

**PROBABILITAS ABSORPSI  
PADA *PATH* LATIS DUA DIMENSI**

**SKRIPSI**

oleh :  
**YENI KRISMAWATI**  
**0410940061-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2009**

**PROBABILITAS ABSORPSI  
PADA *PATH* LATIS DUA DIMENSI**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :  
**YENI KRISMAWATI**  
**0410940061-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2009**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**PROBABILITAS ABSORPSI  
PADA *PATH* LATIS DUA DIMENSI**

Oleh:

**YENI KRISMAWATI**  
**0410940061-94**

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 9 Februari 2009  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang matematika

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**

**Dra. Endang Wahyu H., M.Si**  
**NIP. 131 960 432**

**Kwardiniya A., S.Si, M.Si**  
**NIP. 132 206 317**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc**  
**NIP. 132 126 049**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : YENI KRISMAWATI  
NIM : 0410940061  
Jurusan : MATEMATIKA  
Penulis Skripsi berjudul : PROBABILITAS ABSORPSI  
PADA *PATH* LATIS  
DUA DIMENSI

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di dalam isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 9 Februari 2009

Yang menyatakan,

(Yeni Krismawati)

NIM. 0410940061

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# PROBABILITAS ABSORPSI PADA *PATH* LATIS DUA DIMENSI

## ABSTRAK

Absorpsi merupakan gambaran dari *gambler ruin*, yaitu langkah menang dan kalah seorang penjudi dengan modal awal yang dimiliki hingga modalnya habis, sehingga harus berhenti dari permainan. *Gambler ruin* dianalisa dengan jalan acak (*random walk*) satu dimensi, kemudian digambarkan pada latas dua dimensi. Berdasarkan gambaran latas dua dimensi, didapatkan gambaran menang dan kalah penjudi dalam *path* untuk tiap nilai awal  $x = k$ , dimana  $k \in \mathbb{N}$  yang diperoleh berdasarkan modal awal. Dengan gambaran geometrik *path* tersebut dan mencari relasi rekursif untuk tiap-tiap nilai awal, didapatkan probabilitas absorpsi yaitu  $P(x = k)$ .

**Kata kunci :** *gambler ruin*, jalan acak, *path*, probabilitas absorpsi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

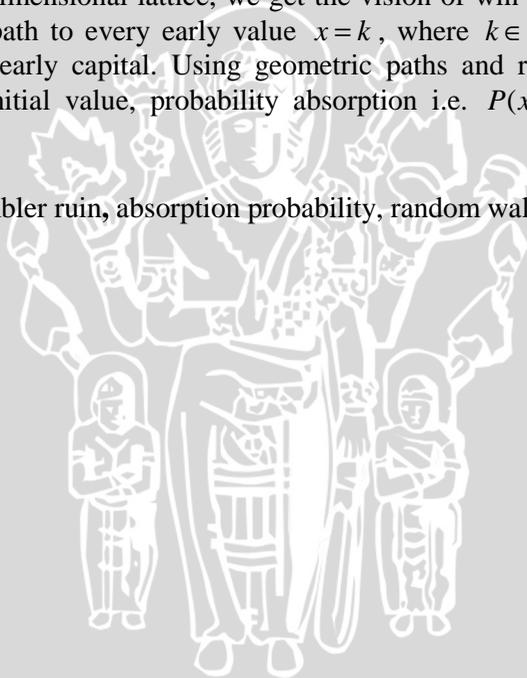


# ABSORPTION PROBABILITY IN TWO-DIMENSIONAL LATTICE PATH

## ABSTRACT

Absorption is form a part of gambler ruin, which means the win and loose steps of a gambler with early capital that he had, till its played out and must stopped the game. Gambler ruin analyzed by one-dimensional random walk, then it will be outlined at two-dimensional lattice. Based on the picture of two-dimensional lattice, we get the vision of win and loose of the gambler in path to every early value  $x=k$ , where  $k \in N$  which obtained based on early capital. Using geometric paths and recurrence relation for each initial value, probability absorption i.e.  $P(x=k)$  get obtained.

**Keywords :** gambler ruin, absorption probability, random walk, path.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat ALLAH SWT atas segala rahmat serta hidayah-Nya yang telah dilimpahkan kepada penulis, sehingga dapat menyelesaikan penulisan Skripsi ini dengan baik. Shalawat dan salam juga penulis curahkan kepada Rasulullah MUHAMMAD SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa penulisan Skripsi ini tidak dapat terealisasi tanpa bantuan baik yang bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam - dalamnya kepada :

1. Dra. Endang Wahyu H., M.Si selaku pembimbing I dan Kwardiniya A., S.Si., M.Si selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan dan segala sesuatu yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Isnani Darti, S.Si., M.Si, Drs. Imam Nurhadi Purwanto, MT, dan Dra. Ari Andari, MS selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Syaiful Anam, S.Si, MT selaku dosen penasihat akademik beserta seluruh staf pengajar yang telah mencurahkan ilmunya selama melaksanakan studi.
4. Ayah dan Ibuku tercinta yang telah mengasuhku dan menyayangiku, serta kakakku yang selalu menjadi motivatorku.
5. Rosi, Ninis, Reny, Triky, Rizka, Anis, Novia, Indy, Zulfi serta teman-teman Prodi Matematika 2004 yang selalu menemaniku.
6. Keluarga besar Kertosentono 117C yang selalu membantu, serta semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan, penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini. Akhir kata, penulis berharap semoga Skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 9 Februari 2009

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xv
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1. Latar Belakang .....	1
1.2. Rumusan Masalah .....	2
1.3. Batasan Masalah .....	2
1.4. Tujuan .....	2
<b>BAB II TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	3
2.1. Probabilitas.....	3
2.1.1. Kombinasi .....	3
2.2. Titik Latis .....	4
2.3. <i>Path</i> .....	5
2.3.1. <i>Path</i> Latis .....	5
2.4. Bilangan <i>Catalan</i> .....	8
2.4.1. <i>Diagonal Avoiding-path</i> .....	11
2.5. Jalan Acak .....	14
2.5.1. Jalan Acak Satu Dimensi.....	15
2.5.2. Probabilitas Jalan Acak .....	16
2.5.3. Probabilitas Absorpsi.....	16
<b>BAB III PEMBAHASAN</b> .....	19
3.1. Gambaran Geometrik.....	19
3.1.1. Gambaran Geometrik pada $k = 1$ .....	20
3.1.2. Gambaran Geometrik pada $k = 2$ .....	24
3.1.3. Gambaran Geometrik pada $k \geq 3$ .....	27
3.2. Probabilitas Absorpsi .....	32

3.2.1. Probabilitas untuk $k = 1 (P(x = 1))$ .....	32
3.2.2. Probabilitas untuk $k = 2 (P(x = 2))$ .....	35
3.2.3. Probabilitas untuk $k = 3 (P(x = 3))$ .....	38
3.3. Solusi Umum Probabilitas Absorpsi.....	42
<b>BAB IV PENUTUP</b> .....	53
4.1. Kesimpulan .....	53
4.2. Saran .....	53
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	55



## DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Poligon Triangulasi .....	9
Tabel 2.2 Keseimbangan Tanda kurang.....	9
Tabel 2.3 Jajaran Gunung .....	10
Tabel 3.1 Penjumlahan $(x + y)$ .....	45

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Titik (1,1) adalah titik latis.....	4
Gambar 2.2 Grid dengan ukuran $3 \times 3$ .....	4
Gambar 2.3 Alur dari <i>path</i> pada titik latis $A(2,1)$ .....	6
Gambar 2.4 Enam <i>path</i> pada <i>grid</i> berukuran $2 \times 2$ .....	7
Gambar 2.5 <i>Path</i> pada bidang kartesian yang dibatasi garis L ....	7
Gambar 2.6 (a) <i>Path</i> pada <i>grid</i> berukuran $5 \times 5$ , (b) Jajaran gunung dengan $n = 5$ .....	11
Gambar 2.7 <i>Counting Diagonal-Avoiding Path</i> .....	12
Gambar 2.8 Contoh langkah jalan acak .....	14
Gambar 2.9 Langkah jalan acak satu dimensi.....	15
Gambar 2.10 Langkah jalan acak satu dimensi pada kuadran I ....	15
Gambar 3.1 Langkah jalan acak pada latis dua dimensi .....	19
Gambar 3.2 Latis $C_1(0)$ dan <i>path</i> yang terbentuk.....	20
Gambar 3.3 Latis $C_1(1)$ dan <i>path</i> yang terbentuk .....	21
Gambar 3.4 Latis $C_1(2)$ dan <i>path</i> yang terbentuk.....	21
Gambar 3.5 Latis $C_1(3)$ dan <i>path</i> yang terbentuk.....	22
Gambar 3.6 Latis $C_1(4)$ dan <i>path</i> yang terbentuk.....	23
Gambar 3.7 Gambar $C_2(0)$ dan <i>path</i> yang terbentuk .....	25
Gambar 3.8 Gambar $C_2(1)$ dan <i>path</i> yang terbentuk .....	25
Gambar 3.9 Hubungan antara $C_2(n)$ dengan bilangan <i>catalan</i> ..	26
Gambar 3.10 Relasi rekursif dari persamaan (3.5).....	28
Gambar 3.11 Latis $C_4(2)$ dan <i>path</i> yang terbentuk .....	45
Gambar 3.12 Latis $C_3(3)$ dan <i>path</i> yang terbentuk.....	48

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Teori *gambler ruin* mengatakan bahwa "jika seorang penjudi bermain cukup lama, maka akan bangkrut dan harus berhenti dari permainan". Jadi, arti sebenarnya dari *gambler ruin* adalah kekalahan seorang penjudi yang terakhir pada suatu permainan uang. Permainan baru akan berakhir jika penjudi sudah tidak mampu untuk membayar lagi (Loy, 1999).

Pada teori probabilitas istilah *gambler ruin* kadang-kadang menunjuk pada kenyataan bahwa seorang penjudi hampir bisa dipastikan akan mengalami bangkrut meskipun dengan perlawanan yang lama. Hal ini terjadi jika lawannya mempunyai uang lebih banyak, sekalipun keuntungan lawan pada masing-masing perputaran permainan adalah kecil (Epstein, 1995). Contoh dari *gambler ruin* adalah pada pelemparan koin dan permainan di kasino seperti *roulette*, *baccarat* dan *blackjack*. Langkah probabilitas menang atau kalah pada *gambler ruin* dapat digambarkan pada proses *absorption* (absorpsi) dengan jalan acak (*random walk*). Absorpsi merupakan langkah menang atau kalah seorang penjudi dari awal dia mulai permainan dengan modal awal yang dimiliki, sampai permainan tersebut berakhir dimana uang yang dimiliki telah habis.

Salah satu asumsi dasar dari jalan acak adalah memiliki jarak langkah yang konstan dan memiliki probabilitas untuk menentukan arah jalan sesuai dengan distribusi seragam. Langkah absorpsi dianalisa dengan jalan acak satu dimensi, dengan asumsi bahwa gerakan ke kanan menyatakan menang dan gerakan ke kiri menyatakan kalah. Dengan demikian didapatkan gambaran geometrik dengan menggunakan *path*.

*Path* merupakan suatu deretan yang terdiri dari titik-titik dan garis-garis yang berganti-ganti dimana semua titik kecuali titik awal dan akhir pada deretan tersebut berlainan. *Path* yang digunakan untuk gambaran geometrik ini adalah *path* khusus yaitu *path* pada latis dua dimensi dimana langkah horizontal mewakili langkah ke kanan dan langkah vertikal mewakili langkah ke kiri.

Pada bidang kartesian, *path* khusus bergerak untuk tiap langkah ke arah kanan mengikuti sumbu  $x$  dan ke atas mengikuti

sumbu  $y$ . Oleh karena itu *path* mengandung semua titik pada bidang dengan koordinat bilangan bulat. Titik pada bidang kartesian yang koordinatnya bilangan bulat disebut titik latis (Balakhrisnan, 1995). *Path* dianggap berasal dari pusat menuju ke titik latis, kemudian dengan menggunakan *path* khusus didapatkan gambaran geometrik dari absorpsi dan dapat dihitung probabilitasnya.

## 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini antara lain:

1. bagaimana gambaran geometrik dari absorpsi pada *path* latis dua dimensi?
2. bagaimana rumus eksplisit dari probabilitas absorpsi pada *path* latis dua dimensi?

## 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah pada skripsi ini adalah:

1. proses absorpsi tanpa mengalami hambatan artinya permainan terjadi secara terus menerus,
2. hanya ada dua orang pemain yaitu penjudi yang mengalami *gambler ruin* dengan modal awal yang terbatas (*player*), serta lawannya dengan modal tak hingga (*banker*),
3. hanya ada dua kemungkinan setiap kali permainan yaitu menang dengan probabilitas  $p$  dan kalah dengan probabilitas  $q$ .

## 1.4 Tujuan

Tujuan dari pembahasan masalah ini adalah:

1. menunjukkan gambaran geometrik dari absorpsi pada *path* latis dua dimensi,
2. mendapatkan rumus eksplisit dari probabilitas absorpsi pada *path* latis dua dimensi.

## BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini dijelaskan beberapa teori yang digunakan untuk penggambaran dan perhitungan probabilitas absorpsi yaitu probabilitas, titik latis, *path*, bilangan *catalan*, serta jalan acak (*random walk*).

### 2.1 Probabilitas

Bila suatu percobaan dapat menghasilkan  $N$  macam hasil yang berkemungkinan sama, dan bila tepat sebanyak  $n$  dari hasil berkaitan dengan kejadian  $A$ , maka probabilitas kejadian  $A$  adalah  $P(A) = \frac{n}{N}$  (Walpole dan Myers, 1986).

#### 2.1.1 Kombinasi

Banyaknya cara memilih  $r$  benda dari sejumlah  $n$  tanpa memperdulikan urutannya. Pemilihan seperti itu disebut kombinasi.

##### Definisi 2.1

Jumlah kombinasi dari  $n$  benda yang berlainan bila diambil sebanyak  $r$  adalah

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (2.1)$$

(Walpole dan Myers, 1986).

##### Contoh 2.1.

Jumlah kombinasi dari empat huruf ABCD jika diambil tiga huruf adalah:

$n = 4$ , dan  $r = 3$ . Oleh karena itu diperoleh

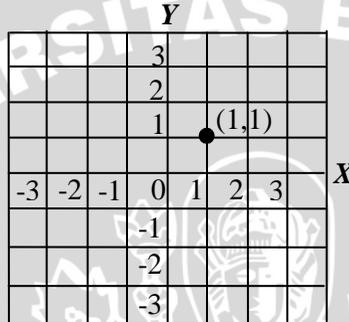
$$\begin{aligned} \binom{n}{r} &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{4!}{3!(4-3)!} \\ &= 4. \end{aligned}$$

## 2.2 Titik Latis

### Definisi 2.2

Titik pada bidang kartesian yang koordinatnya bilangan bulat disebut titik latris (Balakhrisnan, 1995).

Contoh titik latris terdapat pada Gambar 2.1. Pada gambar tersebut menunjukkan bahwa titik (1,1) yang merupakan titik latris.

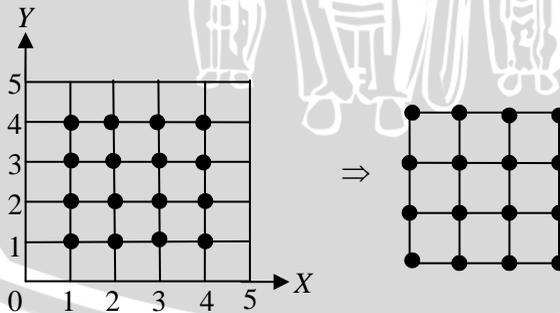


Gambar 2.1 Titik (1,1) adalah titik latris

### Definisi 2.3

Titik latris umumnya digunakan untuk menunjukkan titik-titik dalam susunan persegi. Susunan tersebut disebut dengan *grid* atau *mesh* (Weisstien, 1999).

Contoh dari *grid* ditunjukkan pada Gambar 2.2. Pada gambar tersebut jika titik-titik latris dihubungkan dengan garis maka akan membentuk suatu persegi dengan ukuran  $3 \times 3$ .



Gambar 2.2 Grid dengan ukuran  $3 \times 3$

## 2.3 Path

*Path* adalah suatu deretan yang terdiri dari titik-titik dan garis-garis yang berganti-ganti dimana semua titik (kecuali titik awal dan akhirnya) berlainan.

### 2.3.1 Path Latis

#### Definisi 2.4

*Path* latis adalah rangkaian dari titik  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$  dengan  $n \geq 0$ , yaitu untuk setiap  $P_i$  adalah titik latis dan  $P_{i+1}$  didapatkan dengan menyeimbangkan satu bagian timur (atau barat) atau satu bagian utara (atau selatan) (Weisstein, 1999).

Misalkan terdapat suatu *path* dari titik asal (titik pusat) ke titik latis  $A(m, n)$ , dimana  $m$  dan  $n$  tidak negatif maka cara menetapkan jumlah dari *path* tersebut:

1. dimulai dari titik asal (titik pusat),
2. selalu paralel ke sumbu- $x$  atau sumbu- $y$ ,
3. membuat belokan hanya pada titik latis, salah satu sepanjang sumbu- $x$  positif atau sepanjang sumbu- $y$  positif, dan
4. berakhir di titik  $A$

(Balakhrisan, 1995).

#### Definisi 2.5

*Path* khusus adalah rangkaian dari  $m + n$  langkah, dimana  $m$  langkah horizontal dan  $n$  langkah vertikal. Jumlah dari *path* khusus adalah hasil kombinasi dari

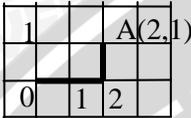
$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n} \quad (2.2)$$

banyaknya langkah dari posisi yang disediakan dalam rangkaian untuk satu atau langkah yang lain (Balakhrisan, 1995).

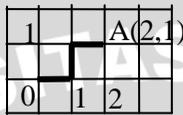
Contoh 2.2.

Terdapat titik latis  $A(2,1)$ , maka jumlah *path* dari titik pusat  $(0,0)$  ke titik latis adalah hasil kombinasi dari:

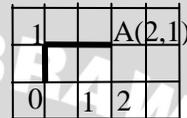
$$\binom{2+1}{2} = \binom{2+1}{1} = \frac{3!}{2!1!} = 3.$$



Path 1



Path 2



Path 3

Gambar 2.3 Alur dari *path* pada titik latis  $A(2,1)$

**Definisi 2.6**

Jumlah *path* pada *grid* dengan ukuran  $n \times n$  adalah hasil kombinasi dari

$$\binom{2n}{n} \tag{2.3}$$

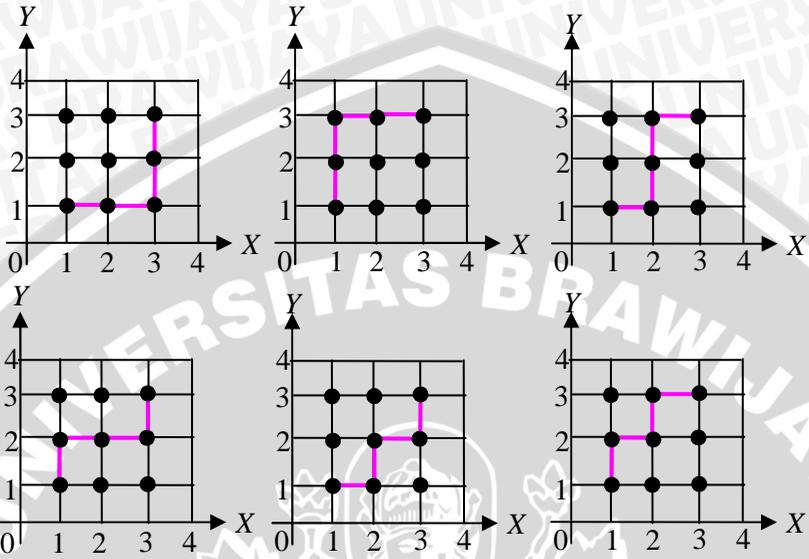
(Davis, 2006).

Contoh 2.3.

Terdapat *grid* dengan ukuran  $2 \times 2$ , maka jumlah *path* pada *grid* tersebut adalah:

$$\binom{2n}{n} = \binom{2.2}{2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Pada Gambar 2.4 memperlihatkan enam alur *path* pada *grid* berukuran  $2 \times 2$ .



Gambar 2.4 Enam path pada grid berukuran  $2 \times 2$

**Definisi 2.7**

Path dari  $P_0$  ke  $P_m$  pada bidang kartesian adalah rangkaian  $(P_0, P_1, \dots, P_m)$  dari titik kisi  $P_i(x_i, y_i)$ , dimana untuk setiap  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ ,  $x_{i+1} = x_i + 1$ ,  $y_{i+1} = y_i$  atau  $x_{i+1} = x_i$ ,  $y_{i+1} = y_i + 1$ . Path ini bagus jika  $y_i < x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ), sebaliknya adalah path yang buruk (Balakhrisan, 1995).

**Definisi 2.8**

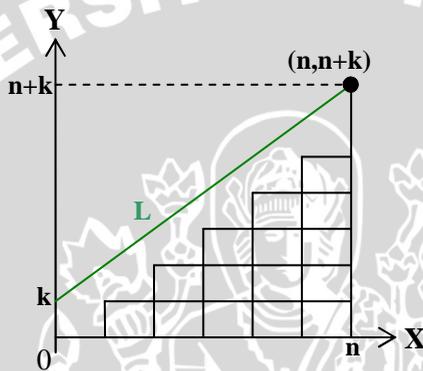
Jumlah path dari titik pusat  $(0,0)$  ke titik  $(n, n+k)$  dimana  $n$  menentukan jumlah langkah path ke arah kanan.  $(0,k)$  adalah koordinat titik awal dari garis L untuk membatasi daerah tersebut, dan  $m = n+k$  merupakan jumlah langkah path ke atas seperti yang terlihat pada Gambar 2.5 ditentukan oleh:

$$C_k(n) = k \frac{(n+m-1)!}{n!m!}$$

$$= k \frac{(2n+k-1)!}{n!(n+k)!}$$

$$\begin{aligned}
 C_k(n) &= \frac{k \cdot (2n+k-1)!}{n!(n+k)!} \cdot \frac{(2n+k)}{(2n+k)} \\
 &= \frac{k}{(2n+k)} \cdot \frac{(2n+k)!}{n!(n+k)!} \\
 &= \frac{k}{(2n+k)} \binom{2n+k}{n} \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

(Bolina, 2001).



Gambar 2.5 Path pada bidang kartesian yang dibatasi garis L

Berdasarkan konsep *gambler ruin*, nilai awal  $k$  ditentukan dari perbandingan modal awal dengan jumlah taruhan. Oleh karena itu

$$k = \frac{\text{modal awal}}{\text{jumlah taruhan}}, \text{ dimana } k \in \mathbb{N}.$$

Jumlah taruhan adalah sama untuk tiap kali bermain.

## 2.4 Bilangan Catalan

Bilangan *catalan* pada bilangan bulat tidak negatif  $n$  adalah himpunan bilangan yang diperoleh dari *Euler's polygon division problem*, yaitu banyaknya cara untuk membentuk segitiga pada poligon dengan  $n+2$  sisi dimana  $n=0,1,2,3,\dots$  (Weisstein,1999).

Cara yang dipakai adalah dengan menarik garis diagonal pada titik-titik sudutnya, dengan syarat garis yang digunakan untuk membentuk segitiga tersebut tidak berpotongan. Jumlah cara tersebut yaitu 1, 1, 2, 5, 14, 42,132, 329,... .



Tabel 2.3 Jajaran Gunung

$n = 0$	*	1 cara
$n = 1$	$\wedge$	1 cara
$n = 2$	$\wedge\wedge, \wedge\backslash$	2 cara
$n = 3$	$\wedge\wedge\wedge, \wedge\wedge\backslash, \wedge\backslash\wedge, \wedge\backslash\backslash, \wedge\backslash\wedge\backslash$	5 cara

Pada Tabel 2.3 tanda (\*) menyatakan bahwa tidak ada jajaran gunung yang bisa dibentuk.

Untuk mendapatkan rumus umum dari beberapa permasalahan di atas diambil contoh pada permasalahan tanda kurung. Diasumsikan telah diketahui jumlah himpunan tanda kurung untuk  $0, 1, 2, \dots, n-1$  kemudian akan dicari jumlah untuk  $n$ . Misal  $Q_i$  adalah himpunan dari  $i$  pasang tanda kurung yang seimbang dimana  $Q_0 = 1, Q_1 = 1, Q_2 = 2, Q_3 = 5$ , dan  $Q_4 = 14$  bisa didapatkan dengan menghitung secara langsung. Dikatakan seimbang jika tanda kurung selalu berpasangan artinya jika terdapat tanda kurung buka maka harus terdapat tanda kurung tutup.

Diantara pasangan tanda kurung tersebut terdapat pasangan tanda kurung yang seimbang, dan dibagian kanannya terdapat himpunan keseimbangan yang lain:

$$(A)B,$$

dimana  $A$  adalah himpunan tanda kurung yang seimbang begitu juga dengan  $B$ . Keduanya  $A$  dan  $B$  bisa memuat sampai dengan  $(n-1)$  pasangan tanda kurung, tetapi jika  $A$  memuat  $k$  pasang, maka  $B$  memuat  $(n-k-1)$  pasang. Berdasarkan hal tersebut akan dihitung pula untuk  $A$  dan  $B$  yang memuat nol pasangan, yang berarti tidak boleh menulis tanda kurung apapun. Oleh karena itu didapatkan total susunan dengan  $n$  pasang yang seimbang.

Hal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Q_1 = Q_0 Q_0$$

$$Q_2 = Q_1 Q_0 + Q_0 Q_1$$

$$Q_3 = Q_2 Q_0 + Q_1 Q_1 + Q_0 Q_2$$

$$Q_4 = Q_3 Q_0 + Q_2 Q_1 + Q_1 Q_2 + Q_0 Q_3$$

$$\vdots \quad \dots$$

$$\vdots \quad \dots$$

$$\vdots \quad \dots$$

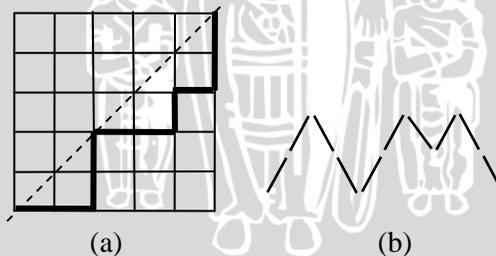
$$Q_n = Q_{n-1} Q_0 + Q_{n-2} Q_1 + \dots + Q_1 Q_{n-2} + Q_0 Q_{n-1} \quad (2.5)$$

(Davis, 2006).

Bilangan *catalan* dapat pula didapatkan dengan mencari jumlah *diagonal-avoiding path* pada suatu *grid*.

### 2.4.1 Diagonal-Avoiding Path

Pada *grid* berukuran  $n \times n$  terdapat sejumlah *path* dengan panjang  $2n$  yang berawal dari sudut kiri bawah ke sudut kanan atas, dimana *path* tersebut terletak pada atau di bawah garis diagonal (*diagonal-avoiding path*). Jumlah *path* tersebut akan sama dengan jumlah jajaran gunung yang bisa dibentuk dengan  $n$  garis ke atas dan  $n$  garis ke bawah. Untuk gambaran *diagonal-avoiding path* dan *path* pada jajaran gunung ditunjukkan pada Gambar 2.6.



Gambar 2.6 (a) *Path* pada *grid* berukuran  $5 \times 5$   
 (b) Jajaran gunung dengan  $n = 5$

Pada Gambar 2.6 (a) memperlihatkan *grid* dengan ukuran  $5 \times 5$  oleh karena itu panjang *path* adalah  $2 \times 5 = 10$ . Hal ini menunjukkan kesesuaian dengan bentuk pada jajaran gunung yaitu Gambar 2.6 (b)

dengan  $n = 5$  dimana terdapat lima garis ke atas dan lima garis ke bawah atau total garis adalah sepuluh.

**Teorema 2.1**

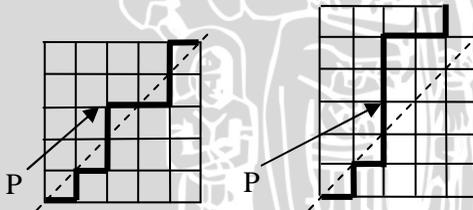
Bilangan *catalan* ke- $n$  ,  $Z_n$  atau jumlah dari *diagonal-avoiding path* pada *grid* berukuran  $n \times n$  adalah

$$\begin{aligned} Z_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\ &= \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \end{aligned} \tag{2.6}$$

(Davis, 2006).

**Bukti:**

Untuk mendapatkan rumus eksplisit dari bilangan *catalan* akan dianalisa dari jumlah *diagonal-avoiding path*, dengan menghitung jumlah *path* pada *grid* dan mengurangi dengan jumlah *path* yang berada di atas garis diagonal.



Gambar 2.7 *Counting Diagonal-Avoiding Path*

Gambar 2.7 mengilustrasikan *path* khusus yang tidak dihitung karena melewati titik pada garis diagonal. Titik *P* adalah titik pertama pada *grid* yang melewati garis yang salah, yaitu di atas garis diagonal oleh karena itu membentuk *path* buruk. Akibatnya untuk tiap *path* tersebut mencerminkan *path* yang berawal dari titik *P*, dimana ketika *path* asli mestinya berjalan ke kanan, namun *path* berjalan ke atas dan ketika *path* asli ke atas, *path* ke kanan. Hal ini menjelaskan bahwa *path* yang mencapai titik *P* akan berjalan satu langkah lagi ke

atas, sehingga akan bergerak  $k$  langkah ke kanan dan  $k + 1$  langkah ke atas.

Tiap *path* buruk bisa dirubah dengan cara menukar langkahnya (Davis, 2006). Jumlah *path* yang mempunyai  $n$  langkah melewati dan naik, yang berarti terdapat  $n - k$  langkah ke kanan dan  $n - k - 1$  langkah ke atas. Tetapi karena langkah-langkah ke kanan dan langkah-langkah ke atas ditukar, *path* yang dirubah mempunyai total langkah sebanyak  $(k) + (n - k - 1) = n - 1$  langkah ke kanan dan  $(k + 1) + (n - k) = n + 1$  langkah ke atas. Tiap *path* yang dirubah berakhir dititik yang sama,  $n - 1$  langkah ke kanan dan  $n + 1$  langkah ke atas. Tiap *path* yang berawal dari titik pusat ke titik  $n - 1$  ke kanan dan  $n + 1$  ke atas ini disamakan dengan satu *path* buruk.

Jumlah *path* buruk tersebut adalah total jumlah dari rute *path* pada *grid* yaitu  $(n - 1)$  yang ditukar dengan  $(n + 1)$ . Jumlah *path* dari

*grid* berukuran  $n \times n$  adalah  $\binom{2n}{n}$  (Definisi 2.6) dan jumlah *path*

buruk adalah  $\binom{2n}{n+1}$ . Oleh karena itu jumlah *diagonal-avoiding path* adalah:

$$\begin{aligned} Z_n &= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

### Definisi 2.9

Bilangan *catalan* ke- $n$  sama dengan jumlah *path* dari titik pusat  $(0,0)$  ke titik  $(n, n+k)$  (Definisi 2.8) dengan  $k=1$  atau biasa ditulis dengan  $C(n)$  :

$$\begin{aligned} C_k(n) &= \frac{k}{(2n+k)} \binom{2n+k}{n} \\ C_1(n) &= \frac{1}{(2n+1)} \binom{2n+1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(n) &= \frac{1}{(2n+1)} \cdot \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} \\
&= \frac{(2n)!}{(n+1)n!n!} \\
&= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \\
&= Z_n,
\end{aligned}$$

sehingga

$$Z_n = C_1(n) = C(n) \quad (2.7)$$

(Bolina, 2001).

## 2.5 Jalan Acak

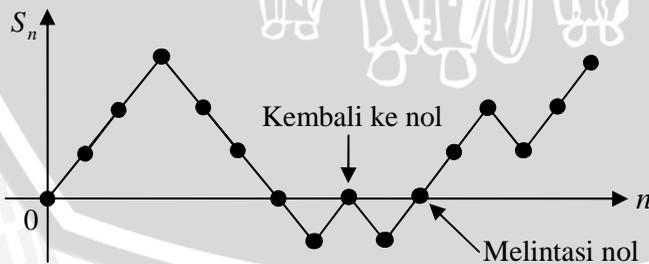
Proses acak yang terdiri dari urutan langkah yang berlainan dengan panjang yang ditentukan.

### Definisi 2.10

Misalkan urutan variabel acak bebas yang diasumsikan bernilai +1 dengan probabilitas  $p$ , dan -1 dengan probabilitas  $q = 1-p$ . Untuk tiap-tiap kejadian  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , dimana  $x_k = +1$  jika hasil ke- $k$  adalah sukses dan  $x_k = -1$  untuk yang lain.  $S_n$  dinotasikan sebagai jumlah nilai dari kejadian sampai ke  $n$  adalah

$$S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad S_0 = 0, \quad (2.8)$$

dimana  $S_n$  menggambarkan posisi kejadian pada langkah ke- $n$ .



Gambar 2.8 Contoh langkah jalan acak

Pada model jalan acak, langkah diambil dengan penggambaran ke atas atau ke bawah dengan jarak yang teratur. Jalan acak mengalami kejadian yaitu tetap pada posisinya, berjalan satu langkah ke bawah, atau berjalan satu langkah ke atas dan dikatakan simetris jika  $p = q = 1/2$ , tidak simetris jika  $p \neq q$  (Papoulis dan Pillai, 2002).

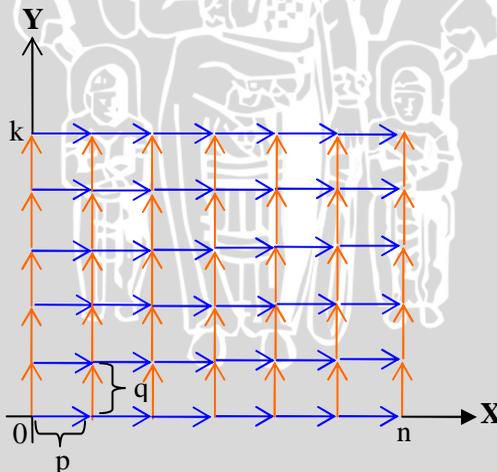
### 2.5.1 Jalan Acak Satu Dimensi

Jalan acak dimana tiap bagian diperoleh dari bagian yang lain karena itu semua bagian mempunyai tipe yang sama (Papoulis dan Pillai, 2002).



Gambar 2.9 Langkah jalan acak satu dimensi

Langkah jalan acak dapat digambarkan pada bidang kartesian dengan gambaran seperti yang terlihat pada Gambar 2.10.



Gambar 2.10 Langkah jalan acak satu dimensi pada kuadran I

Gambar 2.10 memperlihatkan langkah jalan acak satu dimensi pada kuadran I yang menunjukkan pula gambaran latis dua dimensi. Langkah ke kanan digambarkan dengan langkah horizontal dan mempunyai probabilitas  $p$ , sementara itu langkah ke kiri yang digambarkan dengan ke arah vertikal (ke atas) mempunyai probabilitas  $q=1-p$ . Langkah ke kanan pada gambar tersebut dibatasi hanya sampai  $n$  langkah, sehingga pada sumbu  $X$  terdapat  $n$  langkah ke kanan. Langkah ke atas dibatasi sampai dengan langkah ke- $k$  sehingga pada sumbu  $Y$  terdapat  $k$  langkah ke atas.

### 3.5.2 Probabilitas Jalan Acak

Pada model jalan acak satu dimensi akan muncul tiga probabilitas yaitu tetap pada posisinya, berjalan satu langkah ke kiri, atau berjalan satu langkah ke kanan.

#### Definisi 2.11

Probabilitas perpindahan satu langkah ( $X_{n+1}$ ) dengan  $i$  adalah langkah ke- $n$  pada jalan acak satu dimensi adalah

$$P(X_{n+1} = j) = \begin{cases} p & j = i + 1 \\ q & j = i - 1 \\ r & j = 0 \end{cases}$$

dimana  $p$  = probabilitas langkah ke kanan  
 $q$  = probabilitas langkah ke kiri  
 $r$  = probabilitas tetap pada posisinya  
 (Papoulis dan Pillai, 2002).

Probabilitas perpindahan satu langkah tersebut menunjukkan langkah ke- $n+1$  adalah  $j$  dengan probabilitas perpindahan ke kanan  $p$  dan probabilitas perpindahan ke kiri  $q$ . Perpindahan satu langkah pada jalan acak satu dimensi tersebut digambarkan pada latis dua dimensi, untuk menunjukkan probabilitas satu langkah pada suatu permainan uang.

### 2.5.3 Probabilitas Absorpsi

Pada probabilitas absorpsi usaha semuanya bebas, maka probabilitas tiap hasil yang berbeda dikalikan. Tiap kemenangan terjadi dengan probabilitas  $p$ , tidak berubah dari usaha yang satu ke yang berikutnya, dan tiap kekalahan mempunyai probabilitas  $(1-p)$ . Nilai  $p$  tergantung dari jenis permainan. Banyaknya permainan dalam absorpsi digambarkan dengan banyaknya *path* pada Definisi (2.8).

#### Definisi 2.12

Probabilitas absorpsi dengan batasan bahwa titik awal terletak pada  $(0, k)$ , dimana  $C_k(n)$  adalah jumlah *path* dari titik pusat ke titik  $(n, n+k)$  (Definisi 2.8) adalah:

$$P(x=k) = \sum_{n=0}^{\infty} C_k(n) p^n (1-p)^{n+k} \quad (2.9)$$

(Bolina, 2001).

Persamaan (2.9) sama artinya dengan probabilitas penjudi mengalami *gambler ruin* dengan nilai awal  $k$ ,  $n$  kali menang serta  $n+k$  kali kalah.  $C_k(n)$  merupakan jumlah permainan yang mungkin terjadi dengan tiap  $n$  kemenangan dan  $n+k$  kekalahan.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

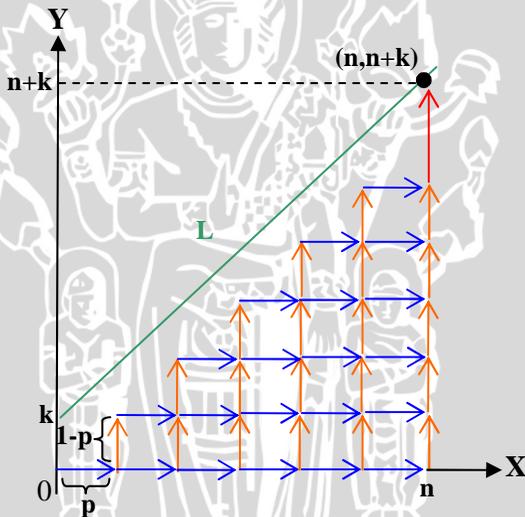


### BAB III PEMBAHASAN

Pada pembahasan ini akan ditunjukkan gambaran geometrik untuk tiga macam kasus, yaitu dengan nilai awal  $k=1$ ,  $k=2$  dan  $k \geq 3$ . Gambaran geometrik tersebut disesuaikan dengan konsep *gambler ruin* dimana dengan modal awal yang dimiliki dan jumlah taruhan seorang penjudi, maka dalam berapa langkah dia mengalami menang atau kalah dapat dihitung sesuai dengan nilai awal ( $k$ ).

#### 3.1 Gambaran Geometrik

Berdasarkan gambaran jalan acak satu dimensi, dibentuk gambaran geometrik dari proses absorpsi pada latis dua dimensi. Gambaran secara umum sebagai berikut:



Gambar 3.1 Langkah jalan acak pada latis dua dimensi

Gambar 3.1 merupakan gambaran umum yang menunjukkan langkah jalan acak pada latis dua dimensi, garis L merupakan garis yang dibentuk untuk membatasi daerah tersebut. Langkah ke kanan digambarkan dengan langkah horizontal dan mempunyai probabilitas  $p$ , sementara itu langkah ke kiri yang digambarkan dengan langkah vertikal (ke atas) mempunyai probabilitas  $q=1-p$ . Titik awal

terletak pada titik  $(0, k)$  dan jumlah langkah ke kanan adalah  $n$ , sehingga titik akhirnya adalah  $(n, n + k)$ .

Berdasarkan batasan titik awal dan titik akhir tersebut dicari langkah yang bisa dilalui dari titik pusat ke titik akhir. Langkah tersebut jika digambarkan membentuk suatu *path*. Untuk gambaran secara geometrik *path* yang terbentuk digambarkan dengan warna biru.

### 3.1.1 Gambaran Geometrik pada $k = 1$

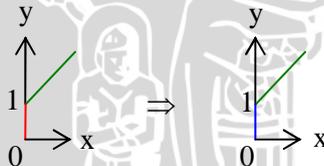
Berdasarkan Definisi 2.8 jumlah *path* untuk  $k = 1$  adalah

$$\begin{aligned}
 C_{k=1}(n) &= 1 \frac{(n + (n + 1) - 1)!}{n!(n + 1)!} \\
 &= \frac{(2n)!}{n!(n + 1)!}. \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

Gambaran untuk  $C_1(n)$  dimana  $n = 0, 1, 2, \dots$  pada latis dua dimensi dapat digambarkan sebagai berikut:

a) Untuk  $n = 0$

$$C_1(0) = \frac{(2 \cdot 0)!}{0!(0 + 1)!} = \frac{0!}{0!1!} = 1.$$

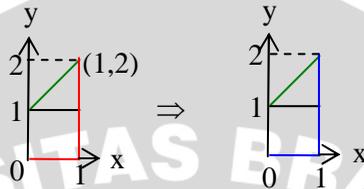


Gambar 3.2 Latis  $C_1(0)$  dan *path* yang terbentuk

Gambar 3.2 adalah latis  $C_1(0)$ , gambar tersebut dengan jelas memperlihatkan hanya terdapat satu langkah yaitu ke atas sehingga hanya terdapat satu *path*. Sebagai ilustrasi, bahwa dengan nilai awal  $k = 1$  penjudi mengalami kalah satu kali digambarkan dengan *path* yang melangkah ke atas satu kali, sehingga permainan berakhir.

b) Untuk  $n=1$

$$C_1(1) = \frac{(2.1)!}{1!(1+1)!} = \frac{2!}{1!2!} = 1.$$

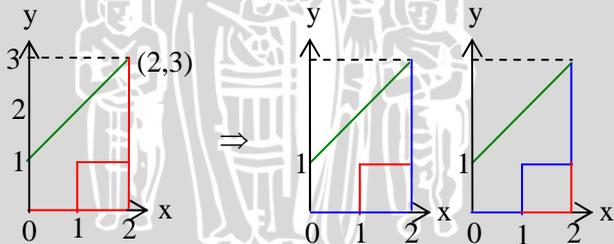


Gambar 3.3 Latis  $C_1(1)$  dan *path* yang terbentuk

Pada Gambar 3.3 untuk  $C_1(1)$  dapat diketahui bahwa titik akhir adalah  $(n, n+k) = (1, 1+1)$  hal ini memperlihatkan hanya terdapat satu *path* namun mempunyai tiga langkah, yaitu satu langkah ke kanan (horizontal) dan dua langkah ke kiri (vertikal). Satu langkah ke kanan menyatakan bahwa penjudi mengalami menang sehingga modalnya bertambah menjadi dua. Tetapi dengan dua langkah ke atas yang artinya penjudi kalah dua kali maka modal penjudi habis dan permainan berakhir disini.

c) Untuk  $n=2$

$$C_1(2) = \frac{(2.2)!}{2!3!} = \frac{4!}{2!3!} = 2.$$



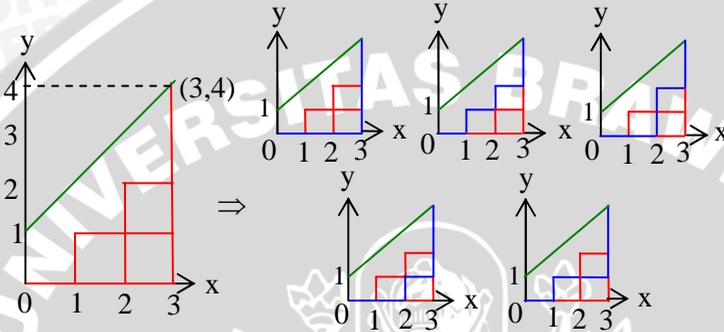
Gambar 3.4 Latis  $C_1(2)$  dan *path* yang terbentuk

Latis  $C_1(2)$  mempunyai titik akhir  $(2,3)$ . Pada Gambar 3.4 memperlihatkan latis  $C_1(2)$  dan dua *path* dengan langkah yang berbeda. Jumlah langkah ke arah kanan (horizontal) yaitu dua langkah yang menyatakan menang dua kali dan jumlah langkah ke

kiri (vertikal) sebanyak tiga langkah yang menyatakan kalah tiga kali dari kedua *path* tersebut adalah sama.

d) Untuk  $n = 3$

$$C_1(3) = \frac{(2 \cdot 3)!}{3!(3+1)!} = \frac{6!}{3!4!} = 5.$$



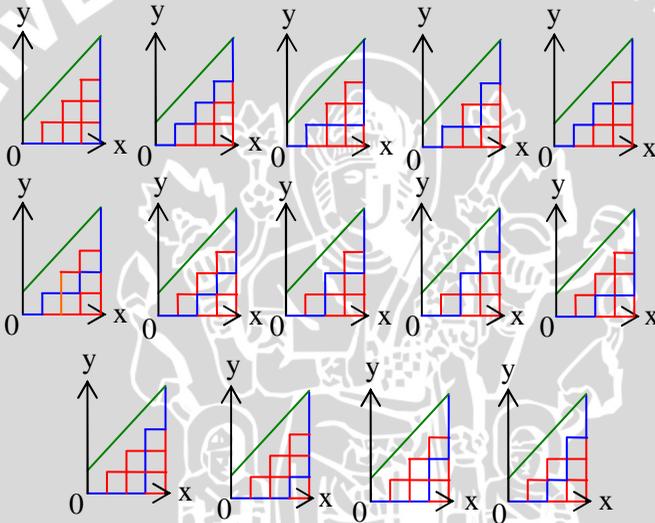
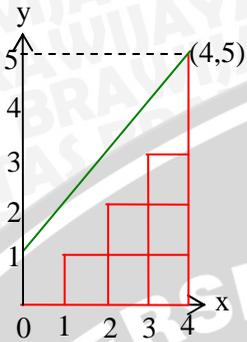
Gambar 3.5 Latis  $C_1(3)$  dan *path* yang terbentuk

Gambar 3.5 menunjukkan terdapat lima *path* berdasarkan gambaran latis yang diperoleh pada  $C_1(3)$  dengan titik akhir (3,4). Tiap *path* mempunyai arah langkah yang berbeda tetapi jumlah langkah horizontal dan jumlah langkah vertikal untuk tiap *path* sama, yaitu tiga langkah ke kanan (horizontal) dan empat langkah ke kiri (vertikal). Dengan gambaran tersebut dapat diketahui bahwa dengan kemenangan sebanyak tiga kali dan kekalahan empat kali penjudi akan mengalami *gambler ruin*.

e) Untuk  $n = 4$

$$C_1(4) = \frac{(2 \cdot 4)!}{4!(4+1)!} = \frac{8!}{4!5!} = 14.$$

Pada  $C_1(4)$  titik akhir adalah (4,5), dengan jumlah *path* yang terbentuk sebanyak 14. Gambaran  $C_1(4)$  dari *path* tersebut diperlihatkan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Latis  $C_1(4)$  dan *path* yang terbentuk

Selanjutnya gambaran latis untuk  $n=5,6,7,\dots$  dengan nilai awal  $k=1$  dapat digambarkan dengan  $n$  langkah ke kanan (horizontal) dan  $n+1$  langkah ke atas (vertikal). Jumlah *path* yang terbentuk dapat dicari dengan menggunakan persamaan (3.1).

Berdasarkan Definisi 2.9 bilangan *catalan* ( $Z_n$ ) mempunyai kesamaan dengan jumlah *path* untuk  $k=1$  atau  $C_{k=1}(n)$  dan biasa ditulis dengan  $C(n)$ . Dari sini akan dicari komposisi dari bilangan *catalan* sesuai dengan persamaan (2.5).

### Teorema 3.1

Bilangan *catalan* ke- $n$   $C(n)$  yang diberikan oleh persamaan (2.7) memenuhi persamaan:

$$C(n) = \sum_{\alpha=1}^n C(n-\alpha)C(\alpha-1). \quad (3.2)$$

#### Bukti:

Dari persamaan (2.5) mengenai himpunan tanda kurung, yang merupakan dasar terbentuknya bilangan *catalan* maka

$$Q_n = C(n).$$

Karena komposisi dari bilangan *catalan* adalah

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n-1}Q_0 + Q_{n-2}Q_1 + \dots + Q_1Q_{n-2} + Q_0Q_{n-1} \\ &= C(n), \end{aligned}$$

maka

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-1)C(0) + C(n-2)C(1) + \dots + C(1)C(n-2) + C(0)C(n-1) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n C(n-\alpha)C(\alpha-1). \end{aligned}$$

Oleh karena itu Teorema 3.1 terbukti.

Untuk selanjutnya, akan ditunjukkan gambaran geometrik dengan nilai awal  $k=2$  dan relasi gambaran tersebut dengan gambaran pada nilai awal  $k=1$ .

#### 3.1.2 Gambaran Geometrik pada $k=2$

Berdasarkan Definisi 2.8 didapatkan persamaan untuk jumlah *path* pada  $k=2$  yaitu

$$\begin{aligned} C_{k=2}(n) &= 2 \frac{(n+(n+2)-1)!}{n!(n+2)!} \\ &= 2 \frac{(2n+1)!}{n!(n+2)!}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

a) Untuk  $n=0$  maka

$$C_2(0) = 2 \frac{(2 \cdot 0 + 1)!}{0!(0+2)!} = 1,$$

artinya hanya terdapat satu *path* pada  $C_2(0)$ .

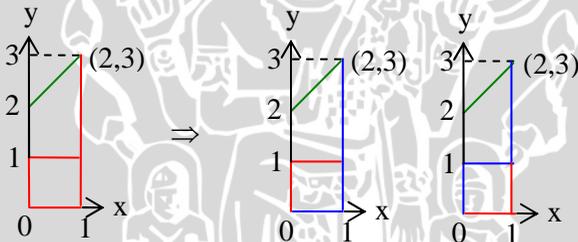


Gambar 3.7 Gambar  $C_2(0)$  dan *path* yang terbentuk

Pada Gambar 3.7 *path* (warna biru) didapatkan dari gambaran latis dua dimensi  $C_2(0)$  (warna merah). Pada *gambler ruin* dua langkah ke atas menunjukkan bahwa kekalahan terjadi dua kali, sehingga nilai awal  $k=2$  yang dimiliki habis. Jadi dapat dipastikan permainan berakhir.

b) Untuk  $n=1$

$$C_2(0) = 2 \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{1!(1+2)!} = 2 \frac{3!}{3!} = 2.$$



Gambar 3.8 Gambar  $C_2(1)$  dan *path* yang terbentuk

Gambar 3.8 menunjukkan bahwa terdapat dua *path* yang terbentuk dari  $C_2(1)$ . Kedua *path* tersebut memperlihatkan jumlah kemenangan satu kali dengan gambaran satu langkah ke kanan (horizontal) dan kekalahan sebanyak tiga kali dengan gambaran tiga langkah ke kiri (vertikal). Oleh karena itu dengan nilai awal  $k=2$  *gambler ruin* akan terjadi dan modal penjudi adalah 0.

Sebelum melakukan penggambaran geometrik pada  $k=2$  lebih jauh, akan dicari relasi antara  $C_2(n)$  dan  $C_1(n)$  atau bilangan *catalan* ( $C(n)$ ).

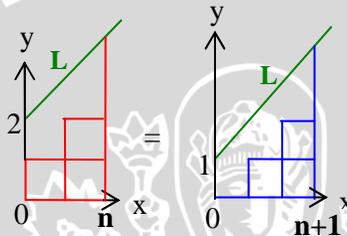
### Teorema 3.2

Hubungan yang terjadi pada koefisien  $C_2(n)$  dan  $C_1(n)$  atau bilangan *catalan* dimana  $n = 0, 1, 2, \dots$  diberikan oleh:

$$C_2(n) = C_1(n+1). \quad (3.4)$$

### Bukti:

Berdasarkan Definisi 2.9 maka  $C_1(n+1) = C(n+1)$ . Untuk membuktikan Teorema 3.2 digunakan gambaran geometrik untuk memperjelas persamaan antara  $C_2(n)$  dan  $C_1(n+1) = C(n+1)$ .



Gambar 3.9 Hubungan antara  $C_2(n)$  dengan bilangan *catalan*.

Gambar 3.9 memperlihatkan terdapat latis  $C_2(n)$  yang berwarna merah dan  $C(n+1)$  yang berwarna biru. Dengan menggeser *path* merah satu langkah ke kanan menjadi  $(n+1)$  langkah, dan karena garis L merupakan satu kesatuan dengan gambar latis tersebut maka nilai awal akan menjadi satu. Oleh karena itu latis merah akan berbentuk sama dengan latis biru atau  $C_2(n) = C(n+1)$  dan pembuktian selesai.

Dengan mengambil contoh pada jumlah *path* untuk  $n = 1, 2, \dots$ . Misalkan:

(i).  $n = 1$  maka

$$C_2(1) = 2 \frac{(2 \cdot 1 + 1)!}{1!(1+2)!} = 2 = C_1(1+1)$$

(ii).  $n = 2$  maka

$$C_2(2) = 2 \frac{(2 \cdot 2 + 1)!}{2!(2+2)!} = 2 \frac{5!}{2!4!} = 5 = C_1(2+1)$$

(iii).  $n = 3$  maka

$$C_2(3) = 2 \frac{(2 \cdot 3 + 1)!}{3!(2 + 3)!} = 2 \frac{7!}{3!5!} = 14 = C_1(3 + 1)$$

(iv).  $n = 4$  maka

$$C_2(4) = 2 \frac{(2 \cdot 4 + 1)!}{4!(2 + 4)!} = 2 \frac{9!}{4!6!} = 42 = C_1(4 + 1)$$

(v).  $n = 5$  maka

$$C_2(5) = 2 \frac{(2 \cdot 5 + 1)!}{5!(2 + 5)!} = 2 \frac{11!}{5!7!} = 132 = C_1(5 + 1),$$

dan seterusnya untuk  $n \geq 5$  berlaku persamaan (3.4).

Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.2 untuk penggambaran latis pada nilai awal dua ( $k = 2$ ) dan jumlah langkah ke kanan  $n$  yaitu  $C_2(n)$ , disamakan dengan latis pada nilai awal satu ( $k = 1$ ) dengan jumlah langkah ke kanan  $n + 1$  yaitu  $C(n + 1)$ .

### 3.1.3 Gambaran Geometrik pada $k \geq 3$

Gambaran geometrik selanjutnya adalah pada  $k \geq 3$ . Untuk gambaran geometrik dengan nilai awal  $k \geq 3$ , digambarkan sesuai dengan relasi pada *path* latis dengan nilai awal  $k - 1$  dan  $k - 2$ . Dengan relasi tersebut dapat dicari probabilitas absorpsi untuk semua nilai awal ( $k$ ).

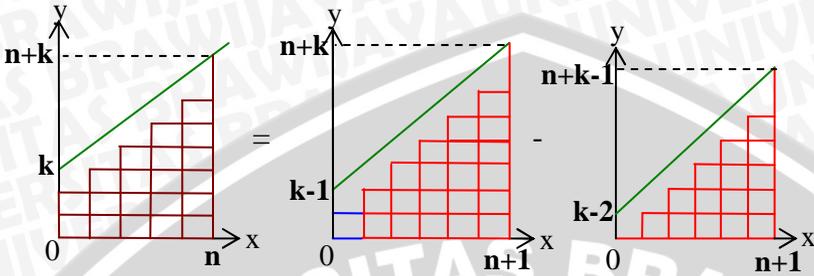
#### **Teorema 3.3**

Untuk  $k \geq 3$  pada *path* latis, akan dihitung sesuai dengan relasi rekursif yang terdapat pada koefisien  $C_k(n)$  dengan koefisien-koefisien pada  $C_{k-1}(n+1)$  dan  $C_{k-2}(n+1)$  dimana  $n = 0, 1, 2, \dots$  dengan rumusan

$$C_k(n) = C_{k-1}(n+1) - C_{k-2}(n+1). \quad (3.5)$$

#### **Bukti:**

Untuk membuktikan Teorema 3.3, dapat dilihat pada Gambar 3.10. Gambaran geometrik untuk persamaan (3.5) adalah:



Gambar 3.10 Relasi rekursif dari persamaan (3.5)

Jika dua garis pertalian *path* (warna biru) pada  $C_{k-1}(n+1)$  dihilangkan, dan menggeser himpunan *path* pada bagian kanannya ke arah kiri satu langkah, maka didapatkan latis  $C_k(n)$ . Oleh karena itu, jika jumlah *path* tersebut dieliminasi dengan tepat oleh  $C_{k-2}(n+1)$  maka didapatkan  $C_k(n)$ .

Relasi rekursif tersebut dapat pula ditunjukkan dengan cara sebagai berikut, diketahui persamaan (3.5):

$$C_k(n) = C_{k-1}(n+1) - C_{k-2}(n+1), \quad k \geq 3.$$

a) Untuk  $k = 3$

➤ Substitusi pada  $C_{k-1}(n+1)$

$$C_{k-1}(n+1) = C_2(n+1) = \frac{2}{(2(n+1)+2)} \binom{2(n+1)+2}{n+1}$$

$$n=0 \Rightarrow C_2(1) = \frac{2}{(2 \cdot 1 + 2)} \binom{2 \cdot 2 + 1}{1} = 2$$

$$n=1 \Rightarrow C_2(2) = \frac{2}{(2 \cdot 2 + 2)} \binom{2 \cdot 2 + 2}{2} = 5$$

$$n=2 \Rightarrow C_2(3) = \frac{2}{(2 \cdot 3 + 2)} \binom{2 \cdot 3 + 2}{3} = 14$$

$$n=3 \Rightarrow C_2(4) = \frac{2}{(2 \cdot 4 + 2)} \binom{2 \cdot 4 + 2}{4} = 42$$

dan seterusnya dilakukan substitusi nilai  $n \geq 4$  pada persamaan  $C_2(n+1)$ .

- Substitusi pada  $C_{k-2}(n+1)$

$$C_{k-2}(n+1) = C_1(n+1) = \frac{1}{(2(n+1)+1) \binom{2(n+1)+1}{n+1}}$$

$$n=0 \Rightarrow C_1(1) = \frac{1}{(2 \cdot 1 + 1) \binom{2 \cdot 1 + 1}{1}} = 1$$

$$n=1 \Rightarrow C_1(2) = \frac{1}{(2 \cdot 2 + 1) \binom{2 \cdot 2 + 1}{2}} = 2$$

$$n=2 \Rightarrow C_1(3) = \frac{2}{(2 \cdot 3 + 1) \binom{2 \cdot 3 + 1}{3}} = 5$$

$$n=3 \Rightarrow C_1(4) = \frac{2}{(2 \cdot 4 + 1) \binom{2 \cdot 4 + 1}{4}} = 14$$

dan seterusnya dilakukan substitusi nilai  $n \geq 4$  pada persamaan  $C_1(n+1)$ .

- Untuk  $C_k(n)$  sendiri adalah

$$C_k(n) = C_3(n) = \frac{3}{(2n+3) \binom{2n+3}{n}}$$

$$n=0 \Rightarrow C_3(0) = \frac{3}{3 \binom{3}{0}} = 1 = C_2(1) - C_1(1) = 2 - 1 = 1$$

$$n=1 \Rightarrow C_3(1) = \frac{3}{(2+3) \binom{2+3}{1}} = 3 = C_2(2) - C_1(2) = 5 - 2 = 3$$

$$n=2 \Rightarrow C_3(2) = \frac{3}{(4+3) \binom{4+3}{2}} = 9 = C_2(3) - C_1(3) = 14 - 5 = 9$$

$$n = 3 \Rightarrow C_3(3) = \frac{3}{(6+3)} \binom{6+3}{3} = 28$$

$$= C_2(4) - C_1(4) = 42 - 14 = 28$$

dan seterusnya dengan substitusi nilai  $n \geq 4$  pada persamaan  $C_3(n)$  diperoleh persamaan

$$C_3(n) = C_2(n+1) - C_1(n+1).$$

b) Untuk  $k = 4$

➤ Substitusi pada  $C_{k-1}(n+1)$

$$C_{k-1}(n+1) = C_3(n+1)$$

$$= \frac{3}{(2(n+1)+3)} \binom{2(n+1)+3}{(n+1)}$$

$$n = 0 \Rightarrow C_3(1) = \frac{3}{(2 \cdot 1 + 3)} \binom{2 \cdot 1 + 3}{1} = 3$$

$$n = 1 \Rightarrow C_3(2) = \frac{3}{(2 \cdot 2 + 3)} \binom{2 \cdot 2 + 3}{2} = 9$$

$$n = 2 \Rightarrow C_3(3) = \frac{3}{(2 \cdot 3 + 3)} \binom{2 \cdot 3 + 3}{3} = 28$$

$$n = 3 \Rightarrow C_3(4) = \frac{3}{(2 \cdot 4 + 3)} \binom{2 \cdot 4 + 3}{4} = 90$$

dan seterusnya dilakukan substitusi nilai  $n \geq 4$  pada persamaan  $C_3(n+1)$ .

➤ Substitusi pada  $C_{k-2}(n+1)$

$$C_{k-2}(n+1) = C_2(n+1)$$

$$= \frac{2}{(2(n+1)+2)} \binom{2(n+1)+2}{n+1}$$

$$n = 0 \Rightarrow C_2(1) = \frac{2}{(2 \cdot 1 + 2)} \binom{2 \cdot 1 + 2}{1} = 2$$

$$n = 1 \Rightarrow C_2(2) = \frac{2}{(2 \cdot 2 + 2)} \binom{2 \cdot 2 + 2}{2} = 5$$

$$n = 2 \Rightarrow C_2(3) = \frac{2}{(2.3+2)} \binom{2.3+2}{3} = 14$$

$$n = 3 \Rightarrow C_2(4) = \frac{2}{(2.4+2)} \binom{2.4+2}{4} = 42$$

dan seterusnya dilakukan substitusi nilai  $n \geq 4$  pada persamaan  $C_2(n+1)$ .

➤ Untuk  $C_k(n)$  sendiri adalah

$$C_k(n) = C_4(n) \\ = \frac{4}{2n+4} \binom{2n+4}{n}$$

$$n = 0 \Rightarrow C_4(0) = \frac{4}{4} \binom{4}{0} = 1 \\ = C_3(1) - C_2(1) = 3 - 2 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow C_4(1) = \frac{4}{(2+4)} \binom{2+4}{1} = 4 \\ = C_3(2) - C_2(2) = 9 - 5 = 4$$

$$n = 2 \Rightarrow C_4(2) = \frac{4}{(4+4)} \binom{4+4}{2} = 14 \\ = C_3(3) - C_2(3) = 28 - 14 = 14$$

$$n = 3 \Rightarrow C_4(3) = \frac{4}{(6+4)} \binom{6+4}{3} = 48 \\ = C_3(4) - C_2(4) = 90 - 42 = 48$$

dan seterusnya dengan substitusi nilai  $n \geq 4$  pada persamaan  $C_4(n)$  diperoleh persamaan

$$C_4(n) = C_3(n+1) - C_2(n+1).$$

Begitu pula seterusnya untuk  $k \geq 5$  berlaku persamaan

$$C_k(n) = C_{k-1}(n+1) - C_{k-2}(n+1), \text{ dimana } n = 0, 1, 2, \dots$$

Oleh karena itu, Teorema 3.3 terbukti.

Selanjutnya akan dicari probabilitas dari absorpsi yaitu probabilitas terjadinya *gambler ruin* berdasarkan nilai awal ( $k$ ), komposisi dari bilangan *catalan* yaitu pada Teorema 3.1, serta relasi rekursif yang terjadi yaitu pada Teorema 3.2 dan Teorema 3.3.

### 3.2 Probabilitas Absorpsi

Pada bagian ini dicari probabilitas absorpsi untuk masing-masing nilai awal ( $k$ ).

#### 3.2.1 Probabilitas untuk $k = 1$ ( $P(x=1)$ )

Untuk  $k = 1$ , probabilitas absorpsi dicari dengan menggunakan bilangan *catalan*. Didefinisikan fungsi  $F(z)$  yang memuat semua bilangan *catalan* sesuai dengan deret polinom:

$$\begin{aligned}
 F(z) &= C(0)z + C(1)z^2 + C(2)z^3 + C(3)z^4 + \dots \\
 &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} C(\alpha-1)z^{\alpha}. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

Jika  $F(z)$  dikalikan dengan dirinya sendiri didapatkan persamaan

$$\begin{aligned}
 F^2(z) &= (C(0)z + C(1)z^2 + C(2)z^3 + C(3)z^4 + \dots) \\
 &\quad (C(0)z + C(1)z^2 + C(2)z^3 + C(3)z^4 + \dots) \\
 &= C(0)C(0)z^2 + (C(1)C(0) + C(0)C(1))z^3 \\
 &\quad + (C(2)C(0) + C(1)C(1) + C(0)C(2))z^4 + \dots.
 \end{aligned}$$

Untuk mendapatkan rumus penjumlahan  $F^2(z)$  digunakan dua macam variabel yaitu  $\alpha$  dan  $\beta$  yang nilainya berjalan dari satu sampai tak hingga, sehingga didapatkan

$$F^2(z) = \sum_{\alpha, \beta=1}^{\infty} C(\alpha-1)C(\beta-1)z^{\alpha+\beta}. \tag{3.7}$$

Misalkan  $\alpha + \beta = n$ , maka  $\beta = n - \alpha$  sehingga diperoleh

$$F^2(z) = \sum_{\alpha, n-\alpha=1}^{\infty} C(\alpha-1)C(n-\alpha-1)z^n. \tag{3.8}$$

Selanjutnya dicari batas bawah dan batas atas dari persamaan (3.8) untuk nilai  $\alpha$  dan  $n$  dengan cara:

- untuk  $n - \alpha = 1$  maka  $\alpha = n - 1$ , sehingga nilai  $\alpha$  berjalan dari 1 sampai  $n - 1$ ,
- untuk  $\alpha = 1$  maka didapatkan nilai  $n$  yaitu  $n - 1 = 1$  sehingga  $n = 2$ , jadi  $n$  berjalan dari 2 sampai  $\infty$ .

Jika nilai untuk  $n$  dan  $\alpha$  tersebut dimasukkan dalam persamaan (3.8) maka diperoleh

$$F^2(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n-1} C(\alpha-1)C(n-\alpha-1)z^n. \quad (3.9)$$

Berdasarkan Teorema 3.1 maka untuk

$$\begin{aligned} F^2(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{n-1} C(\alpha-1)C(n-\alpha-1)z^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} C(n-1)z^n \\ &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} C(\alpha-1)z^\alpha - z \\ &= F(z) - z, \end{aligned} \quad (3.10)$$

didapatkan

$$F^2(z) = F(z) - z. \quad (3.11)$$

Persamaan (3.11) adalah persamaan kuadrat, dengan demikian diperoleh akar-akar dari  $F(z)$  yaitu

$$\begin{aligned} F^2(z) - F(z) - z &= 0, \\ F(z) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Pada suatu permainan uang hanya ada dua macam kemungkinan yaitu menang dengan probabilitas  $p$  atau kalah dengan probabilitas  $1-p$ . Karena probabilitas keduanya bebas maka probabilitas hasil yang berbeda tersebut dikalikan. Oleh karena itu dengan mengambil nilai  $z = p(1-p)$  dapat dicari probabilitas dari absorpsi.

Pada persamaan (3.6) ketika  $z = p(1-p)$  sesuai dengan fungsi probabilitas pada Definisi 2.12 dimana  $k = 1$  didapatkan

$$\begin{aligned}
 F(z) &= C(0)z + C(1)z^2 + C(2)z^3 + C(3)z^4 + \dots \\
 &= C(0)p(1-p) + C(1)(p(1-p))^2 + C(2)(p(1-p))^3 + \dots \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Probabilitas untuk  $k=1$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P(x=1) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n)p^n(1-p)^{n+1} \\
 &= C(0)p^0(1-p)^1 + C(1)p^1(1-p)^2 + C(2)p^2(1-p)^3 + \dots \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Jika persamaan (3.13) dibagi dengan  $p$ , maka diperoleh

$$\frac{F(z)}{p} = C(0)p^0(1-p)^1 + C(1)p^1(1-p)^2 + C(2)p^2(1-p)^3 + \dots \quad (3.15)$$

Oleh karena itu, persamaan (3.14) menjadi

$$P(x=1) = \frac{F(z)}{p} \quad (3.16)$$

Karena  $z = p(1-p)$ , maka

$$\begin{aligned}
 P(x=1) &= \frac{F(z)}{p} \\
 &= \frac{F(p(1-p))}{p} \\
 &= \frac{F(p-p^2)}{p} \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Sesuai dengan persamaan (3.12) maka

$$\begin{aligned}
 F(p-p^2) &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4(p-p^2)}}{2} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4p+4p^2}}{2} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Persamaan (3.17) menjadi

$$\begin{aligned}
 P(x=1) &= \frac{F(p-p^2)}{p} \\
 &= \frac{1 \pm \sqrt{1-4p+4p^2}}{2p} \\
 &= \frac{1 \pm (1-2p)}{2p},
 \end{aligned}$$

dan diperoleh

$$P(x=1) = \begin{cases} \frac{1+1-2p}{2p} = \frac{1-p}{p} \\ \frac{1-1+2p}{2p} = 1. \end{cases}$$

Karena nilai probabilitas berkisar antara nol sampai satu, sehingga

$$0 \leq \frac{1-p}{p} \leq 1,$$

dan didapatkan

$$P(x=1) = \begin{cases} \frac{1-p}{p} & \text{untuk } p > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{untuk } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Jadi proses absorpsi dengan nilai awal  $k=1$  mempunyai probabilitas yang semakin kecil jika probabilitas kemenangannya semakin besar dengan  $p > \frac{1}{2}$ . Sebaliknya jika probabilitas kemenangan  $p \leq \frac{1}{2}$  maka probabilitas terjadinya *gambler ruin* adalah satu, atau dapat dikatakan bahwa *gambler ruin* pasti terjadi.

### 3.2.2 Probabilitas untuk $k = 2$ ( $P(x = 2)$ )

Ketika  $k = 2$ , sesuai dengan Definisi 2.12 persamaan menjadi

$$P(x=2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n) p^n (1-p)^{n+2}. \quad (3.19)$$

Jika persamaan (3.4) disubstitusikan ke persamaan (3.19) maka didapatkan

$$\begin{aligned}
 P(x=2) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_2(n) p^n (1-p)^{n+2} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n+1) p^n (1-p)^{n+2} \\
 &= C(1) p^0 (1-p)^2 + C(2) p^1 (1-p)^3 + \dots + C(\infty) p^\infty (1-p)^\infty \\
 &= C(1)(1-p)^2 + C(2)p(1-p)^3 + \dots + C(\infty)p^\infty (1-p)^\infty.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sementara itu berdasarkan persamaan (3.14) probabilitas untuk  $k=1$  adalah

$$\begin{aligned}
 P(x=1) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n) p^n (1-p)^{n+1} \\
 &= C(0) p^0 (1-p)^1 + C(1) p^1 (1-p)^2 + C(2) p^2 (1-p)^3 + \\
 &\quad C(3) p^3 (1-p)^4 + \dots + C(\alpha) p^\infty (1-p)^\infty \\
 &= (1-p) + C(1)p(1-p)^2 + C(2)p^2(1-p)^3 + \\
 &\quad C(3)p^3(1-p)^4 + \dots + C(\infty)p^\infty(1-p)^\infty \\
 &= (1-p) \\
 &\quad + p \left[ \underbrace{C(1)(1-p)^2 + C(2)p(1-p)^3 + \dots + C(\infty)p^\infty(1-p)^\infty}_{P(x=2)} \right],
 \end{aligned}$$

jadi

$$\begin{aligned}
 P(x=1) &= (1-p) + p(P(x=2)) \\
 P(x=2) &= \frac{P(x=1) - (1-p)}{p} \\
 &= \frac{P(x=1)}{p} - \frac{1-p}{p}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dengan substitusi  $P(x=1)$  dari persamaan (3.18) ke persamaan (3.21) diperoleh probabilitas untuk  $k=2$  yaitu

$$\begin{aligned}
 P(x=2) &= \frac{(1-p)}{p} - \frac{(1-p)}{p} \\
 &= \frac{(1-p)}{p} \cdot \frac{1}{p} - \frac{(1-p)}{p} \\
 &= \frac{(1-p) - p(1-p)}{p^2} \\
 &= \frac{1-p-p+p^2}{p^2} \\
 &= \frac{1-2p+p^2}{p^2} \\
 &= \frac{(1-p)^2}{p^2}, \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

jadi

$$P(x=2) = \begin{cases} \frac{(1-p)^2}{p^2} & \text{untuk } p > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{untuk } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.23}$$

Berdasarkan persamaan (3.23) dapat diketahui bahwa proses absorpsi dengan nilai awal  $k = 2$  mempunyai probabilitas yang semakin kecil jika probabilitas kemenangan  $p > \frac{1}{2}$  yaitu  $\frac{(1-p)^2}{p^2}$ .

Kemudian dengan probabilitas kemenangan ( $p$ ) yang sama, jika probabilitas terjadinya *gambler ruin* dengan nilai awal  $k = 2$  atau  $P(x=2)$  dibandingkan dengan probabilitas terjadinya *gambler ruin* dengan nilai awal  $k = 1$  atau  $P(x=1)$ , maka probabilitas dengan nilai awal  $k = 2$  mempunyai nilai yang lebih kecil.

Sebagai contoh untuk nilai  $p = \frac{2}{3}$  akan diperoleh:

$$\rightarrow P(x=1) = \frac{1-p}{p} = \frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}, \text{ sedangkan untuk}$$

$$\rightarrow P(x=2) = \frac{1-p^2}{p^2} = \frac{1-\frac{4}{9}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{9}{4} = \frac{1}{4}.$$

Namun jika probabilitas kemenangan  $p \leq \frac{1}{2}$  maka probabilitas terjadinya *gambler ruin* adalah satu, atau *gambler ruin* pasti terjadi.

### 3.2.3 Probabilitas untuk $k = 3$ ( $P(x=3)$ )

Ketika  $k = 3$ , sesuai dengan Definisi 2.12 persamaan menjadi

$$P(x=3) = \sum_{n=0}^{\infty} C_3(n) p^n (1-p)^{n+3}. \quad (3.24)$$

Berdasarkan Teorema 3.3 maka

$$C_3(n) = C_2(n+1) - C_1(n+1) \quad (3.25)$$

dan berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} C_3(n) &= C_2(n+1) - C_1(n+1) \\ &= C_1((n+1)+1) - C_1(n+1) \\ &= C_1(n+2) - C_1(n+1), \end{aligned} \quad (3.26)$$

sehingga probabilitas menjadi

$$\begin{aligned} P(x=3) &= \sum_{n=0}^{\infty} [C_1(n+2) - C_1(n+1)] p^n (1-p)^{n+3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( [C_1(n+2) p^n (1-p)^{n+3}] - [C_1(n+1) p^n (1-p)^{n+3}] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(x=3) = & [C_1(2)p^0(1-p)^3 + C_1(3)p^1(1-p)^4 + C_1(4)p^2(1-p)^5 \\
 & + C_1(5)p^3(1-p)^6 + C_1(6)p^4(1-p)^7 + C_1(7)p^5(1-p)^8 \\
 & + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty] - \\
 & [C_1(1)p^0(1-p)^3 + C_1(2)p^1(1-p)^4 + C_1(3)p^2(1-p)^5 \\
 & + C_1(4)p^3(1-p)^6 + C_1(5)p^4(1-p)^7 + C_1(6)p^5(1-p)^8 \\
 & + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty].
 \end{aligned}$$

Karena  $C_1(0) = C_1(1) = 1$  maka

$$\begin{aligned}
 P(x=3) = & [C_1(2)(1-p)^3 + C_1(3)p(1-p)^4 + C_1(4)p^2(1-p)^5 \\
 & + C_1(5)p^3(1-p)^6 + C_1(6)p^4(1-p)^7 + C_1(7)p^5(1-p)^8 \\
 & + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty] - \\
 & [(1-p)^3 + C_1(2)p(1-p)^4 + C_1(3)p^2(1-p)^5 \\
 & + C_1(4)p^3(1-p)^6 + C_1(5)p^4(1-p)^7 + C_1(6)p^5(1-p)^8 \\
 & + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty].
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Untuk mencari solusi persamaan (3.27) dimisalkan bahwa

$$\begin{aligned}
 P(x=2) = & \sum_{n=0}^{\infty} C_1(n+1)p^n(1-p)^{n+2} \\
 = & (1-p)^2 + C_1(2)p(1-p)^3 + C_1(3)p^2(1-p)^4 \\
 & + C_1(4)p^3(1-p)^5 + C_1(5)p^4(1-p)^6 + C_1(6)p^5(1-p)^7 \\
 & + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty \\
 = & (1-p)^2 + p[C_1(2)(1-p)^3 + C_1(3)p(1-p)^4 \\
 & + C_1(4)p^2(1-p)^5 + C_1(5)p^3(1-p)^6 + C_1(6)p^4(1-p)^7 \\
 & + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty],
 \end{aligned}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 A = & C_1(2)(1-p)^3 + C_1(3)p(1-p)^4 + C_1(4)p^2(1-p)^5 + C_1(5)p^3(1-p)^6 \\
 & + C_1(6)p^4(1-p)^7 + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty,
 \end{aligned}$$

sehingga

$$P(x=2) = (1-p)^2 + pA$$

$$A = \frac{P(x=2) - (1-p)^2}{p}$$

Selanjutnya dengan memindahkan  $(1-p)^2$  dari persamaan  $P(x=2)$  ke ruas kiri didapatkan persamaan

$$\begin{aligned} P(x=2) - (1-p)^2 &= C_1(2)p(1-p)^3 + C_1(3)p^2(1-p)^4 \\ &+ C_1(4)p^3(1-p)^5 + C_1(5)p^4(1-p)^6 + \\ &C_1(6)p^5(1-p)^7 + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Kemudian jika persamaan (3.28) dikalikan dengan  $(1-p)$  diperoleh

$$\begin{aligned} (P(x=2) - (1-p)^2)(1-p) &= C_1(2)p(1-p)^4 + C_1(3)p^2(1-p)^5 + \\ &C_1(4)p^3(1-p)^6 + C_1(5)p^4(1-p)^7 + \\ &C_1(6)p^5(1-p)^8 + \dots + C(\alpha)p^\infty(1-p)^\infty \\ &= B, \end{aligned}$$

sehingga

$$B = (P(x=2) - (1-p)^2)(1-p).$$

Persamaan  $A$  dan  $B$  disubstitusikan ke persamaan (3.27) diperoleh

$$\begin{aligned} P(x=3) &= A - [(1-p)^3 + B] \\ &= \frac{P(x=2) - (1-p)^2}{p} - [(1-p)^3 + (P(x=2) - (1-p)^2)(1-p)] \end{aligned}$$

berdasarkan persamaan (3.23) didapatkan

$$\begin{aligned} P(x=3) &= \frac{\left(\frac{(1-p)^2}{p^2}\right) - (1-p)^2}{p} - \\ &\left[ (1-p)^3 + \left(\frac{(1-p)^2}{p^2} - (1-p)^2\right)(1-p) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(x=3) &= \frac{\left( \frac{(1-p)^2 - p^2(1-p)^2}{p^2} \right)}{p} - \\
&\quad \left[ (1-p)^3 + \left( \frac{(1-p)^2 - p^2(1-p)^2}{p^2} \right) (1-p) \right] \\
&= \frac{(1-p)^2 - p^2(1-p)^2}{p^3} - \left[ (1-p)^3 + \frac{(1-p)^3 - p^2(1-p)^3}{p^2} \right] \\
&= \frac{(1-p)^2 - p^2(1-p)^2}{p^3} - \frac{(1-p)^3}{p^2} \\
&= \frac{(1-p)^2 - p^2(1-p)^2 - p(1-p)^3}{p^3} \\
&= \frac{1-2p+p^2 - p^2(1-2p+p^2) - p(1-3p+3p^2-p^3)}{p^3} \\
&= \frac{1-2p+p^2 - p^2 + 2p^3 - p^4 - p + 3p^2 - 3p^3 + p^4}{p^3} \\
&= \frac{1-3p+3p^2-p^3}{p^3} \\
&= \frac{(1-p)^3}{p^3}, \tag{3.29}
\end{aligned}$$

jadi

$$P(x=3) = \begin{cases} \frac{(1-p)^3}{p^3} & \text{untuk } p > \frac{1}{2} \\ 1 & \text{untuk } p \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Pada nilai awal  $k = 3$ , didapatkan probabilitas absorpsi yaitu probabilitas terjadinya *gambler ruin* dengan  $\frac{(1-p)^3}{p^3}$  hal ini berlaku

untuk  $p > \frac{1}{2}$ . Oleh karena itu dengan probabilitas kemenangan ( $p$ ) yang semakin besar maka probabilitas terjadinya *gambler ruin* semakin kecil. Berlaku sebaliknya, jika probabilitas kemenangan

kecil atau  $p \leq \frac{1}{2}$  maka probabilitas absorpsi adalah satu, sehingga *gambler ruin* pasti terjadi.

Berdasarkan gambaran geometrik dengan jalan acak dan perhitungan probabilitas absorpsi sesuai dengan nilai awal  $k=1, k=2$ , dan  $k=3$  akan dicari solusi umum dari probabilitas absorpsi untuk semua nilai awal dalam rumusan secara eksplisit.

### 3.3 Solusi Umum Probabilitas Absorpsi

Untuk kemenangan mendekati tak hingga, didapatkan solusi umum probabilitas absorpsi yang nilainya bergantung pada nilai awal ( $k$ ) dan probabilitas kemenangan ( $p$ ). Dengan probabilitas kemenangan ( $p$ ) yang sama, probabilitas absorpsi yaitu langkah menang dan kalah seorang penjudi sampai modalnya habis atau terjadi *gambler ruin*, dimana nilai awal yang dimilikinya adalah  $k$  diperoleh dari probabilitas absorpsi dengan nilai awal satu.

#### Teorema 3.4

Probabilitas  $P(x=k)$  dari proses absorpsi, yang dikatakan bahwa dimulai dari  $x=k, k > 0$  diberikan oleh

$$P(x=k) = (P(x=1))^k. \quad (3.31)$$

#### Bukti:

Pada penggambaran *path* latis untuk proses absorpsi, probabilitas kemenangan ( $p$ ) digambarkan dengan langkah *path* ke arah kanan (horizontal) dan probabilitas kekalahan ( $1-p$ ) digambarkan dengan langkah *path* ke arah kiri (vertikal).

Probabilitas absorpsi yang dimulai dari

$$x = k + 1$$

adalah sama dengan probabilitas perpindahan satu langkah ke kiri untuk

$$x = k,$$

yaitu probabilitas absorpsi yang berawal dari  $k$  dengan probabilitas  $(1-p)P(x=k)$ , ditambah probabilitas perpindahan satu langkah ke kanan untuk

$$x = k + 2,$$

yaitu probabilitas absorpsi yang berawal dari  $k + 2$  dengan probabilitas  $pP(x = k + 2)$ . Oleh karena itu,

$$P(x = k + 1) = (1 - p)P(x = k) + pP(x = k + 2)$$

dan didapatkan

$$P(x = k + 2) = \frac{1}{p} P(x = k + 1) - \frac{(1 - p)}{p} P(x = k) . \quad (3.32)$$

Akan dibuktikan untuk  $P(x = k + 2) = (P(x = 1))^{k+2}$ .

Berdasarkan persamaan (3.18) dan (3.23), maka dengan substitusi probabilitas dengan nilai awal  $k=1$  dan  $k=2$ , didapatkan persamaan:

$$\begin{aligned} P(x=3) &= \frac{1}{p} P(x=2) - \frac{(1-p)}{p} P(x=1) \\ &= \frac{P(x=2) - (1-p)P(x=1)}{p} \\ &= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^2 - (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)}{p} \\ &= \frac{(1-p)^2}{p^3} - \frac{(1-p)^2}{p^2} \\ &= \frac{(1-p)^2 - p(1-p)^2}{p^3} \\ &= \frac{(1-p)^2}{p^3} \cdot (1-p) \\ &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Persamaan (3.33) dianggap benar, sehingga

$$P(x=3) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 = (P(x=1))^3 .$$

Sesuai dengan persamaan (3.18), (3.23) dan (3.33) maka untuk substitusi dengan nilai awal  $x=k$ , dan  $x=k+1$  akan didapatkan probabilitas dari  $x = k + 2$  yaitu:

$$\begin{aligned}
P(x=k+2) &= \frac{1}{p} P(x=k+1) - \frac{(1-p)}{p} P(x=k) \\
&= \frac{P(x=k+1) - (1-p)P(x=k)}{p} \\
&= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+1} - (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{p} \\
&= \frac{(1-p)^{k+1} - p(1-p)^{k+1}}{p^{k+1}} \cdot \frac{1}{p} \\
&= \frac{(1-p)^{k+1} - p(1-p)^{k+1}}{p^{k+2}} \\
&= \frac{(1-p)^{k+1}(1-p)}{p^{k+2}} \\
&= \frac{(1-p)^{k+2}}{p^{k+2}} \\
&= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+2}
\end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti bahwa

$$P(x=k+2) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{k+2} = (P(x=1))^{k+2},$$

sehingga Teorema 3.4 terbukti benar.

Untuk selanjutnya diberikan dua macam contoh kasus dengan probabilitas kemenangan yang berbeda, pada Kasus 1 probabilitas kemenangan ( $p$ ) mempunyai nilai  $< \frac{1}{2}$ , sedangkan pada Kasus 2 probabilitas kemenangan ( $p$ ) mempunyai nilai  $> \frac{1}{2}$ .

Contoh 3.1.

Seseorang sedang bermain kartu *bridge* dengan membawa uang taruhan Rp. 4.000.000,00 sebagai *player*. Kartu yang digunakan adalah kartu dengan angka 2,3,4,5,6 dengan jumlah total kartu adalah sepuluh. Pengambilan kartu dilakukan dua kali berturut-turut dengan pengembalian dan dikatakan menang jika jumlah nilai kartu  $\geq 9$ . Jumlah taruhan adalah Rp. 1.000.000,00.

Kemungkinan yang terjadi jika  $x$  menyatakan pengambilan kartu yang pertama dan  $y$  menyatakan pengambilan kartu yang kedua, diperoleh hasil seperti yang diberikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1 Penjumlahan ( $x + y$ )

$x \backslash y$	2	3	4	5	6
2	4	5	6	7	8
3	5	6	7	8	9
4	6	7	8	9	10
5	7	8	9	10	11
6	8	9	10	11	12

Probabilitas kemenangan adalah  $p = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$  dan probabilitas

kekalahan  $q = 1 - p = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ . Gambaran *gambler ruin* adalah

sebagai berikut:

modal awal = Rp. 4.000.000,00

jumlah taruhan = Rp. 1.000.000,00,

sehingga

$$k = \frac{4.000.000,00}{1.000.000,00} = 4$$

$$1.000.000,00$$

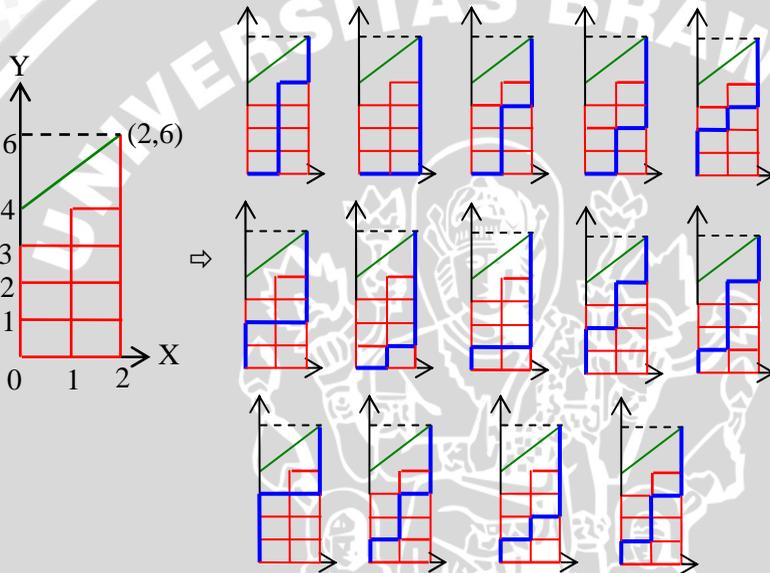
dan

$$C_4(n) = \frac{k}{2n+k} \binom{2n+k}{n} = \frac{4}{2n+4} \binom{2n+4}{n}.$$

Jika penjudi mengalami kemenangan sebanyak dua kali, maka jumlah *path* yang menunjukkan langkah menang dan kalah sampai mengalami *gambler ruin* adalah:

$$C_4(2) = \frac{4}{2 \cdot 2 + 4} \binom{2 \cdot 2 + 4}{2} = \frac{4}{8} \cdot \frac{8!}{2!6!} = 14.$$

Langkah *path* yang terbentuk yaitu merupakan langkah menang dan kalah penjudi:



Gambar 3.11 Latis  $C_4(2)$  dan *path* yang terbentuk

Pada Gambar 3.11 langkah *path* ditunjukkan dengan garis berwarna biru. Garis ke atas (ke kiri) menunjukkan kekalahan sebanyak enam kali dan garis ke kanan menunjukkan kemenangan sebanyak dua kali.

Probabilitas pemain tersebut mengalami *gambler ruin* dengan nilai awal empat dan dua kali menang adalah:

$$\begin{aligned}
 P(x=4)_{n=2} &= C_4(n)p^n(1-p)^{n+2} \\
 &= C_4(2)p^2(1-p)^6 \\
 &= 14 \cdot \binom{2}{5}^2 \cdot \binom{3}{5}^6
 \end{aligned}$$

$$P(x=4)_{n=2} = \frac{40824}{390625} \cong 0,1045.$$

Probabilitas absorpsi dengan  $k = 4$  adalah satu ( $P(x=4)=1$ ) karena probabilitas kemenangan ( $p$ ) adalah  $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ , artinya penjudi tersebut dipastikan mengalami *gambler ruin*.

### Contoh 3.2.

Ada dua orang sedang melakukan taruhan lempar koin dengan sisi yang bergambar kepala dan ekor. Orang pertama bertindak sebagai *banker*, sedang orang kedua bertindak sebagai pemain. Orang kedua membawa uang sebanyak Rp. 6.000.000,00 sebagai modal awalnya. Sebelum melakukan permainan mereka melakukan undian dan jika muncul sisi kepala maka pemain akan menang. Setelah diketahui ternyata koin tersebut tidak setimbang dengan probabilitas munculnya sisi kepala adalah  $\frac{2}{3}$ . Dengan taruhan Rp. 2.000.000,00 tiap kali bermain, pemain tersebut ingin mengetahui probabilitas mengalami *gambler ruin* dengan jumlah kemenangan sampai dengan lima kali.

Probabilitas tersebut dapat dicari sebagai berikut:

modal awal                   = Rp. 6.000.000,00  
jumlah taruhan               = Rp. 2.000.000,00,  
sehingga

$$k = \frac{6.000.000,00}{2.000.000,00} = 3$$

dan

$$C_3(n) = \frac{k}{2n+k} \binom{2n+k}{n} = \frac{3}{2n+3} \binom{2n+3}{n}.$$

Untuk kemenangan ( $n$ ):

1.  $n = 1$

$$C_3(1) = \frac{3}{2 \cdot 1 + 3} \binom{2 \cdot 1 + 3}{1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5!}{4!} = 3,$$

dengan probabilitas pemain mengalami *gambler ruin*:

$$\begin{aligned} P(x=3)_{n=1} &= C_3(n) p^n (1-p)^{n+3} \\ &= C_3(1) p^1 (1-p)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3 \cdot \binom{2}{3} \cdot \binom{1}{3}^4 \\ &= \frac{6}{243} \cong 0,0247. \end{aligned}$$

2.  $n = 2$

$$C_3(2) = \frac{3}{2 \cdot 2 + 3} \binom{2 \cdot 2 + 3}{2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{7!}{2!5!} = 9,$$

dengan probabilitas pemain mengalami *gambler ruin*:

$$\begin{aligned} P(x=3)_{n=2} &= C_3(n) p^n (1-p)^{n+3} \\ &= C_3(2) p^2 (1-p)^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 9 \cdot \binom{2}{3}^2 \cdot \binom{1}{3}^5 \\ &= \frac{36}{2187} \cong 0,0165. \end{aligned}$$

3.  $n = 3$

$$C_3(3) = \frac{3}{2.3+3} \binom{2.3+3}{3} = \frac{3}{9} \cdot \frac{9!}{3!6!} = 28.$$

dengan probabilitas pemain mengalami *gambler ruin*:

$$\begin{aligned} P(x=3)_{n=3} &= C_3(n) p^n (1-p)^{n+3} \\ &= C_3(3) p^3 (1-p)^6 \\ &= 28 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 \\ &= \frac{224}{19683} \cong 0,0114. \end{aligned}$$

4.  $n = 4$

$$C_3(4) = \frac{3}{2.4+3} \binom{2.4+3}{4} = \frac{3}{11} \cdot \frac{11!}{7!4!} = 90,$$

dengan probabilitas pemain mengalami *gambler ruin*:

$$\begin{aligned} P(x=3)_{n=4} &= C_3(n) p^n (1-p)^{n+3} \\ &= C_3(4) p^4 (1-p)^7 \\ &= 90 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 \\ &= \frac{1440}{177147} \cong 0,008134. \end{aligned}$$

5.  $n = 5$

$$C_3(5) = \frac{3}{2.5+3} \binom{2.5+3}{5} = \frac{3}{13} \cdot \frac{13!}{5!8!} = 297,$$

dengan probabilitas pemain mengalami *gambler ruin*:

$$\begin{aligned}
 P(x=3)_{n=5} &= C_3(n)p^n(1-p)^{n+3} \\
 &= C_3(5)p^5(1-p)^8 \\
 &= 297 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \\
 &= \frac{9504}{1594323} \cong 0,00596.
 \end{aligned}$$

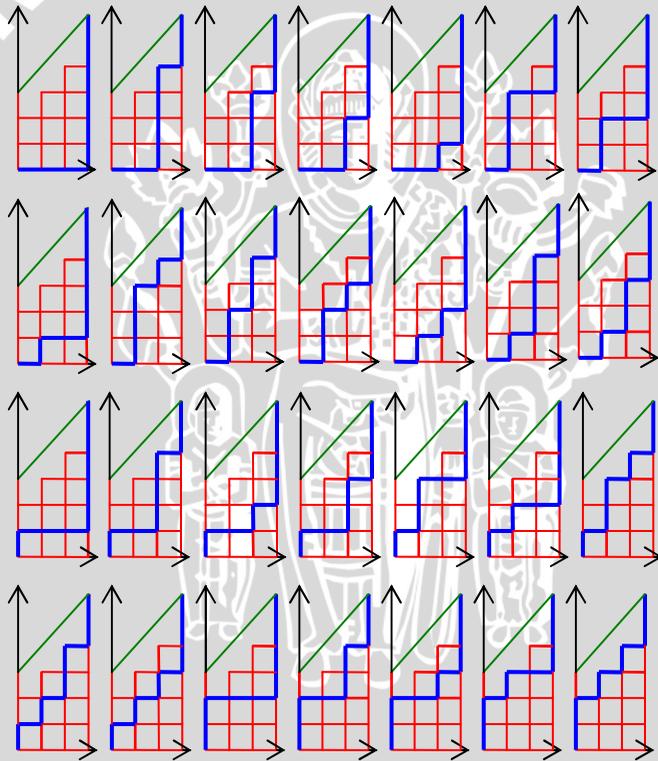
Berdasarkan perhitungan dengan jumlah kemenangan ( $n$ ) dari satu sampai lima dapat diketahui bahwa semakin besar kemenangan maka semakin kecil probabilitas terjadi *gambler ruin*. Selanjutnya dicari probabilitas absorpsi dengan nilai awal  $k = 3$ . Berdasarkan persamaan (3.18) bahwa

$$P(x=1) = \frac{1-p}{p},$$

serta berdasarkan Teorema 3.4 maka diperoleh

$$\begin{aligned}
 P(x=3) &= (P(x=1))^3 \\
 &= \left(\frac{1-p}{p}\right)^3 \\
 &= \left(\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}\right)^3 \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 &= \frac{1}{8} = 0,125
 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dengan nilai awal tiga pemain tersebut mempunyai probabilitas mengalami *gambler ruin* sebesar 0,125. Untuk gambaran geometrik, pada Gambar 3.12 ditunjukkan 28 *path* yang memperlihatkan langkah menang kalah pemain dengan jumlah kemenangan sebanyak tiga kali.



Gambar 3.12 Latis  $C_3(3)$  dan *path* yang terbentuk

Pada Gambar 3.12 langkah *path* ditunjukkan dengan garis berwarna biru. Garis ke atas (ke kiri) menunjukkan kekalahan sebanyak enam

kali dan garis ke kanan menunjukkan kemenangan sebanyak tiga kali.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Dari skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut:

1. dengan analisa *gambler ruin* menggunakan gambaran geometrik jalan acak satu dimensi pada latis dua dimensi, diperoleh gambaran absorpsi dalam bentuk *path* yang terdapat pada latis tersebut,
2. berdasarkan *path* yang terbentuk dapat dicari relasi rekursif untuk tiap nilai awal yaitu  $k=1$ ,  $k=2$  dan  $k \geq 3$ . Oleh karena itu, didapatkan rumus eksplisit probabilitas absorpsi untuk semua nilai awal yaitu

$$P(x=k) = (P(x=1))^k,$$

dimana  $k \in N$ .

### 4.2 Saran

Pada pembahasan selanjutnya ada beberapa hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini, diantaranya:

1. gambaran geometrik dan probabilitas absorpsi seandainya penjudi lebih dari satu,
2. probabilitas absorpsi dengan jumlah taruhan berbeda untuk tiap kali bermain.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Balakhrisnan, V. K. 1995. *Schaum's Outline Series Theory and Problems of Combinatorics Including Concepts of Graph Theory*. Mc Graw Hill. New York.
- Bolina, O. 2001. *The Gambler's Ruin Problem in Path Representation form*. Instituto de Fisica. Brasil.
- Davis, T. 2006. *Catalan Number*. <http://www.geometer.org/mathcircles>, tanggal akses: 5 Mei 2008.
- Epstein, R. 1995. *The Theory of Gambling and Statistical Logic*. Academic Press. USA.
- Loy, J. 1999. *Gambler's Ruin*. <http://www.jimloy.com/gambling/ruin.htm-8k>, tanggal akses: 5 Mei 2008.
- Papoulis, A. dan Pillai, S. U. 2002. *Probability Random Variables and Stochastic Processes*. Fourth Ed., Mc Graw Hill. New York.
- Walpole, R. dan Myers, R. 1986. *Ilmu Probabilitas dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*. ITB. Bandung.
- Weisstein, E. W. 1999. *Lattice Path*. <http://mathworld.wolfram.com/LatticePath.html>, tanggal akses: 10 Agustus 2008.