PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-TITIK ANTI AJAIB PADA GRAF *PATH, CYCLE* DAN *PETERSEN*

SKRIPSI

Oleh :
ANIS SYAVITRI
0410940007-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-TITIK ANTI AJAIB PADA GRAF *PATH, CYCLE* DAN *PETERSEN*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
ANIS SYAVITRI
0410940007-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG

2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-TITIK ANTI AJAIB PADA GRAF *PATH, CYCLE* DAN *PETERSEN*

Oleh :

ANIS SYAVITRI
0410940007-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 11 Februari 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Marsudi, MS	**Drs. Hery Subagio, M.Kes**
NIP. 131 759 585	**NIP. 131 281 896**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**:**	**Anis Syavitri**
NIM	**:**	**0410940007-94**
Jurusan	**:**	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**:**	**Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path*, *Cycle*, dan *Petersen***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 11 Februari 2009
Yang menyatakan,

(Anis Syavitri)
NIM. 0410940007-94

PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-TITIK ANTI AJAIB PADA GRAF *PATH*, *CYCLE*, DAN *PETERSEN*

ABSTRAK

Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib adalah salah satu bagian dari pelabelan graf. Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib digunakan untuk melabelkan titik dan sisi pada beberapa graf. Graf yang akan dilabeli adalah graf *Path* ($d=2$ untuk n ganjil dan $d=3$ untuk n sembarang), graf *Cycle* ($d=2$ untuk n ganjil dan $d=1$ untuk n sembarang) dan graf *Petersen* (*Petersen* khusus $P(5,2)$).

Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada masing-masing graf *Path* (P_n), *Cycle* (C_n), dan *Petersen* khusus $P(5,2)$ dilakukan dengan melabelkan bilangan bulat positif pada titik dan sisi dari graf dengan menggunakan metode yang berbeda-beda sesuai dengan nilai n dan d pada graf. Hasil yang didapat dari skripsi ini adalah pelabelan pada graf *Path* (P_n), *Cycle* (C_n) dan *Petersen* khusus $P(5,2)$ memenuhi syarat dari pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib yaitu memenuhi himpunan bobot titik $\{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$.

Kata kunci : Pelabelan anti ajaib, *Path*, *Cycle*, *Petersen*, bobot titik.

SUPER (a,d)-VERTEX ANTIMAGIC TOTAL LABELING OF *PATH*, *CYCLE*, AND *PETERSEN* GRAPH

ABSTRACT

Super (a,d)-vertex antimagic total labeling is one type of graph labeling. The super (a,d)-vertex antimagic total labeling is used for vertex and edge labeling from some type of graph. The graph that will be labeled is *Path* graph ($d=2$ for n odd and $d=3$ for all n), *Cycle* graph ($d=2$ for n odd and $d=1$ for all n) and *Petersen* graph (Special *Petersen* $P(5,2)$).

Super (a,d)-vertex antimagic total labeling for each *Path* (P_n), *Cycle* (C_n) and special *Petersen* graph $P(5,2)$ is performed using with different method of labeling for their each vertex and edge using integer number. It depends on their value from n and d variable. The result from this final project is graph labeling for *Path* (P_n), *Cycle* (C_n) and special *Petersen* graph $P(5,2)$ using super (a,d)-vertex antimagic total labeling method required for vertex weight set $\{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$.

Keywords : Antimagic labeling, *Path*, *Cycle*, *Petersen*, vertex weight.

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path*, *Cycle*, dan *Petersen***".

Selama penyusunan Skripsi ini, penulis menyadari tidak terlepas dari bantuan, bimbingan dan dorongan serta doa restu dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan yang baik ini, tidak lupa penulis menghaturkan rasa hormat dan ucapan terima kasih yang tulus dan sedalam-dalamnya kepada :

1. Drs. Marsudi, MS selaku dosen pembimbing I dan Drs. Hery Subagio, M.Kes selaku dosen pembimbing II atas petunjuk, bimbingan, dukungan, kesabaran, motivasi, nasihat dan waktu yang diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, MSc selaku ketua jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., MSi selaku ketua program studi Matematika Universitas Brawijaya Malang.
4. Ayah, Ibu, dan kakak yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasehat, perhatian, pengertian, motivasi, kasih sayang dan dukungan hingga terselesaikannya Skripsi ini.
5. Dosen pengajar dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika atas kesabaran dan bimbingan selama masa perkuliahan dan keikhlasan dalam memberikan ilmu yang bermanfaat.
6. Pihak lain yang telah membantu terselesaikannnya Skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih jauh dari sempurna sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik membangun dari berbagai pihak. Akhir kata, semoga Skripsi ini bermanfaat bagi teman-teman mahasiswa khususnya fakultas MIPA Universitas Brawijaya.

Malang, 11 Februari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

n	: Banyak titik suatu graf
e	: Banyak sisi suatu graf
a	: Bobot titik pertama (terkecil)
d	: Selisih bobot titik
$V(G)$	: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf G
$deg(v)$	: Derajat titik v
$\delta(G)$	: Derajat minimum graf G
$\Delta(G)$	: Derajat maksimum graf G
$V(P_n)$	: Himpunan titik dari graf P_n
$E(P_n)$	: Himpunan sisi dari graf P_n
$V(C_n)$	: Himpunan titik dari graf C_n
$E(C_n)$	: Himpunan sisi dari graf C_n
$V(P(5,2))$	: Himpunan titik dari graf $P(5,2)$
$E(P(5,2))$	: Himpunan sisi dari graf $P(5,2)$
$b_\alpha(x_i)$	: Bobot titik x_i
B_α	: Himpunan bobot titik
$\alpha(x_i)$	: Pelabelan titik x_i
$\alpha(x_i x_{i+1})$	: Pelabelan sisi $x_i x_{i+1}$

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path*, *Cycle*, dan *Petersen***".

Selama penyusunan Skripsi ini, penulis menyadari tidak terlepas dari bantuan, bimbingan dan dorongan serta doa restu dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan yang baik ini, tidak lupa penulis menghaturkan rasa hormat dan ucapan terima kasih yang tulus dan sedalam-dalamnya kepada :

1. Drs. Marsudi, MS selaku dosen pembimbing I dan Drs. Hery Subagio, M.Kes selaku dosen pembimbing II atas petunjuk, bimbingan, dukungan, kesabaran, motivasi, nasihat dan waktu yang diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, MSc selaku ketua jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., MSi selaku ketua program studi Matematika Universitas Brawijaya Malang.
4. Ayah, Ibu, dan kakak yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasehat, perhatian, pengertian, motivasi, kasih sayang dan dukungan hingga terselesaikannya Skripsi ini.
5. Dosen pengajar dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika atas kesabaran dan bimbingan selama masa perkuliahan dan keikhlasan dalam memberikan ilmu yang bermanfaat.
6. Pihak lain yang telah membantu terselesaikannnya Skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih jauh dari sempurna sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik membangun dari berbagai pihak. Akhir kata, semoga Skripsi ini bermanfaat bagi teman-teman mahasiswa khususnya fakultas MIPA Universitas Brawijaya.

Malang, 11 Februari 2009

Penulis

PELABELAN TOTAL SUPER (a,d)-TITIK ANTI AJAIB PADA GRAF *PATH*, *CYCLE*, DAN *PETERSEN*

ABSTRAK

Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib adalah salah satu bagian dari pelabelan graf. Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib digunakan untuk melabelkan titik dan sisi pada beberapa graf. Graf yang akan dilabeli adalah graf *Path* ($d=2$ untuk n ganjil dan $d=3$ untuk n sembarang), graf *Cycle* ($d=2$ untuk n ganjil dan $d=1$ untuk n sembarang) dan graf *Petersen* (*Petersen* khusus $P(5,2)$).

Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada masing-masing graf *Path* (P_n), *Cycle* (C_n), dan *Petersen* khusus $P(5,2)$ dilakukan dengan melabelkan bilangan bulat positif pada titik dan sisi dari graf dengan menggunakan metode yang berbeda-beda sesuai dengan nilai n dan d pada graf. Hasil yang didapat dari skripsi ini adalah pelabelan pada graf *Path* (P_n), *Cycle* (C_n) dan *Petersen* khusus $P(5,2)$ memenuhi syarat dari pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib yaitu memenuhi himpunan bobot titik $\{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$.

Kata kunci : Pelabelan anti ajaib, *Path*, *Cycle*, *Petersen*, bobot titik.

SUPER (a,d)-VERTEX ANTIMAGIC TOTAL LABELING OF *PATH*, *CYCLE*, AND *PETERSEN* GRAPH

ABSTRACT

Super (a,d)-vertex antimagic total labeling is one type of graph labeling. The super (a,d)-vertex antimagic total labeling is used for vertex and edge labeling from some type of graph. The graph that will be labeled is *Path* graph ($d=2$ for n odd and $d=3$ for all n), *Cycle* graph ($d=2$ for n odd and $d=1$ for all n) and *Petersen* graph (Special *Petersen* $P(5,2)$).

Super (a,d)-vertex antimagic total labeling for each *Path* (P_n), *Cycle* (C_n) and special *Petersen* graph $P(5,2)$ is performed using with different method of labeling for their each vertex and edge using integer number. It depends on their value from n and d variable. The result from this final project is graph labeling for *Path* (P_n), *Cycle* (C_n) and special *Petersen* graph $P(5,2)$ using super (a,d)-vertex antimagic total labeling method required for vertex weight set $\{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$.

Keywords : Antimagic labeling, *Path*, *Cycle*, *Petersen*, vertex weight.

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR SIMBOL

n	: Banyak titik suatu graf
e	: Banyak sisi suatu graf
a	: Bobot titik pertama (terkecil)
d	: Selisih bobot titik
$V(G)$	: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf G
$deg(v)$	: Derajat titik v
$\delta(G)$	: Derajat minimum graf G
$\Delta(G)$	: Derajat maksimum graf G
$V(P_n)$	: Himpunan titik dari graf P_n
$E(P_n)$	: Himpunan sisi dari graf P_n
$V(C_n)$	: Himpunan titik dari graf C_n
$E(C_n)$	: Himpunan sisi dari graf C_n
$V(P(5,2))$	: Himpunan titik dari graf $P(5,2)$
$E(P(5,2))$	: Himpunan sisi dari graf $P(5,2)$
$b_\alpha(x_i)$	: Bobot titik x_i
B_α	: Himpunan bobot titik
$\alpha(x_i)$	: Pelabelan titik x_i
$\alpha(x_i\, x_{i+1})$	: Pelabelan sisi $x_i\, x_{i+1}$

DAFTAR ISI

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan graf pada asal mulanya dikemukakan oleh Alex Rosa pada tahun 1967. Alex Rosa dalam penelitiannya mengidentifikasikan beberapa tipe pelabelan, yaitu pelabelan α-, pelabelan β- dan pelabelan ρ-. Tipe-tipe pelabelan ini kemudian berkembang menjadi pelabelan graceful, pelabelan tipe ajaib, pelabelan harmonius dan pelabelan miscellanous (Gallian, 2007).

Terdapat beberapa jenis graf yang digunakan pada pelabelan graf, beberapa diantaranya adalah graf *Path, Cycle* dan *Petersen*. *Path* merupakan graf yang terdiri dari titik dan sisi sehingga membentuk lintasan. Sedangkan *Cycle* merupakan graf *Path* tertutup. Graf *Petersen* merupakan graf yang unik. Graf *Petersen* mempunyai beberapa elemen tambahan selain titik dan sisi, yaitu jari-jari. Salah satu jenis graf *Petersen* adalah *Petersen* khusus.

Pelabelan anti ajaib yang diperkenalkan oleh Hartsfield dan Ringel pada tahun 1990 merupakan salah satu pengembangan dari pelabelan tipe ajaib. Sugeng (2005) telah menemukan variasi metode pelabelan anti ajaib yang lain. Salah satu metode yang dikemukakan adalah pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib. Berdasarkan pada metode pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib yang dikemukakan oleh Sugeng (2005), penulis akan merumuskan langkah sistematis dalam menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path*, *Cycle* dan *Petersen* khusus. Langkah sistematis ini digunakan untuk memperjelas metode yang dikemukakan Sugeng (2005). Pemilihan bentuk graf *Path* dan *Cycle* sebagai objek penelitian lebih dikarenakan bentuk graf *Path* dan *Cycle* banyak ditemui pada kehidupan sehari-hari. Sedangkan pemilihan graf *Petersen* dikarenakan keunikan dari graf ini. Oleh karena itu penulis mengambil judul **”Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path*, *Cycle* dan *Petersen*”.**

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang diatas maka rumusan masalah pada Skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n).
2. Bagaimana menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n).
3. Bagaimana menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Petersen* khusus $P(5,2)$.

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penulisan Skripsi ini adalah:

1. Graf yang akan digunakan adalah graf sederhana, tidak berarah, dan berhingga.
2. Graf *Path* (P_n) dengan $d=2$ untuk n ganjil dan $d=3$ untuk n sembarang.
3. Graf *Cycle* (C_n) dengan $d=2$ untuk n ganjil dan $d=1$ untuk n sembarang.
4. Graf *Petersen* khusus $P(5,2)$ dengan $d=1$.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penulisan Skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n).
2. Menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n).
3. Menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Petersen* khusus $P(5,2)$.

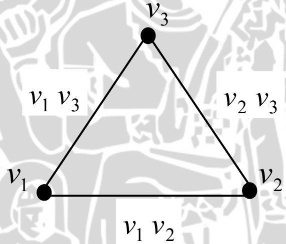
BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf dan Fungsi

Definisi 2.1.1 Graf G

Suatu graf G terdiri dari pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, di mana $V(G)$ adalah himpunan berhingga yang tidak kosong yang anggota-anggotanya disebut simpul (*vertice atau node*) dan $E(G)$ adalah himpunan dengan anggotanya disebut sisi-sisi (*edges*) di mana setiap sisi menghubungkan tepat dua simpul (Clark dan Holton, 1991).

Contoh 2.1:
Gambar 2.1 menunjukkan graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_1 v_3\}$.



Gambar 2.1 Graf G

Definisi 2.1.2 ***Adjacent*** **dan** ***Incident***

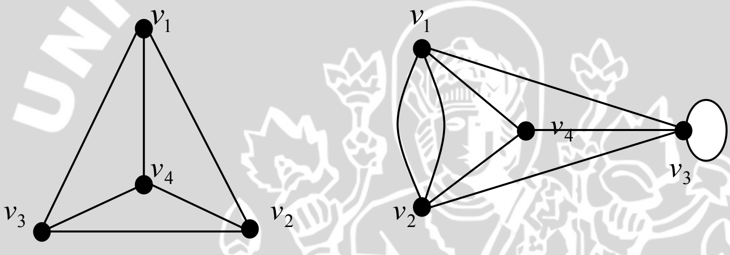
Dua titik v_1 dan v_2 di graf G dikatakan *adjacent* di G jika $(v_1 v_2)$ adalah sisi dari G. Sisi $(v_1 v_2)$ dikatakan *incident* dengan titik v_1 dan v_2. Sisi $(v_1 v_2)$ juga disebut penghubung titik v_1 dan v_2. Titik v_1 dan v_2 disebut *endpoint* dari sisi $(v_1 v_2)$ (Rosen, 2003).

Pada Gambar 2.1, v_1 dan v_2 *adjacent* sedangkan sisi $(v_1 v_2)$ *incident* dengan titik-titik v_1 dan v_2.

Definisi 2.1.3 Graf Sederhana dan Graf Ganda

Suatu graf yang tidak memiliki gelung (*loop*) dan sisi-sisi ganda disebut graf sederhana (*simple graf*). Sedangkan graf ganda (*multigraf*) merupakan graf yang memiliki suatu sisi ganda atau mengandung sebuah *loop* (sisi yang menghubungkan simpul dengan dirinya sendiri) (Clark dan Holton, 1991).

Contoh 2.2:
Graf sederhana ditunjukkan pada Gambar 2.2 (a) dan graf ganda ditunjukkan pada Gambar 2.2 (b) di mana garis ganda menghubungkan titik v_1 dan v_2 dan loop pada titik v_3.

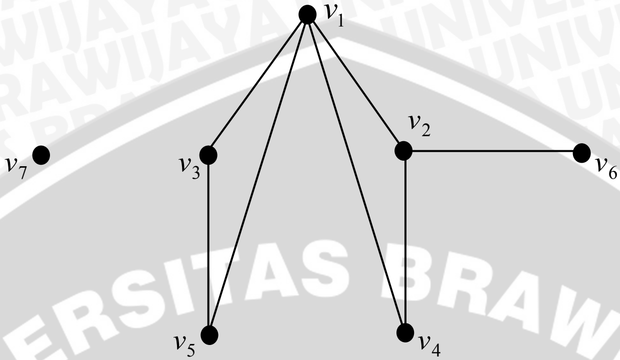


(a) (b)
Gambar 2.2 (a) Graf Sederhana dan (b) Graf Ganda

Definisi 2.1.4 Derajat Titik

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada graf G adalah jumlah garis (sisi) yang *incident* dengan v dan suatu loop dihitung sebanyak dua kali. Derajat (*degree*) dari titik v dinotasikan dengan *deg* (v) (Rosen, 2003).

Contoh 2.3:
Gambar 2.3 menunjukkan graf G dengan $deg\ (v_1)=4$, $deg\ (v_2)=3$, $deg\ (v_3)=2$, $deg\ (v_4)=2$, $deg\ (v_5)=2$, $deg\ (v_6)=1$, dan $deg\ (v_7)=0$.



Gambar 2.3 Derajat Titik pada Graf G

Definisi 2.1.5 Derajat Minimum dan Derajat Maksimum

Derajat minimum dari graf G merupakan derajat minimum diantara titik di graf G dan dinotasikan dengan $\delta(G)$. Derajat maksimum dari graf G merupakan derajat maksimum diantara titik di graf G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. (Chartrand dan Zhang, 2005).

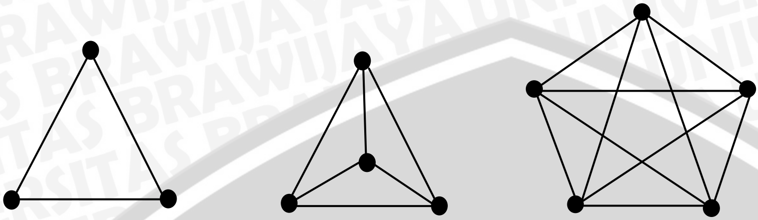
Pada Gambar 2.3, graf G mempunyai derajat maksimum pada v_1 ($\Delta(G) = 4$) dan derajat minimum pada v_7 ($\delta(G) = 0$).

Definisi 2.1.6 Graf *Regular*

Jika $\delta(G) = \Delta(G)$, maka titik dari graf G mempunyai derajat yang sama dan graf G disebut graf *regular*. Jika $\deg v = r$ untuk setiap titik v dari graf G maka graf G merupakan - *regular* atau *regular* berderajat (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.4:

Graf G pada Gambar 2.4 merupakan graf *regular*. Perhatikan bahwa pada Gambar 2.4 (a) merupakan 2-*regular*, Gambar 2.4 (b) merupakan 3-*regular,* dan Gambar 2.4 (c) menunjukkan 3-*regular*.



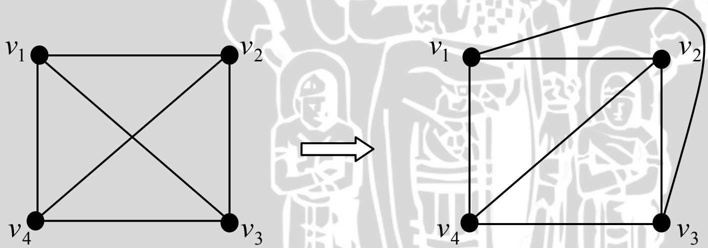
(a) (b) (c)

Gambar 2.4 Graf G merupakan Graf *Regular*

Definisi 2.1.7 Graf *Planar*

Graf *planar* atau graf sebidang adalah graf yang dapat dipancangkan pada bidang datar. Suatu graf G dikatakan dapat dipancangkan pada bidang datar jika graf G dapat dinyatakan dengan gambar atau diagram pada bidang datar sedemikian sehingga tidak terdapat garis-garis yang berpotongan (Marsudi, 1998).

Contoh 2.5:
Graf G pada Gambar 2.5 merupakan graf *planar* karena jika dipancangkan pada bidang datar maka tidak terdapat garis-garis yang berpotongan.

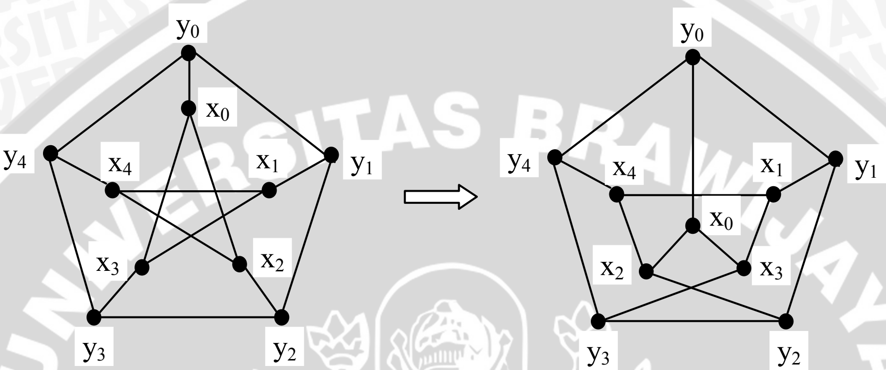


Gambar 2.5 Graf G merupakan Graf *Planar*

Definisi 2.1.8 Graf *Nonplanar*

Graf *nonplanar* atau graf bukan sebidang adalah graf yang tidak dapat dipancangkan pada bidang datar.

Contoh 2.6:
Gambar 2.6 menunjukkan graf *nonplanar* karena jika dipancangkan pada bidang datar maka terdapat garis-garis yang berpotongan yaitu (x_0 y_0) dengan (x_4 x_1) dan (x_2 y_2) dengan (x_3 y_3).



Gambar 2.6 Graf G merupakan Graf *nonplanar*

Definisi 2.1.9 Fungsi

Misalkan X dan Y himpunan tidak kosong. Relasi biner f dari X ke Y merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam X dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam Y. X disebut domain dan Y disebut kodomain. Jika f adalah fungsi dari X ke Y, maka dapat ditulis:

$$f : X \rightarrow Y$$

yang artinya f memetakan X ke Y (Munir, 2005).
Dengan perkataan lain:
$f : X \rightarrow Y$ Fungsi $\Leftrightarrow \forall\, x \in X \;\; \exists!\, y \in Y \;\ni\; y = f(x)$

Fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi injektif (*one to one*) jika dan hanya jika $(\forall\, x_1, x_2 \in X)\;\; f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$. Fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi surjektif (*onto*) jika dan hanya jika $(\forall\, y \in Y)\; (\exists\, x \in X)\;\; f(x) = y$. Fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi bijektif (*berkorespondensi satu-satu*) jika dan hanya jika fungsi f injektif dan surjektif.

Definisi 2.1.10 Fungsi Modulo

Misalkan b adalah sembarang bilangan bulat, p adalah bilangan bulat positif, dan q adalah bilangan bulat. Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator mod. Dalam hal ini, b mod p memberikan sisa pembagian bilangan bulat jika b dibagi dengan p. Secara rinci, b mod $p = r$ sedemikian sehingga $b = pq + r$, dengan $0 \leq r < p$ (Munir, 2005).

Contoh 2.7:
23 mod 5 = 3 karena 23 = 5 . 4 + 3.

2.2 Jenis Graf

Berikut ini akan dijelaskan beberapa jenis graf, di mana jenis-jenis graf tersebut merupakan graf yang akan diberi label menggunakan pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib.

2.2.1 Graf *Path*

Suatu graf disebut graf *Path* jika titik dari sebuah graf G berorde n dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian sehingga sisinya adalah $v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n$. Graf *Path* berorde n dinotasikan dengan P_n (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.8:
Graf *Path* berorde 2 ditunjukkan pada Gambar 2.7 (a) dan Graf *Path* berorde 4 ditunjukkan pada Gambar 2.7 (b).

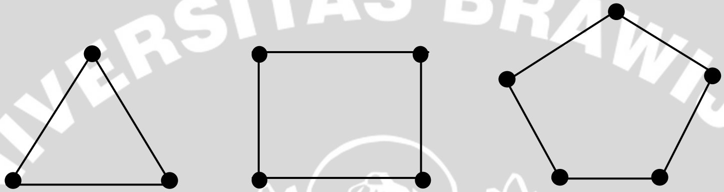
(a) (b)

Gambar 2.7 Graf *Path* (P_n) (a) P_2 dan (b) P_4

2.2.2 Graf *Cycle*

Suatu graf disebut graf *Cycle* jika titik dari sebuah graf G berorde $n \geq 3$ dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sedemikian sehingga sisinya adalah $v_1 v_2, v_2 v_3, \ldots, v_{n-1} v_n$ dan $v_1 = v_n$. Graf *Cycle* berorde $n \geq 3$ dinotasikan dengan C_n (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.9:
Graf *Cycle* berorde 3 ditunjukkan pada Gambar 2.8 (a), graf *Cycle* berorde 4 ditunjukkan pada Gambar 2.8 (b), dan graf *Cycle* berorde 5 ditunjukkan pada Gambar 2.8 (c)



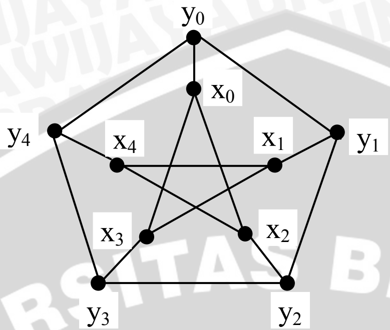
(a) (b) (c)

Gambar 2.8 Graf *Cycle* (C_n) (a) C_3 (b) C_4 dan (c) C_5

2.2.3 Graf *Petersen*

Misalkan n dan m adalah bilangan bulat positif dengan $n \geq 3$ dan $1 \leq m \leq \frac{n}{2}$. Graf *Petersen* umum $P(n,m)$ merupakan graf yang terdiri dari *cycle*-luar $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, n-jari-jari $y_i x_i$ dengan $0 \leq i \leq n-1$, dan n-sisi $x_i x_{i+m}$ dengan $0 \leq i \leq n-1$, di mana semua *subscript* adalah modulo n (Sugeng, 2005). Salah satu jenis Graf *Petersen* umum adalah *Petersen* khusus yang merupakan graf *regular* berderajat 3 dan bersifat *nonplanar*. Graf *Petersen* khusus dinotasikan dengan $P(5,2)$.

Contoh 2.10:
Gambar 2.9 menunjukkan graf *Petersen* khusus yang terdiri dari *cycle*-luar y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, jari-jari $y_0 x_0, y_1 x_1, y_2 x_2, y_3 x_3, y_4 x_4$, dan sisi $x_0 x_2, x_1 x_3, x_2 x_4, x_3 x_0, x_4 x_1$.



Gambar 2.9 Graf *Petersen* khusus $P(5,2)$

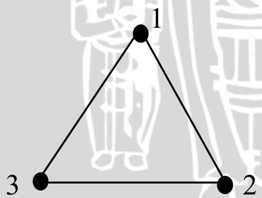
2.3 Pelabelan Graf (*Graf labeling*)

Pelabelan pada suatu graf adalah suatu fungsi yang memasangkan unsur-unsur graf (titik, sisi, dan keduanya) dengan suatu bilangan (biasanya bilangan bulat) (Baĉa, dkk., 2003).

2.3.1 Pelabelan Titik (*Vertex labeling*)

Menurut Baĉa dkk (2003), suatu pelabelan disebut pelabelan titik jika domain dari suatu fungsi adalah titik.

Contoh 2.11:
Pelabelan titik pada graf G ditunjukkan pada Gambar 2.10 di mana titik dilabelkan dengan $\{1,2,3\}$.



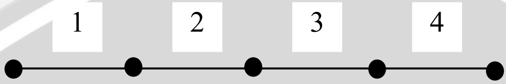
Gambar 2.10 Pelabelan Titik pada Graf G

2.3.2 Pelabelan Sisi (*Edge labeling*)

Menurut Baĉa dkk (2003), suatu pelabelan disebut pelabelan sisi jika domain dari suatu fungsi adalah sisi.

Contoh 2.12:

Pelabelan sisi pada graf G ditunjukkan pada Gambar 2.11 di mana sisi dilabelkan dengan $\{1, 2, 3, 4\}$.



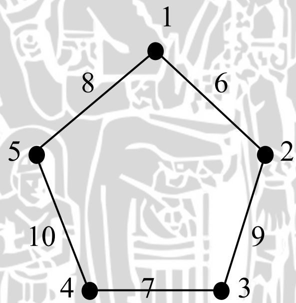
Gambar 2.11 Pelabelan Sisi pada Graf G

2.3.3 Pelabelan Total (*Total labeling*)

Menurut Baĉa dkk (2003), suatu pelabelan disebut pelabelan total jika domain dari suatu fungsi adalah himpunan titik dan sisi $(V \cup E)$.

Contoh 2.13:

Pelabelan total pada graf G ditunjukkan pada Gambar 2.12 di mana titik dilabelkan dengan $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan sisi dilabelkan dengan $\{6, 7, 8, 9, 10\}$.



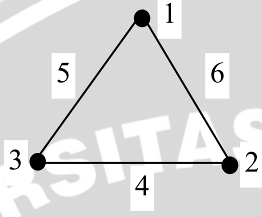
Gambar 2.12 Pelabelan Total pada Graf G

2.4 Pelabelan Ajaib dan Anti Ajaib

2.4.1 Pelabelan Ajaib (*Magic labeling*)

Suatu graf yang memiliki bobot titik atau bobot sisi yang sama disebut graf dengan pelabelan ajaib (*magic labeling*). Bobot titik diperoleh dari jumlah label semua sisi yang *incident* dengan titik yang sama, sedangkan bobot sisi diperoleh dari jumlah label dari sisi dan titik yang *adjacent* (Hsiao, 2006).

Contoh 2.14:
Gambar 2.13 menunjukkan pelabelan ajaib pada graf G dengan masing-masing bobot titik adalah 12 dan masing-masing bobot sisi adalah 9.

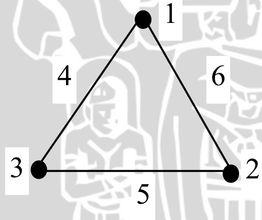


Gambar 2.13 Pelabelan Ajaib pada Graf G

2.4.2 Pelabelan Anti Ajaib (*Antimagic labeling*)

Suatu graf yang memiliki bobot titik atau bobot sisi yang berbeda disebut graf dengan pelabelan anti ajaib (*Antimagic labeling*).

Contoh 2.15:
Gambar 2.14 menunjukkan pelabelan anti ajaib pada graf G dengan bobot titik $\{11,12,13\}$ dan bobot sisi $\{8,9,10\}$.



Gambar 2.14 Pelabelan Anti Ajaib pada Graf G

Definisi 2.1.10 Pelabelan Total Titik Anti Ajaib (V*ertex antimagic total labeling*)

Fungsi bijektif $\alpha : V \cup E \rightarrow \{1, 2, \ldots, n+e\}$ disebut pelabelan total titik anti ajaib (*vertex antimagic total labeling)* dari graf G sedemikian sehingga bobot titik berbeda (Baĉa, dkk., 2003).

Gambar 2.14 merupakan pelabelan total titik anti ajaib di mana titik dilabelkan dengan $\{1,2,3\}$ dan sisi dilabelkan dengan $\{4,5,6\}$, sehingga bobot titiknya adalah $\{11,12,13\}$.

Definisi 2.1.11 Pelabelan Total (a,d)-Titik Anti Ajaib (*(a,d)-vertex antimagic total labeling*)

Fungsi bijektif $\alpha: V \cup E \rightarrow \{1,2,\ldots,n+e\}$ disebut pelabelan total (a,d)-titik anti ajaib dari graf G jika himpunan bobot dari semua titik di graf G adalah $\{a, a+d, \ldots, a+(n-1)d\}$, di mana $a>0$ dan $d \geq 0$. a dan d merupakan bilangan bulat positif, dengan a merupakan bobot titik pertama (terkecil) dan d merupakan selisih bobot titik. Jika $d=0$ pelabelan total (a,d)-titik anti ajaib disebut pelabelan total titik ajaib (Sugeng, 2005).

Definisi 2.1.12 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib (*Super (a,d)-vertex antimagic total labeling*)

Pelabelan total (a,d)-titik anti ajaib disebut pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib jika $\alpha(V)=\{1,2,\ldots,n\}$ dan $\alpha(E)=\{n+1, n+2,\ldots,n+e\}$ (Sugeng, 2005).

Berdasarkan definisi 2.1.12, untuk pelabelan super ditentukan himpunan titik dengan bilangan bulat $\{1,2,\ldots,n\}$ dari graf G dan himpunan sisinya dengan $\{n+1, n+2, \ldots, n+e\}$ dari graf G. Jika δ adalah derajat minimum dari graf G, maka bobot titik minimumnya adalah $1+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+\delta)$, sehingga

$$S_\delta = \frac{\delta}{2}\left(2(n+1)+(\delta-1).1\right) = \frac{\delta}{2}(2n+\delta+1) = n\delta + \frac{\delta(\delta+1)}{2}$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$a \geq 1 + n\delta + \frac{\delta(\delta+1)}{2} \qquad (2.1)$$

Jika Δ adalah derajat maksimum dari graf G, maka bobot titik maksimumnya adalah $n+(n+e)+(n+e-1)+\ldots+(n+e-(\Delta-1))$, sehingga

$$a+(n-1)d \leq n + \sum_{i=0}^{\Delta-1}(n+e-i) \qquad (2.2)$$

Dengan mensubstitusikan nilai a pada pertidaksamaan (2.1) ke dalam pertidaksamaan (2.2), maka

$$a+(n-1)d \le n+\sum_{i=0}^{\Delta-1}(n+e-i)$$

$$(n-1)d \le n+\sum_{i=0}^{\Delta-1}(n+e-i)-a$$

$$d \le \frac{n+\sum_{i=0}^{\Delta-1}(n+e-i)-a}{n-1}$$

$$d \le \frac{n+\frac{\Delta}{2}(2(n+e)-\Delta+1)-1-n\delta-\frac{\delta(\delta+1)}{2}}{n-1}$$

$$d \le \frac{n}{n-1}+\frac{\Delta(2(n+e)-\Delta+1)}{2(n-1)}-\frac{1}{n-1}-\frac{n\delta}{n-1}-\frac{\delta(\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d \le \frac{2n+\Delta\ (2(n+e)-\Delta+1)-2-2n\delta-\delta(\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d \le \frac{2n-2+\Delta(2(n+e)-\Delta+1)-\delta(2n+\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d \le \frac{2(n-1)+\Delta(2(n+e)-\Delta+1)-\delta(2n+\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d \le 1+\frac{\Delta(2(n+e)-\Delta+1)-\delta(2n+\delta+1)}{2(n-1)} \qquad (2.3)$$

Misalkan S_n merupakan jumlah dari semua pelabelan titik, sedangkan S_e merupakan jumlah dari semua pelabelan sisi. Jika pelabelan merupakan bilangan bulat $1,2,\ldots,n+e$, maka jumlah dari semua label (titik dan sisi) adalah

$$\alpha(V)=\{1,2,\ldots,n\} \quad \Rightarrow \quad S_n=\frac{n}{2}(2+(n-1))$$

$$=\frac{n}{2}(n+1)$$

$$\alpha(E)=\{n+1, n+2, \ldots, n+e\} \quad \Rightarrow \quad S_e = \frac{e}{2}(2(n+1)+(e-1))$$

$$= \frac{e}{2}(2n+e+1)$$

Dengan demikian, diperoleh:

$$S_n + S_e = \frac{(n+e)(n+e+1)}{2} \tag{2.4}$$

Diberikan $w(x_j) = a + jd$, $j = 0,1,\ldots,n-1$.

Dengan menjumlahkan bobot titik pada semua titik, sesuai dengan definisi pelabelan anti ajaib maka digunakan label setiap titik sebanyak 1 dan label setiap sisi sebanyak 2. Sehingga:

$$S_n + 2S_e = \sum_{j=0}^{n-1} (a + jd)$$

$$= a + (a+d) + (a+2d) + \ldots\ldots + (a+(n-1)d)$$

$$= \frac{n}{2}(2a+(n-1)d) \tag{2.5}$$

Dengan menggabungkan persamaan (2.4) dan (2.5), maka eliminasi kedua persamaan tersebut dengan mengalikan persamaan (2.4) dengan 2 dan (2.5) dengan 1, sehingga

$$2S_n + 2S_e = (n+e)(n+e+1)$$

$$S_n + 2S_e = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d) \quad -$$

$$S_n = (n+e)(n+e+1) - \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

$$\frac{1}{2}n(n+1) = (n+e)(n+e+1) - na - \frac{n}{2}(n-1)d$$

$$na = (n+e)(n+e+1) - \frac{n}{2}(n-1)d - n(n+1)$$

$$na = \frac{2(n+e)(n+e+1) - (n-1)d - n(n+1)}{2}$$

$$a = \frac{(n+e)(n+e+1) + (n+e)(n+e+1) - (n-1)d - n(n+1)}{2n}$$

$$a = \frac{(n+e)(n+e+1) + (n^2 + en + n + en + e^2 + e)(n-1)d - n(n+1)}{2n}$$

$$a = \frac{(n+e)(n+e+1) + 2en + n(n+1) + e(e+1) - (n-1)d - n(n+1)}{2n}$$

$$a = \frac{(n+e)(n+e+1) + e(e+1) + 2en - n(n-1)d}{2n} \qquad (2.6)$$

BAB III
PEMBAHASAN

Pada pembahasan akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n), *Cycle* (C_n), dan *Petersen* khusus $P(5,2)$.

3.1 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path* (P_n)

Pada pembahasan berikut akan ditunjukkan cara menentukan Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan $d=2$ untuk n ganjil dan $d=3$ untuk n sembarang.

Dari persamaan (2.3), untuk setiap graf *Path* (P_n) dengan $n\geq 3$ mempunyai derajat maksimum $(\Delta)=2$, derajat minimum $(\delta)=1$, jumlah sisi $(e)=2$, dan jumlah titik $(n)=3$. Maka

$$d\leq 1+\frac{\Delta(2(n+e)-\Delta+1)-\delta(2n+\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d\leq 1+\frac{2(2(3+2)-2+1)-1(2.3+1+1)}{2(3-1)}$$

$$d\leq 1+\frac{2(2.5-2+1)-1(6+1+1)}{2(2)}$$

$$d\leq 1+\frac{2.9\ -8}{4}$$

$$d\leq 3{,}5$$

Dari persamaan (2.6), Jumlah sisi (e) dari graf *Path* (P_n) adalah $n-1$ sehingga

$$a=\frac{(n+e)(n+e+1)+e(e+1)+2en-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{(n+n-1)(n+n-1+1)+(n-1)(n-1+1)+2\,(n-1)\,n-n\,(n-1)\,d}{2n}$$

$$=\frac{(2n-1)2n+(n-1)n+2n(n-1)-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{4n^2-2n+n^2-n+2n^2-2n-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{7n^2-5n-n(n-1)d}{2n}$$

$$a=\frac{7n-5-(n-1)d}{2}$$

Dengan demikian, diperoleh graf *Path* (P_n) dengan

$$d \leq 3{,}5 \text{ dan } a=\frac{7n-5-(n-1)d}{2} \qquad (3.1)$$

3.1.1 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path* (P_n) dengan $d=2$ untuk n Ganjil

Proposisi 3.1

Untuk setiap $n \geq 3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$ jika dan hanya jika n ganjil (Sugeng, 2005).

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Bukti tidak langsung dengan kontradiksi.
Andaikan n genap $(n \geq 3)$. Berdasarkan persamaan (3.1), graf *Path* (P_n) dengan $d=2$ mempunyai bobot titik terkecil $a=\frac{5n-3}{2}$.

a bernilai pecahan untuk n genap. Berdasarkan definisi, graf *Path* (P_n) tidak mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$. Hal ini kontradiksi dengan graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$. Jadi pengandaian salah. Dengan demikian, terbukti bahwa jika graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib dengan $d=2$ maka n ganjil.

($\Leftarrow$) Misalkan titik-titik dari graf *Path* (P_n) dengan n ganjil adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $n \geq 3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d = 2$ dengan n ganjil.

Menurut Sugeng (2005), didefinisikan pelabelan titik dari graf *Path* (P_n) dengan

$$\alpha(x_i) = \begin{cases} n & , i = 1 \\ i-1 & , i = 2, \ldots, n-1 \\ n-1 & , i = n \end{cases}$$

dan pelabelan sisi dari graf *Path* (P_n) dengan

$$\alpha(x_i\, x_{i+1}) = \begin{cases} \dfrac{3n+i}{2} & ,\textit{untuk } i \textit{ ganjil} \\ n + \dfrac{i}{2} & ,\textit{untuk } i \textit{ genap}. \end{cases}$$

Pilih bobot titik graf *Path* (P_n) dengan $d = 2$ untuk n ganjil dengan

Misalkan $b_\alpha(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, adalah bobot titik x_i dari graf *Path* (P_n), sehingga

$$b_\alpha(x_n) = (n-1) + \left(n + \frac{n-1}{2} \right) = \frac{2n-2+2n+n-1}{2} = \frac{5n-3}{2}$$

$$b_\alpha(x_1) = n + \left(\frac{3n+1}{2} \right) = \frac{2n+3n+1}{2} = \frac{5n+1}{2}.$$

Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i = 2, \ldots, n-1$.

Pilih $a + 6d$.

Karena $a + 6d$ terletak pada titik ke 6, maka

$a + 6d =$ sisi ke 5 + titik ke 6 + sisi ke 6

$$= \left(\frac{3n+i_5}{2} \right) + (i_6 - 1) + \left(n + \frac{i_6}{2} \right)$$

$i_5 = 5 = (6-1) = (i-1)$
$i_6 = 6 = (6-0) = (i-0) = i$

$$b_\alpha(x_i) = \left(\frac{3n+(i-1)}{2}\right) + (i-1) + \left(n + \frac{i}{2}\right)$$
$$= \frac{3n+i-1+2i-2+2n+i}{2}$$
$$= \frac{5n+4i-3}{2}.$$

Misalkan B_α menyatakan himpunan bobot titik pada graf *Path* (P_n)

$$B_\alpha = \{b_\alpha(x_n), b_\alpha(x_1), b_\alpha(x_i)\}$$
$$= \left\{\frac{5n-3}{2}, \frac{5n+1}{2}, \frac{5n+5}{2}, \frac{5n+9}{2} \ldots, \frac{9n-7}{2}\right\}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $n \geq 3$ dengan n ganjil dan $d = 2$ graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super $\left(\frac{5n-3}{2}, 2\right)$-titik anti ajaib.

Langkah-langkah pelabelan total super $(a,2)$-titik anti ajaib untuk n ganjil pada graf *Path* (P_n) adalah sebagai berikut:

1. Diketahui $d = 2$ dan banyak titik graf $= n$.
2. Hitung a dengan rumus: $a = \frac{5n-3}{2}$.
3. Beri label titik pertama dengan n atau $\alpha(x_1) = n$ dan titik ke n dengan $n-1$ atau $\alpha(x_n) = n-1$.
4. Beri label titik yang lain dengan $\alpha(x_i) = i-1$ untuk $i = 2, \ldots, n-1$.
5. Beri label sisi untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, dengan
   i. $\alpha(x_i\, x_{i+1}) = \frac{3n+i}{2}$, untuk i ganjil
   ii. $\alpha(x_i\, x_{i+1}) = n + \frac{i}{2}$, untuk i genap.

6. Hitung himpunan bobot titik dengan menjumlahkan label titik dan sisi ujung kanan kemudian label titik dan sisi ujung kiri, berturut-turut ke kanan sehingga memenuhi himpunan bobot titik: $\left\{\frac{5n-3}{2},\frac{5n+1}{2},\cdots\cdots,\frac{9n-7}{2}\right\}$.

Diagram alir pelabelan total super $(a,2)$-titik anti ajaib untuk n ganjil pada graf *Path* (P_n) dapat dilihat pada Lampiran 1.

Contoh 3.1:

Berikut akan ditentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan $d=2$ untuk $n=9$.

Untuk $n=9$, dengan $a=\frac{5n-3}{2}=\frac{5.9-3}{2}=21$ dan $d=2$ pelabelannya sebagai berikut:

a. Pelabelan titik atau $\alpha(x_i)$:

$\alpha(x_1)=n=9$

$\alpha(x_2)=1$ $\alpha(x_6)=5$

$\alpha(x_3)=2$ $\alpha(x_7)=6$

$\alpha(x_4)=3$ $\alpha(x_8)=7$

$\alpha(x_5)=4$ $\alpha(x_9)=9-1=8$

$\alpha(x_i)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

b. Pelabelan sisi atau $\alpha(x_i\,x_{i+1})$:

$$i=1 \Rightarrow \alpha(x_1\,x_2)=\frac{3n+i}{2}=\frac{3.9+1}{2}=14$$

$$i=2 \Rightarrow \alpha(x_2\,x_3)=n+\frac{i}{2}=9+\frac{2}{2}=10$$

$$i=3 \Rightarrow \alpha(x_3\,x_4)=\frac{3n+i}{2}=\frac{3.9+3}{2}=15$$

$$i=4 \Rightarrow \alpha(x_4\,x_5)=n+\frac{i}{2}=9+\frac{4}{2}=11$$

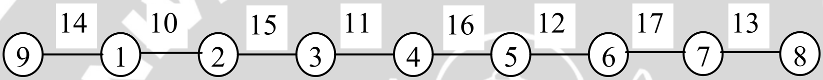
$$i=5 \Rightarrow \alpha(x_5 x_6) = \frac{3n+i}{2} = \frac{3.9+5}{2} = 16$$

$$i=6 \Rightarrow \alpha(x_6 x_7) = n + \frac{i}{2} = 9 + \frac{6}{2} = 12$$

$$i=7 \Rightarrow \alpha(x_7 x_8) = \frac{3n+i}{2} = \frac{3.9+7}{2} = 17$$

$$i=8 \Rightarrow \alpha(x_8 x_9) = n + \frac{i}{2} = 9 + \frac{8}{2} = 13$$

$\alpha(x_i x_{i+1}) = \{10,11,12,13,14,15,16,17\}$.



Gambar 3.1 Pelabelan Total Super $(21,2)$-Titik Anti Ajaib P_9

Himpunan bobot titik dari graf *Path* (P_n) dengan $d=2$ untuk $n=9$ adalah $\{21,23,25,27,29,31,33,35,37\}$.

3.1.2 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Path* (P_n) dengan $d=3$ untuk n Sembarang

Proposisi 3.2

Untuk setiap $n \geq 3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=3$ (Sugeng, 2005).

Bukti:

(i) untuk n ganjil

Misalkan titik-titik dari graf *Path* (P_n) dengan n ganjil adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $n \geq 3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=3$ untuk n ganjil.

Menurut Sugeng (2005), didefinisikan pelabelan titik dari graf *Path* (P_n) dengan

$$\alpha(x_i)=\begin{cases} 1 & , i=1 \\ n-i+1 & , \ i=2,\ldots,n-1 \\ n & , i=n \end{cases}$$

dan pelabelan sisi dari graf *Path* (P_n) dengan

$$\alpha(x_i\, x_{i+1})=\begin{cases} 2n-1-i & \textit{untuk}\ \ i\ \textit{ganjil} \\ 2n+1-i & \textit{untuk}\ \ i\ \textit{genap}. \end{cases}$$

Pilih bobot titik graf *Path* (P_n) dengan $d=3$ untuk n ganjil dengan

Misalkan $b_\alpha(x_i)$, $1 \le i \le n$, adalah bobot titik x_i dari graf *Path* (P_n), sehingga

$b_\alpha(x_1)=1+(2n-1-1)=2n-1$

$b_\alpha(x_n)=(n)+(2n+1-(n-1))=2n+2$.

Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i=2,\ldots,n-1$.

Pilih $a+5d$.

Karena $a+5d$ terletak pada titik ke 5, maka

$$\begin{aligned} a+5d &= \text{sisi ke } (n-5) \ + \ \text{titik ke } (n-4) \ + \ \text{sisi ke } (n-4) \\ &= (2n+1-i_{n-5})+(n-i_{n-4}+1)+(2n-1-i_{n-4}) \end{aligned}$$

$i_{n-5}=(n-5)=(n-(5-0))=(n-i)$

$i_{n-4}=(n-4)=(n-(5-1))=(n-(i-1))$

$$\begin{aligned} b_\alpha(x_i) &= (2n+1-(n-i))+(n-(n-(i-1))+1)+(2n-1-(n-(i-1))) \\ &= 2n+1-n+i+n-n+i-1+1+2n-1-n+i-1 \\ &= 2n+3i-1. \end{aligned}$$

Misalkan B_α menyatakan himpunan bobot titik pada graf *Path* (P_n)

$$\begin{aligned} B_\alpha &= \left\{ b_\alpha(x_1), b_\alpha(x_n), b_\alpha(x_i) \right\} \\ &= \left\{ 2n-1, 2n+2, 2n+5, 2n+8\ldots, 5n-4 \right\}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk setiap $n \geq 3$ dengan n ganjil dan $d = 3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super $(2n-1, 3)$-titik anti ajaib.

Langkah-langkah pelabelan total super $(a,3)$-titik anti ajaib untuk n ganjil pada graf *Path* (P_n) adalah sebagai berikut:

1. Diketahui $d = 3$ dan banyak titik graf $= n$.
2. Hitung a dengan rumus: $a = 2n - 1$.
3. Beri label titik pertama dengan 1 atau $\alpha(x_1) = 1$ dan titik ke n dengan n atau $\alpha(x_n) = n$.
4. Beri label titik yang lain dengan $\alpha(x_i) = n - i - 1$ untuk $i =$ $2, \ldots, n-1$.
5. Beri label sisi untuk $i = 1, 2, \ldots, n-1$, dengan
   i. $\alpha(x_i\ x_{i+1}) = 2n - 1 - i$, untuk i ganjil
   ii. $\alpha(x_i\ x_{i+1}) = 2n + 1 - i$, untuk i genap.
6. Hitung himpunan bobot titik dengan menjumlahkan label titik dan sisi ujung kanan kemudian label titik dan sisi ujung kiri, berturut-turut ke kanan sehingga memenuhi himpunan bobot titik: $\{2n-1, 2n+2, \cdots\cdots, 5n-4\}$.

Diagram alir pelabelan total super $(a,3)$-titik anti ajaib untuk n ganjil pada graf *Path* (P_n) dapat dilihat pada Lampiran 2.

Contoh 3.2:

Berikut akan ditentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan $d = 3$ untuk $n = 11$.

Untuk $n = 11$, dengan $a = 2n - 1 = 2.11 - 1 = 21$ dan $d = 3$ pelabelannya sebagai berikut:

a. Pelabelan titik atau $\alpha(x_i)$:

$$\alpha(x_1) = 1$$
$$\alpha(x_2) = n - i + 1 = 11 - 2 + 1 = 10$$
$$\alpha(x_3) = n - i + 1 = 11 - 3 + 1 = 9$$
$$\alpha(x_4) = n - i + 1 = 11 - 4 + 1 = 8$$

$\alpha(x_5) = n - i + 1 = 11 - 5 + 1 = 7$

$\alpha(x_6) = n - i + 1 = 11 - 6 + 1 = 6$

$\alpha(x_7) = n - i + 1 = 11 - 7 + 1 = 5$

$\alpha(x_8) = n - i + 1 = 11 - 8 + 1 = 4$

$\alpha(x_9) = n - i + 1 = 11 - 9 + 1 = 3$

$\alpha(x_{10}) = n - i + 1 = 11 - 10 + 1 = 2$

$\alpha(x_n) = n = 11$

$\alpha(x_i) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}.$

b. Pelabelan sisi atau $\alpha(x_i\, x_{i+1})$:

$i = 1 \Rightarrow \alpha(x_1\, x_2) = 2n - 1 - i = 2.11 - 1 - 1 = 20$

$i = 2 \Rightarrow \alpha(x_2\, x_3) = 2n + 1 - i = 2.11 + 1 - 2 = 21$

$i = 3 \Rightarrow \alpha(x_3\, x_4) = 2n - 1 - i = 2.11 - 1 - 3 = 18$

$i = 4 \Rightarrow \alpha(x_4\, x_5) = 2n + 1 - i = 2.11 + 1 - 4 = 19$

$i = 5 \Rightarrow \alpha(x_5\, x_6) = 2n - 1 - i = 2.11 - 1 - 5 = 16$

$i = 6 \Rightarrow \alpha(x_6\, x_7) = 2n + 1 - i = 2.11 + 1 - 6 = 17$

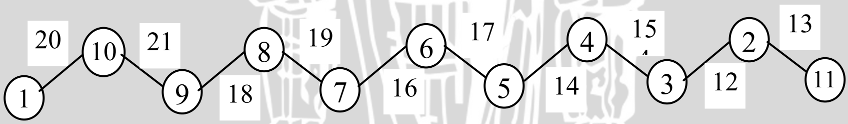
$i = 7 \Rightarrow \alpha(x_7\, x_8) = 2n - 1 - i = 2.11 - 1 - 7 = 14$

$i = 8 \Rightarrow \alpha(x_8\, x_9) = 2n + 1 - i = 2.11 + 1 - 8 = 15$

$i = 9 \Rightarrow \alpha(x_9\, x_{10}) = 2n - 1 - i = 2.11 - 1 - 9 = 12$

$i = 10 \Rightarrow \alpha(x_{10}\, x_{11}) = 2n + 1 - i = 2.11 + 1 - 10 = 13$

$\alpha(x_i\, x_{i+1}) = \{12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}.$



Gambar 3.2 Pelabelan Total Super $(21, 3)$-Titik Anti Ajaib P_{11}

Himpunan bobot titik dari graf *Path* (P_n) dengan $d = 3$ untuk $n = 11$ adalah $\{21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51\}$.

(ii) untuk n genap

Misalkan titik-titik dari graf *Path* (P_n) dengan n genap adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $n \geq 3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=3$ untuk n genap.

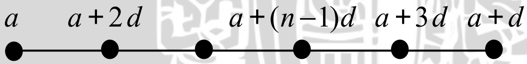
Menurut Sugeng (2005), didefinisikan pelabelan titik dari graf *Path* (P_n) dengan

$$\alpha(x_i) = \begin{cases} n-2 & , i = 1 \\ 2i-3 & , i = 2, \ldots\ldots, \dfrac{n}{2}+1 \\ 2(n-i) & , i = \dfrac{n}{2}+2, \ldots\ldots, n-1 \\ n & , i = n \end{cases}$$

dan pelabelan sisi dari graf *Path* (P_n) dengan

$$\alpha(x_i\, x_{i+1}) = \begin{cases} n+2i-1 & , i = 1, 2, \ldots\ldots, \dfrac{n}{2} \\ 3n-2i & , i = \dfrac{n}{2}+1, \ldots\ldots, n-1. \end{cases}$$

Pilih bobot titik graf *Path* (P_n) dengan $d=3$ untuk n genap dengan



Misalkan $b_\alpha(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, adalah bobot titik x_i dari graf *Path* (P_n), sehingga

$b_\alpha(x_1) = (n-2) + (n+2.1-1) = 2n-1$

$b_\alpha(x_n) = (n) + (3n - 2(n-1)) = 2n+2$

(a) Dari kiri

Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i = 2, \ldots, \dfrac{n}{2}$.

Pilih $a+4d$.

Karena $a+4d$ terletak pada titik ke 3, maka

$a+4d =$ sisi ke 2 + titik ke 3 + sisi ke 3

$$=(n+2i_2-1)+(2i_3-3)+\left(n+2i_3-1\right)$$

$i_2=2=(3-1)=(i-1)$

$i_3=3=(3-0)=(i-0)=i$

$$b_\alpha(x_i)=(n+2(i-1)-1)+(2i-3)+(n+2i-1)$$
$$=n+2i-2-1+2i-3+n+2i-1$$
$$=2n+6i-7.$$

(b) Dari kanan

Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i=2,\ldots,\frac{n}{2}$.

Pilih $a+3d$.

Karena $a+3d$ terletak pada titik ke 2, maka

$a+3d =$ sisi ke $(n-2)$ + titik ke $(n-1)$ + sisi ke $(n-1)$

$$=(3n-2i_{n-2})+2(n-i_{n-1})+(3n-2i_{n-1})$$

$i_{n-2}=(n-2)=(n-(2-0))=(n-i)$

$i_{n-1}=(n-1)=(n-(2-1))=(n-(i-1))$

$$b_\alpha(x_i)=(3n-2(n-i))+2(n-(n-(i-1)))+(3n-2(n-(i-1)))$$
$$=3n-2n+2i+2n-2n+2i-2+3n-2n+2i-2$$
$$=2n+6i-4.$$

Misalkan B_α menyatakan himpunan bobot titik pada graf *Path* (P_n)

$$B_\alpha=\left\{b_\alpha(x_1),b_\alpha(x_n),b_\alpha(x_i)\right\}$$
$$=\left\{2n-1,2n+2,2n+5,2n+8,2n+11,2n+14,\ldots,5n-4\right\}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $n\geq 3$ dengan n genap dan $d=3$, graf *Path* (P_n) mempunyai pelabelan total super $\left(2n-1,3\right)$-titik anti ajaib.

Langkah-langkah pelabelan total super $(a,3)$-titik anti ajaib untuk n genap pada graf *Path* (P_n) adalah sebagai berikut:

1. Diketahui $d=3$ dan banyak titik graf $= n$.
2. Hitung a dengan rumus: $a=2n-1$.
3. Beri label titik pertama dengan $n-2$ atau $\alpha(x_1)=n-2$ dan titik ke n dengan n atau $\alpha(x_n)=n$.
4. Beri label titik yang lain dengan
   i. $\alpha(x_i)=2i-3$, untuk $i=2,\ldots,\frac{n}{2}+1$
   ii. $\alpha(x_i)=2(n-i)$, untuk $i=\frac{n}{2}+2,\ldots,n-1$.
5. Beri label sisi dengan
   i. $\alpha(x_i\,x_{i+1})=n+2i-1$, untuk $i=1,2,\ldots,\frac{n}{2}$
   ii. $\alpha(x_i\,x_{i+1})=3n-2i$, untuk $i=\frac{n}{2}+1,\ldots,n-1$.
6. Hitung himpunan bobot titik dengan menjumlahkan label titik dan sisi ujung kiri kemudian label titik dan sisi ujung kanan, demikian seterusnya sehingga memenuhi himpunan bobot titik: $\{2n-1, 2n+2, \cdots\cdots, 5n-4\}$.

Diagram alir pelabelan total super $(a,3)$-titik anti ajaib untuk n genap pada graf *Path* (P_n) dapat dilihat pada Lampiran 3.

Contoh 3.3:

Berikut akan ditentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan $d=3$ untuk $n=8$.

Untuk $n=8$, dengan $a=2n-1=2.8-1=15$ dan $d=3$ pelabelannya sebagai berikut:

a. Pelabelan titik atau $\alpha(x_i)$:

$$\alpha(x_1)=n-2=6$$
$$\alpha(x_2)=2i-3=2.2-3=1$$
$$\alpha(x_3)=2i-3=2.3-3=3$$
$$\alpha(x_4)=2i-3=2.4-3=5$$

$\alpha(x_5) = 2i - 3 = 2.5 - 3 = 7$

$\alpha(x_6) = 2(n - i) = 2(8 - 6) = 4$

$\alpha(x_7) = 2(n - i) = 2(8 - 7) = 2$

$\alpha(x_n) = n = 8$

$\alpha(x_i) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

b. Pelabelan sisi atau $\alpha(x_i\, x_{i+1})$:

$i = 1 \Rightarrow \alpha(x_1\, x_2) = n + 2i - 1 = 8 + 2.1 - 1 = 9$

$i = 2 \Rightarrow \alpha(x_2\, x_3) = n + 2i - 1 = 8 + 2.2 - 1 = 11$

$i = 3 \Rightarrow \alpha(x_3\, x_4) = n + 2i - 1 = 8 + 2.3 - 1 = 13$

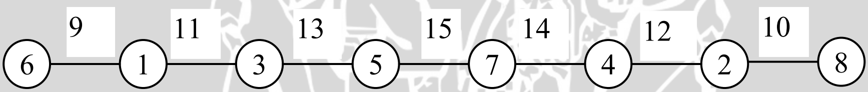
$i = 4 \Rightarrow \alpha(x_4\, x_5) = n + 2i - 1 = 8 + 2.4 - 1 = 15$

$i = 5 \Rightarrow \alpha(x_5\, x_6) = 3n - 2i = 3.8 - 2.5 = 14$

$i = 6 \Rightarrow \alpha(x_6\, x_7) = 3n - 2i = 3.8 - 2.6 = 12$

$i = 7 \Rightarrow \alpha(x_7\, x_8) = 3n - 2i = 3.8 - 2.7 = 10$

$\alpha(x_i\, x_{i+1}) = \{9,10,11,12,13,14,15\}$.



Gambar 3.3 Pelabelan Total Super $(15,3)$-Titik Anti Ajaib P_8

Himpunan bobot titik dari graf *Path* (P_n) dengan $d = 3$ untuk $n = 8$ adalah $\{15,18,21,24,27,30,33,36\}$.

3.2 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Cycle* (C_n)

Selanjutnya akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n) dengan $d = 2$ untuk n ganjil dan $d = 1$ untuk n sembarang.

Dari persamaan (2.3), Untuk graf *Cycle* (C_n) dengan $n \geq 3$ mempunyai derajat maksimum (Δ) = derajat minimum (δ) = 2 dan jumlah sisi (e) = jumlah titik (n) = 3. Maka

$$d \le 1+\frac{\Delta(2(n+e)-\Delta+1)-\delta(2n+\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d \le 1+\frac{2(2(3+3)-2+1)-2(2.3+2+1)}{2(3-1)}$$

$$d \le 1+\frac{2(2.6-2+1)-2(6+2+1)}{2(2)}$$

$$d \le 1+\frac{2.11-2.9}{4}$$

$$d \le 2.$$

Dari persamaan (2.6), Jumlah sisi (e) dari graf *Cycle* (C_n) adalah n sehingga

$$a=\frac{(n+e)(n+e+1)+e(e+1)+2en-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{(n+n)(n+n+1)+n(n+1)+2n.n-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{2n(2n+1)+n(n+1)+2n^2-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{4n^2+2n+n^2+n+2n^2-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{7n^2+3n-n(n-1)d}{2n}$$

$$a=\frac{7n+3-(n-1)d}{2}$$

Dengan demikian, diperoleh graf *Cycle* (C_n) dengan

$$d \le 2 \text{ dan } a=\frac{7n+3-(n-1)d}{2} \qquad (3.2)$$

3.2.1 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Cycle* (C_n) dengan $d=2$ untuk n Ganjil

Proposisi 3.3

Untuk setiap $n \geq 3$, graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$ jika dan hanya jika n ganjil (Sugeng, 2005).

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Bukti tidak langsung dengan kontradiksi.

Andaikan n genap $(n \geq 3)$. Berdasarkan persamaan (3.2), graf *Cycle* (C_n) dengan $d=2$ mempunyai bobot titik terkecil $a=\dfrac{5n+5}{2}$. a bernilai pecahan untuk n genap. Berdasarkan definisi, graf *Cycle* (C_n) tidak mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$. Hal ini kontradiksi dengan graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$. Jadi pengandaian salah. Dengan demikian, terbukti bahwa jika graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib dengan $d=2$ maka n ganjil.

$(\Leftarrow)$ Misalkan titik-titik dari graf *Cycle* (C_n) dengan n ganjil adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $n \geq 3$, graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=2$ dengan n ganjil.

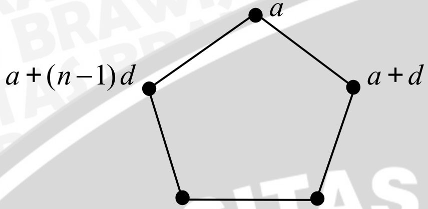
Menurut Sugeng (2005), didefinisikan pelabelan titik dari graf *Cycle* (C_n) dengan

$$\alpha(x_i) = i \qquad , i=1,2,\ldots,n$$

dan pelabelan sisi dari graf *Cycle* (C_n) dengan

$$\alpha(x_i\, x_{i+1}) = \begin{cases} n + \dfrac{i+1}{2} & , untuk\ \ i\ ganjil \\ 2n - \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{i}{2} & , untuk\ \ i\ genap. \end{cases}$$

Pilih bobot titik graf *Cycle* (C_n) dengan $d=2$ untuk n ganjil dengan



Misalkan $b_\alpha(x_i)$, $1 \le i \le n$, adalah bobot titik x_i dari graf *Cycle* (C_n), sehingga
Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.
Pilih $a+8d$.
Karena $a+8d$ terletak pada titik ke 9, maka
$a+8d =$ sisi ke 8 + titik ke 9 + sisi ke 9

$$= \left(2n - \frac{n-1}{2} + \frac{i_8}{2}\right) + i_9 + \left(n + \frac{i_9+1}{2}\right)$$

$i_8 = 8 = (9-1) = (i-1)$
$i_9 = 9 = (9-0) = (i-0) = i$

$$b_\alpha(x_i) = \left(2n - \frac{n-1}{2} + \frac{i-1}{2}\right) + i + \left(n + \frac{i+1}{2}\right)$$
$$= \frac{4n - n + 1 + i - 1 + 2i + 2n + 1 + i}{2}$$
$$= \frac{5n+4i+1}{2}.$$

Misalkan B_α menyatakan himpunan bobot titik pada graf *Cycle* (C_n)

$$B_\alpha = \left\{ b_\alpha(x_i) \middle| 1 \le i \le n \right\}$$
$$= \left\{ \frac{5n+4i+1}{2} \,\middle|\, 1 \le i \le n \right\}$$
$$= \left\{ \frac{5n+5}{2}, \frac{5n+9}{2}, \ldots, \frac{9n+1}{2} \right\}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $n \geq 3$ dengan n ganjil dan $d = 2$, graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super $\left(\frac{5n+5}{2}, 2 \right)$-titik anti ajaib.

Langkah-langkah pelabelan total super $(a, 2)$-titik anti ajaib dengan n ganjil pada graf *Cycle* (C_n) adalah sebagai berikut:

1. Diketahui $d = 2$ dan banyak titik graf $= n$.
2. Hitung a dengan rumus: $a = \frac{5n+2}{2}$.
3. Beri label titik dengan $\alpha(x_i) = i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.
4. Beri label sisi untuk $i = 1, 2, \ldots, n$, dengan
   i. $\alpha(x_i\, x_{i+1}) = n + \frac{i+1}{2}$, untuk i ganjil
   ii. $\alpha(x_i\, x_{i+1}) = 2n - \frac{n-1}{2} + \frac{i}{2}$, untuk i genap.
5. Hitung himpunan bobot titik dengan menjumlahkan label titik dan sisi dari kiri ke kanan sehingga memenuhi himpunan bobot titik: $\left\{ \frac{5n+5}{2}, \frac{5n+9}{2}, \ldots\ldots, \frac{9n+1}{2} \right\}$.

Diagram alir pelabelan total super $(a, 2)$-titik anti ajaib dengan n ganjil pada graf *Cycle* (C_n) dapat dilihat pada Lampiran 4.

Contoh 3.4:

Berikut akan ditentukan pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n) dengan $d = 2$ untuk $n = 7$.

Untuk $n = 7$, dengan $a = \frac{5n+5}{2} = \frac{5.7+5}{2} = 20$ dan $d = 2$

pelabelannya sebagai berikut:

a. Pelabelan titik atau $\alpha(x_i)$:

$\alpha(x_1) = 1$	$\alpha(x_5) = 5$
$\alpha(x_2) = 2$	$\alpha(x_6) = 6$

$\alpha(x_3)=3$ $\qquad\qquad$ $\alpha(x_7)=7$

$\alpha(x_4)=4$

$\alpha(x_i)=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

b. Pelabelan sisi atau $\alpha(x_i\, x_{i+1})$:

$$i=1 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_1\, x_2)=n+\frac{i+1}{2}=7+\frac{1+1}{2}=8$$

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_2\, x_3)=2n-\frac{n-1}{2}+\frac{i}{2}=2.7-\frac{7-1}{2}+\frac{2}{2}=12$$

$$i=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_3\, x_4)=n+\frac{i+1}{2}=7+\frac{3+1}{2}=9$$

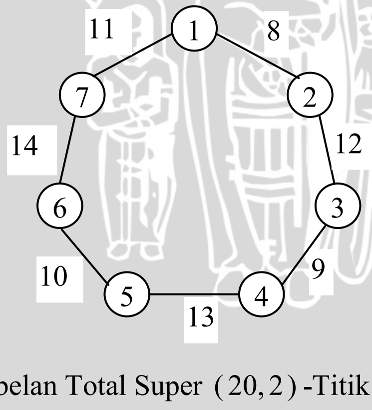
$$i=4 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_4\, x_5)=2n-\frac{n-1}{2}+\frac{i}{2}=2.7-\frac{7-1}{2}+\frac{4}{2}=13$$

$$i=5 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_5\, x_6)=n+\frac{i+1}{2}=7+\frac{5+1}{2}=10$$

$$i=6 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_6\, x_7)=2n-\frac{n-1}{2}+\frac{i}{2}=2.7-\frac{7-1}{2}+\frac{6}{2}=14$$

$$i=7 \quad \Rightarrow \quad \alpha(x_7\, x_8)=n+\frac{i+1}{2}=7+\frac{7+1}{2}=11$$

$\alpha(x_i\, x_{i+1})=\{8,9,10,11,12,13,14\}$.



Gambar 3.4 Pelabelan Total Super $(20,2)$-Titik Anti Ajaib C_7

Himpunan bobot titik dari graf *Cycle* (C_n) dengan $d=2$ untuk $n=7$ adalah $\{20,22,24,26,28,30,32\}$.

3.2.2 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Cycle* (C_n) dengan $d=1$ untuk n Sembarang

Proposisi 3.4

Untuk setiap $n \geq 3$, Graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=1$ dan n sembarang (Sugeng, 2005).

Bukti:

Misalkan titik-titik dari graf *Cycle* (C_n) dengan n ganjil adalah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Akan ditunjukkan untuk setiap $n \geq 3$, graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib untuk $d=1$ dengan n sembarang.

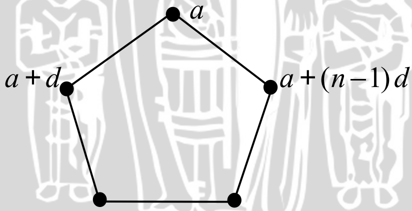
Menurut Sugeng (2005), didefinisikan pelabelan titik dari graf *Cycle* (C_n) dengan

$$\alpha(x_i) = i \qquad , i=1,2,\ldots,n$$

dan pelabelan sisi dari graf *Cycle* (C_n) dengan

$$\alpha(x_i\, x_{i+1}) = 2n - i + 1 \qquad \text{untuk} \quad i=1,2,\ldots,n\,.$$

Pilih bobot titik graf *Cycle* (C_n) dengan $d=1$ untuk n sembarang dengan



Misalkan $b_\alpha(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, adalah bobot titik x_i dari graf *Cycle* (C_n), sehingga

Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pilih $a + 10d$.

Karena $a + 10d$ terletak pada bobot titik ke 11, maka

$$a+10d = \text{ sisi ke } (n-9) + \text{ titik ke } (n-9) + \text{ sisi ke } (n-10)$$
$$= (2n-i_{n-9}+1)+(i_{n-9})+(2n-i_{n-10}+1)$$
$$i_{n-9} = (n-9) = (n-(11-2)) = (n-(i-2))$$
$$i_{n-10} = (n-10) = (n-(11-1)) = (n-(i-1))$$
$$b_\alpha(x_i) = (2n-(n-(i-2))+1)+(n-(i-2))+(2n-(n-(i-1))+1)$$
$$= 2n-n+i-2+1+n-i+2+2n-n+i-1+1$$
$$= 3n+i+1.$$

Misalkan B_α menyatakan himpunan bobot titik pada graf *Cycle* (C_n)

$$B_\alpha = \{ b_\alpha(x_i) \mid 1 \le i \le n \}$$
$$= \{ 3n+i+1 \mid 1 \le i \le n \}$$
$$= \{ 3n+2, 3n+3, \cdots\cdots, 4n+1 \}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $n \ge 3$ dengan $d=1$, graf *Cycle* (C_n) mempunyai pelabelan total super $(3n+2,1)$-titik anti ajaib.

Langkah-langkah pelabelan total super $(a,1)$-titik anti ajaib untuk n sembarang pada graf *Cycle* (C_n) adalah sebagai berikut:

1. Diketahui $d=1$ dan banyak titik graf $= n$
2. Hitung a dengan rumus: $a = 3n+2$
3. Beri label titik dengan $\alpha(x_i) = i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$
4. Beri label sisi dengan
   $\alpha(x_i\, x_{i+1}) = 2n-i+1$ untuk $i = 1, 2, \ldots, n$
5. Hitung himpunan bobot titik dengan menjumlahkan label titik dan sisi dari kanan ke kiri sehingga memenuhi himpunan bobot titik: $\{3n+2, 3n+3, \cdots\cdots, 4n+1\}$.

Diagram alir pelabelan total super $(a,1)$-titik anti ajaib untuk n sembarang pada graf *Cycle* (C_n) dapat dilihat pada Lampiran 5.

Contoh 3.5:

Berikut akan ditentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n) dengan $d=1$ untuk $n=8$.

Untuk $n=8$, dengan $a=3n+2=3.8+2=26$ dan $d=1$ pelabelannya sebagai berikut:

a. Pelabelan titik atau $\alpha(x_i)$:

$\alpha(x_1)=1 \quad \alpha(x_3)=3 \quad \alpha(x_5)=5 \quad \alpha(x_7)=7$

$\alpha(x_2)=2 \quad \alpha(x_4)=4 \quad \alpha(x_6)=6 \quad \alpha(x_1)=8$

$\alpha(x_i)=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

b. Pelabelan sisi atau $\alpha(x_i\, x_{i+1})$:

$i=1 \Rightarrow \alpha(x_1\, x_2)=2n-i+1=2.8-1+1=16$

$i=2 \Rightarrow \alpha(x_2\, x_3)=2n-i+1=2.8-2+1=15$

$i=3 \Rightarrow \alpha(x_3\, x_4)=2n-i+1=2.8-3+1=14$

$i=4 \Rightarrow \alpha(x_4\, x_5)=2n-i+1=2.8-4+1=13$

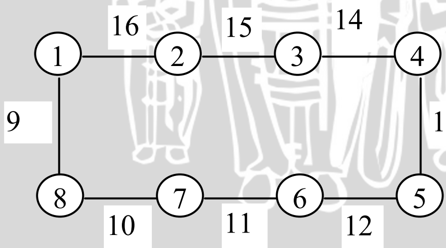
$i=5 \Rightarrow \alpha(x_5\, x_6)=2n-i+1=2.8-5+1=12$

$i=6 \Rightarrow \alpha(x_6\, x_7)=2n-i+1=2.8-6+1=11$

$i=7 \Rightarrow \alpha(x_7\, x_8)=2n-i+1=2.8-7+1=10$

$i=8 \Rightarrow \alpha(x_1\, x_8)=2n-i+1=2.8-8+1=9$

$\alpha(x_i\, x_{i+1})=\{10,11,12,13,14,15,16\}$.



Gambar 3.5 Pelabelan Total Super $(26,1)$-Titik Anti Ajaib C_8

Himpunan bobot titik dari graf *Cycle* (C_n) dengan $d=1$ untuk $n=8$ adalah $\{26,27,28,29,30,31,32,33\}$.

3.3 Pelabelan Total Super (a,d)-Titik Anti Ajaib pada Graf *Petersen* khusus $P(5,2)$

Selanjutnya akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Petersen* khusus $P(5,2)$.

Dari persamaan (2.3), diperoleh untuk graf *Petersen* $P(5,2)$, mempunyai derajat maksimum (Δ) = derajat minimum (δ) = 3, sedangkan jumlah sisi (e) = jumlah titik (n) = 3. Maka

$$d \le 1+\frac{\Delta(2(n+e)-\Delta+1)-\delta(2n+\delta+1)}{2(n-1)}$$

$$d \le 1+\frac{3(2(3+3)-3+1)-3(2.3+3+1)}{2(3-1)}$$

$$d \le 1+\frac{2(2.6-3+1)-3(6+3+1)}{2(2)}$$

$$d \le 1+\frac{3.10-3.10}{4}$$

$$d \le 1$$

Dari persamaan (2.6), Jumlah titik (n) dari graf *Petersen* adalah $2n$, sedangkan jumlah sisi (e) adalah $3n$, sehingga

$$a=\frac{(n+e)(n+e+1)+e(e+1)+2en-n(n-1)d}{2n}$$

$$=\frac{(2n+3n)(2n+3n+1)+3n\,(3n+1)+2.3n.2n-2n\,(2n-1)d}{2.(2n)}$$

$$=\frac{5n(5n+1)+3n\,(3n+1)+12n^2-2n\,(2n-1)\,d}{4n}$$

$$=\frac{25n^2+5n+9n^2+3n+12n^2-2n\,(2n-1)\,d}{4n}$$

$$=\frac{46n^2+8n-2n\,(2n-1)\,d}{4n}$$

$$=\frac{46n+8-2(2n-1)\,d}{4}$$

Dengan demikian, diperoleh graf *Petersen* dengan

$$d \le 1 \text{ dan } a = \frac{46n + 8 - 2(2n-1)\, d}{4} \tag{3.3}$$

Proposisi 3.5

Graf *Petersen* secara umum dinotasikan dengan $P(n,m)$, di mana $n \ge 3$ dengan n ganjil dan $1 \le m \le \frac{n}{2}$ mempunyai pelabelan total super $(a,1)$ -titik anti ajaib (Sugeng, 2005).

Bukti:

Misalkan graf *Petersen* $P(n,m)$ secara umum mempunyai titik $V\big(P(n,m)\big) = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ dan sisi $E\big(P(n,m)\big) = \{y_i x_i, y_i y_{i+1}, \ldots, x_i x_{i+m} \;:\; i = 0,1,\ldots,n-1\}$ dengan diberikan modulo n. Ada dua graf *Cycle* dari $P(n,m)$ yaitu graf *Cycle dalam* dan graf *Cycle luar*. Untuk graf *Cycle luar* dinotasikan dengan $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ dan graf *Cycle dalam* dinotasikan dengan $x_0, x_m, x_{2m}, \ldots, x_{(n-1)}$. Ubah titik graf *Cycle dalam* dengan $x_0^* = x_0$, $x_1^* = x_m$, $x_2^* = x_{2m}, \ldots, x_{n-1}^* = x_{(n-1)m}$. Maka graf *Cycle dalam* dapat juga dinotasikan dengan $x_0^*, x_1^*, \ldots, x_{n-1}^*$.

Menurut Sugeng (2005), didefinisikan pelabelan total α untuk graf *Cycle luar* dan graf *Cycle dalam* sebagai berikut:
Pelabelan titik dari graf *Cycle dalam* adalah

$$\alpha(x_i^*) = i + 1 \qquad , \; i = 0,1,\ldots,n-1$$

pelabelan titik dari graf *Cycle luar* adalah

$$\alpha(y_i) = n + 1 + i \qquad , \; i = 0,1,\ldots,n-1$$

pelabelan sisi dari graf *Cycle luar* adalah

$$\alpha(y_i\, y_{i+1}) = \begin{cases} 3n - \dfrac{i}{2} & \textit{untuk } i \textit{ genap} \\[2ex] \dfrac{5n - i}{2} & \textit{untuk } i \textit{ ganjil} \end{cases}$$

pelabelan sisi dari graf *Cycle dalam* adalah

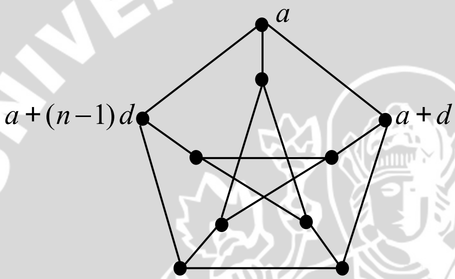
$$\alpha(x_i^* x_{i+1}^*) = \begin{cases} 4n - \dfrac{i}{2} & \text{untuk } i \text{ genap} \\ \dfrac{7n-i}{2} & \text{untuk } i \text{ ganjil} \end{cases}$$

untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$, di mana semua *subscript* adalah modulo n

pelabelan jari-jarinya adalah

$\alpha(x_i, y_i) = 4n + 1 + i \qquad , i = 0, 1, \ldots, n-1.$

Pilih bobot titik graf *Petersen* dengan $d = 1$ untuk n ganjil dengan



Misalkan $b_\alpha(x_i)$, $0 \le i \le n-1$, adalah bobot titik x_i dari graf *Petersen*, sehingga

Akan ditentukan $b_\alpha(x_i)$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Pilih $a + 2d$.

Karena $a + 2d$ terletak pada titik ke 2, maka

$a + 2d =$ sisi ke 1 + titik ke 2 + sisi ke 2 + jari-jari ke 2

$$= \left(\frac{5n - i_1}{2}\right) + (n + 1 + i_2) + \left(3n - \frac{i_2}{2}\right) + (4n + 1 + i_2)$$

$i_1 = 1 = (2-1) = (i-1)$

$i_2 = 2 = (2-0) = (i-0) = i$

$$b_\alpha(x_i) = \left(\frac{5n-(i-1)}{2}\right) + (n+1+i) + \left(3n - \frac{i}{2}\right) + (4n+1+i)$$

$$= \frac{5n - i + 1 + 2n + 2 + 2i + 6n - i + 8n + 2 + 2i}{2}$$

$$= \frac{21n + 2i + 5}{2}.$$

Misalkan B_α menyatakan himpunan bobot titik luar pada graf *Petersen*

$$B_\alpha = \left\{ b_\alpha(y_i) \mid 0 \le i \le n-1 \right\}$$
$$= \left\{ \frac{21n+2i+5}{2} \mid 0 \le i \le n-1 \right\}$$
$$= \left\{ \frac{21n+5}{2}, \frac{21n+7}{2}, \ldots, \frac{23n+3}{2} \right\}.$$

Dengan demikian, untuk setiap $n \ge 3$ dengan $d = 1$, graf *Petersen* mempunyai pelabelan total super $\left(\frac{21n+5}{2}, 1 \right)$-titik anti ajaib.

Langkah-langkah pelabelan total super $(a,1)$-titik anti ajaib pada $P(5,2)$ adalah sebagai berikut:

1. Diketahui $d = 1$ dan banyak titik graf $= n$.
2. Hitung a dengan rumus: $a = \left(\frac{21n+5}{2} \right)$.
3. Beri label titik dalam dengan
   $\alpha(x_i^*) = i+1$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
4. Beri label titik luar dengan
   $\alpha(y_i) = n+1+i$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
5. Beri label sisi luar untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$, dengan
   i. $\alpha(y_i\, y_{i+1}) = 3n - \frac{i}{2}$, untuk i genap
   ii. $\alpha(y_i\, y_{i+1}) = \frac{5n-i}{2}$, untuk i ganjil.
6. Beri label sisi dalam untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$, dengan
   i. $\alpha(x_i^*\, x_{i+1}^*) = 4n - \frac{i}{2}$, untuk i genap
   ii. $\alpha(x_i^*\, x_{i+1}^*) = \frac{7n-i}{2}$, untuk i ganjil.

7. Beri label jari-jari dengan
   $\alpha(x_i, y_i) = 4n + 1 + i$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n-1$.
8. Hitung himpunan bobot titik dengan menjumlahkan label titik dan sisi dari kiri ke kanan sehingga memnuhi himpunan bobot titik: $\left\{\frac{21n+5}{2}, \frac{21n+7}{2}, \cdots, \frac{23n+3}{2}\right\}$.

Diagram alir pelabelan total super $(a,1)$-titik anti ajaib pada $P(5,2)$ dapat dilihat pada Lampiran 6.

Contoh 3.6:

Berikut akan ditentukan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *petersen* khusus $P(5,2)$.

Graf *Petersen* $P(5,2)$ dengan $a = \frac{21n+5}{2} = \frac{21.5+5}{2} = 55$ dan $d = 1$

pelabelannya sebagai berikut:

a. Beri label titik dalam dengan

$$x_0^* = x_0 = 0 + 1 = 1$$
$$x_1^* = x_m = x_2 = 1 + 1 = 2$$
$$x_2^* = x_{2m} = x_4 = 2 + 1 = 3$$
$$x_3^* = x_{3m} = x_6 = x_{6 \bmod 5} = x_1 = 3 + 1 = 4$$
$$x_4^* = x_{4m} = x_8 = x_{8 \bmod 5} = x_3 = 4 + 1 = 5$$

$\alpha(x_i{}^*) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b. Beri label titik luar dengan

$$y_0 = 5 + 1 + 0 = 6$$
$$y_1 = 5 + 1 + 1 = 7$$
$$y_2 = 5 + 1 + 2 = 8$$
$$y_3 = 5 + 1 + 3 = 9$$
$$y_4 = 5 + 1 + 4 = 10$$

$\alpha(y_i) = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

c. Beri label sisi luar dengan

$$i=0 \;\Rightarrow\; \alpha(y_0\, y_1)=3n-\frac{i}{2}=3.5-\frac{0}{2}=15$$

$$i=1 \;\Rightarrow\; \alpha(y_1\, y_2)=\frac{5n-i}{2}=\frac{5.5-1}{2}=12$$

$$i=2 \;\Rightarrow\; \alpha(y_2\, y_3)=3n-\frac{i}{2}=3.5-\frac{2}{2}=14$$

$$i=3 \;\Rightarrow\; \alpha(y_3\, y_4)=\frac{5n-i}{2}=\frac{5.5-3}{2}=11$$

$$i=4 \;\Rightarrow\; \alpha(y_4\, y_0)=3n-\frac{i}{2}=3.5-\frac{4}{2}=13$$

$$\alpha(y_i\, y_{i+1})=\{11,12,13,14,15\}.$$

d. Beri label sisi dalam dengan

$$i=0 \;\Rightarrow\; \alpha(x_0^*\, x_1^*)=\alpha(x_0\, x_m)=\alpha(x_0\, x_2)=4n-\frac{i}{2}=4.5-\frac{0}{2}=20$$

$$i=1 \;\Rightarrow\; \alpha(x_1^*\, x_2^*)=\alpha(x_m\, x_{2m})=\alpha(x_2\, x_4)=\frac{7n-i}{2}=\frac{7.5-1}{2}=17$$

$$i=2 \;\Rightarrow\; \alpha(x_2^*\, x_3^*)=\alpha(x_{2m}\, x_{3m})=\alpha(x_4\, x_1)=4n-\frac{i}{2}=4.5-\frac{2}{2}=19$$

$$i=3 \;\Rightarrow\; \alpha(x_3^*\, x_4^*)=\alpha(x_{3m}\, x_{4m})=\alpha(x_1\, x_3)=\frac{7n-i}{2}=\frac{7.5-3}{2}=16$$

$$i=4 \;\Rightarrow\; \alpha(x_4^*\, x_5^*)=\alpha(x_{4m}\, x_{5m})=\alpha(x_3\, x_0)=4n-\frac{i}{2}=4.5-\frac{4}{2}=18$$

$$\alpha(x_i\, x_{i+1})=\{16,17,18,19,20\}.$$

e. Beri label jari-jari dengan

$$\alpha(x_0, y_0)=4n+1+i=4.5+1+0=21$$

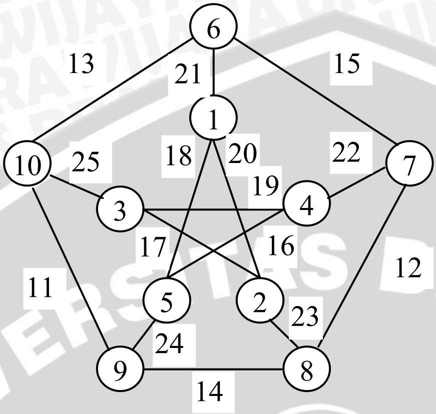
$$\alpha(x_1, y_1)=4n+1+i=4.5+1+1=22$$

$$\alpha(x_2, y_2)=4n+1+i=4.5+1+2=23$$

$$\alpha(x_3, y_3)=4n+1+i=4.5+1+3=24$$

$$\alpha(x_4, y_4)=4n+1+i=4.5+1+4=25$$

$$\alpha(x_i\, y_i)=\{21,22,23,24,25\}.$$



Gambar 3.6 Pelabelan Total Super $(55,1)$ -Titik Anti Ajaib $P(5,2)$

Himpunan bobot titik dari graf *Petersen* $P(5,2)$ adalah $\{55, 56, 57, 58, 59\}$.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dalam Skripsi ini adalah:

1. Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dilakukan dengan melabelkan titik dan sisi sedemikian hingga pelabelan titik dan sisi harus memenuhi himpunan bobot titik:
   a. $\left\{\frac{5n-3}{2}, \frac{5n+1}{2}, \cdots\cdots, \frac{9n-7}{2}\right\}$, untuk $n \geq 3$ dengan n ganjil dan $d=2$.
   b. $\left\{2n-1, 2n+2, \cdots\cdots, 5n-4\right\}$, untuk $n \geq 3$ dengan n sembarang dan $d=3$.
2. Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n) dilakukan dengan melabelkan titik dan sisi sedemikian hingga pelabelan titik dan sisi harus memenuhi himpunan bobot titik:
   a. $\left\{\frac{5n+5}{2}, \frac{5n+9}{2}, \cdots, \frac{9n+1}{2}\right\}$, untuk $n \geq 3$ dengan n ganjil dan $d=2$.
   b. $\left\{3n+2, 3n+3, \cdots\cdots, 4n+1\right\}$, untuk $n \geq 3$ dengan n sembarang dan $d=1$.
3. Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Petersen* khusus $P(5,2)$ dilakukan dengan melabelkan titik, sisi dan jari-jari sedemikian hingga pelabelan titik, sisi dan jari-jari harus memenuhi himpunan bobot titik $\left\{\frac{21n+5}{2}, \frac{21n+7}{2}, \cdots\cdots, \frac{23n+3}{2}\right\}$.

4.2 Saran

Untuk penentuan pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib dalam skripsi ini masih dapat dikembangkan pada beberapa jenis graf yang lain. Selain itu, dapat dikembangkan penentuan pelabelan anti ajaib dengan metode lain.

DAFTAR PUSTAKA

Baĉa, M., Bertault, F., MacDougall, J. A., Miller, M., Simanjuntak, R., dan Slamin. ***Vertex-antimagic Total Labelings of Graphs.*** Internet : http://www.newcastle.edu.au/school/math-physical-science/our_staff/downloads/macdougall_jim_vertexantimagic.pdf. Tanggal akses : 25 September 2008.

Chartrand, G., dan Zhang, P. 2005. ***Introduction to Graph Theory.*** McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

Clark, J., dan Holton, D.A. 1991. ***A First Book at Graph Theory***. Word Scientific Publishing Company. Singapore.

Gallian, J. 2007. ***A Dynamic Survey of Graph Labeling***. Departement of Mathematics and Statistics. University of Duluth. Internet: www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf Tanggal akses: 1 Agustus 2008.

Hsiao, Cheng-chih. 2006. ***On Graph Labeling Problems of Antimagic Type***. Internet : www.cute.edu.tw/~dcomm/E1.pdf. Tanggal akses : 13 September 2008.

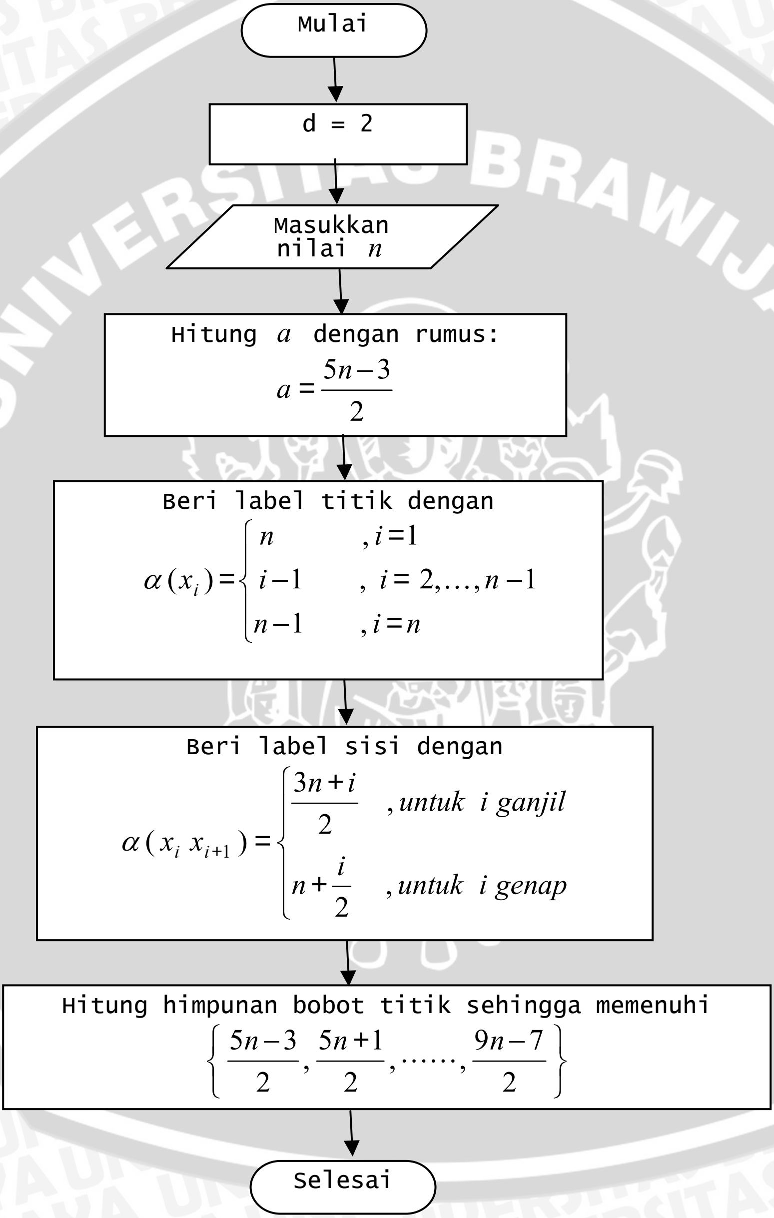
Marsudi, 1998. ***Pengantar Teori Graph***. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya. Malang.

Munir, R. 2005. ***Matematika Diskrit***, Edisi Ketiga. Informatika. Bandung.

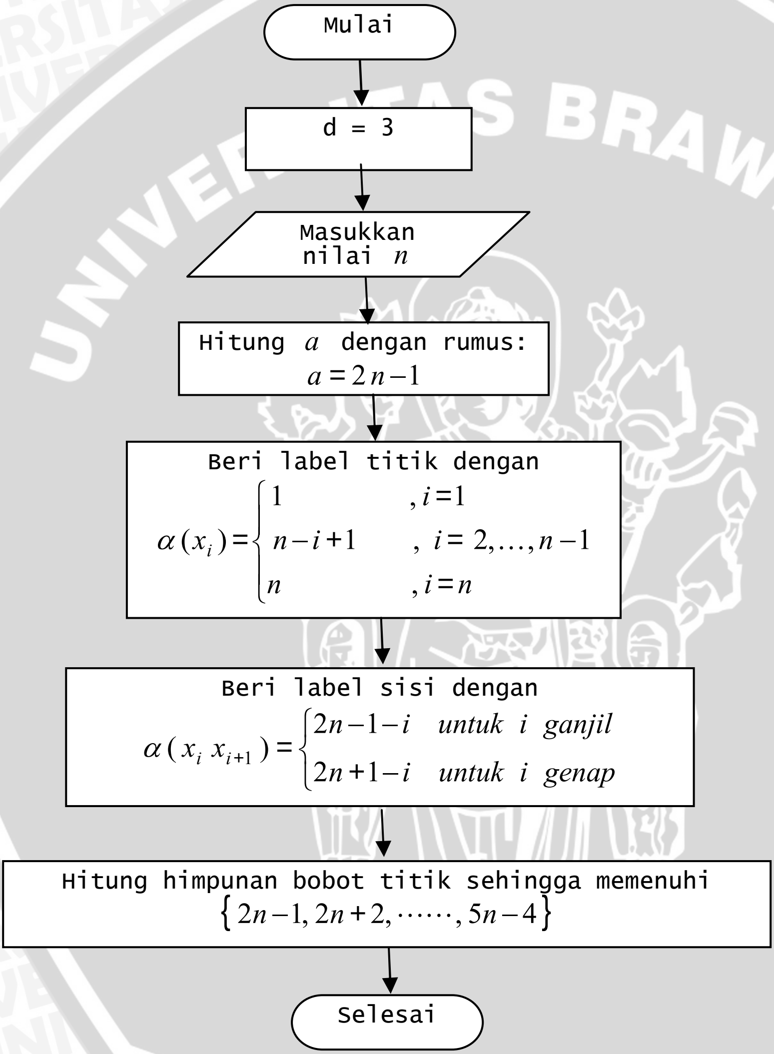
Rosen, K. H. 2003. ***Discrete Mathematics and Its Applications***. McGraw-Hill Companies, Inc. New York.

Sugeng, K.A. 2005. ***Magic and Antimagic Labeling of Graphs.*** *Thesis.* School of Information Technology and Mathematical Sciences University of Ballarat. Australia.

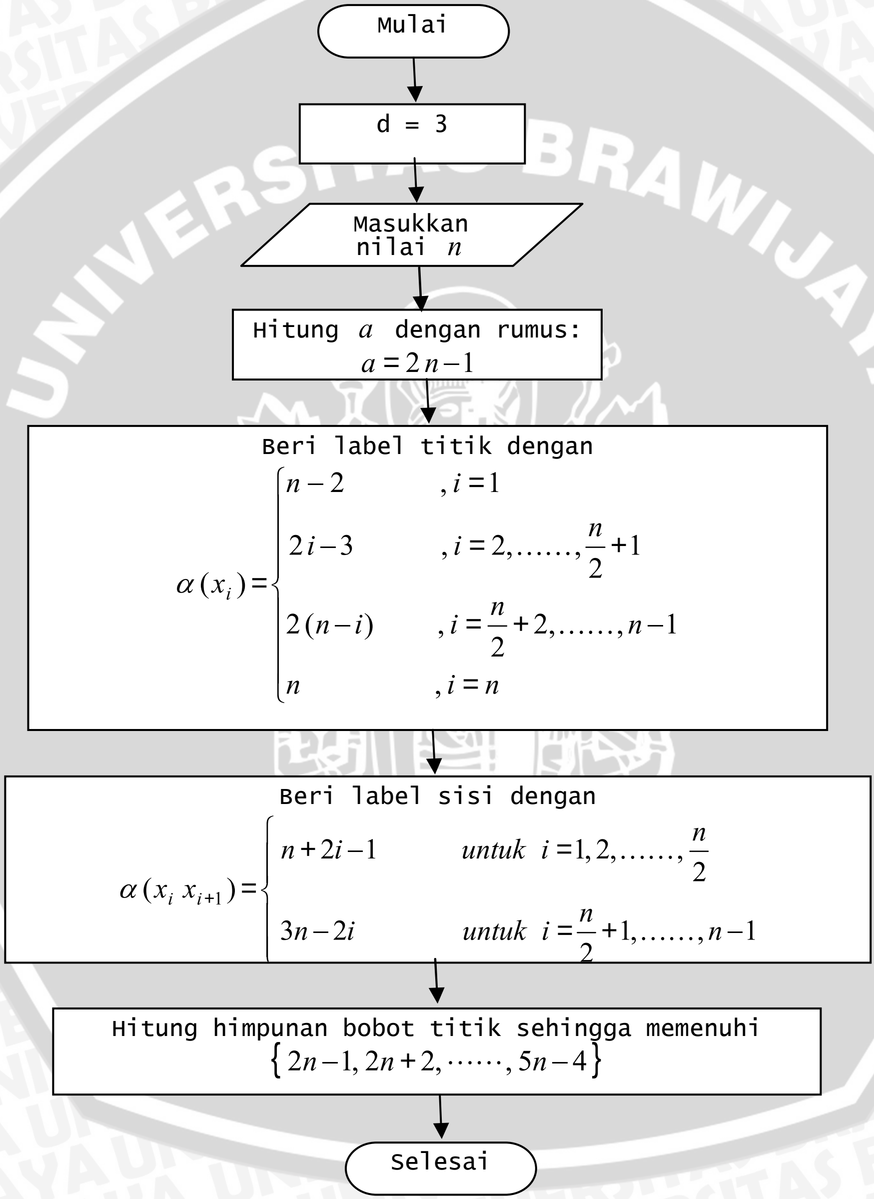
Lampiran 1. Pelabelan total super (a,d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan n ganjil dan $d=2$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:



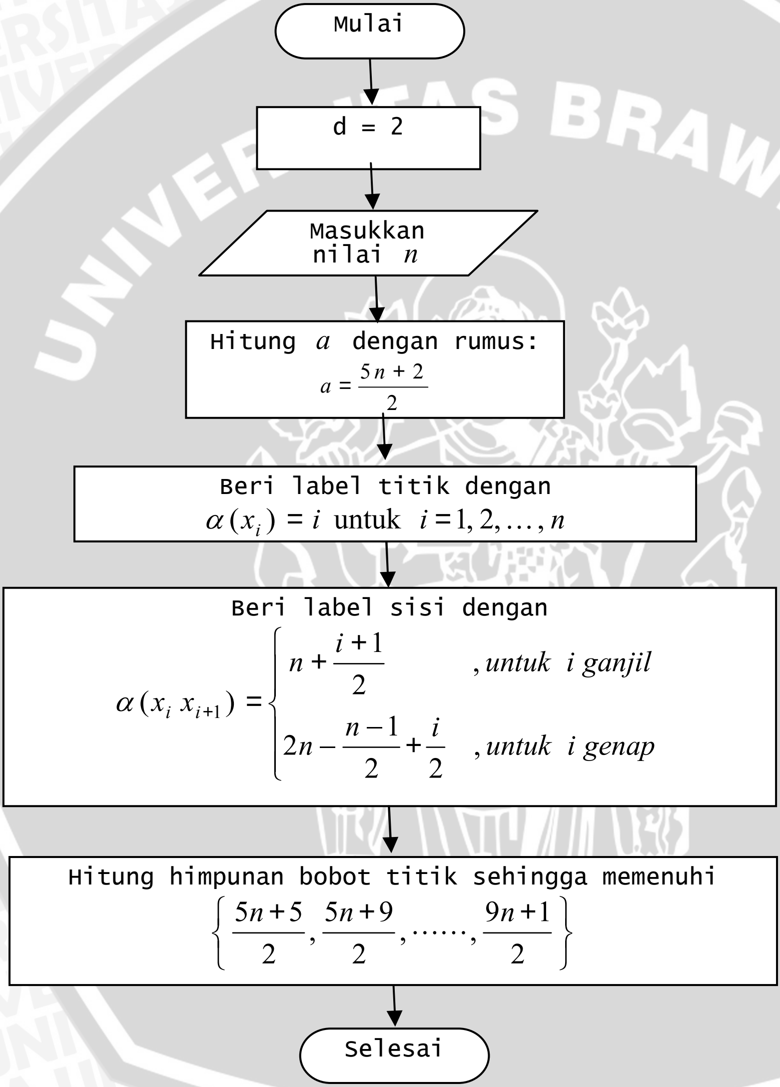
Lampiran 2. Pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan n ganjil dan $d = 3$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:



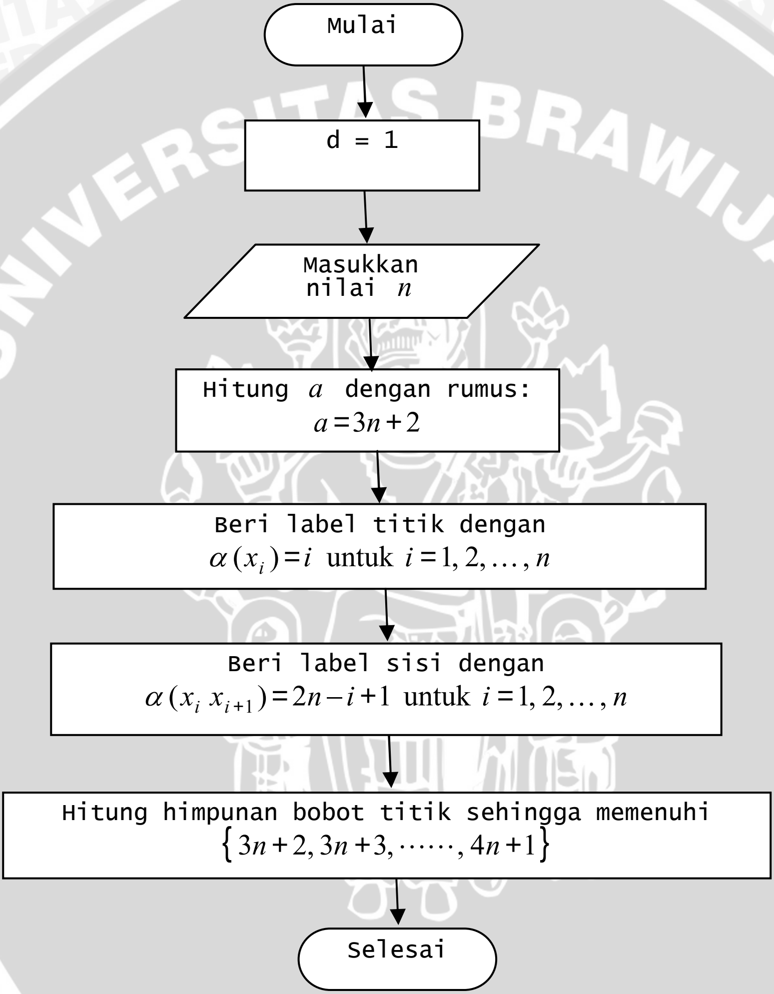
Lampiran 3. Pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib pada graf *Path* (P_n) dengan n genap dan $d = 3$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:



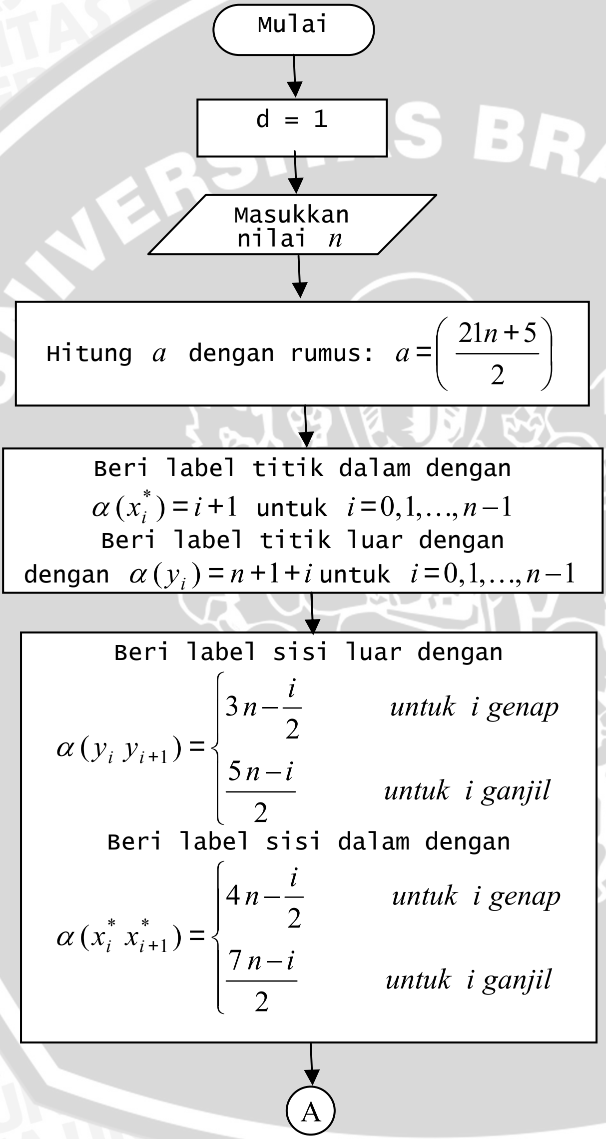
Lampiran 4. Pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n) dengan n ganjil dan $d = 2$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:

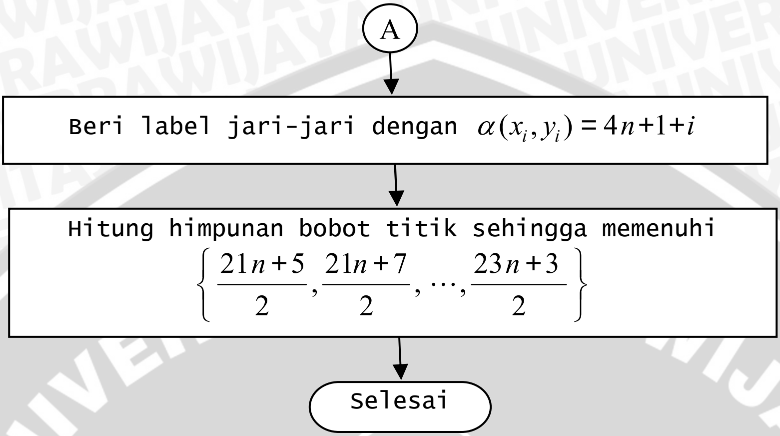


Lampiran 5. Pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib pada graf *Cycle* (C_n) dengan n sembarang dan $d = 1$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:



Lampiran 6. Pelabelan total super (a, d)-titik anti ajaib pada graf *Petersen* khusus $P(5,2)$ dengan $n=5$ dan $d=1$ dapat disusun dalam diagram alir sebagai berikut:




A
Beri label jari-jari dengan $\alpha(x_i, y_i) = 4n+1+i$
Hitung himpunan bobot titik sehingga memenuhi
$\left\{ \frac{21n+5}{2}, \frac{21n+7}{2}, \ldots, \frac{23n+3}{2} \right\}$
Selesai

DAFTAR LAMPIRAN