga belum dapat dikatakan sempurna. Untuk itu penulis menerima kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan skripsi ini. Harapan penulis, semoga skripsi ini dapat memberi sumbangan bagi dunia sains Indonesia, khususnya di bidang Aljabar.

Wassalamu'alaykum Wr. Wb.

Malang, 10 Februari 2010

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

Notasi	**Keterangan**
$\forall$	Untuk setiap
$\in$	Elemen dari
$\notin$	Bukan elemen dari
$\subset$	Himpunan bagian sejati
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\nsubseteq$	Bukan himpunan bagian
$\emptyset$	Himpunan kosong
$\Rightarrow$	Jika … maka … (implikasi)
$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika (biimplikasi)
$\cap$	Irisan
$\mathbb{C}$	Himpunan bilangan kompleks
$\mathbb{N}$	Himpunan bilangan asli
$\mathbb{Q}$	Himpunan bilangan rasional
$\mathbb{R}$	Himpunan bilangan riil
$\mathbb{Z}$	Himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	Himpunan bilangan bulat positif
$\mathbb{Z}_n$	Himpunan bilangan bulat modulo n
$\langle a \rangle$	Ideal (submodul) yang dibangun elemen a $\langle a \rangle = \{ra \mid r \in R\}$
$M \backslash N$	Himpunan M kecuali himpunan N
$\sum_{i=1}^{n} r_i m_i$	Hasil penjumlahan dari $r_1 m_1, r_2 m_2, \dots, r_n m_n$
$\bigcap_{i=1}^{k} N_i$	Irisan dari $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$
$\prod_{i=1}^{k} N_i$	Hasil kali dari $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k$
M/N	Modul faktor
$(N : M)$	Himpunan elemen r di ring R sehingga $rM \subseteq N$ (M adalah modul dan N adalah submodul di M)
$(L :_M N)$	Himpunan elemen m di modul M sehingga $mN \subseteq L$ (N dan L adalah submodul di M)
$\blacksquare$	Pembuktian selesai

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar merupakan salah satu cabang ilmu matematika. Pada periode waktu sebelum abad ke-19, aljabar dikenal sebagai aljabar klasikal. Namun dalam perjalanannya, aljabar terus mengalami perkembangan hingga aljabar yang dikenal sekarang, yakni aljabar modern. Salah satu bagian dari aljabar modern adalah aljabar abstrak, yang membahas bermacam-macam struktur aljabar, di mana masing-masing struktur aljabar mempunyai sifat yang berbeda-beda.

Salah satu bentuk struktur aljabar yang dilengkapi dengan operasi biner adalah grup. Kemudian, grup berkembang lagi menjadi ring, yang selanjutnya dapat berkembang lagi menjadi modul. Penggunaan modul dipelopori pertama kali oleh seorang ahli matematika, Emmy Noether, pada awal abad ke-19. Noether menyebutkan bahwa teori modul merupakan bentuk generalisasi dari ruang vektor (Dummit dan Foote, 2004).

Dalam perkembangannya, dikenal suatu modul khusus yaitu modul perkalian (*multiplication modules*). Konsep mengenai modul perkalian diperkenalkan pertama kali oleh A.Barnard. Barnard menyebutkan bahwa suatu modul atas ring komutatif disebut modul perkalian jika setiap submodulnya merupakan perkalian antara ideal dengan modul itu sendiri. Ciri utama dalam modul perkalian yaitu setiap submodulnya mempunyai ideal, yang lebih dikenal dengan ideal presentasi. Dalam perkembangannya, banyak penelitian yang mengaitkan modul perkalian dengan struktur aljabar lain.

Tekir (2007) meneliti secara spesifik modul perkalian yang dikaitkan dengan submodul semiprima dan prima. Selain itu, Ameri (2002) dan Nezhad (2009), membahas tentang karakteristik submodul prima dalam modul perkalian.

Selain jurnal, terdapat pula penelitian dalam bentuk skripsi dan tesis. Penelitian yang dilakukan Arifin (2009) yaitu mengenai modul perkalian, ideal presentasi, serta kaitan submodul prima dan modul prima dengan modul perkalian. Beda halnya dengan Amini (2003), penelitiannya membahas perkalian submodul dalam modul perkalian serta karakteristik modul perkalian.

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu tersebut, penulis termotivasi untuk melakukan suatu penelitian mengenai modul perkalian dan submodul prima saja, serta kaitan antara keduanya. Dengan kata lain, dalam skripsi ini akan dibahas mengenai suatu submodul dalam modul perkalian yang dapat disebut sebagai submodul prima, yaitu submodul prima tesebut mempunyai ideal presentasi.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam skripsi ini adalah bagaimana sifat-sifat suatu submodul prima dalam modul perkalian.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam skripsi ini adalah ring komutatif dengan elemen identitas.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah membahas hubungan antara submodul prima dan modul perkalian.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dibahas mengenai beberapa definisi, sifat, lemma, dan teorema yang akan digunakan sebagai dasar pembahasan dalam bab-bab selanjutnya. Teori-teori yang akan dibahas adalah mengenai grup, ring, dan modul.

2.1 Teori Grup

Definisi 2.1.1 (Grup) Misalkan G adalah suatu himpunan tak kosong dengan suatu operasi biner *, dinotasikan $(G,*)$. $(G,*)$ disebut suatu grup jika memenuhi aksioma-aksioma :

1. Tertutup
   Untuk setiap $a, b \in G$, terdapat $c \in G$ sehingga
   $$a * b = c$$
2. Assosiatif
   Untuk setiap $a, b, c \in G$ memenuhi
   $$(a * b) * c = a * (b * c)$$
3. Mempunyai elemen identitas
   Terdapat $e \in G$, untuk setiap $a \in G$ yang memenuhi
   $$e * a = a * e = a$$
4. Setiap elemen mempunyai invers
   Untuk setiap $a \in G$, terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga
   $$a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$$

(Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.1.2 (Grup Komutatif) Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup. $(G,*)$ disebut grup komutatif atau grup abelian jika untuk setiap $a, b \in G$, memenuhi $a * b = b * a$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.1.3

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan.
2. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ bukan merupakan grup terhadap operasi penjumlahan, karena tidak mempunyai elemen identitas dan tidak mempunyai invers.

Definisi 2.1.4 (Subgrup) Misalkan $(M,*)$ merupakan grup, $S \subseteq M$, dan $S \neq \emptyset$. S disebut subgrup dari M jika:

1. $x \in S \quad \Rightarrow x^{-1} \in S$
2. $x, y \in S \quad \Rightarrow xy \in S$

(Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.1.5

1. $\mathbb{R}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{Q}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{R}$.
3. $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Q}$.

2.2 Teori Ring

Definisi 2.2.1 (Ring) Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong dengan dua operasi biner, penjumlahan "+" dan perkalian "." , yang dinotasikan$(R, +, .)$. $(R, +, .)$ disebut ring jika memenuhi aksioma-aksioma:

1. $(R, +)$ adalah grup komutatif
2. $(R, .)$, berlaku ketertutupan dan assosiatif
3. Berlaku hukum distributif
   $(\forall\, a, b, c \in R)$ memenuhi $a.(b + c) = (a.b) + (a.c)$
   $(\forall\, a, b, c \in R)$ memenuhi $(a + b).c = (a.c) + (b.c)$

(Dummit dan Foote, 2004).

Untuk selanjutnya, penulisan notasi ring $(R, +, .)$ dapat disederhanakan menjadi R, serta penulisan perkalian $a.b$ dapat disederhanakan menjadi ab.

Contoh 2.2.2 $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$, dan $\mathbb{Q}$ merupakan ring.

Definisi 2.2.3 (Ring Komutatif) Misalkan R adalah ring. R dikatakan sebagai ring komutatif jika pada ring R berlaku sifat:

$$a, b \in R \Rightarrow ab = ba$$

(Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.4

1. $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$, dan $\mathbb{Q}$ merupakan ring komutatif.
2. Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ merupakan ring tidak komutatif karena operasi perkalian pada matriks tidak selalu komutatif.

Definisi 2.2.5 (Ring Komutatif dengan Elemen Identitas) Misalkan R adalah ring komutatif. R dikatakan mempunyai elemen identitas jika terdapat $1 \in R$ di mana

$$1a = a1 = a, \qquad \forall a \in R$$

(Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.2.6 (Ideal) Misalkan R adalah ring, $I \subseteq R$, dan $I \neq \emptyset$. I disebut ideal di R jika memenuhi aksioma berikut:

1. $a, b \in I \qquad \Rightarrow a - b \in I$
2. $(a \in I), (r \in R) \quad \Rightarrow ra \in I$ dan $ar \in I$

Ideal I disebut ideal trivial jika $I = \{0\}$ dan ideal I disebut ideal sejati jika $I \neq R$ (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.7

1. Misalkan $p\mathbb{Z} = \{pz | \forall z \in \mathbb{Z}\}$ adalah suatu himpunan di mana p adalah bilangan prima. Akan dibuktikan bahwa $p\mathbb{Z}$ adalah suatu ideal di ring $\mathbb{Z}$.
   Ambil sebarang $a, b \in p\mathbb{Z}$, maka $a = pz_1$ dan $b = pz_2$ di mana $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$. Akibatnya $a - b = pz_1 - pz_2 = p(z_1 - z_2) \in p\mathbb{Z}$.
   Selanjutnya, untuk setiap $r \in R$ memenuhi:
   $ra = r(pz_1) = p(rz_1) \in p\mathbb{Z}$.
   Karena $\mathbb{Z}$ merupakan ring komutatif, maka $ra = ar \in p\mathbb{Z}$.
   Jadi, $p\mathbb{Z}$ adalah ideal di $\mathbb{Z}$. ■
2. Misalkan $Ra = \{ra | r \in R\}$ adalah himpunan yang dibangun oleh elemen $a \in R$. Akan dibuktikan bahwa Ra adalah ideal di ring R.
   Ambil $m_1, m_2 \in Ra$ di mana $m_1 = r_1 a$ dan $m_2 = r_2 a$, untuk setiap $r_1, r_2 \in R$. Maka:
   $$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= r_1 a - r_2 a \\ &= (r_1 - r_2)a \in Ra \end{aligned}$$
   Selanjutnya, untuk $m \in Ra$ di mana $m = ra$ dan $r_1 \in R$, maka:
   $$\begin{aligned} r_1 m &= r_1(ra) \\ &= (r_1 r)a \in Ra \end{aligned}$$

Jadi, Ra adalah suatu ideal. ■

3. Himpunan $n\mathbb{Z} = \{nz | \forall z \in \mathbb{Z}\}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ merupakan ideal di ring $\mathbb{Z}$, karena untuk sebarang $a = nz_1, b = nz_2 \in n\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku:
   i) $a - b = nz_1 - nz_2$
      $= n(z_1 - z_2) \in n\mathbb{Z}$
   ii) $ra = r(nz_1)$
      $= rn(z_1)$
      $= n(rz_1) \in n\mathbb{Z}$
   Karena $\mathbb{Z}$ merupakan ring komutatif, maka $ra = ar \in n\mathbb{Z}$.
   ■

Definisi 2.2.8 (Hasil Kali Ideal) Misalkan I dan J adalah ideal-ideal di ring komutatif R. Hasil kali dari I dan J, dinotasikan IJ, merupakan himpunan penjumlahan berhingga dari elemen-elemen dalam bentuk ab di mana $a \in I$ dan $b \in J$. Oleh karena itu, hasil kali I dan J dapat didefinisikan:
$IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i | a_i \in I, b_i \in J\}$
(Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.9 Misalkan $I = 3\mathbb{Z}$ dan $J = 4\mathbb{Z}$ adalah ideal-ideal di ring komutatif $\mathbb{Z}$. Hasil kali $3\mathbb{Z}$ dan $4\mathbb{Z}$ merupakan penjumlahan berhingga dari elemen-elemen dalam bentuk $(3x)(4y)$ dengan $x, y \in \mathbb{Z}$. Sehingga, jelas $(3\mathbb{Z})(4\mathbb{Z}) = 12\mathbb{Z}$.

Teorema 2.2.10 Jika R adalah ring komutatif, I dan J adalah ideal-ideal di R, maka IJ adalah ideal di R (Dummit dan Foote, 2004).
Bukti: Misalkan I dan J adalah ideal-ideal di R. Akan dibuktikan IJ adalah ideal di R.
i) Karena I dan J adalah ideal, maka $0 \in I$ dan $0 \in J$. Sehingga, $0 \in IJ$, yaitu $IJ \neq \emptyset$.
ii) Ambil sebarang $a = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$, $b = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i \in IJ$.
   $a - b = (\sum_{i=1}^{m} x_i y_i) - (\sum_{i=1}^{n} p_i q_i)$
   $= \sum_{i=1}^{k=maks\{m,n\}} (x_i y_i - p_i q_i) \in IJ$
iii) Ambil sebarang $a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in IJ$ dan $r \in R$.
   $ra = r(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)$
   $= \sum_{i=1}^{n} r(x_i y_i)$

$= \sum_{i=1}^{n}(rx_i)y_i \in IJ$

■

Definisi 2.2.11 (Ideal Pokok) Misalkan R ring komutatif dengan elemen identitas dan I ideal di R. I disebut ideal pokok jika I dibangun oleh satu elemen. Oleh karena itu, jika I dibangun oleh elemen $x \in R$, maka $I = \langle x \rangle = \{rx | r \in R\}$ (Rotman,2003).

Definisi 2.2.12 (Pembagi Nol dan Daerah Integral) Misalkan R adalah ring komutatif. Suatu elemen $a \in R$ dengan $a \neq 0$ disebut pembagi nol (*zero divisor*) jika terdapat elemen $b \in R$ dan $b \neq 0$ sehingga $ab = ba = 0$. Jika R tidak memuat pembagi nol maka R disebut daerah integral (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.13 $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ merupakan daerah integral.

Definisi 2.2.14 (*Field*) Misalkan F adalah ring komutatif dengan elemen identitas. F disebut *field* jika setiap elemen tak nol di F mempunyai invers terhadap operasi perkalian (Rotman, 2003).

Teorema 2.2.15 Setiap *field* merupakan daerah integral (Rotman, 2003).
Bukti: Misalkan F adalah *field*. Akan dibuktikan bahwa F tidak memuat pembagi nol. Ambil $a, b \in F$, yaitu $a \neq 0$ dan $b \neq 0$. Karena berlaku sifat tertutup, maka $ab \neq 0$ dan $ab \in F$. Oleh karena itu, *field* F juga merupakan daerah integral. ■

Akan tetapi, jika suatu ring bukan merupakan *field*, belum tentu ring tersebut juga bukan merupakan daerah integral. Hal ini dapat di lihat dalam contoh berikut.

Contoh 2.2.16

1. $\mathbb{Z}$ bukan *field* (elemen tak nol di $\mathbb{Z}$ tidak mempunyai invers terhadap perkalian), tetapi $\mathbb{Z}$ merupakan daerah integral.
2. Himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ merupakan *field* dan juga merupakan daerah integral.

3. $\mathbb{Z}_3$ merupakan *field* dan juga merupakan daerah integral.
4. $\mathbb{Z}_6$ bukan *field* (untuk $\overline{2}, \overline{3}, \overline{4} \in \mathbb{Z}_6$ tidak mempunyai invers), dan juga bukan daerah integral (karena untuk $\overline{2} \in \mathbb{Z}_6$ terdapat $\overline{3} \in \mathbb{Z}_6$, sehingga $\overline{2}.\overline{3} = \overline{0}$).

Teorema 2.2.17 Misalkan R adalah ring komutatif dengan elemen identitas dan I adalah ideal di R. R adalah *field* jika dan hanya jika ideal-idealnya hanya $\{0\}$ dan R (Dummit dan Foote, 2004).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan R adalah *field*, artinya untuk setiap elemen tak nol $r \in R$ terdapat elemen tak nol $r^{-1} \in R$ sehingga berlaku $rr^{-1} = 1$. Ambil sebarang ideal N di R. Jika ideal N hanya memuat $\{0\}$, maka $N = \{0\}$. Akan tetapi, jika ideal N memuat selain $\{0\}$, maka terdapat $n \in N$ di mana $n \neq 0$ yang mempunyai invers. Jelas bahwa $N \subseteq R$. Karena n mempunyai invers, yaitu terdapat $r = n^{-1} \in R$ sehingga berlaku $1 = rn \in N$. Oleh karena itu, untuk setiap $x \in R$ berlaku $x = 1x \in N$, artinya $R \subseteq N$. Karena $N \subseteq R$ dan $R \subseteq N$, diperoleh $N = R$.

$\Leftarrow$ Misalkan ideal-ideal di ring R hanya $\{0\}$ dan R. Akan dibuktikan bahwa R adalah *field*. Karena ideal di R hanya $\{0\}$ dan R, maka untuk sebarang elemen tak nol $n \in R$ memenuhi $\langle n \rangle = R$ (karena idealnya hanya $\{0\}$ dan R) dan berlaku $1 \in \langle n \rangle = R$. Akibatnya, untuk setiap elemen tak nol $n \in R$ terdapat $r \in R$ sehingga $rn = 1$, yang artinya n mempunyai invers, yaitu R adalah *field*.

■

Selanjutnya akan diperkenalkan Lemma *Zorn* yang berguna untuk pembahasan ideal maksimal pada suatu ring. Namun sebelumnya, akan diperkenalkan tentang himpunan terurut parsial, rantai, batas atas, dan elemen maksimal yang akan mendukung Lemma *Zorn*.

Definisi 2.2.18 (Terurut Parsial) Misalkan A adalah suatu himpunan tak kosong. A disebut terurut parsial dengan relasi " $\leq$ " jika memenuhi aksioma-aksioma:

1. $x \leq x$, $\forall x \in A$ (refleksif)
2. Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$, $\forall x, y \in A$ (antisimetris)

3. Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$, $\forall x, y, z \in A$ (transitif) (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.19 Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terurut parsial dengan relasi $\leq$. Begitu pula dengan $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$.

Definisi 2.2.20 (Rantai, Batas Atas, Elemen Maksimal) Misalkan S terurut parsial dengan relasi " $\leq$ ".

1. Suatu $B \subseteq S$ disebut rantai jika untuk suatu $x, y \in B$, berlaku $x \leq y$ atau $y \leq x$.
2. Misalkan B adalah himpunan tak kosong dan $B \subseteq S$. Suatu elemen $u \in S$ disebut suatu batas atas himpunan B jika untuk sebarang $b \in B$ berlaku $b \leq u$.
3. Suatu elemen $v \in S$ disebut elemen maksimal di S jika untuk sebarang $x \in S$ dengan $v \leq x$, maka $v = x$.

(Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.2.21

1. Misalkan himpunan $A = \{0,1,2,3,4\}$ terurut parsial dengan relasi $\leq$. $B_1 = \{0,1,2\}$ dan $B_2 = \{0,1,2,3\}$ adalah rantai di A. Batas atas dari B_1 adalah 2 dan batas atas dari B_2 adalah 3. Sedangkan elemen maksimal di A adalah 4.
2. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ terurut parsial dengan relasi $\subseteq$. Misalkan $A = \{(2n)\mathbb{Z} | n \in \mathbb{Z}^+\} = \{2\mathbb{Z}, 4\mathbb{Z}, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$. Batas atas dari A adalah $2\mathbb{Z}$.

Lemma 2.2.22 (Lemma *Zorn*) Jika A himpunan terurut parsial di mana setiap rantai mempunyai batas atas, maka A mempunyai setidaknya satu elemen maksimal (Dummit dan Foote, 2004).

Bukti: Diketahui A adalah himpunan terurut parsial di mana setiap rantai mempunyai batas atas. Andaikan A tidak mempunyai elemen maksimal. Ambil sebarang rantai B di A yang mempunyai batas atas awal u_B di rantai B, artinya $b \leq u_B$ untuk sebarang $b \in B$. Dari pengandaian dapat dikatakan bahwa u_B bukanlah elemen maksimal di A, yaitu terdapat $a \in A$ sehingga berlaku $u_B < a$. Jelas bahwa $a \notin B$, karena $u_B \neq a$ dan u_B merupakan batas atas himpunan B. Selain itu juga akan terdapat $a_1, a_2, a_3, \dots \in A$, sehingga berlaku

$u_B \leq a_1$, $u_B \leq a_2, \ldots$ dan $u_B \neq a_1$, $u_B \neq a_2, \ldots$, yang berarti pula bahwa rantai B tidak memiliki batas atas. Hal ini kontradiksi. Jadi, haruslah A mempunyai setidaknya satu elemen maksimal. ■

Definisi 2.2.23 (Ideal Maksimal) Suatu ideal I di ring R disebut maksimal jika I adalah ideal sejati dan untuk sebarang ideal N di ring R dengan $I \subseteq N$, maka $N = I$ atau $N = R$ (Hungerford, 2003).

Contoh 2.2.24

1. Ideal $p\mathbb{Z}$ dengan p adalah bilangan prima merupakan ideal maksimal di ring $\mathbb{Z}$ karena untuk sebarang ideal $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ maka $n\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ atau $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
2. Misalkan R merupakan *field*, maka $\{0\}$ di R merupakan ideal maksimal, karena ideal-ideal di *field* R hanya $\{0\}$ dan R, serta ideal sejatinya adalah $\{0\}$.

Teorema 2.2.25 Jika R merupakan ring komutatif dengan elemen identitas, maka setiap ideal sejati I di R termuat dalam suatu ideal maksimal (Hungerford, 2003).

Bukti: Pembuktian ini dapat menggunakan Lemma *Zorn*. Misalkan I adalah ideal sejati di R dan $\mathcal{S}$ adalah himpunan dari semua ideal sejati yang memuat I di R. $\mathcal{S}$ adalah himpunan tak kosong karena $I \in \mathcal{S}$, dan juga $\mathcal{S}$ terurut parsial dengan relasi " $\subseteq$ " karena untuk sebarang ideal sejati $A, B, C \in \mathcal{S}$ memenuhi aksioma:

1. $A \subseteq A, \ \forall A \in S$
2. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, maka $A = B$
3. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

Untuk menerapkan Lemma *Zorn*, akan ditunjukkan bahwa setiap rantai $\mathcal{R} = \{\mathcal{R}_i | i \in I\}$ merupakan ideal di $\mathcal{S}$ yang mempunyai batas atas di $\mathcal{S}$.

Misalkan $V = \bigcup_{i \in I} \mathcal{R}_i$, yaitu gabungan dari semua ideal $\mathcal{R}_i$ di rantai $\mathcal{R}$. Akan dibuktikan V adalah ideal. Jelas $V \neq \emptyset$, karena $\mathcal{R} \neq \emptyset$. Jika $a, b \in V$ maka $a \in \mathcal{R}_i$ dan $b \in \mathcal{R}_j$ untuk suatu $i, j \in I$. Karena V adalah rantai maka berlaku $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{R}_j$ atau $\mathcal{R}_j \subseteq \mathcal{R}_i$, karenanya $a, b \in \mathcal{R}_i$. Karena $\mathcal{R}_i$ adalah ideal, maka berlaku $a - b \in \mathcal{R}_i$ dan $ra = ar \in \mathcal{R}_i$. Sedangkan $\mathcal{R}_i \subset \mathcal{R}$, sehingga juga berlaku $a - b \in \ \mathcal{R}$ dan $ra = ar \in \mathcal{R}$. Hal ini berarti $\mathcal{R}$ adalah ideal.

Karena $I \subset \mathcal{R}_i \ \forall i$, maka $I \subset \bigcup_{i \in I} \mathcal{R}_i = V$. Karena setiap $\mathcal{R}_i$ ada di dalam $\mathcal{S}$, maka $\mathcal{R}_i \neq R \ \ \forall i \in I$. Akibatnya berlaku $1 \notin \mathcal{R}_i \ \forall i$, sehingga $1 \notin \bigcup_{i \in I} \mathcal{R}_i = V$. Oleh karena itu, $V \neq R$ dan $V \in \mathcal{S}$. Jelas V adalah batas atas dari rantai $\mathcal{R}$. Jadi, berdasarkan Lemma *Zorn*, $\mathcal{S}$ mempunyai elemen maksimal. Jelas, elemen maksimal ini merupakan ideal maksimal di R yang memuat I. ■

Definisi 2.2.26 (Ideal Prima) Misalkan R adalah ring komutatif dan I adalah ideal di R. I disebut ideal prima jika dan hanya jika I ideal sejati dan $\forall a, b \in R$ dengan $ab \in I$ berlaku $a \in I$ atau $b \in I$ (Hungerford, 2003).

Contoh 2.2.27

1. Himpunan $p\mathbb{Z}$ dengan p adalah bilangan prima merupakan ideal prima di ring $\mathbb{Z}$.
2. Misalkan ring R merupakan daerah integral, maka $\{0\}$ merupakan ideal prima, karena untuk setiap $x, y \in R$ jika $xy \in \{0\}$ maka $x \in \{0\}$ atau $y \in \{0\}$.

Teorema 2.2.28 Ideal I di ring R disebut ideal prima jika dan hanya jika

$AB \subset I \Rightarrow A \subset I$ atau $B \subset I$

untuk setiap ideal-ideal A dan B di ring R (Hungerford, 2003).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan I adalah ideal prima di R. Ambil sebarang ideal A dan B di R sedemikian sehingga $AB \subset I$. Untuk sebarang $a \in A$ dan $b \in B$ diperoleh $ab \in I$. Karena I adalah ideal prima, maka $a \in I$ atau $b \in I$. Hal ini berarti $A \subset I$ atau $B \subset I$.

$\Leftarrow$ Misalkan $AB \subset I \Rightarrow A \subset I$ atau $B \subset I$ untuk setiap ideal-ideal A dan B di ring R. Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab \in I$. Akibatnya, $\langle a \rangle \langle b \rangle \subset I$ dengan $\langle a \rangle = \{ra | r \in R\}$ dan $\langle b \rangle = \{rb | r \in R\}$ adalah ideal-ideal di R. Sehingga, $\langle a \rangle \subset I$ atau $\langle b \rangle \subset I$, yaitu $a \in I$ atau $b \in I$. Oleh karena itu, jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$, artinya I adalah ideal prima.

■

Teorema selanjutnya merupakan salah satu sifat ideal I yang berkaitan dengan ring faktor $R/I = \{\bar{r} = r + I | r \in R\}$. Namun, sebelumnya akan dibahas operasi-operasi yang ada pada ring faktor R/I.

Untuk sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (a + I) + (b + I) \\ &= (a + b) + I \\ &= \overline{a + b} \in R/I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &= (a + I)(b + I) \\ &= (ab) + I \\ &= \overline{ab} \in R/I \end{aligned}$$

Dari operasi-operasi tersebut, dapat dibuktikan bahwa R/I adalah ring komutatif.

1. Akan dibuktikan bahwa $(R/I, +)$ adalah grup komutatif. Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/I$ memenuhi:
   i) Tertutup
   $$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (a + I) + (b + I) \\ &= (a + b) + I \\ &= \overline{a + b} \in R/I \end{aligned}$$
   ii) Assosiatif
   $$\begin{aligned} (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} &= \big((a + I) + (b + I)\big) + (c + I) \\ &= a + I + \big((b + I) + (c + I)\big) \\ &= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) \end{aligned}$$
   iii) Mempunyai elemen identitas
   $$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{0} &= (a + I) + (0 + I) \\ &= (a + 0) + I \\ &= a + I \\ &= \bar{a} \end{aligned}$$
   iv) Mempunyai invers
   $$\begin{aligned} \bar{a} + (-\bar{a}) &= (a + I) + ((-a) + I) \\ &= (a + (-a)) + I \\ &= (a - a) + I \\ &= 0 + I \\ &= \bar{0} \end{aligned}$$
   v) Komutatif
   $$\begin{aligned} \bar{a} + \bar{b} &= (a + I) + (b + I) \\ &= (a + I + b + I) \\ &= (a + b + I + I) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (b + a + I + I) \\
&= (b + I + a + I) \\
&= (b + I) + (a + I) \\
&= \bar{b} + \bar{a}
\end{aligned}
$$

2. Akan dibuktikan $(R/I\,,.)$ tertutup dan assosiatif. Untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/I$ memenuhi:
   i) Tertutup
   $$
   \begin{aligned}
   \bar{a}\bar{b} &= (a + I)(b + I) \\
   &= ab + I \\
   &= \overline{ab}
   \end{aligned}
   $$
   ii) Assosiatif
   $$
   \begin{aligned}
   \bar{a}(\bar{b}\bar{c}) &= (a + I)\big((b + I)(c + I)\big) \\
   &= (a + I + b + I + c + I) \\
   &= \big((a + I)(b + I)\big)(c + I) \\
   &= (\bar{a}\bar{b})\bar{c}
   \end{aligned}
   $$
3. Berlaku hukum distributif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in R/I$ memenuhi:
   i) $$
   \begin{aligned}
   \bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) &= (a + I)\big((b + I) + (c + I)\big) \\
   &= \big((a + I)(b + I)\big) + \big((a + I)(c + I)\big) \\
   &= (ab + I) + (ac + I) \\
   &= \overline{ab} + \overline{ac} \in R/I
   \end{aligned}
   $$
   ii) $$
   \begin{aligned}
   (\bar{a} + \bar{b})\bar{c} &= \big((a + I) + (b + I)\big)(c + I) \\
   &= \big((a + I)(c + I)\big) + \big((b + I)(c + I)\big) \\
   &= (ac + I) + (bc + I) \\
   &= \overline{ac} + \overline{bc} \in R/I
   \end{aligned}
   $$
4. Berlaku sifat komutatif, yaitu untuk setiap $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ memenuhi:
   $$
   \begin{aligned}
   \bar{a}\bar{b} &= (a + I)(b + I) \\
   &= (ab) + I \\
   &= (ba) + I \\
   &= (b + I)(a + I) \\
   &= \bar{b}\bar{a}
   \end{aligned}
   $$

Dari 1, 2, 3, dan 4 terbukti bahwa R/I adalah suatu ring komutatif. ■

Teorema 2.2.29 Misalkan R adalah ring komutatif dengan identitas dan I adalah ideal sejati di R. R/I adalah daerah integral jika dan hanya jika I ideal prima (Fraleigh, 2003).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan R/I adalah daerah integral. Ambil sebarang $a, b \in R$ dengan $ab \in I$. Karena $ab \in I$ maka:

$$ab + I = I$$
$$ab + I = 0 + I$$
$$\overline{ab} = \bar{0}$$

Karena $\overline{ab} = \bar{0}$ maka $\bar{a} = \bar{0}$ atau $\bar{b} = \bar{0}$. Sehingga:
$\bar{a} = \bar{0} \Leftrightarrow a + I = 0 + I \Leftrightarrow a + I = I$,yang artinya $a \in I$.
$\bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow b + I = 0 + I \Leftrightarrow b + I = I$, yang artinya $b \in I$.
Sehingga, jika $ab \in I$ maka $a \in I$ atau $b \in I$, yaitu I adalah ideal prima.

$\Leftarrow$ Misalkan I adalah ideal prima di R. Ambil sebarang $\bar{a}, \bar{b} \in R/I$ dengan $\overline{ab} = \bar{0}$. Karena $\overline{ab} = \bar{0}$, maka:

$$\overline{ab} = \bar{0} \Leftrightarrow ab + I = 0 + I \Leftrightarrow ab + I = I$$

yang artinya $ab \in I$. Karena I ideal prima, maka $a \in I$ atau $b \in I$. Sehingga:

$$a + I = I \Leftrightarrow a + I = 0 + I \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$$
$$b + I = I \Leftrightarrow b + I = 0 + I \Leftrightarrow \bar{b} = \bar{0}$$

Sehingga, jika $\overline{ab} = \bar{0}$ maka $\bar{a} = \bar{0}$ atau $\bar{b} = \bar{0}$, yaitu R/I tidak memuat pembagi nol (R/I daerah integral).

■

Teorema 2.2.30 Jika R adalah ring komutatif dengan identitas, maka ideal I di R merupakan ideal maksimal jika dan hanya jika R/I adalah *field* (Fraleigh, 2003).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan I adalah ideal maksimal di R. Jelas R/I adalah ring komutatif. Ambil sebarang elemen tak nol $\bar{a} = a + I \in R/I$, yaitu $a \notin I$. Misalkan terdapat ideal $Ra + I$ di R di mana $I \subseteq Ra + I$ dan $a \in Ra + I$. Karena $a \notin I$ dan $a \in Ra + I$ maka $I \neq Ra + I$. I adalah ideal maksimal, akibatnya jika $I \subseteq Ra + I$ maka $Ra + I = I$ atau $Ra + I = R$. Dari hipotesis, yang memenuhi adalah $Ra + I = R$. Akibatnya, elemen identitas $1 \in R = Ra + I$.

Jika $1 = ra + b$, untuk suatu $r \in R$ dan $b \in I$, maka:

$$\begin{aligned}\overline{ra} &= (r + I)(a + I)\\ &= ra + I\\ &= (1 - b) + I\\ &= 1 + I\\ &= \bar{1}\end{aligned}$$

yang artinya $\bar{a} \in R/I$ mempunyai invers terhadap perkalian, yaitu $\bar{r} \in R/I$. Dari uraian ini dapat dikatakan bahwa ring R/I adalah *field*.

$\Leftarrow$ Misalkan R/I adalah *field*, artinya ideal-idealnya hanya $\{0\}$ dan R/I sendiri (Teorema 2.2.17). Karena R/I adalah *field*, ideal I merupakan ideal sejati ($I \neq R$), karena jika ideal I bukan ideal sejati, yaitu $I = R$, maka R/I hanya mempunyai satu elemen saja, kontradiksi bahwa ring R/I mempunyai dua elemen. Ideal I juga merupakan ideal maksimal karena terdapat ideal $\{0\}$ sehingga berlaku $\{0\} \neq I$ dan $\{0\} \neq R/I$ tetapi $\{0\} \subset I$.

■

Akibat 2.2.31 Setiap ideal maksimal di ring komutatif dengan identitas R merupakan ideal prima (Fraleigh, 2003).
Bukti: Misalkan I adalah ideal maksimal di R. Berdasarkan Teorema 2.2.30 R/I adalah *field*. Karena setiap *field* adalah daerah integral, maka R/I juga merupakan daerah integral. Menurut Teorema 2.2.29 maka I adalah ideal prima. ■

Akan tetapi, Akibat 3.2.31 tidak berlaku sebaliknya. Hal ini dapat dilihat pada ring $\mathbb{Z}$. Ideal $\{0\}$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}$, tetapi $\{0\}$ bukan ideal maksimal.

Definisi 2.2.32 (Ideal Radikal) Misalkan R adalah ring komutatif dan I adalah ideal di R. Himpunan
$rad(I) = \{r \in R | r^n \in I \text{ untuk suatu } n \in \mathbb{Z}^+\}$
disebut suatu radikal dari I. Ideal I disebut ideal radikal jika dan hanya jika $I = rad(I)$ (Rotman, 2003).

Contoh 2.2.33 Pada ring $\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z}$ adalah ideal radikal, karena $5\mathbb{Z} = rad(5\mathbb{Z}) = \{a \in \mathbb{Z} | a^n \in 5\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^+\} = \{0, \pm 5, \pm 10, \dots\}$.

Teorema 2.2.34 Setiap ideal prima di ring R merupakan ideal radikal (Dummit dan Foote, 2004).
Bukti: Ambil sebarang ideal I di R yang merupakan ideal prima. Akan dibuktikan $I = rad(I)$.

i) $I \subseteq rad(I)$, karena untuk setiap $a \in I$ berlaku $a^n \in I$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$, artinya $a \in rad(I)$.

ii) Untuk setiap $a \in rad(I)$ terdapat $n \in \mathbb{Z}^+$ sehingga berlaku $a^n = \underbrace{a.a.a \ldots a}_{n \text{ kali}} \in I$. Karena ideal I merupakan ideal prima,

maka jika $a.a^{n-1} \in I$ berlaku $a \in I$ atau $a^{n-1} \in I$. Oleh karena itu dapat dibentuk $a^n = a.a \ldots a^2.a \in I$. Sehingga pada suatu saat dapat diperoleh $a^2 \in I$, dan berlaku $a \in I$ atau $a \in I$ (I adalah ideal prima). Akibatnya, jika $a \in rad(I)$ maka $a \in I$, artinya $rad(I) \subseteq I$.

■

2.3 Teori Modul

Penggunaan modul dipelopori pertama kali oleh seorang ahli matematika, Emmy Noether, yang menunjukkan kekuatan dari struktur ini. Dapat dilihat bahwa ruang vektor merupakan tipe khusus dari suatu modul yang muncul pada saat ring merupakan *field*. Jika R adalah ring, definisi dari R −modul M analog dengan definisi dari aksi grup di mana R berperan sebagi grup, dan M berperan sebagai himpunan (Dummit dan Foote, 2004).

Definisi 2.3.1 (Modul) Misalkan $(M, +)$ adalah grup komutatif dan R adalah ring komutatif dengan elemen identitas. Didefinisikan suatu pemetaan * dari $R \times M$ ke M sebagai berikut:

$$*: R \times M \to M$$
$$(r, m) \longmapsto *(r, m) = r * m = rm \in M$$

M adalah R −modul (modul atas ring R), dinotasikan R −modul M, jika untuk setiap $r, r_1, r_2 \in R$ dan $m, m_1, m_2 \in M$ memenuhi aksioma-aksioma:

1. $*\big(r, (m_1 + m_2)\big) = *(r, m_1) + *(r, m_2)$
2. $*(r_1 r_2, m) = *\big(r_1, *(r_2, m)\big)$
3. $*(r_1 + r_2, m) = *(r_1, m) + *(r_2, m)$
4. $*(1, m) = m$, di mana 1 adalah elemen identitas dari R

(Rotman, 2003).

Contoh 2.3.2

1. Misalkan M adalah grup komutatif terhadap operasi penjumlahan. Maka M merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

   Bukti: Didefinisikan pemetaan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
*:\ & \mathbb{Z} \times M \longrightarrow M \\
& (n,m) \longmapsto * (n,m) = n * m = n.m \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad = \underbrace{m + m + \cdots + m}_{n}
\end{aligned}
$$

   i) Ambil $n \in \mathbb{Z}$ dan $m_1, m_2 \in M$.
   Akan dibuktikan $*(n, m_1 + m_2) = *(n, m_1) + *(n, m_2)$.

$$
\begin{aligned}
*(n, m_1 + m_2) &= n * (m_1 + m_2) \\
&= \underbrace{m_1 + m_2 + m_1 + m_2 + \cdots + m_1 + m_2}_{n} \\
&= \underbrace{m_1 + m_1 + \cdots + m_1}_{n} + \underbrace{m_2 + m_2 + \cdots + m_2}_{n} \\
&= n * m_1 + n * m_2 \\
&= *(n, m_1) + *(n, m_2)
\end{aligned}
$$

   ii) Ambil $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.
   Akan dibuktikan $*(n_1 n_2, m) = *(n_1, *(n_2, m))$.

$$
\begin{aligned}
*(n_1 n_2, m) &= n_1 n_2 * m \\
&= \underbrace{m + \cdots + m}_{n_1 n_2} \\
&= \underbrace{\underbrace{m + \cdots + m}_{n_2} + \underbrace{m + \cdots + m}_{n_2} + \cdots + \underbrace{m + \cdots + m}_{n_2}}_{n_1} \\
&= \underbrace{*(n_2, m) + *(n_2, m) + \cdots + *(n_2, m)}_{n_1} \\
&= n_1 * (n_2, m) \\
&= *(n_1, *(n_2, m)
\end{aligned}
$$

   iii) Ambil $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$.

Akan dibuktikan $*(n_1+n_2,m) = *(n_1,m) + *(n_2,m)$.

$$
\begin{aligned}
*(n_1+n_2,m) &= \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n_1+n_2} \\
&= \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n_1} + \underbrace{m+m+\cdots+m}_{n_2} \\
&= (n_1 * m) + (n_2 * m) \\
&= *(n_1,m) + *(n_2,m)
\end{aligned}
$$

iv) Untuk elemen identitas $1 \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$, maka:
$*(1,m) = 1 * m = m.$

■

Definisi 2.3.3 (Submodul) Misalkan M adalah $R-$modul dan $N \subseteq M$. N disebut submodul dari M jika:

1. N merupakan subgrup dari M
2. $\forall\, r \in R$ dan $\forall\, n \in N$ maka $rn \in N$

(Dummit dan Foote, 2004).

Lemma 2.3.4 Misalkan M adalah $R-$modul dan $N \subseteq M$. N disebut submodul dari M jika dan hanya jika:

1. $0 \in N$
2. $x - y \in N, \quad \forall x, y \in N$
3. $rx \in N, \quad \forall x \in N, r \in R$

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan N adalah submodul dari M. Berdasarkan Definisi 2.3.3-1 maka N memenuhi aksioma-aksioma grup terhadap penjumlahan, yaitu tertutup, assosiatif, mempunyai elemen identitas, dan mempunyai invers. Jadi, 1 dan 2 terpenuhi. Selanjutnya, berdasarkan Definisi 2.3.3-2 maka 3 terpenuhi.

$\Leftarrow$ Misalkan 1, 2, dan 3 berlaku. Akan dibuktikan N adalah submodul dari M.

i) Dari 2 berarti sifat tertutup dipenuhi.
ii) Karena elemen di N juga merupakan elemen di M, maka sifat assosiatif terpenuhi.
iii) Dari 1 berarti N mempunyai elemen identitas.
iv) Dari 2 berarti setiap elemen di N mempunyai invers.

Dari i), ii), iii), dan iv) maka N adalah suatu grup terhadap penjumlahan. Selanjutnya, dengan 3 berarti N merupakan submodul dari R −modul M.

■

Contoh 2.3.5

1. Himpunan $n\mathbb{Z} = \{nz | \forall z \in \mathbb{Z}\}$ dengan $n \in \mathbb{Z}^+$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}$, karena untuk sebarang $a = nz_1$, $b = nz_2 \in n\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku:
   i) Untuk $n = 0$ maka $a = nz_1 = 0z_1 = 0 \in n\mathbb{Z}$
   ii) $a - b = nz_1 - nz_2 = n(z_1 - z_2) = nz' \in n\mathbb{Z}$
   iii) $ra = r(nz_1) = n(rz_1) = nz' \in n\mathbb{Z}$
2. Himpunan $Rx = \{rx | r \in R\}$ dengan $x \in M$ merupakan submodul di R −modul M, karena untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ berlaku:
   (i) Untuk $r_1 = 0$, maka $r_1 x = 0x = 0 \in Rx$
   (ii) $r_1 x - r_2 x = (r_1 - r_2)x \in Rx$
   (iii) $r_1(r_2 x) = (r_1 r_2)x \in Rx$

Definisi 2.3.6 (Submodul Siklik) Misalkan M adalah R −modul dan N adalah submodul di M. N disebut submodul siklik jika N dibangun oleh satu elemen di M. Oleh karena itu, jika N dibangun oleh elemen $a \in M$, maka

$$N = Ra = \langle a \rangle = \{ra | r \in R\}$$

(Dummit dan Foote, 2004).

Lemma 2.3.7 Jika N submodul di R −modul R, maka N adalah ideal di R (Ribenboim, 1969).

Bukti: Misalkan N adalah submodul di R −modul R. Akan dibuktikan N memenuhi sifat ideal di ring R.

i) $0 \in N$, sehingga $N \neq \emptyset$
ii) $\forall\, a, b \in N$ maka $a - b \in N$
iii) $\forall\, a \in N$ dan $\forall\, r \in R$ maka $ar, ra \in N$.

■

Definisi 2.3.8 (Elemen Torsi) Misalkan M adalah R −modul. Jika R adalah daerah integral, maka $x \in M$ merupakan elemen torsi jika

$rx = 0$ untuk suatu elemen tak nol $r \in R$. Himpunan yang berisi elemen-elemen torsi dalam modul M dinotasikan dengan $T(M)$, yaitu $T(M) = \{x \in M | rx = 0$, untuk suatu $r \in R, r \neq 0\}$ (Ash, 2000).

Contoh 2.3.9

1. Pada $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}_6$, $T(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$.
2. Pada $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Q}$, $T(\mathbb{Q}) = \{0\}$.

Dari Definisi 2.3.8, dapat dibuktikan bahwa $T(M)$ adalah submodul di M.

i) Jelas $0 \in T(M)$.

ii) Ambil sebarang $x, y \in T(M)$, yaitu $r'x = 0$ dan $r''y = 0$ untuk setiap $r', r'' \in R$. Jika $r'r'' = r \in R$, maka:

$$\begin{aligned} r(x-y) &= r'r''(x-y) \\ &= r'r''x - r'r''y \\ &= r''(r'x) - r'(r''y) \\ &= r''0 - r'0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Artinya, $x - y \in T(M)$.

iii) Ambil sebarang $r' \in R$ dan $x \in T(M)$, yaitu $r'x = 0$ untuk setiap $r' \in R$. Jika $r'r'' = r \in R$, maka:

$$\begin{aligned} rx &= (r'r'')x \\ &= r''(r'x) \\ &= r''0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Artinya, $rx \in T(M)$.

■

Oleh karena itu, $T(M) = \{x \in M | rx = 0,\ r \in R, r \neq 0\}$ disebut submodul torsi.

Definisi 2.3.10 (Modul Torsi dan Modul Bebas Torsi) Jika R adalah daerah integral dan M adalah R −modul, maka M adalah modul torsi jika $T(M) = M$ dan M merupakan modul bebas torsi jika $T(M) = \{0\}$ (Ash, 2000).

Contoh 2.3.11 $\mathbb{Z}_6$ merupakan $\mathbb{Z}-$modul torsi dan $\mathbb{Q}$ merupakan $\mathbb{Z}-$modul bebas torsi (lihat Contoh 2.3.9).

Definisi 2.3.12 (Annihilator) Misalkan M adalah $R-$modul**.** Didefinisikan annihilator dari M, sebagai berikut:

$$Ann(M) = \{r \in R | rm = 0 , \forall\, m \in M\}$$

(Ribenboim, 1969).

Contoh 2.3.13

1. Dalam $\mathbb{Z}-$modul $\mathbb{Z}_6$, $Ann(\mathbb{Z}_6) = \{0, \pm 6, \pm 12, \dots\}$.
2. Dalam $\mathbb{Z}-$modul $\mathbb{Q}$, $Ann(\mathbb{Q}) = \{0\}$.

Lemma 2.3.14 Jika R adalah ring komutatif dan M adalah $R-$modul, maka $Ann(M)$ merupakan ideal di R (Rotman, 2003).

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $Ann(M)$ memenuhi sifat ideal.

i) Jelas $Ann(M) \neq \emptyset$, karena untuk $0 \in R$ berlaku $0m = 0$, $\forall\, m \in M$. Dengan kata lain $0 \in Ann(M)$.

ii) Ambil sebarang $x, y \in Ann(M)$. Akan dibuktikan $x - y \in Ann(M)$. Karena $x, y \in Ann(M)$, maka berlaku $xm = 0$ dan $ym = 0$ untuk setiap $m \in M$. Sehingga

$$xm - ym = 0$$
$$(x - y)m = 0$$

yaitu $x - y \in Ann(M)$

iii) Ambil sebarang $r \in R$ dan $x \in Ann(M)$. Akan dibuktikan $rx, xr \in Ann(M)$. Karena $x \in Ann(M)$, maka $xm = 0$, $\forall m \in M$. Sehingga,

$$r(xm) = r0$$
$$(rx)m = 0 \qquad \{R \text{ assosiatif}\}$$
$$(xr)m = 0 \qquad \{R \text{ komutatif}\}$$

Dengan kata lain, $rx, xr \in Ann(M)$.

■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang submodul prima, modul perkalian, serta sifat-sifat yang ada pada modul perkalian dikaitkan dengan submodul prima.

3.1 Submodul Prima

Definisi 3.1.1 (Submodul Prima) Misalkan M adalah $R-$modul dan N adalah submodul di M. Didefinisikan himpunan $(N:M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$. N disebut submodul prima jika $N \neq M$ dan untuk setiap $r \in R, m \in M$ di mana $rm \in N$ berlaku $m \in N$ atau $r \in (N:M)$ (Tekir, 2007).

Contoh 3.1.2

1. Submodul $\{0\}$ di $\mathbb{Z}-$modul $\mathbb{Q}$ merupakan submodul prima, karena untuk sebarang $m \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ berlaku jika $rm \in \{0\}$, yang artinya $rm = 0$, maka $r \in (\{0\}:\mathbb{Q})$.
2. Submodul $p\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}-$modul $\mathbb{Z}$ dengan p bilangan prima merupakan submodul prima, karena untuk sebarang $m \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$ dengan $rm \in p\mathbb{Z}$ berlaku $r \in (p\mathbb{Z}:\mathbb{Z})$.

Teorema 3.1.3 Jika N adalah submodul prima di $R-$modul M, maka $(N:M)$ adalah ideal prima di R (Gaur, dkk., 2007).

Bukti: Misalkan N adalah submodul prima. Sebelumnya akan dibuktikan bahwa $(N:M)$ adalah ideal di R. Ambil sebarang $a, b \in (N:M)$, yaitu $aM \subseteq N$ dan $bM \subseteq N$. Sehingga, $aM - bM = (a-b)M \subseteq N$, artinya $(a-b) \in (N:M)$. Sedangkan untuk sebarang $r \in R$, maka $r(aM) = (ra)M \subseteq N$, yaitu $ra \in (N:M)$. Terbukti bahwa $(N:M)$ adalah ideal di R.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(N:M)$ adalah ideal prima. Ambil sebarang $a, b \in R$ di mana $ab \in (N:M)$, yaitu $(ab)M \subseteq N$. Karena N adalah submodul prima, maka untuk setiap $m \in M$ di mana $(ab)m = a(bm) \in N$ berlaku $bm \in N$ atau $a \in (N:M)$. Untuk $bm \in N$, karena N adalah submodul prima, maka berlaku $m \in N$ atau $b \in (N: M)$. Dengan kata lain, jika $a, b \in R$ di mana $ab \in (N: M)$ berlaku $a \in (N: M)$ atau $b \in (N: M)$, yaitu $(N: M)$ adalah ideal prima. ■

3.2 Modul Perkalian

Dalam subbab ini akan dibahas tentang modul perkalian serta sifat-sifatnya. Selanjutnya, dibahas mengenai submodul prima yang ada dalam modul perkalian.

Definisi 3.2.1 (Modul Perkalian) Suatu R −modul M disebut modul perkalian jika untuk setiap submodul N di M terdapat suatu ideal I di R sehingga berlaku $N = IM$ (Tekir, 2007).

Selanjutnya, ideal I tersebut disebut ideal presentasi dari submodul N. Dari definisi, dapat dikatakan bahwa setiap submodul di M mempunyai ideal presentasi jika dan hanya jika M adalah modul perkalian (Tekir, 2007).

Contoh 3.2.2

1. R adalah R −modul perkalian, karena untuk submodul $N = \{0\}$ terdapat ideal $I = \{0\}$ sehingga $N = \{0\}R$ serta untuk setiap submodul $N \neq \{0\}$ terdapat ideal $I = N$ sehingga $N = NR$.
2. Himpunan $M = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ yang merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan bukan merupakan $\mathbb{R}$ −modul perkalian, karena untuk submodul $A = \{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | \, a, b \in \mathbb{R}\}$ tidak mempunyai ideal presentasi ($A \neq IM$).

Definisi 3.2.3 (Hasil Kali Submodul) Misalkan M adalah R −modul perkalian. Misalkan N dan K adalah submodul-submodul di M dengan $N = IM$ dan $K = JM$ untuk suatu ideal I dan J di ring R. Hasil kali antara N dan K, dinotasikan NK, didefinisikan dengan $NK = (IJ)M$ (Ameri, 2002).

Perlu diperhatikan bahwa definisi perkalian pada modul perkalian di atas berbeda dengan definisi perkalian ideal biasa. Misalkan $R = \mathbb{Z}$ adalah suatu ring dan $M = 2\mathbb{Z}$ adalah modul. Jika

$N = K = 4\mathbb{Z}$ adalah submodul-submodul di M, maka terdapat ideal I dan J sehingga berlaku $N = IM = 4\mathbb{Z}$ dan $K = JM = 4\mathbb{Z}$, yang artinya $I = 2\mathbb{Z}$ dan $J = 2\mathbb{Z}$. Akibatnya,
$NK = (IM)(JM) = (IJ)M = (2\mathbb{Z})(2\mathbb{Z})2\mathbb{Z} = 8\mathbb{Z}$.
Sedangkan hasil kali menurut definisi perkalian ideal biasa yaitu $NK = 4\mathbb{Z}4\mathbb{Z} = 16\mathbb{Z}$ (Tekir,2007).

Berikut didefinisikan bentuk-bentuk perkalian dalam R −modul M untuk setiap $r \in R, m \in M$, dan I ideal di R:

1. $$\begin{aligned} rM &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} rm_i \mid m_i \in M\} \\ &= \{r(\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i) \mid m_i \in M\} \\ &= \{r(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \mid m_i \in M\} \\ &= \{rm' \mid m' \in M\} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} Rm &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i m \mid r_i \in R\} \\ &= \{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} r_i)m \mid r_i \in R\} \\ &= \{(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)m \mid r_i \in R\} \\ &= \{r'm \mid r' \in M\} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} IM &= \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i m_i \mid a_i \in I, m_i \in M\} \\ &= \left\{(\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i)(\textstyle\sum_{i=1}^{n} m_i) \,\middle|\, a_i \in I, m_i \in M\right\} \\ &= \{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(m_1 + m_2 + \cdots + m_n) \mid a_i \in I, m_i \in M\} \\ &= \{a'm' \mid a' \in I, m' \in M \end{aligned}$$

Teorema 3.2.4 Misalkan $N = IM$ dan $K = JM$ adalah submodul-submodul dalam R −modul perkalian M. Hasil kali N dan K independen terhadap ideal presentasi I dari N dan ideal presentasi J dari K (Ameri, 2002).

Bukti: Misalkan $N = I_1M = I_2M = N'$ dan $K = J_1M = J_2M = K'$ untuk setiap ideal I_i dan J_i di ring R dengan $i, j = 1,2$. Ambil sebarang $rsm \in NK = I_1J_1M$, untuk suatu $r \in I_1, s \in J_1$, dan $m \in M$. Karena $J_1M = J_2M$, maka:

$$sm = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i, \quad r_i \in J_2,\ m_i \in M$$

Sehingga,

$$rsm = r\sum_{i=1}^{n} r_i m_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r(r_i m_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} r_i(rm_i)$$

Karena $rm_i \in I_1M = I_2M$, maka:

$$rm_i = \sum_{j=1}^{k} t_{ij}m'_{ij}\,, \qquad t_{ij} \in I_2, m'_{ij} \in M$$

Akibatnya,

$$rsm = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} r_i t_{ij} m'_{ij} \ \in I_2J_2M$$

Oleh karena itu, untuk $rsm \in NK = I_1J_1M$ akan diperoleh $rsm \in I_2J_2M$, yang artinya $I_1J_1M \subseteq I_2J_2M$. Analog untuk $I_2J_2M \subseteq I_1J_1M$. Dengan kata lain, $NK = I_1J_1M = I_2J_2M = N'K'$, artinya NK independen terhadap I dan J. ■

Teorema 3.2.5 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian. Jika N adalah submodul di M maka $N = (N: M)M$ (Gaur, dkk., 2007).

Bukti: Misalkan M adalah $R-$modul perkalian dan N adalah submodul di M. Menurut pembuktian pada Teorema 3.1.3 jelas $(N: M)$ adalah ideal. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $N = (N: M)M$.

i) Untuk sebarang $x \in (N: M)M$, x dapat dinyatakan dalam $x = ab$ untuk suatu $a \in (N: M)$ dan $b \in M$. Karena $a \in (N: M)$ maka $aM \subseteq N$ yang artinya $am' \in N$ untuk setiap $m' \in M$. Akibatnya, untuk suatu $b \in M$ berlaku $ab \in N$, artinya $x \in N$. Oleh karena itu, $(N: M)M \subseteq N$.

ii) Untuk sebarang $x \in N$, x dapat dinyatakan dalam $x = ab$ untuk suatu $a \in I$ dan $b \in M$. Karena $a \in I$ maka $a \in (N: M)$, karena untuk setiap $m \in M$ berlaku $am \in IM = N$, artinya $aM \subseteq N$. Akibatnya, $x = ab \in (N: M)M$, artinya $N \subseteq (N: M)M$.

Dari i) dan ii) diperoleh $N = (N: M)M$, artinya $(N: M)$ adalah ideal presentasi dari N. ■

Akibat 3.2.6 Misalkan N adalah submodul di R −modul perkalian M. Jika N adalah submodul prima, maka $(N: M)M$ juga merupakan submodul prima di M.

Bukti: Misalkan N adalah submodul prima. Berdasarkan Teorema 3.2.5, maka $N = (N: M)M$, yaitu $(N: M)M$ adalah submodul prima. ■

Definisi 3.2.7 (Modul Setia (*Faithful Module*)) Misalkan M adalah R −modul. M disebut modul setia jika $Ann(M) = \{0\}$ (Ribenboim,1969).

Contoh 3.2.8

1. $\mathbb{Q}$ adalah $\mathbb{Z}$ −modul setia, karena $Ann(\mathbb{Q}) = \{r \in \mathbb{Z} | rm = 0 , \forall\, m \in \mathbb{Q}\} = \{0\}$.
2. $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah bilangan prima merupakan $\mathbb{Z}$ −modul setia, karena $Ann(\mathbb{Z}_p) = \{r \in \mathbb{Z} | rm = 0, \forall\, m \in \mathbb{Z}_p\} = \{0\}$.

Definisi 3.2.9 (Modul Sederhana (*Simple Module*)) Misalkan M adalah R −modul. M disebut modul sederhana jika $M \neq \{0\}$ dan submodulnya hanya $\{0\}$ dan M (Ribenboim,1969).

Contoh 3.2.10

1. $\mathbb{Z}_3$ adalah $\mathbb{Z}$ −modul sederhana.
   Bukti:
   i) Jelas $\{\bar{0}\}$ submodul di $\mathbb{Z}_3$.
   ii) $\langle\bar{1}\rangle = \{r\bar{1} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}_3$
   $\langle\bar{2}\rangle = \{r\bar{2} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}_3$
   $\langle\bar{1}, \bar{2}\rangle = \{r\bar{1} + s\bar{2}\ | r, s \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\} = \mathbb{Z}_3$
   Dari hasil di atas maka dapat dikatakan bahwa submodul yang dibangun oleh elemen-elemen di $\mathbb{Z}_3$ adalah $\mathbb{Z}_3$ sendiri.
   Dari i) dan ii), maka submodul dari $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}_3$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}_3$. ■
2. $\mathbb{Z}_5$ adalah $\mathbb{Z}$ −modul sederhana.
   Bukti:
   i) Jelas $\{\bar{0}\}$ submodul di $\mathbb{Z}_5$.
   ii) $\langle\bar{1}\rangle = \{r\bar{1} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5$

$\langle\bar{2}\rangle = \{r\bar{2} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5$
$\langle\bar{3}\rangle = \{r\bar{3} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5$
$\langle\bar{4}\rangle = \{r\bar{4} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5$
$\langle\bar{1}, \bar{2}\rangle = \{r\bar{1} + s\bar{2} \,| r, s \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} = \mathbb{Z}_5$
Dari hasil di atas maka dapat dikatakan bahwa submodul yang dibangun oleh elemen-elemen di $\mathbb{Z}_5$ adalah $\mathbb{Z}_5$ sendiri.

Dari i) dan ii), maka submodul dari $\mathbb{Z}$ −modul $\mathbb{Z}_5$ adalah $\{\bar{0}\}$ dan $\mathbb{Z}_5$. ■

3. $\mathbb{Z}_4$ bukan $\mathbb{Z}$ −modul sederhana.
   Bukti:
   i) Jelas $\{\bar{0}\}$ submodul di $\mathbb{Z}_4$.
   ii) $\langle\bar{1}\rangle = \{r\bar{1} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \mathbb{Z}_4$
   $\langle\bar{2}\rangle = \{r\bar{2} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{2}\}$
   $\langle\bar{3}\rangle = \{r\bar{3} | r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\} = \mathbb{Z}_4$
   Dari i) dan ii) maka dapat dikatakan bahwa submodul di $\mathbb{Z}_4$ tidak hanya $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}_4$ sendiri. ■

Dari Contoh 3.2.10 di atas, maka secara umum dapat dikatakan bahwa $\mathbb{Z}_p$, dengan p adalah bilangan prima merupakan $\mathbb{Z}$ −modul sederhana.

Definisi 3.2.11 (Ring Primitif) Misalkan M adalah R −modul. Jika M adalah R −modul setia sederhana, maka R disebut ring primitif (Dauns, 1994).

Contoh 3.2.12 $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah bilangan prima merupakan $\mathbb{Z}$ −modul setia sederhana (Contoh 3.2.8-2 dan Contoh 3.2.10), sehingga $\mathbb{Z}$ merupakan ring primitif.

Lemma 3.2.13 Misalkan M adalah R −modul. Jika R merupakan ring primitif komutatif, maka R merupakan *field* (Jacobson, 1989).
Bukti: Misalkan R adalah ring primitif dan I adalah ideal maksimal di R. Maka $Ann(M) = \{0\}$. Jelas $\{0\}$ adalah ideal sejati ($\{0\} \neq R$). Sehingga, berdasarkan Teorema 2.2.25 berlaku $\{0\} \subseteq I$. Karena R adalah ring komutatif dan I adalah ideal, maka $I = \{0\}$, yaitu $\{0\}$ adalah ideal maksimal. Karena $\{0\}$ adalah ideal maksimal yang termuat di dalam I maka berlaku $I = \{0\}$ atau $I = R$, artinya ideal di

R hanya $\{0\}$ dan R. Berdasarkan Teorema 2.2.17, maka R adalah *field*. ■

Lemma 3.2.14 Misalkan M adalah R −modul setia. Jika M adalah R −modul sederhana maka R adalah *field*.
Bukti: Misalkan M adalah R −modul setia sederhana. Menurut Definisi 3.2.11, maka R merupakan ring primitif. Berdasarkan Lemma 3.2.13 maka R adalah *field*. ■

Teorema 3.2.15 Misalkan M adalah R −modul tak nol dan M adalah R −modul setia. Setiap submodul sejati di M merupakan submodul prima jika dan hanya jika R adalah *field* (Tekir, 2007).
Bukti: $\Rightarrow$ Andaikan R bukan *field*. Perhatikan bahwa submodul $\{0\}$ di M merupakan submodul prima, karena untuk sebarang $r \in R$, $m \in M$, dan $rm = 0$ berlaku:
i) Jika $r = 0$ maka $rM = 0$
ii) Jika $r \neq 0$ maka $m = 0$

Selanjutnya, karena $\{0\}$ adalah submodul prima di R −modul M dan M adalah R −modul setia, maka untuk sebarang $r_1, r_2 \in R$ dan $m \in M$ di mana $m \neq 0$ dengan $r_1 r_2 = 0$ berlaku:

$$\begin{aligned}(r_1 r_2)m = 0 &\Leftrightarrow r_1(r_2 m) = 0 \\ &\Leftrightarrow r_2 m = 0 \text{ atau } r_1 M = 0\end{aligned}$$

Akibatnya, jika $r_2 m = 0$ dengan $m \neq 0$ maka $r_2 = 0$ dan jika $r_1 M = 0$ dengan elemen tak nol $m \in M$ maka $r_1 = 0$. Dari penjelasan tersebut diperoleh untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $m \in M \backslash \{0\}$ jika $(r_1 r_2)m = 0$ dengan $r_1 r_2 = 0$, maka $r_1 = 0$ atau $r_2 = 0$, yaitu R merupakan daerah integral. Selanjutnya, untuk sebarang elemen tak nol $r \in R$, dan $m \in M$ dengan $rm = 0$ berlaku $m = 0$, yaitu $T(M) = \{0\}$, artinya M adalah modul bebas torsi. Dari Lemma 3.2.14 di dapat kontraposisinya, yaitu jika R bukan *field* maka M bukan R −modul sederhana, artinya submodulnya tidak hanya $\{0\}$ dan M. Misalkan Rm adalah submodul sejati tak nol di R −modul M. Misalkan terdapat elemen tak nol $a \in R$ yang tidak mempunyai invers. Akibatnya, $Ram \neq 0$ adalah submodul sejati dan submodul prima. Karena Ram adalah submodul prima maka untuk $am \in Ram$ berlaku $aM \subseteq Ram$ atau $m \in Ram$.

i) $aM \subseteq Ram = aRm \subseteq aM$. Sehingga, $aM \subseteq aRm$ dan $aRm \subseteq aM$, artinya $aM = aRM$. Akibatnya, untuk sebarang $r \in R, m' \in M$ berlaku:

$$\begin{aligned} am' = arm &\Leftrightarrow 0 = arm - am' \\ &\Leftrightarrow 0 = a(rm - m') \end{aligned}$$

yaitu, $a = 0$ atau $rm = m'$, akibatnya $Rm = M$, artinya M adalah R −modul sederhana. Hal ini kontradksi.

ii) Dari $m \in Ram$ akan diperoleh, untuk sebarang $r \in R$ berlaku:

$$\begin{aligned} m = ram &\Leftrightarrow 0 = ram - m \\ &\Leftrightarrow 0 = (ra - 1)m \end{aligned}$$

yaitu, $ra = 1$ atau $m = 0$. Terjadi kontradiksi, karena a tidak mempunyai invers dan $m \neq 0$.

Oleh karena itu, haruslah R *field*.

$\Leftarrow$ Misalkan ring R adalah *field*. Misalkan N sebarang submodul di R −modul M dengan $N \neq M$, akan dibuktikan bahwa N adalah submodul prima. Ambil sebarang $r \in R, m \in M$ dengan $rm \in N$. Maka:

i) Jika $r = 0$, maka $rM = \{0\} \subseteq N$

ii) Jika $r \neq 0$, maka karena ring R merupakan *field*, r mempunyai invers, yaitu r^{-1}, sehingga berlaku $rr^{-1} = r^{-1}r = 1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} r^{-1}(rm) &= (r^{-1}r)m \\ &= 1m \\ &= m \in N \end{aligned}$$

Dari i) dan ii) dapat dikatakan bahwa N adalah submodul prima.

■

Akibat 3.2.16 Misalkan M adalah R −modul perkalian setia. M adalah R −modul sederhana jika dan hanya jika setiap submodul sejati di M adalah submodul prima (Tekir, 2007).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan M adalah R −modul sederhana, artinya submodul-submodulnya hanya $\{0\}$ dan M. Jelas submodul sejatinya adalah $\{0\}$. Dalam pembuktian Teorema 3.2.15 terbukti bahwa $\{0\}$ adalah submodul prima.

$\Leftarrow$ Misalkan setiap submodul sejati di M adalah submodul prima. Menurut Teorema 3.2.15 jelas bahwa setiap submodul sejati di M adalah submodul prima jika dan hanya jika R adalah *field*. Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa M adalah R −modul sederhana. Misalkan N adalah submodul di M. Karena R merupakan *field*, maka ideal-idealnya adalah $\{0\}$ dan R. Untuk $I = \{0\}$ jelas $N = \{0\}M = \{0\}$. Selanjutnya, untuk $I = R$, maka $N = RM = M$ (jelas $RM \subseteq M$ dan untuk setiap $m \in M$ maka $m = 1.m \in RM$, artinya $M \subseteq RM$). Dari penjelasan tersebut, dapat dikatakan bahwa M mempunyai submodul $\{0\}$ dan M, artinya M adalah R −modul sederhana.

■

Contoh 3.2.17 $\mathbb{Z}_p$ dengan p adalah bilangan prima merupakan $\mathbb{Z}$ −modul perkalian.

Bukti:

Submodul di $\mathbb{Z}_p$ hanya $\{0\}$ dan $\mathbb{Z}_p$ (lihat pada Contoh 3.2.10), artinya $\{0\}$ adalah submodul sejati. $\{0\}$ juga merupakan submodul prima, karena untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in \mathbb{Z}_p$ di mana $rm \in \{0\}$ maka $m \in \{0\}$ atau $r\mathbb{Z}_p \subseteq \{0\}$. Berdasarkan Akibat 3.2.16 maka $\mathbb{Z}_p$ merupakan $\mathbb{Z}$ −modul perkalian.

Lemma 3.2.18 Misalkan M adalah R −modul perkalian dan $N_1, N_2, \dots, N_k$ adalah submodul-submodul di M. Misalkan N adalah submodul prima di M, maka pernyataan-pernyataan berikut ekuivalen:

(i) $N_j \subseteq N$ untuk suatu j dengan $1 \le j \le k$

(ii) $\bigcap_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$

(iii) $\prod_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$

(Tekir, 2007).

Bukti: (i)⇒(ii) Jelas bahwa jika $N_j \subseteq N$ untuk suatu j dengan $1 \le j \le k$, maka $N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k = \bigcap_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$.

(ii)⇒(iii) Misalkan $\bigcap_{i=1}^{k} N_i = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_k \subseteq N$. Ambil sebarang $x \in \prod_{i=1}^{k} N_i$, artinya

$x \in N_1 N_2 \dots N_k = (I_1 I_2 \dots I_k)M$.

Sehingga x dapat dinyatakan dengan $x = (r_1 r_2 \dots r_k)m$ untuk suatu $r_i \in I_i$ dan $m \in M$. Sehingga:

$$\begin{aligned} x &= (r_1 r_2 \dots r_i \dots r_k)m \\ &= r_i(r_1 r_2 \dots r_k m) \\ &= r_i m' \in I_i M \end{aligned}$$

,yang artinya $x \in N_i = I_i M$, sehingga juga berlaku $x \in N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_k = \bigcap_{i=1}^{k} N_i$. Karena $\bigcap_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$, maka $x \in \prod_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$.

(iii)⇒(i) Misalkan $\prod_{i=1}^{k} N_i \subseteq N$ dan $N_i = I_i M$ untuk sebarang ideal $I_i (1 \leq i \leq k)$ di ring R. Maka,
$N_1 N_2 \ldots N_k = (I_1 I_2 \ldots I_k)M \subseteq N$, yaitu $I_1 I_2 \ldots I_k \subseteq (N:M)$.
Karena $(N:M)$ adalah ideal prima (Teorema 3.1.3) maka $I_j \subseteq (N:M)$ untuk suatu j dengan $1 \leq j \leq k$. Oleh karena itu, $N_j = I_j M \subseteq (N:M)M = N$, artinya $N_j \subseteq N$.

■

Teorema 3.2.19 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian dan P adalah submodul sejati di M. P adalah submodul prima jika dan hanya jika
$UV \subseteq P \Rightarrow U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$
untuk setiap submodul-submodul U dan V di $R-$modul perkalian M (Ameri, 2002).

Bukti: ⇒ Misalkan P adalah submodul prima dan $UV \subseteq P$. Andaikan $U \nsubseteq P$ dan $V \nsubseteq P$ untuk sebarang submodul U dan V di M. Misalkan I dan J berturut-turut adalah ideal presentasi dari U dan V, artinya $U = IM$ dan $V = JM$, maka $UV = (IM)(JM) = (IJ)M \subseteq P$, artinya terdapat $rm' \in U \backslash P$ dan $sm' \in V \backslash P$ untuk sebarang $r \in I, s \in J$, dan $m' \in M$. Akibatnya, $(rm')(sm') = rsm' \in P$. Karena P adalah submodul prima maka $rM \subseteq P$ atau $sM \subseteq P$, yaitu $rm' \in U \subseteq P$ atau $sm' \in V \subseteq P$. Jelas terjadi kontradiksi, jadi haruslah $U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$.

⇐ Misalkan P adalah submodul sejati di $R-$modul perkalian M dan berlaku $UV \subseteq P \Rightarrow U \subseteq P$ atau $V \subseteq P$. Andaikan P bukan merupakan submodul prima, yaitu $rx \in P$ untuk sebarang $r \in R$ dan $x \in M \backslash P$, tetapi $rM \nsubseteq P$. Maka $rm \notin P$ untuk sebarang $m \in M$. Misalkan I dan J berturut-turut adalah ideal presentasi dari rx dan m, maka dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh rx dan m, yaitu:

$$R(rx)(Rm) = (Rx)(Rrm) = (IM)(JM) = IJM = P$$

Akibatnya diperoleh $Rx \subseteq P$ atau $Rrm \subseteq P$, artinya $x \in P$ atau $rm \in P$. Jelas terjadi kontradiksi, jadi haruslah P adalah submodul prima.

■

Dari Teorema 3.2.19, dapat dicari contoh lain dari modul perkalian. Hal tersebut dapat dilihat dalam contoh berikut.

Contoh 3.2.20 Himpunan $M = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{Z}\}$ yang merupakan grup komutatif terhadap penjumlahan merupakan $\mathbb{Z}-$modul perkalian.

Bukti:

Submodul-submodul di M adalah $\{0\}$ dan M sendiri. $\{0\}$ adalah submodul prima karena untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $m \in M$ di mana $rm \in \{0\}$ maka $m \in \{0\}$ atau $rM \subseteq \{0\}$. Selain itu, untuk submodul $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $V = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}$ di mana $UV = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \subseteq \{0\}$, maka $U \subseteq \{0\}$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.2.19 maka $M = \{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} | a \in \mathbb{Z}\}$ adalah $\mathbb{Z}-$modul perkalian.

■

Akibat 3.2.21 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian dan P adalah submodul sejati di M. P adalah submodul prima jika dan hanya jika
$\langle m\rangle\langle m'\rangle \subseteq P \Rightarrow m \in P$ atau $m' \in P$
untuk setiap $m, m' \in M$ (Ameri, 2002).

Bukti: Misalkan P adalah submodul prima dan berlaku $\langle m\rangle\langle m'\rangle \subseteq P$. Berdasarkan Teorema 3.2.19 diperoleh bahwa P adalah submodul prima jika dan hanya jika
$\langle m\rangle\langle m'\rangle \subseteq P \Rightarrow \langle m\rangle \subseteq P$ atau $\langle m'\rangle \subseteq P$
artinya, $m \in P$ atau $m' \in P$. ■

Definisi 3.2.22 (Tertutup terhadap Perkalian) Misalkan M adalah $R-$modul perkalian. Suatu himpunan bagian S^* di M dikatakan tertutup terhadap perkalian (*multiplicatively closed*) jika $\langle m\rangle\langle n\rangle \cap S^* \neq \emptyset$ untuk sebarang $m, n \in S^*$ (Tekir, 2007).

Lemma 3.2.23 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian. Submodul sejati N di M adalah submodul prima jika dan hanya jika $M\backslash N$ tertutup terhadap perkalian (Tekir, 2007).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan N adalah submodul prima di M. Akan dibuktikan $M\backslash N$ tertutup terhadap perkalian. Ambil sebarang

$a, b \in M \backslash N$, artinya $a, b \notin N$. Karena N adalah submodul prima maka $\langle a \rangle \langle b \rangle \nsubseteq N$. Sehingga, $\langle a \rangle \langle b \rangle \cap M \backslash N \neq \emptyset$. Karena hal ini berlaku untuk sebarang $a, b \in M \backslash N$, maka $M \backslash N$ tertutup terhadap perkalian.

$\Leftarrow$ Misalkan $M \backslash N$ tertutup terhadap perkalian. Ambil sebarang $a, b \notin N$, tetapi $a, b \in M \backslash N$. Karena $M \backslash N$ tertutup terhadap perkalian, maka $\langle a \rangle \langle b \rangle \cap M \backslash N \neq \emptyset$. Akibatnya, $\langle a \rangle \langle b \rangle \nsubseteq N$. Dengan kata lain N adalah submodul prima.

■

Teorema 3.2.24 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian dan A adalah suatu submodul di M serta S^* tertutup terhadap perkalian di M di mana $A \cap S^* = \emptyset$. Maka terdapat suatu submodul N di M yang maksimal dengan sifat $A \subseteq N$ dan $N \cap S^* = \emptyset$. Selanjutnya, N adalah submodul prima di M (Tekir, 2007).

Bukti: Misalkan H adalah himpunan dari semua submodul-submodul B di M, terurut parsial dengan relasi " $\subseteq$ " di mana $A \subseteq B$ dan $B \cap S^* = \emptyset$. Jelas $H \neq \emptyset$ karena $A \in H$. Berdasarkan Lemma *Zorn*, H mempunyai elemen maksimal, sebut saja N. Andaikan N bukan merupakan submodul prima dan $\langle a \rangle \langle b \rangle \subseteq N$, maka $a, b \notin N$ di mana $a, b \in M$. Maka $N \subset N + \langle a \rangle$ dan $N \subset N + \langle b \rangle$ sehingga terdapat $s, t \in S^*$ di mana $s \in N + \langle a \rangle$ dan $t \in N + \langle b \rangle$. Oleh karena itu, $\langle s \rangle \langle t \rangle \cap S^* \neq \emptyset$ dan $\langle s \rangle \langle t \rangle \subseteq (N + \langle a \rangle)(N + \langle b \rangle) \subseteq N$. Hal ini kontradiksi dengan $N \cap S^* = \emptyset$. Jadi, pengandaian salah dan haruslah N merupakan submodul prima. ■

Seperti halnya pada ring, pada modul perkalian juga didefinisikan pembagi nol.

Definisi 3.2.25 (Pembagi Nol) Misalkan M adalah $R-$modul perkalian. Suatu pembagi nol di M adalah elemen tak nol $a \in M$ di mana terdapat $b \in M$ dengan $b \neq 0$ sehingga

$$ab = \langle a \rangle \langle b \rangle = \langle ab \rangle = 0$$

(Tekir, 2007).

Definisi 3.2.26 (Modul Faktor) Misalkan N adalah submodul di R −modul M. Himpunan $M/N = \{\bar{x} | \bar{x} = x + N,$ untuk $x \in M\}$ disebut sebagai modul faktor (Ribenboim, 1969).

Didefinisikan operasi-operasi pada M/N sebagai berikut:

1. $x, y \in M \quad \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y} = (x + y) + N$
2. $(x \in M)(a \in R) \Rightarrow a\bar{x} = \overline{ax} = ax + N$

Teorema 3.2.27 Misalkan M adalah R −modul perkalian dan N adalah submodul sejati di M. N adalah submodul prima di M jika dan hanya jika M/N tidak memuat pembagi nol (Tekir, 2007).

Bukti: ⇒ Misalkan N adalah submodul prima di M. Sebelumnya akan dibuktikan bahwa M/N adalah R −modul perkalian. Untuk sebarang $m \in M$ dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh m, yaitu $Rm \subseteq M$. Karena M adalah modul perkalian, maka terdapat ideal I di ring R sehingga berlaku $Rm = IM$. Selanjutnya, untuk sebarang $\bar{m} \in M/N$ dapat dibentuk submodul yang dibangun oleh $\bar{m}$, yaitu $R\bar{m} \in M/N$. Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned} R\bar{m} &= R(m + N) \\ &= Rm + N \\ &= IM + N \end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa $IM + N = I(M/N)$, karena untuk sebarang $am + n \in IM + N$ dengan $a \in I, m \in M,$ dan $n \in N$ berlaku $am + N = \overline{am} = a\bar{m} = a(M + N) \in I(M/N)$, yang artinya $IM + N \subseteq I(M/N)$ dan untuk $a\bar{m} \in I(M/N)$ berlaku $a\bar{m} = \overline{am} = am + N \in IM + N$, yang artinya $I(M/N) \subseteq IM + N$. Sehingga diperoleh $R\bar{m} = I(M/N)$, yang artinya untuk sebarang $\bar{m} \in M/N$ terdapat ideal I di ring R sehingga berlaku $R\bar{m} = I(M/N)$. Oleh karena itu, M/N adalah R −modul perkalian.

Selanjutnya, andaikan M/N mempunyai pembagi nol. Ambil sebarang elemen tak nol $\bar{a} \in M/N$ adalah pembagi nol di M/N dengan $a \in M$, maka terdapat $\bar{b} \in M/N$ dengan $\bar{b} \neq 0$ dan $b \in M$ sehingga berlaku $\bar{a}\bar{b} = 0$. Misalkan I dan J berturut-turut merupakan ideal presentasi dari $\langle\bar{a}\rangle$ dan $\langle\bar{b}\rangle$, maka $\langle\bar{a}\rangle\langle\bar{b}\rangle = (IJ)\, M/N = N$, artinya $\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq N$. Karena N adalah submodul prima, maka $a \in N$ atau $b \in N$. Hal ini kontradiksi dengan elemen tak nol $\bar{a} \in M/N$ dan elemen tak nol $\bar{b} \in M/N$, yang artinya $a \notin N$ dan $b \notin N$. Terjadi kontradiksi, maka haruslah M/N tidak mempunyai pembagi nol.

$\Leftarrow$ Misalkan M/N tidak memuat pembagi nol dan $\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq N$ di mana $a, b \in M$, maka $\bar{a}\bar{b} = 0$. Karena M/N tidak memuat pembagi nol, maka $\bar{a} = 0$ atau $\bar{b} = 0$. Dari sini diperoleh:

$$\begin{aligned} \bar{a} = 0 &\Leftrightarrow a + N = 0 \\ &\Leftrightarrow a + N = 0 + N \\ &\Leftrightarrow a + N = N \\ &\Leftrightarrow a \in N \\ \bar{b} = 0 &\Leftrightarrow b + N = 0 \\ &\Leftrightarrow b + N = 0 + N \\ &\Leftrightarrow b + N = N \\ &\Leftrightarrow b \in N \end{aligned}$$

Sehingga, untuk sebarang $a, b \in M$ jika $\langle a\rangle\langle b\rangle \subseteq N$ maka $a \in N$ atau $b \in N$, artinya N adalah submodul prima.

■

Definisi 3.2.28 (Nilpoten) Misalkan M adalah R −modul perkalian dan N adalah suatu submodul di M, maka

(i) N disebut nilpoten jika $N^k = 0$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$, di mana N^k merupakan hasil kali N sebanyak k kali.

(ii) Suatu elemen $m \in M$ disebut nilpoten jika $m^k = 0$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$.

Himpunan semua elemen nilpoten di M dinotasikan N_M (Tekir, 2007).

Definisi 3.2.29 (Radikal) Misalkan M adalah R −modul dan N adalah submodul di M, maka radikal dari N, yang dinotasikan $M\text{-}rad(N)$, didefinisikan sebagai irisan dari semua submodul prima di M yang memuat N. Jika N tidak termuat dalam sebarang submodul prima di M, maka $M\text{-}rad(N) = M$ (Tekir, 2007).

Lemma 3.2.30 Misalkan N adalah submodul sejati di R −modul perkalian M dan I adalah ideal di R dengan $I = (N{:}\,M)$. Maka, $M\text{-}rad(N) = rad(I)M$ (Amini, 2003).

Bukti:

(i) Misalkan $S = \{P | P$ adalah ideal prima di R yang memuat $I\}$, yaitu $I = (N{:}\,M) \subseteq P$. Karena P adalah ideal prima, maka berdasarkan Teorema 2.2.34, P juga merupakan ideal radikal di

R $(P = rad(P))$. Akibatnya, $PM = rad(P)M = N$, yaitu PM merupakan submodul prima yang memuat N. Dengan kata lain, $M\text{-}rad(N) \subseteq rad(I)M$.

(ii) Untuk setiap submodul prima K di M yang memuat N, berlaku $K = (K{:}\,M)M$ dan $(K{:}\,M)$ adalah ideal prima di R dengan $I \subseteq (K{:}\,M)$. Berdasarkan Teorema 2.2.34, karena $(K{:}\,M)$ adalah ideal prima maka $rad(I) \subseteq rad(K{:}\,M) = (K{:}\,M)$ dan juga $rad(I)M \subseteq (K{:}\,M)M = K$. Karena K adalah submodul prima di M dengan $N \subseteq K$, maka $rad(I)M \subseteq M\text{-}rad(N)$.

Dari (i) dan (ii) dapat disimpulkan bahwa $M\text{-}rad(N) = rad(I)M$.

■

Teorema 3.2.31 Misalkan M adalah R −modul perkalian dan N suatu submodul di M. Maka,
$M\text{-}rad(N) = \{m \in M \,|\, \langle m\rangle^k \subseteq N \text{ untuk suatu } k \geq 0\}$
(Tekir, 2007).

Bukti: Misalkan $B = \{m \in M \,|\, \langle m\rangle^k \subseteq N \text{ untuk suatu } k \geq 0\}$. Akan dibuktikan bahwa B adalah submodul di R −modul perkalian M. Misalkan $x, y \in B$ serta I dan J berturut-turut adalah ideal presentasi dari $\langle x\rangle$ dan $\langle y\rangle$. Maka, $\langle x\rangle^n = I^n M \subseteq N$ dan $\langle y\rangle^m = J^m M \subseteq N$ untuk suatu $n, m \in \mathbb{Z}^+$. Misalkan $k = max\{m, n\}$, maka:

$$\begin{aligned}
\langle x + y\rangle^k &= (IM + JM)^k \\
&= ((I + J)M)^k \\
&= (I + J)^k M \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (IM)^i (JM)^{k-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \langle x\rangle^i \langle y\rangle^{k-i} \subseteq N
\end{aligned}$$

Sehingga $(x + y) \in B$.

Selanjutnya, untuk $x \in B$ dan $r \in R$ maka $\langle rx\rangle^n = \langle r\rangle^n \langle x\rangle^n \subseteq N$ (karena $\langle x\rangle^n \subseteq N$), artinya $rx \in B$. Dari penjelasan tersebut terbukti bahwa B adalah submodul di M. Selanjutnya, ambil sebarang $m \in B$ dan A adalah ideal presentasi dari $\langle m\rangle$, maka $\langle m\rangle^k = A^k M \subseteq N$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}^+$. Berdasarkan Lemma 3.2.30 akan diperoleh:
$M\text{-}rad(\langle m\rangle^k) = rad(A^k)M \subseteq rad(A)M = M\text{-}rad(N)$

Karenanya,
$M\text{-}rad(\langle m \rangle) = M\text{-}rad(AM) \subseteq M\text{-}rad(N)$
artinya, $B \subseteq M\text{-}rad(N)$.

Selanjutnya, ambil sebarang $m \in M\text{-}rad(N) = rad(I)M$, maka $m = \sum_{i=1}^{n} r^i m^i$ untuk $r^i \in rad(I)$ dan $m^i \in M$. Akibatnya $(r^i)^n \in I$ untuk suatu $n \in \mathbb{Z}^+$. Oleh karena itu, untuk suatu n yang cukup besar diperoleh $\langle m \rangle^k \subseteq IM = N$, artinya $M\text{-}rad(N) \subseteq B$. Dari penjelasan di atas diperoleh bahwa $M\text{-}rad(N) = B$, yang artinya $M\text{-}rad(N) = \{m \in M \big| \langle m \rangle^k \subseteq N \text{ untuk suatu } k \geq 0\}$. ■

Akibat 3.2.32 Misalkan M adalah R −modul perkalian, maka N_M merupakan irisan dari semua submodul prima di M $(N_M = M\text{-}rad(0))$ (Tekir, 2007).
Bukti: Perhatikan $N_M = \{m \in M \big| m^k = 0, \text{untuk suatu } k \in \mathbb{Z}^+\}$ dan $M\text{-}rad(N) = \{m \in M \big| \langle m \rangle^k \subseteq N \text{ untuk suatu } k \geq 0\}$. Jika $N = \{0\}$ maka:
$M\text{-}rad(0) = \{m \in M \big| m^k = 0, \text{ untuk suatu } k \in \mathbb{Z}^+\} = N_M$.
■

Definisi 3.2.33 Misalkan M adalah R −modul perkalian dan N dan L adalah submodul-submodul di M. Didefinisikan suatu himpunan $(L :_M N)$, yaitu $(L :_M N) = \{m \in M | mN \subseteq L\}$
(Nezhad dan Naderi, 2009).

Contoh 3.2.34 Misalkan $N = 3\mathbb{Z}$ dan $L = 2\mathbb{Z}$ adalah submodul-submodul di $\mathbb{Z}$ −modul perkalian $\mathbb{Z}$.
$(L :_M N) = \{m \in \mathbb{Z} | m(3\mathbb{Z}) \subseteq 2\mathbb{Z}\} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$

Dari Contoh 3.2.34 di atas, dapat dilihat bahwa himpunan $(L :_M N)$ merupakan submodul L. Sifat ini dapat lebih dipahami dalam teorema berikut.

Teorema 3.2.35 Misalkan M adalah R −modul perkalian dan L adalah submodul sejati di M. L adalah submodul prima di M jika dan hanya jika untuk setiap submodul N di M dengan $N \nsubseteq L$ berlaku $(L :_M N) = L$ (Nezhad dan Naderi, 2009).

Bukti: $\Rightarrow$ Misalkan L adalah submodul prima di M dan N adalah submodul di M dengan $N \nsubseteq L$. Ambil sebarang $x \in L$ dengan $xn \in L$ untuk setiap $n \in N$. Karena L adalah submodul prima dan $N \nsubseteq L$, maka $xN \subseteq L$, yaitu $x \in (L:_M N)$. Akibatnya, $L \subseteq (L:_M N)$. Selanjutnya, andaikan $(L:_M N) \nsubseteq L$. Ambil sebarang $m \in (L:_M N)$ dengan $m \notin L$, yaitu $mN \subseteq L$, maka $mn \in L$ untuk setiap $n \in N$. Karena L submodul prima dan $m \notin L$, maka berdasarkan Akibat 3.2.21 berlaku $n \in L$. Dengan kata lain $N \subseteq L$. Hal ini kontradiksi, maka haruslah $(L:_M N) \subseteq L$. Akibatnya, $(L:N) = L$.

$\Leftarrow$ Misalkan $\langle m_1\rangle\langle m_2\rangle \subseteq L$ dan $m_1 \notin L$ untuk setiap $m_1, m_2 \in M$. Karena $L = (L:_M N)$ maka juga berlaku $\langle m_1\rangle\langle m_2\rangle \subseteq (L:_M N)$, yaitu $(m_1 m_2)N \subseteq L$. Sehingga, diperoleh $m_2(m_1 N) \subseteq L$, yaitu $m_2 \in (L:_M N) = L$. Oleh karena itu, berdasarkan Akibat 3.2.21 maka L adalah submodul prima.

■

Contoh 3.2.36 $\mathbb{Z}$ adalah $\mathbb{Z}-$modul perkalian. Misalkan $L = 3\mathbb{Z}$ adalah submodul prima di $\mathbb{Z}$. Ambil sebarang submodul lain, misalkan N, dengan $N \nsubseteq L$, yaitu $N = 8\mathbb{Z}$. Sehingga:

$$\begin{aligned}(L:_M N) = (3\mathbb{Z}:_{\mathbb{Z}} 8\mathbb{Z}) &= \{m \in \mathbb{Z} | m(8\mathbb{Z}) \subseteq 3\mathbb{Z}\} \\ &= \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\} \\ &= 3\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Teorema 3.2.37 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian, N dan L adalah submodul-submodul di M. Maka $(L:_M N) = (L:N)M$ (Nezhad dan Naderi, 2009).

Bukti:

i) Misalkan $r \in (L:N), m \in M$ dan $n \in N$. Maka $rn \in L$ dan $(rm)n = m(rn) \in mN \subseteq L$, yaitu $rm \in (L:_M N)$. Akibatnya, $(L:N)M \subseteq (L:_M N)$.
ii) Misalkan $m \in (L:_M N)$, maka $mn \in L, \forall n \in N$. Misalkan terdapat ideal I dan J di R di mana $\langle m\rangle = IM$ dan $\langle n\rangle = JM$, serta $IJM = \langle m\rangle\langle n\rangle \subseteq L$. Karenanya, $m = \sum_{k=1}^{t} i_k m_k$, untuk sebarang $i_k \in I$ dan $m_k \in M$, $1 \leq k \leq t$. Selanjutnya, untuk sebarang k, maka:
$i_k n \in i_k\langle n\rangle = i_k(JM) \subseteq IJM \subseteq L; 1 \leq k \leq t.$
Oleh karena itu, $i_k \in (L:N), \forall\, 1 \leq k \leq t$, artinya $m \in (L:N)M$. Akibatnya, $(L:_M N) \subseteq (L:N)M$.

Dari i) dan ii) maka $(L:_M N) = (L:N)M$. ■

Akibat 3.2.38 Misalkan M adalah $R-$modul perkalian, N dan L adalah submodul di M di mana $L \nsubseteq N$. Jika L adalah submodul prima di N, maka $(L:_M N)$ adalah submodul prima di M (Nezhad dan Naderi, 2009).

Bukti: Misalkan L submodul prima di N. Berdasarkan Akibat 3.2.6 diperoleh jika L submodul prima di N, maka $(L:N)M$ merupakan submodul prima di M. Akibatnya, dengan Teorema 3.2.37 maka $(L:_M N)$ juga merupakan submodul prima di M. ■

BAB IV
KESIMPULAN

Dari pembahasan skripsi ini, dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. Jika M adalah R −modul perkalian setia, maka pernyataan berikut ekuivalen.
   (i) R adalah *field*.
   (ii) Setiap submodul sejati di M merupakan submodul prima.
   (iii) M adalah $R-$ modul sederhana.
2. Jika M adalah R −modul perkalian dan N merupakan submodul sejati di M, maka pernyataan berikut ekuivalen.
   (i) N adalah submodul prima di M.
   (ii) Untuk setiap $U, V \in M$ dengan $UV \subseteq N$ berlaku $U \subseteq N$ atau $V \subseteq N$.
   (iii) Untuk setiap $m, m' \in M$ dengan $\langle m \rangle \langle m' \rangle \subseteq N$ berlaku $m \in N$ atau $m' \in N$.
3. Jika M adalah R −modul perkalian dan N merupakan submodul sejati di M, maka N adalah submodul prima jika dan hanya jika M/N tidak memuat pembagi nol.
4. Jika M adalah R −modul perkalian, maka himpunan dari semua elemen nilpoten di M merupakan irisan dari semua submodul prima di M.
5. Jika M adalah R −modul perkalian dan L adalah submodul sejati di M, maka L adalah submodul prima jika dan hanya jika untuk setiap submodul N di M dengan $N \nsubseteq L$ berlaku $(L :_M N) = L$.
6. Jika M adalah R −modul perkalian, L dan N adalah submodul-submodul di M dengan $L \nsubseteq N$, maka $(L :_M N)$ adalah submodul prima di M jika L adalah submodul prima di N.

DAFTAR PUSTAKA

Ameri, R. 2002. On The Prime Submodules of Multiplication Modules. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. 27: 1715-1724.

Amini, A. 2003. *Multiplication Modules and Ideals*. Thesis of Pure Mathematics Shiraz University. Iran.

Arifin, S. 2008. *Modul Perkalian.* Skripsi Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.

Ash, R. 2000. *Basic Abstract Algebra: For Graduate Students and Advanced Undergraduates*. Dover Publication. New York.

Dauns, J. 1994. *Modules and Rings*. Cambridge Univ. Press. New York.

Dummit, D.S. dan R.M. Foote. 2004. *Abstract Algebra* . Third Ed. John Willey and Sons Inc. New York.

Fraleigh, J.B. 2003. *A First Course in Abstract Algebra*. Seventh Ed. Addison-Wesley Pub. Comp. New York.

Gaur, A., A.K. Maloo, dan A.Parkash. 2007. Prime Submodules in Multiplication Modules. *International jurnal of Algebra*. 1(8): 375-380.

Hungerford, T.W. 2003. *Graduate Text in Mathematics*. Springer-Verlag. New York.

Jacobson, N. 1989. *Basic Algebra II*. Second Ed. W.H. Freeman and Company. New York.

Nezhad, R. J. dan M.H. Naderi. 2009. On Prime and Semiprime Submodules of Multiplication Modules. *International Mathematical Forum*. 4(26): 1257-1266.

Ribenboim, P. 1969. *Rings and Modules*. John Willey and Sons Inc. New York.

Rotman, J.J. 2003. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall. New York.

Tekir, U. 2007. Multiplication Modules. *International Mathematical Forum*. 2(29): 1415-1420.