SEMIRING π-REGULAR KANAN

SKRIPSI

Oleh :

MOHAMMAD KHOLIS

0410940033-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2009

SEMIRING π-REGULAR KANAN

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
MOHAMMAD KHOLIS
0410940033-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

SEMIRING π-REGULAR KANAN

Oleh :
MOHAMMAD KHOLIS
0410940033-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 4 Februari 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc	**Dra. Ari Andari, MS**
NIP. 131 993 383	**NIP. 131 652 679**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: MOHAMMAD KHOLIS**
NIM	**: 0410940033-94**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: SEMIRING π-REGULAR KANAN**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

   Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 4 Februari 2009
Yang menyatakan,

(Mohammad Kholis)
NIM. 0410940033

SEMIRING π-REGULAR KANAN

ABSTRAK

Konsep ring π-regular telah diperkenalkan oleh F. Dischinger (1976) dan Yasuyuki Hirano (1978). Skripsi ini memperkenalkan konsep semiring π-regular dan π-regular kanan beserta sifat-sifatnya. Jika R adalah semiring π-regular kanan dan kiri maka R adalah semiring π-regular. Selanjutnya, jika semiring R adalah semiprima yang *additive cancellative*, semiring *artinian* atau *noetherian* kanan π-regular kanan maka R adalah semisimpel. Misalkan I adalah Q-ideal dari semiring R sedemikian sehingga $Q = (R - I) \cup \{0\}$. Jika I adalah ideal regular kanan dan R/I adalah semiring kuosien π-regular kanan, maka R adalah semiring π-regular kanan.

Kata kunci : Q-ideal, semiring kuosien, π-regular (kanan), regular (kanan), semiprima, semisimple, *artinian*, dan *noetherian*.

RIGHT π-REGULAR SEMIRING

ABSTRACT

The concept of a π-regular ring was introduced by F. Dischinger (1976) and Yasuyuki Hirano (1978). This final project introduces the concept of a π-regular semiring and a right π-regular semiring along with their properties. If R is a right and left π-regular semiring then R is a π-regular semiring. Furthermore, if semiring R is an additive cancellative semiprime and right π-regular right artinian or right noetherian semiring, then R is semisimple. Let I be a Q-ideal of a semiring R such that $Q = (R - I) \cup \{0\}$. If I is a right regular ideal and the quotient semiring R/I is right π-regular then R is a right π-regular semiring.

Keywords : Q-ideal, quotient semiring, (right) π-regular, (right) regular, semiprime, semisimple, arthinian, and noetherian.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamin, Puji syukur ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga penulisan Skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam penulisan Skripsi ini, dukungan dan bantuan dari berbagai pihak banyak diterima oleh penulis. Oleh sebab itu, penulis berterima kasih kepada :

1. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc selaku pembimbing I dan Dra. Ari Andari, MS selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasehat, dan dukungan yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini,
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr. Wuryansari Muharini K, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika,
3. Drs. Sobri Abusini, MT selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan perhatiannya selama melaksanakan studi,
4. Drs. Moch. Aruman Imron, M.Si, Drs. Noor Hidayat, M.Si, dan Drs. Bambang Sugandi, M.Si selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini,
5. Segenap bapak dan ibu dosen jurusan Matematika FMIPA UNIBRAW yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis,
6. Orang tua, guru, beserta saudara yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesainya Skripsi ini,
7. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam penulisan Skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan Skripsi ini tidak lepas dari kesalahan atau kekurangan. Oleh sebab itu, saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan oleh penulis. Akhir kata, semoga Skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca sekalian.

Malang, 4 Februari 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR SIMBOL

$\in$	: anggota/ elemen
$\notin$	: bukan elemen
$\emptyset$	: himpunan kosong
$\subseteq$	: himpunan bagian/ *subset*
$\subset$	: himpunan bagian sejati/ *proper subset*
$\cap$	: irisan
$\cup$	: gabungan
$\Longrightarrow$	: mengakibatkan/ maka
$\Leftrightarrow$	: jika dan hanya jika
$\forall$	: untuk setiap
$\exists$	: terdapat
$\ni$	: sedemikian sehingga
$A \times B$	: hasil kali cartesius dari A dan B
$\cong$	: isomorfik dengan
$M_{m \times n}$	: Matrik M yang berukuran m baris dan n kolom
a_{ij}	: entri pada baris ke-i dan kolom ke-j pada suatu matrik
$\langle a \rangle$	: ideal yang dibangun/ dihasilkan oleh a
$\langle a \rangle_l$	: ideal kiri yang dibangun/ dihasilkan oleh a
$\langle a \rangle_r$	: ideal kanan yang dibangun/ dihasilkan oleh a
$\mathbb{N}$	: himpunan bilangan asli
$\mathbb{Z}$	: himpunan bilangan bulat
$\mathbb{Z}^+$	: himpunan bilangan bulat tak negatif
$\mathbb{Z}_4$	: himpunan bilangan bulat modulo 4

(R, max, min)	:	suatu semiring R dengan operasi penjumlahan $(a \oplus b = max\ \{a, b\})$ dan operasi perkalian $(a \odot b = min\{a, b\})$, untuk setiap $a, b \in R$
$\blacksquare$	:	akhir dari sebuah bukti.

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam matematika terdapat berbagai cabang ilmu, diantaranya adalah aljabar. Namun, aljabar masih terbagi lagi menjadi beberapa cabang ilmu, salah satu diantaranya adalah aljabar abstrak. Pada aljabar abstrak diperkenalkan tentang konsep struktur aljabar dan sifat-sifatnya.

Bentuk struktur aljabar yang paling sederhana dengan suatu operasi biner adalah semigrup. Semigrup kemudian berkembang menjadi grup, yang selanjutnya berkembang lagi menjadi semiring. Di dalam semiring, terdapat subsemiring dan ideal. Ideal dibedakan atas dua macam, yakni ideal kiri dan ideal kanan. Jika suatu ideal memenuhi kedua jenis ideal tersebut, maka dikatakan sebagai ideal dua sisi, atau cukup disebut dengan ideal. Struktur aljabar yang lebih sempit dari semiring dinamakan ring. Definisi ring hampir sama dengan semiring, hanya saja terdapat sedikit perbedaan pada aksioma yang harus dipenuhi.

Dari beberapa konsep dasar di atas, bentuk-bentuk struktur aljabar terus mengalami perkembangan. Salah satunya ialah konsep tentang ring π-regular dan ring π-regular kanan, yang pertama kali dikemukakan oleh Dischinger (1976). Kemudian pada tahun 1978, Yasuyuki Hirano mengembangkan konsep dari Dischinger tersebut. Selanjutnya, pada skripsi ini akan dibahas beberapa definisi dan teorema dari semiring π-regular kanan, beserta bukti-buktinya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana definisi semiring π-regular kanan dan apa saja teorema-teorema yang berkaitan dengan semiring π-regular kanan beserta bukti-buktinya.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini permasalahan yang akan dibahas dibatasi hanya pada definisi-definisi dan teorema-teorema dari semiring π-regular kanan, beserta bukti-buktinya, dan tidak dibandingkan dengan bentuk-bentuk aljabar abstrak yang lain.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah memaparkan beberapa definisi, serta membuktikan teorema-teorema yang berhubungan dengan semiring π-regular kanan.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema untuk membantu memahami permasalahan yang akan dibahas dan juga digunakan sebagai acuan dalam bab pembahasan.

2.1 Relasi, Pemetaan, dan Operasi Biner

Dalam struktur aljabar, elemen-elemen dari suatu himpunan tak kosong dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, atau keduanya yang dikenal dengan operasi, salah satu contohnya adalah operasi biner. Berikut akan diberikan definisi tentang operasi biner dan definisi lain yang berkaitan dengan operasi biner.

Definisi 2.1.1 (http://en.wikipedia.org)
Well ordering principle : setiap himpunan tak kosong dari suatu bilangan bulat positif atau bilangan asli memuat suatu elemen yang paling kecil.

Definisi 2.1.2 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Misalkan A dan B adalah himpunan. Himpunan dari semua pasangan terurut (x, y), dengan $x \in A$ dan $y \in B$, disebut hasil kali cartesius *(cartesian product)* dari A dan B, dinyatakan

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}.$$

Definisi 2.1.3 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong, dan misalkan R adalah *subset* dari $A \times B$. Maka R disebut relasi dari A ke B.

Definisi 2.1.4 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Misalkan A dan B suatu himpunan tak kosong. Suatu relasi f dari A ke B disebut suatu pemetaan jika untuk setiap elemen x di A mempunyai kawan tepat satu elemen y di B (y disebut *image* x di bawah relasi f). f adalah pemetaan dari A ke B, dinyatakan

$$f: A \longrightarrow B \text{ atau } A \xrightarrow{f} B.$$

Definisi 2.1.5 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Suatu pemetaan

$$\begin{aligned} *: S \times S &\longrightarrow S \\ (a,b) &\longmapsto *(a,b) = a * b \end{aligned}$$

disebut operasi biner pada himpunan S.

2.2 Semigrup

Semigrup adalah suatu struktur aljabar yang paling sederhana. Semigrup merupakan suatu himpunan tak kosong yang di dalamnya memiliki satu operasi biner dan memenuhi syarat - syarat tertentu. Definisi, contoh serta teorema yang berkaitan dengan semigrup akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Whitelaw, 1995)
Misalkan M himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan operasi biner $*$. $(M,*)$ disebut semigrup jika dan hanya jika:

1. $(M,*)$ tertutup : $a * b \in M$, untuk setiap $a, b \in M$, dan
2. $(M,*)$ berlaku sifat assosiatif : $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in M$.

Contoh 2.2.2
Diberikan suatu himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$. Maka $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ (dengan $+$ dan $\cdot$ masing-masing adalah operasi penjumlahan dan perkalian biasa) merupakan semigrup.

Bukti :

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Tabel 2.1 Operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{Z}_4$

Berdasarkan Tabel 2.1, terlihat bahwa $\mathbb{Z}_4$ tertutup terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Selain itu, $\mathbb{Z}_4$ juga memenuhi hukum assosiatif terhadap operasi penjumlahan dan perkalian. Sehingga $(\mathbb{Z}_4, +)$ dan $(\mathbb{Z}_4, \cdot)$ merupakan semigrup. ■

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi serta contoh mengenai semigrup komutatif, semigrup dengan elemen identitas, dan subsemigrup.

Definisi 2.2.3 (Kandasamy, 2002)
Jika dalam semigrup $(M,*)$ berlaku $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in M$ maka $(M,*)$ disebut semigrup komutatif.

Definisi 2.2.4 (Kandasamy, 2002)
Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup dan mempunyai elemen identitas e sedemikian sehingga $e * a = a * e = a$, untuk setiap $a \in M$. Maka $(M,*)$ disebut semigrup dengan elemen identitas atau semigrup *monoid*.

Elemen identitas pada suatu semigrup $(M, +)$ biasanya disebut elemen nol *(zero element)* dan dinotasikan dengan 0 sedemikian sehingga memenuhi $0 + m = m + 0 = m$, untuk setiap $m \in M$. Sedangkan pada suatu semigrup $(M,\cdot)$ disebut elemen identitas *(identity element)* dan dinotasikan dengan 1 sedemikian sehingga memenuhi $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$, untuk setiap $m \in M$.

Teorema 2.2.5 (Whitelaw, 1995)
Suatu semigrup *monoid* tidak mungkin mempunyai elemen identitas lebih dari satu.

Bukti :
Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup. Andaikan $e, f \in M$ adalah elemen identitas. Akan ditunjukkan bahwa $e = f$. Karena f merupakan elemen identitas maka $f * e = e * f = e$. Karena e juga merupakan elemen identitas maka $e * f = f * e = f$. Dengan demikian $e = f$. Jadi, terbukti bahwa suatu semigrup *monoid* hanya mempunyai satu elemen identitas. ■

Definisi 2.2.6 (Whitelaw, 1995)
Misalkan $(M,*)$ suatu semigrup dan H *subset* dari M. Maka H disebut subsemigrup dari H jika dan hanya jika $(H,*)$ suatu semigrup.

Contoh 2.2.7
$(\mathbb{N},\cdot)$ merupakan subsemigrup dari $(\mathbb{Z},\cdot)$ karena $\mathbb{N}$ *subset* dari $\mathbb{Z}$ dan $(\mathbb{N},\cdot)$ suatu semigrup.

Dalam sistem bilangan real atau sistem bilangan kompleks telah dikenal mempunyai dua operasi biner yang dasar, yang disebut penjumlahan *(addition)* dan perkalian *(multiplication)*. Semigrup belum cukup untuk merangkum semua struktur aljabar dari sistem bilangan tersebut, karena suatu semigrup hanya memuat satu operasi biner saja. Misalkan terhadap penjumlahan atau terhadap perkalian, tetapi struktur tersebut mengabaikan hubungan antara penjumlahan dan perkalian, seperti diketahui bahwa perkalian itu distributif terhadap penjumlahan. Oleh karena itu, selanjutnya akan dipandang struktur-struktur aljabar dengan dua operasi biner yang berlaku pada sistem bilangan tertentu. Semiring adalah suatu struktur aljabar yang mempunyai dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian.

2.3 Semiring

Semiring adalah suatu struktur aljabar yang berkaitan dengan dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian. Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan semiring.

Definisi 2.3.1 (Kandasamy, 2002)
Misalkan R himpunan tak kosong dan di dalamnya didefinisikan dua operasi biner, yaitu penjumlahan dan perkalian yang memenuhi:

1. $(R,+)$ semigrup komutatif,
2. $(R,\cdot)$ semigrup, dan
3. untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ dan $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$.

Maka $(R,+,\cdot)$ disebut semiring.

Contoh 2.3.2
Himpunan $R = (\mathbb{Z}^+,+,\cdot)$ merupakan suatu semiring.

Bukti :

(1) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku :

(i) $a + b \in R$,

(ii) $(a + b) + c = a + (b + c)$,

(iii) $a + b = b + a$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R, +)$ merupakan semigrup komutatif.

(2) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku :

(i) $a \cdot b \in R$,

(ii) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

Dari (i) dan (ii) maka $(R,\cdot)$ merupakan semigrup.

(3) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku :

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dan $a \cdot (b + c) = a \cdot c + b \cdot c$.

Dari (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa R merupakan suatu semiring. ■

Berikut ini akan diberikan beberapa definisi serta contoh mengenai semiring komutatif, semiring dengan elemen identitas, dan subsemiring.

Definisi 2.3.3 (Kandasamy, 2002)
Misalkan $(R, +,\cdot)$ adalah suatu semiring. $(R, +,\cdot)$ disebut semiring komutatif jika $(R,\cdot)$ adalah semigrup komutatif.

Definisi 2.3.4 (http://math.chapman.edu)
R disebut semiring dengan elemen identitas jika memenuhi :

1. $(R, +)$ semigrup komutatif,
2. $(R,\cdot)$ semigrup *monoid*,
3. Untuk setiap $a, b, c \in R$ berlaku $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ dan $a \cdot (b + c) = a \cdot c + b \cdot c$.

Contoh 2.3.5
Himpunan $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, max, min)$ dengan $a \oplus b = max\{a, b\}$ dan $a \odot b = min\{a, b\}$ merupakan suatu semiring komutatif dengan *zero element* 0 dan *identity element* ∞.

Bukti :

(1) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:

(i) $a \oplus b = max\{a, b\} \in R$,

(ii) $(a \oplus b) \oplus c = max\{a, b\} \oplus c$
$= max\{a, b, c\}$
$= max\{a, (b, c)\}$
$= a \oplus max\{b, c\}$
$= a \oplus (b \oplus c)$,

(iii) $a \oplus b = max\{a, b\} = max\{b, a\} = b \oplus a$,

(iv) $0 \oplus a = max\{0, a\} = max\{a, 0\} = a \oplus 0 = a$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R,\oplus)$ merupakan semigrup komutatif.

(2) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:

(i) $a \odot b = min\{a, b\} \in R$,

(ii) $(a \odot b) \odot c = min\{a, b\} \odot c$
$= min\{a, b, c\}$
$= min\{a, (b, c)\}$
$= a \odot min\{b, c\}$
$= a \odot (b \odot c)$,

(iii) $a \odot b = min\{a, b\} = min\{b, a\} = b \odot a$,

(iv) $\infty \odot b = min\{\infty, b\} = min\{b, \infty\} = b \odot \infty = b$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R,\odot)$ merupakan semigrup komutatif.

(3) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka:

$(a \oplus b) \odot c = max\{a, b\} \odot c = min\{max\{a, b\}, c\}$,

$(a \odot c) \oplus (b \odot c) = min\{a, c\} \oplus min\{b, c\}$
$= max\{min\{a, c\}, min\{b, c\}\}$.

Untuk kemungkinan - kemungkinan yang ada yaitu ($a < b < c$, *a<c<b, b<c<a, b<a<c, c<a<b, (c<b<a)* dipenuhi

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$
$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Dari (1), (2), dan (3) maka terbukti bahwa R merupakan suatu semiring komutatif dengan *zero element* 0 dan *identity element* ∞. ■

Definisi 2.3.6 (Kandasamy, 2002)
Diberikan suatu semiring R dan Q adalah *subset* dari R. Kemudian Q disebut subsemiring dari R jika Q bersama dengan operasi yang sama dengan R membentuk semiring.

Pada semiring juga dikenal suatu pemetaan. Berikuti ini diberikan definisi dari homomorfisma semiring yaitu suatu pemetaan dari dua semiring yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu.

Definisi 2.3.7 (Dummit dan Foote, 2002)
Misalkan $(R,+,\cdot)$ dan $(S,\boxplus,\boxdot)$ adalah semiring. Homomorfisma semiring adalah suatu pemetaan $\varphi : R \longrightarrow S$ yang memenuhi :

1. $\varphi(a+b) = \varphi(a) \boxplus \varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in R$ dan
2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \boxdot \varphi(b)$ untuk setiap $a, b \in R$.

Definisi 2.3.8 (Hartley dan Hawkes, 1994)

1. Homomorfisma yang surjektif disebut epimorfisma.
2. Homomorfisma yang injektif disebut monomorfisma.
3. Homomorfisma yang bijektif disebut isomorfisma.
4. Homomorfisma $\varphi : R \longrightarrow R$ disebut endomorfisma.
5. Isomorfisma $\varphi : R \longrightarrow R$ disebut automorfisma

2.4 Ideal

Dalam semiring dikenal istilah subsemiring yaitu himpunan bagian tak kosong yang membentuk semiring bersama operasi yang sama dengan semiring tersebut. Berikut ini didefinisikan suatu himpunan tak kosong lain dalam semiring yang disebut dengan ideal.

Definisi 2.4.1 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Misalkan I adalah suatu himpunan tak kosong dan I *subset* dari semiring R. I disebut ideal kanan (kiri) dalam semiring R jika memenuhi :

1. $a + b \in I$, untuk setiap $a, b \in I$,
2. $ar \in I$ $(ra \in I)$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$.

Contoh 2.4.2
Himpunan $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, max, min)$ merupakan suatu semiring (lihat Contoh 2.3.5). $I = \{0, 1, 2, \dots, t | t \in \mathbb{Z}^+\}$ adalah ideal kanan dan ideal kiri dalam semiring R.

Bukti :

(1) Jelas $I \neq \emptyset$ dan $I \subseteq \mathbb{Z}^+$,

(2) Ambil sebarang $a, b \in I$ dan $r \in R$. Maka :

$a \oplus b = max\{a, b\} \in I$,

$a \odot r = min\{a, r\} = min\{r, a\} = r \odot a \in I$.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa I adalah ideal kanan dan ideal kiri dalam semiring R. ∎

Definisi 2.4.3 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Misalkan I suatu himpunan tak kosong dan merupakan *subset* dari semiring R. I disebut ideal (dua sisi) dalam R jika memenuhi :

1. $a + b \in I$ untuk setiap $a, b \in I$,
2. $ar \in I$ dan $ra \in I$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$.

Contoh 2.4.4
Pada Contoh 2.4.2, I adalah ideal dua sisi dalam semiring R, karena I adalah ideal kanan dan juga ideal kiri dalam semiring R.

Suatu ideal I dalam semiring komutatif R adalah ideal dua sisi, karena $ar = ra \in I$, untuk setiap $a \in I$ dan $r \in R$.

Lema 2.4.5 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Misalkan I adalah ideal dari semiring R dan $a, x \in R$ sedemikian sehingga $a + I \subseteq x + I$. Maka :

1. $ar + I \subseteq xr + I$,
2. $ra + I \subseteq rx + I$, dan
3. $a + r + I \subseteq x + r + I$,

untuk setiap $r \in R$.

Bukti :

Ambil sebarang $r \in R$. Telah diketahui $a + I \subseteq x + I$ dengan $a, x \in R$, maka:

(1) $a + I \subseteq x + I$

$(a + I)r \subseteq (x + I)r$ (Kalikan kedua ruas dengan r)

$ar + Ir \subseteq xr + Ir$ (Distributif)

$ar + I \subseteq xr + I.$ (Karena I ideal)

(2) Analog dengan bukti (1), tetapi kedua ruas dikalikan dengan r dari sebelah kiri.

(3) $a + I \subseteq x + I$

$r + (a + I) \subseteq r + (x + I)$ (Tambahkan kedua ruas dengan r)

$(r + a) + I \subseteq (r + x) + I$ (Assosiatif)

$(a + r) + I \subseteq (x + r) + I$ (Komutatif terhadap penjumlahan)

$a + r + I \subseteq x + r + I.$ ■

Teorema 2.4.6 (Hartley dan Hawkes, 1994)

Jika $I_1, I_2, \ldots, I_n$ adalah ideal-ideal dari semiring R maka jumlah dari ideal-ideal $I_1, I_2, \ldots, I_n$ $\left(\sum_{i=1}^{n} I_i\right)$ adalah ideal dari semiring R.

Bukti :

Untuk menunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} I_i$ ideal dari semiring R maka harus dibuktikan $\sum_{i=1}^{n} I_i \neq \phi$, $x + y \in \sum_{i=1}^{n} I_i$, $rx \in \sum_{i=1}^{n} I_i$, dan $xr \in \sum_{i=1}^{n} I_i$.

(1) Karena $0 \in I_i$, $0 + 0 + \ldots = 0 = 0 \in \sum_{i=1}^{n} I_i$. Maka $\sum_{i=1}^{n} I_i \neq \phi$

(2) Ambil sebarang $x, y \in \sum_{i=1}^{n} I_i$.

Maka $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ dan $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ dengan $x_i, y_i \in I_i$, sehingga

$$x + y = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$

$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_n + y_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i).$$

Karena $(x_1 + y_1) \in I_1, \ldots, (x_n + y_n) \in I_n$, $x + y \in \sum_{i=1}^{n} I_i$.

(3) Ambil sebarang $r \in R$ dan $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \in \sum_{i=1}^{n} I_i$.

$$rx = r(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

$$= rx_1 + rx_2 + \ldots + rx_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} rx_i .$$

Karena $rx_1 \in I_1, \ldots, rx_n \in I_n$, $rx \in \sum_{i=1}^{n} I_i$.

(4) Analog dengan bukti (3).

Karena (1), (2), (3), dan (4) dipenuhi, terbukti $\sum_{i=1}^{n} I_i$ merupakan suatu ideal dari semiring R. ■

Berikut ini akan diberikan definisi, contoh, dan beberapa lema mengenai ideal subtraktif dan *partitioning ideal*.

Definisi 2.4.7 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Suatu ideal I dari semiring R disebut ideal subtraktif (k-ideal) jika $x \in R$, $i \in I$, dan $x + i \in I$ maka $x \in I$.

Contoh 2.4.8
Misalkan $R = (\mathbb{Z}^{+} \cup \{\infty\}, max, min)$. Maka $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah k-ideal dari semiring R.

Bukti :
Merujuk pada Contoh 2.4.2, Maka I adalah ideal. Karena sebarang elemen $x \oplus i \in I$ dengan $x \in R$ dan $i \in I$ mengakibatkan $x \in I$, maka I adalah k-ideal. ■

Definisi 2.4.9 (Hee Sik Kim, 1989)
Ideal I dari semiring R disebut *partitioning ideal* (Q-ideal) jika terdapat *subset* tak kosong Q dari semiring R sedemikian sehingga:

1. $R = \cup \{q + I | q \in Q\}$
2. Jika $q_1, q_2 \in Q$ sedemikian sehingga $q_1 \neq q_2$, maka $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) = \emptyset$.

Contoh 2.4.10
Pada Contoh 2.4.8, I adalah Q-ideal dari semiring R.

Bukti :
Misalkan $Q = \{0, 6, 7, 8, ...\} \cup \{\infty\}$ adalah *subset* dari semiring R.
(1) $R = \cup \{q \oplus I \, | q \in Q\}$ dipenuhi,
(2) Ambil sebarang $q_1, q_2 \in Q$. Misalkan $(q_1 \oplus I) \cap (q_2 \oplus I) \neq \emptyset$.
Akan ditunjukkan bahwa $q_1 = q_2$.
Karena $(q_1 \oplus I) \cap (q_2 \oplus I) \neq \emptyset$, maka dapat ditemukan suatu elemen x dalam $(q_1 \oplus I) \cap (q_2 \oplus I)$. Karena $x \in (q_1 \oplus I) \cap (q_2 \oplus I)$ maka dapat dikatakan bahwa $x \in (q_1 \oplus I)$ dan $x \in (q_2 \oplus I)$. Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} = \{i_0, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5\}$. Kemudian x dapat dinyatakan sebagai $x = (q_1 \oplus i_j)$ dan $x = (q_2 \oplus i_j)$, untuk suatu $0 \leq j \leq 5$. Sehingga $x = max\{q_1, i_j\} = max\{q_2, i_j\}$ jika dan hanya jika $q_1 = q_2$. Kontraposisi dari Definisi 2.4.9 poin (2).

Dari (1) dan (2) maka terbukti bahwa I adalah Q-ideal dari semiring R. ■

Lema 2.4.11 (Hee Sik Kim, 1989)
Misalkan I adalah Q-ideal dari semiring R. Jika $x \in R$, maka terdapat elemen tunggal $q \in Q$ sedemikian sehingga $x + I \subseteq q + I$.

Bukti :

Misalkan $x \in R$. Andaikan $q_1, q_2 \in Q$ dan $q_1 \neq q_2$ sedemikian sehingga $x + I \subseteq q_1 + I$ dan $x + I \subseteq q_2 + I$.

Akan ditunjukkan bahwa $q_1 = q_2$.

Karena $x + I \subseteq q_1 + I$ dan $x + I \subseteq q_2 + I$, maka $q_1 + I \subseteq q_2 + I$ atau $q_2 + I \subseteq q_1 + I$. Sehingga $(q_1 + I) \cap (q_2 + I) \neq \emptyset$. Tetapi diketahui bahwa I adalah Q-ideal. Kesimpulannya, pengandaian tersebut kontradiksi dengan Definisi 2.4.9 poin (2). Pengandaian harus diingkari apabila terjadi suatu kontradiksi. Jadi haruslah $q_1 = q_2$. ■

Lema 2.4.12 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Jika I adalah Q-ideal dari semiring R maka I adalah k-ideal dari semiring R.

Bukti :

Ambil sebarang $x \in R$ dan $i \in I$ sedemikian sehingga $x + i \in I$.

Akan ditunjukkan bahwa $x \in I$.

Karena diketahui I adalah Q-ideal, maka R dapat dinyatakan sebagai $R = \cup \{q + I \mid q \in Q\}$ dengan Q *subset* tak kosong dari semiring R. Bentuk suatu himpunan $B = \{r + I \mid r \in Q \text{ dan } r + I \subseteq I\}$. Sebarang elemen dalam B dapat dinyatakan sebagai $x + i \in I$, dengan $x \in Q$ dan $i \in I$. Karena I ideal, maka pasti $x \in I$. ■

Contoh 2.4.13
Pada Contoh 2.4.10, I adalah Q-ideal dari semiring R. Kemudian akan ditunjukkan bahwa I tersebut adalah k-ideal. Merujuk pada Contoh 2.4.8, I adalah k-ideal dari semiring R.

Jika pada sebelumnya telah diberikan definisi mengenai ideal subtraktif (k-ideal) dan *partitioning ideal* (Q-ideal), maka pada definisi-definisi berikut ini akan diperkenalkan tentang ideal nil, ideal nilpoten dan semiprima.

Definisi 2.4.14 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Suatu elemen a dari semiring R disebut elemen nilpoten jika terdapat bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $a^n = 0$ (dengan $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$).

Definisi 2.4.15 (Bhattacharya, dkk., 1986)
Ideal I dari semiring R disebut ideal nil jika untuk setiap elemen $x \in I$ adalah elemen nilpoten. Sedangkan, ideal I dikatakan ideal nilpoten jika $I^n = (0)$ (dengan $I^n = \underbrace{I \cdot I \cdot \ldots \cdot I}_{n}$).

Setiap ideal nol adalah ideal nilpoten, karena pasti $I^n = (0)$ (dengan $I^n = \underbrace{I \cdot I \cdot \ldots \cdot I}_{n}$). Selanjutnya, karena setiap elemen dalam ideal nilpoten adalah elemen nilpoten maka dikatakan bahwa setiap ideal nilpoten adalah ideal nil.

Definisi 2.4.16 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Semiring R yang tidak mempunyai ideal nilpoten tak nol disebut semiprima.

2.5 Semiring Kuosien

Pada bagian ini diberikan definisi tentang semiring kuosien. Semiring kuosien disini hanya dibatasi pada ruang lingkup dimana idealnya adalah Q-ideal. Konsep ini sebagai dasar yang nantinya digunakan pada suatu proposisi dan teorema dalam pembahasan. Berbekal dari Definisi 2.4.9 dan Lema 2.4.11, definisi semiring kuosien akan diberikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Misalkan I adalah Q-ideal dari semiring R dan $R/I = \{q + I \mid q \in Q\}$. R/I membentuk suatu semiring dibawah operasi biner $\boxplus$ dan $\boxdot$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$(q_1 + I) \boxplus (q_2 + I) = q_3 + I$$

dengan $q_3 \in Q$ adalah elemen tunggal sedemikian sehingga $q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I$

$$(q_1 + I) \boxdot (q_2 + I) = q_4 + I$$

dengan $q_4 \in Q$ adalah elemen tunggal sedemikian sehingga $q_1 q_2 + I \subseteq q_4 + I$. Maka semiring R/I disebut semiring kuosien dari R dengan I.

Dengan definisi Q-ideal dan Lema 2.4.11, terdapat suatu elemen tunggal $q \in Q$ sedemikian sehingga $0 + I \subseteq q + I$. Maka $q + I$ adalah *zero element* dari R/I.

2.6 *Noetherian* dan *Artinian*

Pada bagian ini diberikan definisi dan contoh yang berkaitan dengan *noetherian* dan *artinian* dalam semiring.

Definisi 2.6.1 (Dummit dan Foote, 2002)
Suatu semiring komutatif R disebut *noetherian* kanan jika untuk setiap barisan menaik dari ideal-ideal kanan

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$$

terdapat suatu bilangan bulat positif k sedemikian sehingga

$$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$$

Definisi 2.6.2 (Dummit dan Foote, 2002)
Suatu semiring komutatif R disebut *artinian* kanan jika untuk setiap barisan menurun dari ideal-ideal kanan

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$$

terdapat suatu bilangan bulat positif k sedemikian sehingga

$$I_k = I_{k+1} = I_{k+2} = \cdots$$

Contoh 2.6.3
Semiring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ adalah *noetherian* tetapi bukan *artinian*.

Bukti :

Karena ideal-ideal dalam bilangan bulat dapat dibangun (dihasilkan) oleh sebarang elemen dalam bilangan bulat itu sendiri, maka dapat dibuat suatu barisan menaik sebarang dari ideal-ideal dalam $\mathbb{Z}$ yaitu

$$\langle m \rangle \subset \langle n \rangle \subset \cdots \subset \langle 1 \rangle$$

dimana $m, n \in \mathbb{Z}$ dan n adalah faktor dari m. Artinya dalam semiring $\mathbb{Z}$ dapat dibentuk sebarang barisan ideal-ideal menaik yang terbatas ke atas pada $\langle 1 \rangle$. Jadi $\mathbb{Z}$ adalah *noetherian*. Tetapi ditemukan barisan

$$\langle 1 \rangle \supset \langle 2 \rangle \supset \langle 4 \rangle \supset \langle 8 \rangle \supset \cdots$$

adalah barisan menurun sejati yang takhingga dari ideal-ideal dalam semiring $\mathbb{Z}$. Sehingga $\mathbb{Z}$ bukan *artinian*. ■

Contoh 2.6.4
Suatu semiring $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, max, min)$ adalah *artinian* tetapi bukan *noetherian*.

Bukti :
Jelas I adalah ideal dalam R jika dan hanya jika:

$I = \{0,1,2,\dots,t\} = I_t$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}^+$, atau

$I = \mathbb{Z}^+$, atau

$I = R$.

Dalam sebarang kasus tidak ada barisan menurun sejati takhingga dari ideal-ideal dalam R. Sehingga R adalah *artinian*.

Pada kasus $I = \{0,1,2,\dots,t\} = I_t$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}^+$, dapat dibentuk

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$$

adalah barisan menaik yang takhingga dari ideal-ideal dalam semiring R, Sehingga R bukan *noetherian*. ■

Contoh 2.6.5
Pada Contoh 2.2.2, $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ adalah semiring yang *noetherian* juga *artinian*.

Bukti :
Karena

$$\mathbb{Z}_4 \supset \langle 2 \rangle \supset \langle 0 \rangle$$

dan

$$\langle 0 \rangle \subset \langle 2 \rangle \subset \mathbb{Z}_4$$

dapat dipandang sebagai barisan menaik dan menurun sejati yang berhingga. Sehingga R adalah *artinian* yang juga *noetherian.* ■

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi-definisi dan teorema-teorema dari radikal Jacobson dan semiring π-regular kanan beserta bukti-buktinya. Radikal Jacobson didefinisikan sebagai jumlah dari seluruh ideal semiregular kanan dari semiring R. Namun pada pembahasan disini lebih ditekankan pada semiring π-regular kanan.

3.1 Radikal Jacobson

Pada bagian ini juga diberikan definisi, contoh dan sifat-sifat yang berkaitan dengan radikal Jacobson, diantaranya adalah elemen dan ideal semiregular kanan.

Definisi 3.1.1 (Bourne, 1951)
Suatu elemen r dalam semiring R dikatakan semiregular kanan (kiri) jika terdapat $r', r'' \in R$ sedemikian sehingga memenuhi $r + r' + rr' = r'' + rr''$ $(r + r' + r'r = r'' + r''r)$.

Teorema 3.1.2
Syarat perlu dan cukup bahwa elemen r merupakan semiregular kanan dari semiring R adalah untuk setiap $s \in R$, terdapat $s', s'' \in R$ sedemikian sehingga $s + s' + rs' = s'' + rs''$.

Bukti :

($\Longrightarrow$) Jika r adalah semiregular kanan dari semiring R maka terdapat $r', r'' \in R$ sedemikian sehingga

$$r + r' + rr' = r'' + rr''$$
$$r'' + rr'' = r + r' + rr'.$$

Kalikan kedua ruas dengan s dari sebelah kanan, serta kedua ruas ditambah dengan s, maka

$$s + (r'' + rr'')s = s + (r + r' + rr')s$$
$$s + r''s + rr''s = s + rs + r's + rr's$$
$$s + r''s + rr''s = s + r's + rs + rr's$$
$$s + r''s + rr''s = s + r's + r(s + r's)$$

dengan memisalkan $s' = r"s$ dan $s" = s + r's$, diperoleh $s + s' + rs' = s" + rs"$.

(⟸) Misalkan $s + s' + rs' = s" + rs"$, untuk setiap $s \in R$ dan suatu $s', s" \in R$. Secara khusus dapat dipilih $s = r \in R$ sedemikian sehingga diperoleh

$$r + s' + rs' = s" + rs".$$

Kemudian, menurut Definisi 3.1.1, r adalah semiregular kanan dari semiring R. ■

Definisi 3.1.3 (Bourne, 1951)
Suatu ideal kanan (kiri) I dalam semiring R dikatakan ideal semiregular kanan (kiri), jika setiap sepasang elemen $i_1, i_2 \in I$, terdapat $j_1, j_2 \in I$ sedemikian sehingga berlaku $i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2 = i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1$ $(i_1 + j_1 + j_1 i_1 + j_2 i_2 = i_2 + j_2 + j_2 i_1 + j_1 i_2)$.

Contoh 3.1.4
Pada Contoh 2.4.2, I adalah semiregular kanan.

Bukti :
Ambil sebarang $i_1, i_2 \in I$, kemudian akan ditentukan sepasang elemen $j_1, j_2 \in I$ sedemikian sehingga berlaku

$$i_1 \oplus j_1 \oplus i_1 \odot j_1 \oplus i_2 \odot j_2 = i_2 \oplus j_2 \oplus i_1 \odot j_2 \oplus i_2 \odot j_1.$$

- $i_1 \oplus j_1 \oplus i_1 \odot j_1 \oplus i_2 \odot j_2$
  $= max\{i_1, j_1, min\{i_1, j_1\}, min\{i_2, j_2\}\}$
  $= max\{i_1, j_1, min\{i_2, j_2\}\}$
- $i_2 \oplus j_2 \oplus i_1 \odot j_2 \oplus i_2 \odot j_1$
  $= max\{i_2, j_2, min\{i_1, j_2\}, min\{i_2, j_1\}\}$.

Dengan demikian, untuk sebarang $i_1, i_2 \in I$ pasti ditemukan $j_1, j_2 \in I$, sedemikian sehingga $i_1 \oplus j_1 \oplus i_1 \odot j_1 \oplus i_2 \odot j_2 = i_2 \oplus j_2 \oplus i_1 \odot j_2 \oplus i_2 \odot j_1$. ■

Kemudian, suatu ideal dalam semiring R disebut semiregular jika ideal tersebut adalah semiregular kanan dan semiregular kiri (Bourne, 1951).

Lema 3.1.5
Jika I dan I^* adalah ideal semiregular kanan dari semiring R, maka $I + I^*$ adalah ideal semiregular kanan.

Bukti :

Diketahui I dan I^* ideal semiregular kanan, maka sebarang pasangan $i_1, i_2 \in I$ terdapat $j_1, j_2 \in I$ sedemikian sehingga

$$i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2 = i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1. \qquad (2.1)$$

Jika $i_1{}^*, i_2{}^* \in I^*$ maka $(i_1{}^* + i_1{}^* j_1 + i_2{}^* j_2), (i_2{}^* + i_2{}^* j_1 + i_1{}^* j_2) \in I^*$. Karena I^* juga ideal semiregular kanan, terdapat $j_1{}^*, j_2{}^* \in I^*$ sehingga

$$(i_1{}^* + i_1{}^* j_1 + i_2{}^* j_2) + j_1{}^* + (i_1{}^* + i_1{}^* j_1 + i_2{}^* j_2) j_1{}^* + (i_2{}^* + i_2{}^* j_1 + i_1{}^* j_2) j_2{}^* \qquad (2.2)$$
$$= (i_2{}^* + i_2{}^* j_1 + i_1{}^* j_2) + j_2{}^* + (i_1{}^* + i_1{}^* j_1 + i_2{}^* j_2) j_2{}^* + (i_2{}^* + i_2{}^* j_1 + i_1{}^* j_2) + j_1{}^*.$$

Ambil sebarang $(i_1 + i_1{}^*), (i_2 + i_2{}^*) \in I + I^*$.

Pilih $(j_1 + j_1{}^* + j_1 j_1{}^* + j_2 j_2{}^*), (j_2 + j_2{}^* + j_1 j_2{}^* + j_2 j_1{}^*) \in I + I^*$ maka

$$(i_1 + i_1{}^*) + (j_1 + j_1{}^* + j_1 j_1{}^* + j_2 j_2{}^*) + (i_1 + i_1{}^*)(j_1 + j_1{}^* + j1j1*+j2j2*+(i2+i2*)(j2+j2*+j1j2*+j2j1*)$$
$$= (i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2) + [(i_1{}^* + i_1{}^* j_1 + i_2{}^* j_2) + j_1{}^* + i1*+i1*j1+i2*j2j1*+i2*+i2*j1+i1*j2j2*+$$
$$(i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2) j_1{}^* + (i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1) j_2{}^*$$

dengan menggunakan (2.1) dan (2.2), diperoleh

$$= (i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1) + [(i_2{}^* + i_2{}^* j_1 + i_1{}^* j_2) + j_2{}^* + i1*+i1*j1+i2*j2j2*+i2*+i2*j1+i1*j2+j1*+$$
$$(i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1) j_1{}^* + (i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2) j_2{}^*$$
$$= (i_2 + i_2{}^*) + (j_2 + j_2{}^* + j_1 j_2{}^* + j_2 j_1{}^*) + (i_1 + i_1{}^*)(j_2 + j2*+j1j2*+j2j1*+(i2+i2*)j1+j1*+j1j1*+j2j2*.$$

Sehingga $I + I^*$ adalah semiregular kanan. ■

Teorema 3.1.6
Jumlah dari semua ideal semiregular kanan dalam semiring R adalah ideal dua sisi semiregular kanan.

Bukti :
Misalkan K adalah jumlah dari semua ideal semiregular kanan dalam semiring R. Menurut Lema 3.1.5, K adalah ideal semiregular kanan. Jika $k_1, k_2 \in K$ maka $k_1 r, k_2 r \in K$ untuk setiap $r \in R$ dan terdapat $k_3, k_4 \in K$ sedemikian sehingga

$$k_1 r + k_3 + (k_1 r)k_3 + (k_2 r)k_4 = k_2 r + k_4 + (k_1 r)k_4 + (k_2 r)k_3$$
$$k_1 r + k_3 + k_1 r k_3 + k_2 r k_4 = k_2 r + k_4 + k_1 r k_4 + k_2 r k_3.$$

Kalikan kedua ruas dengan r dari sebelah kiri dan k_1 dari sebelah kanan, serta kalikan kedua ruas dengan r dari sebelah kiri dan k_2 dari sebelah kanan, maka

$$\begin{aligned} & r(k_1 r + k_3 + k_1 r k_3 + k_2 r k_4)k_1 \\ & \qquad = r(k_2 r + k_4 + k_1 r k_4 + k_2 r k_3)k_1 \\ \Leftrightarrow\ & r k_1 r k_1 + r k_3 k_1 + r k_1 r k_3 k_1 + r k_2 r k_4 k_1 \\ & \qquad = r k_2 r k_1 + r k_4 k_1 + r k_1 r k_4 k_1 + r k_2 r k_3 k_1 \end{aligned} \tag{2.3}$$

dan

$$\begin{aligned} & r(k_1 r + k_3 + k_1 r k_3 + k_2 r k_4)k_2 \\ & \qquad = r(k_2 r + k_4 + k_1 r k_4 + k_2 r k_3)k_2 \\ \Leftrightarrow\ & r(k_2 r + k_4 + k_1 r k_4 + k_2 r k_3)k_2 \\ & \qquad = r(k_1 r + k_3 + k_1 r k_3 + k_2 r k_4)k_2 \\ \Leftrightarrow\ & r k_2 r k_2 + r k_4 k_2 + r k_1 r k_4 k_2 + r k_2 r k_3 k_2 \\ & \qquad = r k_1 r k_2 + r k_3 k_2 + r k_1 r k_3 k_2 + r k_2 r k_4 k_2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Tambahkan (2.3) dengan (2.4) maka

$$\begin{aligned} & r k_1 r k_1 + r k_3 k_1 + r k_1 r k_3 k_1 + r k_2 r k_4 k_1 + r k_2 r k_2 + r k_4 k_2 \\ & \qquad + r k_1 r k_4 k_2 + r k_2 r k_3 k_2 \\ & \qquad = r k_2 r k_1 + r k_4 k_1 + r k_1 r k_4 k_1 + r k_2 r k_3 k_1 \\ & \qquad + r k_1 r k_2 + r k_3 k_2 + r k_1 r k_3 k_2 + r k_2 r k_4 k_2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow rk_3k_1 + rk_4k_2 + rk_1rk_1 + rk_1rk_3k_1 + rk_1rk_4k_2 + rk_2rk_4k_1 \\
+ rk_2rk_2 + rk_2rk_3k_2 \\
= rk_3k_2 + rk_4k_1 + rk_2rk_1 + rk_2rk_3k_1 \\
+ rk_2rk_4k_2 + rk_1rk_2 + rk_1rk_3k_2 + rk_1rk_4k_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow (rk_3k_1 + rk_4k_2) + rk_1(rk_1 + rk_3k_1 + rk_4k_2) \\
+ rk_2(rk_4k_1 + rk_2 + rk_3k_2) \\
= (rk_3k_2 + rk_4k_1) + rk_2(rk_1 + rk_3k_1 + rk_4k_2) \\
+ rk_1(rk_2 + rk_3k_2 + rk_4k_1)
\end{aligned}
$$

Kedua ruas ditambah $(rk_1 + rk_2)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow rk_2 + (rk_1 + rk_3k_1 + rk_4k_2) + rk_1(rk_1 + rk_3k_1 + rk_4k_2) \\
+ rk_2(rk_4k_1 + rk_2 + rk_3k_2) \\
= rk_1 + (rk_2 + rk_3k_2 + rk_4k_1) \\
+ rk_2(rk_1 + rk_3k_1 + rk_4k_2) + rk_1(rk_2 + rk_3k_2 \\
+ rk_4k_1)
\end{aligned}
$$

Karena $(rk_1 + rk_3k_1 + rk_4k_2), (rk_2 + rk_3k_2 + rk_4k_1) \in rK$, ini berarti bahwa rK adalah semiregular kanan dan $rK \subseteq K$. Sehingga K juga ideal kiri dalam semiring R. Diketahui K merupakan ideal kanan dalam semiring R, berarti K adalah ideal dua sisi semiregular kanan. ■

Kemudian, jumlah dari semua ideal semiregular kiri dalam semiring R adalah ideal dua sisi semiregular kiri.

Selanjutnya jumlah dari semua ideal semiregular kanan (kiri) dalam semiring R dikenal dengan radical Jacobson kanan (kiri). Berikut ini didefinisikan suatu radikal Jacobon beserta sifat-sifatnya.

Definisi 3.1.7 (Bourne, 1951)
Suatu radikal Jacobson kanan (kiri) dari semiring R adalah jumlah dari semua ideal semiregular kanan (kiri) dalam semiring R.

Lema 3.1.8
Jika i_1 dan i_2 termuat dalam ideal kanan I dari R, dan jika

$$i_1 + j_1 + i_1j_1 + i_2j_2 = i_2 + j_2 + i_1j_2 + i_2j_1 \tag{2.5}$$

dan

$$i_1 + k_1 + k_1 i_1 + k_2 i_2 = i_2 + k_2 + k_2 i_1 + k_1 i_2, \qquad (2.6)$$

dengan $j_1, j_2, k_1, k_2 \in I$, maka terdapat suatu elemen $l \in I$ sedemikian sehingga berlaku

$$k_1 + j_2 + l = k_2 + j_1 + l.$$

Bukti :

$$\begin{aligned} k_1 + (i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2) + k_1(i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2) \\ + k_2(i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1) \\ = j_1 + (i_1 + k_1 + k_1 i_1 + k_2 i_2) \\ + (i_1 + k_1 + k_1 i_1 + k_2 i_2) j_1 + (i_2 + k_2 + k_2 i_1 \\ + k_1 i_2) j_2 \end{aligned}$$

dengan (2.5) dan (2.6) maka diperoleh

$$\begin{aligned} k_1 + (i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1) + k_1(i_2 + j_2 + i_1 j_2 + i_2 j_1) \\ + k_2(i_1 + j_1 + i_1 j_1 + i_2 j_2) \\ = j_1 + (i_2 + k_2 + k_2 i_1 + k_1 i_2) \\ + (i_2 + k_2 + k_2 i_1 + k_1 i_2) j_1 + (i_1 + k_1 + k_1 i_1 \\ + k_2 i_2) j_2 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} k_1 + j_2 + (i_1 + k_1 + k_1 i_1 + k_2 i_2) j_2 + (i_2 + k_2 + k_1 i_2 + k_2 i_1) j_1 \\ + i_2 + k_1 i_2 + k_2 i_1 \\ = k_2 + j_1 + (i_2 + k_2 + k_2 i_1 + k_1 i_2) j_1 \\ + (i_1 + k_1 + k_1 i_1 + k_2 i_2) j_2 + i_2 + k_2 i_1 + k_1 i_2. \end{aligned}$$

Misalkan

$$\begin{aligned} l = (i_2 + k_2 + k_1 i_2 + k_2 i_1) j_1 + (i_1 + k_1 + k_1 i_1 + k_2 i_2) j_2 + i_2 \\ + k_2 i_1 + k_1 i_2. \end{aligned}$$

Maka persamaan diatas menjadi

$$k_1 + j_2 + l = k_2 + j_1 + l,$$

dengan $l \in I$. ■

Lema 3.1.9

Suatu radikal Jacobson kanan dari semiring R adalah ideal semiregular kiri.

Bukti :

Misalkan K adalah radikal Jacobson kanan dari semiring R. Menurut Teorema 3.1.6, K adalah ideal kiri. Misalkan r_1, r_2 sebarang elemen dalam K. Karena K semiregular kanan, maka terdapat $s_1, s_2 \in K$ sedemikian sehingga

$$r_1 + s_1 + r_1 s_1 + r_2 s_2 = r_2 + s_2 + r_1 s_2 + r_2 s_1.$$

Dan

$$s_1 + t_1 + s_1 t_1 + s_2 t_2 = s_2 + t_2 + s_1 t_2 + s_2 t_1,$$

dengan $t_1, t_2 \in K$.

Dengan Lema 3.1.8, terdapat suatu elemen $v \in K$ sedemikian sehingga berlaku

$$t_1 + r_2 + v = t_2 + r_1 + v.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} s_1 + r_1 + s_1 t_1 + s_2 t_2 + t_1 + v &= (s_1 + t_1 + s_1 t_1 + s_2 t_2) + r_1 + v \\ &= (s_2 + t_2 + s_1 t_2 + s_2 t_1) + r_1 + v \\ &= s_2 + (t_2 + r_1 + v) + s_1 t_2 + s_2 t_1 \\ &= s_2 + (t_1 + r_2 + v) + s_1 t_2 + s_2 t_1 \\ &= s_2 + r_2 + s_1 t_2 + s_2 t_1 + t_1 + v. \end{aligned}$$

Kemudian

$$\begin{aligned} & s_1 + r_1 + s_1 r_1 + s_2 r_2 + (s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_2 r_1 + s_1 v + s_2 v + t_1 + v) \\ &\quad = (s_1 + r_1 + s_1 t_1 + s_2 t_2 + t_1 + v) + s_1 r_1 + s_2 r_1 + s_2 r_2 + s_1 v \\ &\quad\qquad + s_2 v \\ &\quad = (s_2 + r_2 + s_1 t_2 + s_2 t_1 + t_1 + v) + s_1 r_1 + s_2 r_1 + s_2 r_2 + s_1 v \\ &\quad\qquad + s_2 v \\ &\quad = s_2 + r_2 + s_1(t_2 + r_1 + v) + s_2(t_1 + r_2 + v) + s_2 r_1 + t_1 + v \\ &\quad = s_2 + r_2 + s_1(t_1 + r_2 + v) + s_2(t_2 + r_1 + v) + s_2 r_1 + t_1 + v \\ &\quad = s_2 + r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1 + (s_1 t_1 + s_1 v + s_2 t_2 + s_2 v + s_2 r_1 + t_1 \\ &\quad\qquad + v) \\ &\quad = s_2 + r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1 + (s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_2 r_1 + s_1 v + s_2 v + t_1 \\ &\quad\qquad + v). \end{aligned}$$

Misalkan $u = s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_2 r_1 + s_1 v + s_2 v + t_1 + v$. Maka persamaan diatas menjadi

$$s_1 + r_1 + s_1 r_1 + s_2 r_2 + u = s_2 + r_2 + s_1 r_2 + s_2 r_1 + u$$

dengan $u \in K$.
Dengan demikian K adalah ideal semiregular kiri. ■

Lema 3.1.10
Suatu radikal Jacobson kiri dari semiring R adalah ideal semiregular kanan.

Bukti :
Misalkan K' adalah radikal Jacobson kiri dari semiring R. Karena radikal Jacobson kiri dari semiring R adalah ideal dua sisi semiregular kiri, maka K' adalah ideal kanan. Misalkan l_1, l_2 sebarang elemen dalam K'. Karena K' semiregular kiri, maka terdapat $m_1, m_2 \in K'$ sedemikian sehingga

$$l_1 + m_1 + m_1 l_1 + m_2 l_2 = l_2 + m_2 + m_2 l_1 + m_1 l_2.$$

Dan

$$m_1 + n_1 + n_1 m_1 + n_2 m_2 = m_2 + n_2 + n_2 m_1 + n_1 m_2,$$

dengan $n_1, n_2 \in K'$.
Dengan Lema 3.1.8, terdapat suatu elemen $p \in K'$ sedemikian sehingga berlaku

$$n_1 + l_2 + p = n_2 + l_1 + p.$$

Oleh karena itu

$$\begin{aligned} m_1 + l_1 + n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_1 + p \\ &= (m_1 + n_1 + n_1 m_1 + n_2 m_2) + l_1 + p \\ &= (m_2 + n_2 + n_2 m_1 + n_1 m_2) + l_1 + p \\ &= m_2 + (n_2 + l_1 + p) + n_2 m_1 + n_1 m_2 \\ &= m_2 + (n_1 + l_2 + p) + n_2 m_1 + n_1 m_2 \\ &= m_2 + l_2 + n_2 m_1 + n_1 m_2 + n_1 + p. \end{aligned}$$

Kemudian

$$\begin{aligned} m_1 + l_1 + l_1 m_1 + l_2 m_2 + (n_1 m_1 + n_2 m_2 + l_1 m_2 + p m_1 + p m_2 \\ + n_1 + p) \\ = (m_1 + l_1 + n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_1 + p) + l_1 m_1 + l_1 m_2 + l_2 m_2 \\ + p m_1 + p m_2 \\ = (m_2 + l_2 + n_2 m_1 + n_1 m_2 + n_1 + p) + l_1 m_1 + l_1 m_2 + l_2 m_2 \\ + p m_1 + p m_2 \end{aligned}$$

$$= m_2 + l_2 + (n_2 + l_1 + p)m_1 + (n_1 + l_2 + p)m_2 + l_1 m_2 + n_1 + p$$
$$= m_2 + l_2 + (n_1 + l_2 + p)m_1 + (n_2 + l_1 + p)m_2 + l_1 m_2 + n_1 + p$$
$$= m_2 + l_2 + l_2 m_1 + l_1 m_2 + (n_1 m_1 + p m_1 + n_2 m_2 + p m_2 + l_1 m_2 + n_1 + p)$$
$$= m_2 + l_2 + l_2 m_1 + l_1 m_2 + (n_1 m_1 + n_2 m_2 + l_1 m_2 + p m_1 + p m_2 + n_1 + p).$$

Misalkan $o = n_1 m_1 + n_2 m_2 + l_1 m_2 + p m_1 + p m_2 + n_1 + p$. Maka persamaan diatas menjadi

$$m_1 + l_1 + l_1 m_1 + l_2 m_2 + o = m_2 + l_2 + l_2 m_1 + l_1 m_2 + o$$

dengan $o \in K'$.
Dengan demikian K' adalah ideal semiregular kanan. ■

Teorema 3.1.11
Suatu radikal Jacobson kanan dari semiring R adalah radikal Jacobson kiri dari semiring R.

Bukti :

Misalkan K dan K' masing-masing adalah radikal Jacobson kanan dan radikal Jacobson kiri dari semiring R. Lema 3.1.9 mengakibatkan bahwa $K \subseteq K'$. Kemudian, Lema 3.1.10 mengakibatkan bahwa $K' \subseteq K$. Sehingga $K = K'$. Dengan demikian terbukti bahwa suatu radikal Jacobson kanan dari semiring R adalah radikal Jacobson kiri dari semiring R. ■

Definisi 3.1.12 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Radikal Jacobson kanan dari semiring R sama dengan radikal Jacobson kiri dari semiring R (lihat Teorema 3.1.11) dan disebut radikal Jacobson-Bourne dari semiring R, dinotasikan dengan $J(R)$. $J(R)$ juga disebut ideal semiregular kanan dari R atau disebut ideal dua sisi semiregular kanan dari R.

Definisi 3.1.13 (Bourne, 1951)
Suatu semiring R disebut semisimpel jika $J(R) = (0)$.

Contoh 3.1.14
Misalkan $R = (\mathbb{Z}^+, +, \cdot)$. Maka R adalah semisimpel.

Bukti :

Karena $I = \{0\}$ adalah ideal dalam semiring R. Maka persamaan berikut terpenuhi

$$0 + 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0.$$

Sehingga $I = \{0\}$ adalah ideal semiregular kanan dalam R. Kemudian, andaikan terdapat ideal semiregular kanan dalam semiring R selain ideal nol (sebut saja I). Maka, tanpa mengurangi perumuman (generalitas), dapat mengasumsikan bahwa terdapat $a_1, a_2 \in I$ sedemikian sehingga $a_1 + 3 \leq a_2$. Sesuai definisi ideal semiregular kanan, maka terdapat $r_1, r_2 \in I$ sedemikian sehingga

$$a_1 + r_1 + a_1 r_1 + a_2 r_2 = a_2 + r_2 + a_1 r_2 + a_2 r_1.$$

Dengan demikian

$$(a_2 - a_1 - 1) r_2 = (a_2 - a_1) + (a_2 - a_1 - 1) r_1$$

yang menghasilkan suatu kontradiksi. Jadi, $I = \{0\}$ adalah satu-satunya ideal semiregular kanan dari semiring R. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $J(R) = (0)$. ■

Definisi 3.1.15 (Bourne, 1951)
Suatu semiring R disebut semiring radikal jika $J(R) = R$.

Contoh 3.1.16
Misalkan $R = (\{0, 1, 2, \dots, n\}, max, min)$. Maka R adalah semiring radikal.

Bukti :

Misalkan I adalah ideal dari R dan misalkan $a_1, a_2 \in I$. Maka dapat dipilih $r_1 = r_2 = max\ \{a_1, a_2\} \in I$ sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} a_1 \oplus r_1 \oplus (a_1 \odot r_1) \oplus (a_2 \odot r_2) \\ = a_2 \oplus r_2 \oplus (a_1 \odot r_2) \oplus (a_2 \odot r_1) \end{aligned}$$

menurut Definisi 3.1.3, I adalah semiregular kanan. Karena I sebarang ideal dari R maka setiap ideal dari R adalah semiregular kanan. Menurut Definisi 3.1.7, Teorema 3.1.11, dan Definisi 3.1.12 $J(R) = R$. ■

3.2 π-regular (Kanan) dan Regular (Kanan)

Disini dibahas suatu semiring yang mempunyai sifat dimana setiap elemennya adalah π-regular (kanan) atau regular (kanan) yang dikenal dengan semiring π-regular (kanan) atau semiring regular (kanan).

Definisi 3.2.1 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Suatu elemen a dari semiring R disebut elemen π-regular kanan jika terdapat $x, y \in R$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$a^n + a^{n+1}x = a^{n+1}y.$$

Semiring R disebut semiring π-regular kanan jika setiap elemennya adalah elemen π-regular kanan.

Definisi 3.2.2 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Suatu elemen a dari semiring R disebut elemen π-regular jika terdapat $x, y \in R$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$a^n + a^n x a^n = a^n y a^n.$$

Semiring R disebut semiring π-regular jika setiap elemennya adalah elemen π-regular.

Definisi 3.2.3 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Dari Definisi 3.2.1, jika $n = 1$ maka a disebut elemen regular kanan dari semiring R. Semiring R disebut semiring regular kanan jika setiap elemennya adalah elemen regular kanan.

Definisi 3.2.4 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Dari Definisi 3.2.2, jika $n = 1$ maka a disebut elemen regular dari semiring R. Semiring R disebut semiring regular jika setiap elemen-nya adalah elemen regular.

Dari definisi-definisi diatas, dapat dikatakan bahwa suatu semiring regular (kanan) merupakan kasus khusus dari semiring π-regular (kanan). Dengan kata lain, setiap semiring regular (kanan) adalah semiring π-regular (kanan). Berikut diberikan contoh - contoh serta teorema-teorema yang berkaitan dengan semiring π-regular (kanan).

Contoh 3.2.5

Misalkan $R = (\{0,1\}, max, min)$ dan $M = \{(a_{ij})_{2\times 2} | a_{ij} \in R\}$. Didefinisikan suatu operasi penjumlahan dan perkalian pada himpunan M sebagai berikut:

$$A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} \oplus b_{ij})$$

$$AB = (a_{ij})(b_{ij}) \quad = (\sum_{k=1}^{2} a_{ik} \odot b_{kj})$$

$$= (a_{i1} \odot b_{1j} \oplus a_{i2} \odot b_{2j})$$

dengan $a \oplus b = max\,\{a, b\}$ dan $a \odot b = min\,\{a, b\}$. Didefinisikan juga $\sum_{k=1}^{2} a_{ik} = a_{i1} \oplus a_{i2}$. Maka M adalah semiring regular.

Bukti :

Ambil sebarang $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), C = (c_{ij}) \in M_{2\times 2}(R)$, dengan $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$ dan $i, j \in [1,2]$ serta melihat Contoh 2.3.5 maka:

(1) (i) $A + B = (a_{ij} \oplus b_{ij}) \in M$,

(ii) $(A + B) + C = ((a_{ij} \oplus b_{ij}) \oplus c_{ij})$

$= (a_{ij} \oplus (b_{ij} \oplus c_{ij}))$

$= A + (B + C)$,

(iii) $A + B = (a_{ij} \oplus b_{ij}) = (b_{ij} \oplus a_{ij})$

$= B + A$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(M, +)$ merupakan semigrup komutatif.

(2) (i) $AB = (\sum_{k=1}^{2} a_{ik} \odot b_{kj}) \in M$,

(ii) $(AB)C = \left(\sum_{k=1}^{2} (\sum_{l=1}^{2} a_{il} \odot b_{lk}) \odot c_{kj} \right)$

$= \left(\sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{l=1}^{2} (a_{il} \odot b_{lk}) \odot c_{kj} \right) \right)$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} \left(\sum_{l=1}^{2} a_{il} \odot (b_{lk} \odot c_{kj}) \right) \right)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{2} \left(\sum_{k=1}^{2} a_{il} \odot (b_{lk} \odot c_{kj}) \right) \right)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{2} \left(a_{il} \odot (\sum_{k=1}^{2} b_{lk} \odot c_{kj}) \right) \right)$$

$$= A(BC).$$

Dari (i) dan (ii) maka $(M,\cdot)$ merupakan semigrup.

(3) $(A+B)C = (a_{ij} \oplus b_{ij})(c_{ij})$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} (a_{ik} \oplus b_{ik}) \odot c_{kj} \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} (a_{ik} \odot c_{kj}) \oplus (b_{ik} \odot c_{kj}) \right)$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{2} (a_{ik} \odot c_{kj}) \right) + \left(\sum_{k=1}^{2} (b_{ik} \odot c_{kj}) \right)$$

$$= AC + BC.$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$A(B+C) = AB + AC.$

Dari (1), (2), dan (3) maka M merupakan suatu semiring.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa M merupakan regular.
Ambil sebarang $A = (a_{ij}) \in M_{2\times 2}(R)$, kemudian akan ditentukan elemen $X = (x_{ij}), Y = (y_{ij}) \in M_{2\times 2}(R)$ sedemikian sehingga berlaku

$$A + AXA = AYA.$$

Misalkan $A + AXA = AYA$. Mengacu pada bukti (2) dan (3) diatas, disini akan dicek pada entri ke-(i,j) untuk kesamaan matrik, sehingga diperoleh

$$a_{ij} \oplus [(a_{i1} \odot x_{11} \oplus a_{i2} \odot x_{21}) \odot a_{1j} \oplus (a_{i1} \odot x_{12} \oplus a_{i2} \odot x_{22}) \odot a_{2j}]$$
$$= [(a_{i1} \odot y_{11} \oplus a_{i2} \odot y_{21}) \odot a_{1j} \oplus (a_{i1} \odot y_{12} \oplus a_{i2} \odot y_{22}) \odot a_{2j}]$$
$$\Leftrightarrow a_{ij} \oplus [(a_{i1} \odot x_{11} \odot a_{1j}) \oplus (a_{i2} \odot x_{21} \odot a_{1j}) \oplus (a_{i1} \odot x_{12} \odot a_{2j}) \oplus (a_{i2} \odot x_{22} \odot a_{2j})]$$
$$= (a_{i1} \odot y_{11} \odot a_{1j}) \oplus (a_{i2} \odot y_{21} \odot a_{1j}) \oplus (a_{i1} \odot y_{12} \odot a_{2j}) \oplus (a_{i2} \odot y_{22} \odot a_{2j})$$
$$\Leftrightarrow [a_{ij} \oplus (a_{i1} \odot x_{11} \odot a_{1j})] \oplus (a_{i2} \odot x_{21} \odot a_{1j}) \oplus (a_{i1} \odot x_{12} \odot a_{2j}) \oplus \left(a_{i2} \odot x_{22} \odot a_{2j}\right)$$
$$= [(a_{i1} \odot y_{11} \odot a_{1j})] \oplus (a_{i2} \odot y_{21} \odot a_{1j}) \oplus (a_{i1} \odot y_{12} \odot a_{2j}) \oplus (a_{i2} \odot y_{22} \odot a_{2j}.$$

Pilih $x_{ij} = y_{ij}$ dan $x_{ji} \geq a_{ij}$ agar persamaan diatas terpenuhi. Jadi sebarang $A \in M_{2\times 2}(R)$, ditemukan $X, Y \in M_{2\times 2}(R)$, sedemikian sehingga $A + AXA = AYA$. Dengan Definisi 3.2.4, M adalah semiring regular. ■

Contoh 3.2.6

Misalkan $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ dengan $a \oplus b = max\{a, b\}$ dan $a \odot b = a + b$. Maka R adalah semiring regular kanan yang komutatif.

Bukti :

(1) Ambil sebarang $a, b, c \in R$, maka berlaku :

(i) $a \oplus b = max\{a, b\} \in R$,

(ii)
$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= max\{a, b\} \oplus c \\ &= max\{(a, b), c\} \\ &= max\{a, (b, c)\} \\ &= a \oplus max\{b, c\} \\ &= a \oplus (b \oplus c),\end{aligned}$$

(iii) $a \oplus b = max\{a, b\} = max\{b, a\} = b \oplus a$,

(iv) $-\infty \oplus a = max\{-\infty, a\} = max\{a, -\infty\} = a \oplus -\infty = a$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R,\oplus)$ merupakan semigrup komutatif.

(2) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka berlaku:

(i) $a \odot b = a + b \in R$,

(ii) $(a \odot b) \odot c = (a + b) + c$

$= a + (b + c)$

$= a \odot (b \odot c)$,

(iii) $a \odot b = a + b = b + a = b \odot a$,

(iv) $0 \odot a = 0 + a = a + 0 = a \odot 0 = a$.

Dari (i), (ii), dan (iii) maka $(R,\odot)$ merupakan semigrup komutatif.

(3) Ambil sebarang $a, b, c \in R$ maka:

$(a \oplus b) \odot c = max\{a, b\} + c$

$= max\{a + c, b + c\}$

$= (a \odot c) \oplus (b \odot c)$

dengan cara yang sama akan diperoleh

$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$.

Dari (1), (2), dan (3) maka R adalah semiring komutatif dengan *zero element* $-\infty$ dan *identity element* 0.

Sekarang akan ditunjukkan bahwa R merupakan regular kanan.
Ambil sebarang $a \in R$, kemudian akan ditentukan elemen $x, y \in R$ sedemikian sehingga berlaku

$$a \oplus (a \odot a \odot x) = a \odot a \odot y.$$

Misalkan $a \oplus (a \odot a \odot x) = a \odot a \odot y$. Maka diperoleh

$$a \oplus (a + a + x) = a + a + y$$

$$max\{a, (a + a + x)\} = a + a + y,$$

pilih $x = y$ agar persamaan diatas terpenuhi. Jadi untuk sebarang $a \in R$ dapat ditemukan $x, y \in R$, sedemikian sehingga berlaku $a \oplus (a \odot a \odot x) = a \odot a \odot y$. Karena setiap pengambilan sebarang elemen dalam semiring R merupakan elemen regular kanan. Maka dengan Definisi 3.2.3, R adalah semiring regular kanan. ■

Teorema 3.2.7
Jika R adalah semiring π-regular kanan dan kiri maka R adalah semiring π-regular.

Bukti :

Misalkan diberikan sebarang $a \in R$.
R adalah semiring π-regular kanan, maka terdapat $x, y \in R$ dan bilangan bulat positif m sedemikian sehingga

$$a^m + a^{m+1}x = a^{m+1}y \tag{3.1}$$

R adalah semiring π-regular kiri, maka terdapat $x', y' \in R$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$a^n + x'a^{n+1} = y'a^{n+1}. \tag{3.2}$$

Kalikan (3.1) dengan a dari sebelah kiri, dengan y dari sebelah kanan, sehingga

$$a(a^m + a^{m+1}x)y = a(a^{m+1}y)y$$
$$(a^{m+1} + a^{m+2}x)y = (a^{m+2}y)y$$
$$a^{m+1}y + a^{m+2}xy = a^{m+2}y^2. \tag{3.3}$$

Dengan menggunakan (3.1), maka (3.3) dapat ditulis

$$a^m + a^{m+1}x + a^{m+2}xy = a^{m+2}y^2. \tag{3.4}$$

Kalikan (3.4) dengan a dari sebelah kiri, dengan x dari sebelah kanan, kemudian masing-masing ruas tambahkan dengan a^m maka

$$a^m + a(a^m + a^{m+1}x + a^{m+2}xy)x = a^m + a(a^{m+2}y^2)x$$
$$a^m + (a^{m+1} + a^{m+2}x + a^{m+3}xy)x = a^m + (a^{m+3}y^2)x$$
$$a^m + a^{m+1}x + a^{m+2}x^2 + a^{m+3}xyx = a^m + a^{m+3}y^2x. \tag{3.5}$$

Dengan menggunakan (3.1), maka (3.5) menjadi

$$a^{m+1}y + a^{m+2}x^2 + a^{m+3}xyx = a^m + a^{m+3}y^2x$$
$$a^m + a^{m+3}y^2x = a^{m+1}y + a^{m+2}x^2 + a^{m+3}xyx$$
$$a^m + a^{m+3}(y^2x) = a^{m+1}(y + ax^2 + a^2xyx)$$
$$a^m + a^{m+3}z_1 = a^{m+1}z_2. \tag{3.6}$$

dengan $z_1 = y^2x, z_2 = y + ax^2 + a^2xyx \in R$.

Kalikan (3.6) dengan a dari sebelah kiri, dengan z_2 dari sebelah kanan, diperoleh

$$a(a^m + a^{m+3}z_1)z_2 = a(a^{m+1}z_2)z_2$$
$$(a^{m+1} + a^{m+4}z_1)z_2 = (a^{m+2}z_2)z_2$$
$$a^{m+1}z_2 + a^{m+4}z_1z_2 = a^{m+2}{z_2}^2. \tag{3.7}$$

Dengan menggunakan (3.6), maka (3.7) menjadi

$$a^m + a^{m+3}z_1 + a^{m+4}z_1z_2 = a^{m+2}{z_2}^2$$
$$a^m + a^{m+2}(az_1 + a^2z_1z_2) = a^{m+2}({z_2}^2)$$
$$a^m + a^{m+2}w_1 = a^{m+2}w_2 \tag{3.8}$$

dengan $w_1 = az_1 + a^2z_1z_2, w_2 = {z_2}^2 \in R$.

Ulangi proses yang sama. Setelah langkah ke-(n-1) diperoleh

$$a^m + a^{m+n}u_1 = a^{m+n}u_2 \tag{3.9}$$

untuk suatu $u_1, u_2 \in R$.

Dengan menggunakan persamaan (3.2) dan analog dengan proses yang sebelumnya pada persamaan (3.1), maka diperoleh

$$a^n + v_1a^{m+n} = v_2a^{m+n} \tag{3.10}$$

untuk suatu $v_1, v_2 \in R$.

Kalikan (3.9) dengan (3.10) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} a^{m+n} + a^m v_1 a^{m+n} + a^{m+n}u_1a^n + a^{m+n}u_1v_1a^{m+n} \\ = a^{m+n}u_2v_2a^{m+n} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Tambahkan kedua ruas dengan $a^{m+n}u_1v_1a^{m+n}$ pada (3.11), maka

$$\begin{aligned} a^{m+n} + a^m v_1 a^{m+n} + a^{m+n}u_1a^n + a^{m+n}u_1v_1a^{m+n} \\ + a^{m+n}u_1v_1a^{m+n} \\ = a^{m+n}u_2v_2a^{m+n} + a^{m+n}u_1v_1a^{m+n} \\ \Leftrightarrow a^{m+n} + (a^m + a^{m+n}u_1)v_1a^{m+n} + a^{m+n}u_1(a^n + v_1a^{m+n}) \\ = a^{m+n}(u_2v_2 + u_1v_1)a^{m+n}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dengan menggunakan (3.9) dan (3.10), persamaan (3.12) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} a^{m+n} + (a^{m+n}u_2)v_1a^{m+n} + a^{m+n}u_1(v_2a^{m+n}) \\ = a^{m+n}(u_2v_2 + u_1v_1)a^{m+n} \end{aligned}$$

$$a^{m+n} + a^{m+n}(u_2v_1 + u_1v_2)a^{m+n} = a^{m+n}(u_2v_2 + u_1v_1)a^{m+n}.$$

Jadi R adalah semiring π-regular. ■

Definisi 3.2.8 (Gupta dan Chaudhari, 2006)
Suatu semiring R disebut semiring duo jika setiap ideal satu sisi dari R adalah ideal dua sisi dari R.

Corollary 3.2.9
Misalkan R adalah semiring duo. R adalah semiring π-regular kanan jika dan hanya jika R adalah semiring π-regular.

Bukti :

($\Longrightarrow$) Misalkan $a \in R$, seperti pada Teorema 3.2.7.
Karena R adalah semiring π-regular kanan, maka terdapat $x, y, x', y' \in R$ dan bilangan bulat postif m sedemikian sehingga berlaku

$$a^m + a^{m+1}x' = a^{m+1}y'$$

dari Teorema 3.2.7

$$a^m + a^{m+2}x = a^{m+2}y$$

Misalkan $\langle a^{m+1}\rangle_l$ adalah ideal kiri dari R yang dihasilkan oleh a^{m+1}. Karena R adalah semiring duo maka $\langle a^{m+1}\rangle_l$ adalah ideal dua sisi dari R. Sehingga $a^{m+1}x, a^{m+1}y \in \langle a^{m+1}\rangle_l$ dan $a^{m+1}x, a^{m+1}y$ dapat dinyatakan

$$a^{m+1}x = sa^{m+1} + ja^{m+1} \qquad (3.13)$$

$$a^{m+1}y = ta^{m+1} + ka^{m+1} \qquad (3.14)$$

untuk suatu $s, t \in R$ dan $j, k \in \mathbb{Z}^+$.
Diketahui

$$a^m + a^{m+2}x = a^{m+2}y$$

$$a^m + a(a^{m+1}x) = a(a^{m+1}y)$$

dengan (3.13) dan (3.14) diperoleh

$$a^m + a(sa^{m+1} + ja^{m+1}) = a(ta^{m+1} + ka^{m+1})$$

$$a^m + (as + aj)a^{m+1} = (at + ak)a^{m+1}.$$

Misalkan $as + aj = u \in R$ dan $at + ak = v \in R$. Sehingga persamaan di atas menjadi

$$a^m + ua^{m+1} = va^{m+1}.$$

Oleh karena itu R adalah semiring π-regular kiri. R adalah semiring π-regular kanan dan kiri, Menurut Teorema 3.2.7, R adalah semiring π-regular.

($\Leftarrow$) Akan ditunjukkan R adalah π-regular kanan. Misalkan $a \in R$. Karena diketahui R adalah semiring π-regular maka terdapat $x, y \in R$ dan bilangan bulat postif m sedemikian sehingga berlaku

$$a^m + a^m x a^m = a^m y a^m$$

Akan ditunjukkan bahwa R adalah semiring π-regular kanan. Misalkan $\langle a^m \rangle_r$ adalah ideal kanan dari R yang dihasilkan oleh a^m. Diketahui R adalah semiring duo, maka menurut Definisi 3.2.8, $\langle a^m \rangle_r$ adalah ideal dua sisi dari R. Sehingga $xa^m, ya^m \in \langle a^m \rangle_r$ dan xa^m, ya^m dapat dinyatakan

$$xa^m = a^m s + a^m j \tag{3.15}$$

$$ya^m = a^m t + a^m k \tag{3.16}$$

untuk suatu $s, t \in R$ dan $j, k \in \mathbb{Z}^+$.

Diketahui

$$a^m + a^m x a^m = a^m y a^m$$
$$a^m + a^m(xa^m) = a^m(ya^m)$$

dengan (3.15) dan (3.16) diperoleh

$$a^m + a^m(a^m s + a^m j) = a^m(a^m t + a^m k)$$
$$a^m + a^{2m}(s + j) = a^{2m}(t + k) \tag{3.17}$$

- Jika $m > 1$ maka (3.17) menjadi $a^m + a^{m+1}w = a^{m+1}z$ untuk $w = (s + j), z = (t + k) \in R$.
- Jika $m = 1$ maka (3.17) menjadi $a + a^2 w = a^2 z$ untuk $w = (s + j), z = (t + k) \in R$.

Karena setiap pengambilan sebarang elemen dalam semiring R merupakan elemen π-regular kanan. Maka R adalah semiring π-regular kanan. ∎

Lema 3.2.10
Misalkan R adalah semiring π-regular kanan dan $a \in J(R)$. Maka $a^n + w = w$, untuk suatu $w \in J(R)$ dan n adalah bilangan bulat positif.

Bukti :
Misalkan $a \in J(R)$. Karena diketahui R adalah semiring π-regular kanan, maka terdapat $x, y \in R$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$a^n + a^{n+1}x = a^{n+1}y. \tag{3.18}$$

Karena $ax, ay \in J(R)$, maka terdapat $s_1, s_2 \in J(R)$ sedemikian sehingga

$$ax + s_1 + axs_1 + ays_2 = ay + s_2 + ays_1 + axs_2. \tag{3.19}$$

Kalikan (3.19) dengan a^n dari sebelah kiri, diperoleh

$$a^n(ax + s_1 + axs_1 + ays_2) = a^n(ay + s_2 + ays_1 + axs_2)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow a^{n+1}x + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 + a^{n+1}ys_2 \\ = a^{n+1}y + a^n s_2 + a^{n+1}ys_1 + a^{n+1}xs_2\end{aligned} \tag{3.20}$$

dengan menggunakan (3.18), maka (3.20) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\ & a^{n+1}x + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 + (a^n + a^{n+1}x)s_2 \\ & = (a^n + a^{n+1}x) + a^n s_2 + (a^n + a^{n+1}x)s_1 \\ & + a^{n+1}xs_2 \\ \Leftrightarrow\ & a^{n+1}x + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 + a^n s_2 + a^{n+1}xs_2 \\ & = a^n + a^{n+1}x + a^n s_2 + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 \\ & + a^{n+1}xs_2 \\ \Leftrightarrow\ & a^n + a^{n+1}x + a^n s_2 + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 + a^{n+1}xs_2 \\ & = a^{n+1}x + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 + a^n s_2 + a^{n+1}xs_2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a^n + w = w,$$

dengan $w = a^{n+1}x + a^n s_2 + a^n s_1 + a^{n+1}xs_1 + a^{n+1}xs_2 \in J(R)$.

Dengan demikian terbukti Lema 3.2.10. ■

Teorema 3.2.11
Jika R adalah semiprima yang *additive cancellative*, semiring *artinian* atau *noetherian* kanan π-regular kanan maka R adalah semisimpel.

Bukti :

Misalkan R adalah semiring *artinian* atau *noetherian* kanan π-regular kanan dan $a \in J(R)$. Menurut Lema 3.2.10, jika R adalah semiring π-regular kanan dan $a \in J(R)$ maka $a^n + w = w$, untuk suatu $w \in J(R)$ dan n bilangan bulat positif.

$$a^n + w = w$$

$$a^n = 0. \qquad (\textit{additive cancellative})$$

Karena sebarang elemen $a \in J(R)$ mengakibatkan $a^n = 0$, maka menurut Definisi 2.4.15, $J(R)$ adalah ideal nil, tetapi karena untuk setiap elemen nilpoten dalam $J(R)$ berbentuk $a^n = 0$, maka $J(R)$ juga dikatakan sebagai ideal nilpoten dari semiring R $((J(R))^n =$ *(0)*. Diketahui *R* adalah semiprima, maka *JR=(0)*. Menurut Definisi 3.1.13, maka R adalah semisimple. ■

Syarat bahwa R adalah semiring yang *additive cancellative* adalah penting. Berikut adalah contoh dengan sifat *additive cancellative* tidak dipenuhi dalam suatu semiring, yang mengakibatkan Teorema 3.2.11 tidak dapat digunakan pada contoh ini.

Contoh 3.2.12
Misalkan $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, max, min)$. Maka R adalah semiring *artinian* semiprima yang komutatif dengan *identity element* ∞, yang tidak *additive cancellative.* Tetapi bukan semisimple.

Bukti :

Jelas R adalah semiring komutatif dengan *identity element* ∞ (lihat Contoh 2.3.5).

- Akan ditunjukkan bahwa R adalah *artinian*.

  Sekarang klaim bahwa I adalah ideal dari R jika dan hanya jika

  $I = \{0,1,2, \ldots, t\} = I_t$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}^+$, atau

$I = \mathbb{Z}^+$, atau
$I = R$.

Misalkan I adalah ideal dari R. Andaikan $I \neq \mathbb{Z}^+, I \neq R$. Maka terdapat suatu elemen $x \neq \infty$ sedemikian sehingga $x \in \mathbb{Z}^+$ tetapi $x \notin I$. Misalkan $S = \{a \in \mathbb{Z}^+ | a \notin I\}$, pasti $S \neq \emptyset$. Berdasarkan *well ordering principle* (Definisi 2.1.1) maka S mempunyai suatu elemen terkecil, sebut saja r. Sehingga $t = r - 1$ adalah bilangan bulat tak negatif dan t elemen di dalam I. Dari definisi ideal dalam R, jelas bahwa $I = \{0,1,2, \ldots, t\}$.
Misalkan I adalah barisan menurun dari ideal-ideal dalam R. Dari klaim diatas maka

$I = \{0,1,2, \ldots, t\} = I_t$ untuk suatu $t \in \mathbb{Z}^+$, atau
$I = \mathbb{Z}^+$, atau
$I = R$.

Dalam sebarang kasus tidak ada barisan menurun sejati takhingga dari ideal-ideal dalam R. Dengan Definisi 2.6.2, R adalah semiring *artinian*.

- Akan ditunjukkan bahwa R adalah semiprima.
  Sebarang ideal dalam semiring R memenuhi $I^n = (0)$ jika dan hanya jika $I = 0$. Menurut Definisi 2.4.16, R adalah semiprima.

- Akan ditunjukkan bahwa R bukan semisimple.
  Misalkan I adalah ideal dari R dan misalkan $a_1, a_2 \in I$. Maka dapat dipilih $r_1 = r_2 = max\{a_1, a_2\} \in I$ sedemikian sehingga

$$a_1 \oplus r_1 \oplus (a_1 \odot r_1) \oplus (a_2 \odot r_2)$$
$$= a_2 \oplus r_2 \oplus (a_1 \odot r_2) \oplus (a_2 \odot r_1)$$

menurut Definisi 3.1.3, I adalah semiregular kanan. Karena I sebarang ideal dari R maka setiap ideal dari R adalah semiregular kanan. Menurut Definisi 3.1.7, Teorema 3.1.11, dan Definisi 3.1.12 $J(R) = R$. Kemudian dengan Definisi 3.1.15, R adalah semiring radikal. Jadi R bukan semisimpel. ■

Lema 3.2.13
Misalkan R adalah semiring dan $a, x \in R$. Jika $a^n + a^{n+1}x$ adalah elemen regular kanan dengan $n > 0$ maka a adalah elemen π-regular kanan.

Bukti :

Misalkan $a^n + a^{n+1}x$ adalah elemen regular kanan. Maka menurut Definisi 3.2.3, terdapat suatu elemen w dan z dalam R sedemikian sehingga berlaku

$$a^n + a^{n+1}x + (a^n + a^{n+1}x)^2 w = (a^n + a^{n+1}x)^2 z$$

$$\Leftrightarrow a^n + a^{n+1}x + (a^{2n} + a^{2n+1}x + a^{n+1}xa^n + a^{n+1}xa^{n+1}x)w$$
$$= (a^{2n} + a^{2n+1}x + a^{n+1}xa^n + a^{n+1}xa^{n+1}x)z$$

$$\Leftrightarrow a^n + a^{n+1}x + a^{2n}w + a^{2n+1}xw + a^{n+1}xa^n w + a^{n+1}xa^{n+1}xw$$
$$= a^{n+1}(a^{n-1} + a^n x + xa^n + xa^{n+1}x)z$$

$$\Leftrightarrow a^n + a^{n+1}(x + a^{n-1}w + a^n xw + xa^n w + xa^{n+1}xw)$$
$$= a^{n+1}(a^{n-1} + a^n x + xa^n + xa^{n+1}x)z.$$

Menurut Definisi 3.2.1, a adalah elemen π-regular kanan, untuk suatu $(x + a^{n-1}w + a^n xw + xa^n w + xa^{n+1}xw), (a^{n-1}z + a^n xz +$ $xanz+xan+1xz\in R$. ■

Proposisi 3.2.14
Setiap ideal dari semiring π-regular kanan adalah π-regular kanan.

Bukti :

Misalkan I adalah ideal dari semiring π-regular kanan R. Misalkan $a \in I$. Maka terdapat $x, y \in R$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$a^n + a^{n+1}x = a^{n+1}y. \tag{3.21}$$

Kalikan (3.21) dengan a dari sebelah kiri, dengan x dari sebelah kanan dan tambahkan kedua ruas dengan a^n, maka

$$a^n + a(a^n + a^{n+1}x)x = a^n + a(a^{n+1}y)x$$
$$(a^n + a^{n+1}x) + a^{n+2}x^2 = a^n + a^{n+2}yx$$
$$a^{n+1}y + a^{n+2}x^2 = a^n + a^{n+2}yx \tag{3.22}$$

Sekarang kalikan (3.21) dengan a dari sebelah kiri dan dengan y dari sebelah kanan serta tambahkan kedua ruas dengan $a^{n+2}x^2$, maka

$$a^{n+2}x^2 + a(a^n + a^{n+1}x)y = a^{n+2}x^2 + a(a^{n+1}y)y$$

$$a^{n+2}x^2 + a^{n+1}y + a^{n+2}xy = a^{n+2}x^2 + a^{n+2}y^2. \qquad (3.23)$$

Dengan menggunakan (3.22), maka (3.23) dapat ditulis menjadi

$$a^n + a^{n+2}yx + a^{n+2}xy = a^{n+2}x^2 + a^{n+2}y^2$$

$$a^n + a^{n+1}(ayx + axy) = a^{n+1}(ax^2 + ay^2)$$

$$a^n + a^{n+1}u_1 = a^{n+1}u_2$$

dengan $u_1 = (ayx + axy), u_2 = (ax^2 + ay^2) \in I$.
Jadi I adalah π-regular kanan.

Karena setiap pengambilan sebarang ideal dalam semiring π-regular kanan R mengakibatkan ideal tersebut adalah π-regular kanan, maka terbukti bahwa setiap ideal dari semiring π-regular kanan adalah π-regular kanan. ∎

Proposisi 3.2.15
Semiring R adalah π-regular kanan jika dan hanya jika R/I adalah π-regular kanan untuk suatu Q-ideal I dalam semiring R.

Bukti :

Misalkan R adalah semiring, R/I adalah semiring kuosien dengan I adalah Q-ideal dan Q *subset* tak kosong dari semiring R.

($\Longrightarrow$) Definisikan suatu pemetaan

$$f : R \longrightarrow R/I$$
$$a \longmapsto f(a) = q + I$$

Dengan $q \in Q$ adalah elemen yang tunggal sedemikian sehingga $a + I \subseteq q + I$.

Akan ditunjukkan bahwa f adalah suatu homomorfisma yang onto (epimorfisma).

(i) Ambil sebarang $a_1, a_2 \in R$, maka $a_1 + a_2 = a_3 \in R$, sehingga

$$
\begin{aligned}
f(a_1 + a_2) &= f(a_3) \\
&= q_3 + I \\
&= (q_1 + I) \boxplus (q_2 + I) \\
&= f(a_1) \boxplus f(a_2)
\end{aligned}
$$

dengan $q_3 \in Q$ adalah elemen tunggal sedemikian sehingga $a_3 + I \subseteq q_3 + I$ dan $q_1 + q_2 + I \subseteq q_3 + I$.

(ii) Ambil sebarang $a_1, a_2 \in R$ maka $a_1 \cdot a_2 = a_4 \in R$, sehingga

$$
\begin{aligned}
f(a_1 \cdot a_2) &= f(a_4) \\
&= q_4 + I \\
&= (q_1 + I) \boxdot (q_2 + I) \\
&= f(a_1) \boxdot f(a_2)
\end{aligned}
$$

dengan $q_4 \in Q$ adalah elemen tunggal sedemikian sehingga $a_4 + I \subseteq q_4 + I$ dan $q_1 \cdot q_2 + I \subseteq q_4 + I$.

Dari (i) dan (ii), dan menurut Definisi 2.3.7, f adalah suatu homomorfisma.

Ambil sebarang elemen $y \in R/I$ maka elemen tersebut dapat dinyatakan sebagai $y = q + I = f(a)$, dengan $q \in Q$ adalah elemen yang tunggal sedemikian sehingga $a + I \subseteq q + I$ dan $a \in R$. Karena setiap pengambilan sebarang $y \in R/I$ akan ditemukan suatu $a \in R$ yang memenuhi $f(a) = q + I = y$, maka f adalah suatu pemetaan yang surjektif (onto).

Jadi f adalah suatu homomorfisma yang surjektif. Dengan kata lain R/I merupakan bayangan dari R. Karena R merupakan semiring π-regular kanan maka R/I juga semiring π-regular kanan.

($\Leftarrow$) Karena $I = 0$ adalah suatu Q-ideal dari R dengan $Q = R$ dan R adalah semiring π-regular kanan, maka jelas bahwa $R \cong R/0$ adalah semiring π-regular kanan. ■

Teorema 3.2.16

Misalkan I adalah Q-ideal dari semiring R sedemikian sehingga $Q = (R - I) \cup \{0\}$. Jika I adalah ideal regular kanan dan R/I adalah semiring kuosien π-regular kanan, maka R adalah semiring π-regular kanan.

Bukti :

Misalkan $q \in R$.

- Jika $q \in I$, maka q adalah π-regular kanan.
- Jika $q \notin I$, maka $q \in Q$ dan $q \neq 0$.

  Akan ditunjukkan q adalah elemen π-regular kanan.

  Misalkan $(q + I) \in R/I$. Karena diketahui R/I adalah π-regular kanan, maka menurut Definisi 3.2.1 terdapat elemen $q' + I, q" + I \in R/I$ dan bilangan bulat positif n sedemikian sehingga berlaku

$$\begin{aligned}(q+I)^n \boxplus (q+I)^{n+1} \boxdot (q'+I) &= (q+I)^{n+1} \boxdot (q"+I) \\ &= q^* + I\end{aligned}$$

  dengan $q^* \in Q$ adalah elemen tunggal sedemikian sehingga

  1. $q^{n+1}q" + I \subseteq q^* + I$
  2. $q^n + q^{n+1}q' + I \subseteq q^* + I$

  dengan menggunakan Lema 2.4.5, maka

  (i) Jika $q^{n+1}q" \in I$, maka $q^{n+1}q" = q^* + x$, untuk suatu $x \in I$. Diketahui I adalah Q-ideal dari semiring R, maka menurut Lema 2.4.12, I adalah k-ideal dari semiring R. Karena $x \in I$, $q^* + x \in I$, dan $q^* \in R$, maka $q^* \in I$. Dengan (2) diperoleh

$$q^n + q^{n+1}q' \in q^n + q^{n+1}q' + I \subseteq q^* + I \subseteq I.$$

  Kemudian dengan Lema 3.2.13, q adalah elemen π-regular kanan.

  (ii) Jika $q^{n+1}q" \notin I$, maka $q^{n+1}q" \in Q$.
  Kemudian dengan menggunakan (1) dan Definisi 2.4.9, maka

$$q^{n+1}q" = q^*.$$

  Jadi,

$$q^n + q^{n+1}q' + I \subseteq q^* + I = q^{n+1}q" + I.$$

Jika $q^n + q^{n+1}q' \in Q$ maka $q^n + q^{n+1}q' = q^{n+1}q"$. Menurut Definisi 3.2.1, q adalah elemen π-regular kanan.

Jika $q^n + q^{n+1}q' \notin Q$ maka $q^n + q^{n+1}q' \in I$. Diketahui I adalah regular kanan, menurut Lema 3.2.13, q adalah elemen π-regular kanan.

Karena q sebarang elemen dalam R, jadi R adalah semiring π-regular kanan. ■

Contoh 3.2.17

Misalkan $R = (\mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}, max, min)$. Maka R adalah semiring komutatif dengan *identity element* ∞. Misalkan $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Maka I adalah Q-ideal dari R dengan $Q = \{0, 6, 7, 8, \dots\} \cup \{\infty\}$. Karena $Q = (R - I) \cup \{0\}$ maka I, R/I dan R adalah regular kanan.

Bukti :

Jelas R adalah semiring komutatif dengan *identity element* ∞ dan I adalah Q-ideal dari semiring R (lihat Contoh 2.3.5 dan Contoh 2.4.10).

- Akan ditunjukkan I adalah regular kanan.
  Ambil sebarang $i \in I$, kemudian akan ditentukan suatu elemen $i_1, i_2 \in I$ sedemikian sehingga berlaku
  $$i \oplus (i \odot i \odot i_1) = i \odot i \odot i_2.$$
  Misalkan $i \oplus (i \odot i \odot i_1) = i \odot i \odot i_2$. Maka diperoleh
  $$i \oplus min\{i, i_1\} = min\{i, i_2\}$$
  $$max\{i, min\{i, i_1\}\} = min\{i, i_2\}$$
  pilih $i \leq i_1$ dan $i \leq i_2$ agar persamaan di atas terpenuhi. Jadi sebarang $i \in I$, ditemukan $i_1, i_2 \in I$ sedemikian sehingga berlaku $i \oplus (i \odot i \odot i_1) = i \odot i \odot i_2$. Dengan Definisi 3.2.3, I adalah ideal regular kanan.

- Akan ditunjukkan R/I adalah regular kanan.
  Ambil sebarang $a \in R/I$, kemudian akan ditentukan suatu elemen $x, y \in R/I$ sedemikian sehingga berlaku

$$a \boxplus (a \boxdot a \boxdot x) = a \boxdot a \boxdot y.$$

  $a, x, y \in R/I$, maka dapat dinyatakan sebagai $a = q_1 \oplus I$, $x = q_2 \oplus I$, dan $y = q_3 \oplus I$ dengan $q_1, q_2, q_3 \in Q$.

  Misalkan

$$a \boxplus (a \boxdot a \boxdot x) = a \boxdot a \boxdot y.$$
$$\Leftrightarrow (q_1 \oplus I) \boxplus \big((q_1 \oplus I) \boxdot (q_1 \oplus I) \boxdot (q_2 \oplus I)\big)$$
$$= \big((q_1 \oplus I) \boxdot (q_1 \oplus I) \boxdot (q_3 \oplus I)\big)$$
$$\Leftrightarrow q^* \oplus I = q^{**} \oplus I$$

  dengan $q^*, q^{**} \in Q$ adalah elemen tunggal sedemikian sehingga
  1. $q_1 \oplus q_1 \odot q_1 \odot q_2 \oplus I \subseteq q^* \oplus I$
  2. $q_1 \odot q_1 \odot q_2 \oplus I \subseteq q^* \oplus I$

  Pilih $q^* = q^{**}$ agar persamaan diatas terpenuhi. Jadi sebarang elemen $a \in R/I$, dapat ditemukan $x, y \in R/I$ sedemikian sehingga berlaku

$$a \boxplus (a \boxdot a \boxdot x) = a \boxdot a \boxdot y.$$

  Dengan Definisi 3.2.3, R/I adalah semiring regular kanan.

- Akan ditunjukkan R adalah regular kanan.
  Ambil sebarang $r \in R$, kemudian akan ditentukan suatu elemen $r_1, r_2 \in R$ sedemikian sehingga berlaku

$$r \oplus (r \odot r \odot r_1) = r \odot r \odot r_2.$$

  Misalkan $r \oplus (r \odot r \odot r_1) = r \odot r \odot r_2$. Maka diperoleh

$$r \oplus min\{r, r_1\} = min\{r, r_2\}$$
$$max\{r, min\{r, r_1\}\} = min\{r, r_2\}$$

  pilih $r \leq r_1$ dan $r \leq r_2$ agar persamaan di atas terpenuhi. Jadi sebarang $r \in R$, ditemukan $r_1, r_2 \in R$ sedemikian sehingga berlaku $r \oplus (r \odot r \odot r_1) = r \odot r \odot r_2$. Dengan Definisi 3.2.3, R adalah semiring regular kanan. ■

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan adalah sebagai berikut:

1. Jika semiring R adalah semiprima yang berlaku sifat *additive cancellative*, semiring *artinian* atau *noetherian* kanan π-regular kanan maka R adalah semisimpel.
2. Misalkan I adalah Q-ideal dari semiring R sedemikian sehingga berlaku $Q = (R - I) \cup \{0\}$. Jika I adalah ideal regular kanan dan R/I adalah semiring kuosien π-regular kanan, maka R adalah semiring π-regular kanan.

4.2 Saran

Materi tentang radikal Jacobon-Bourne, *noetherian* dan *artinian* dalam semiring dapat dilanjutkan sebagai pembahasan tersendiri, mengingat keterbatasan referensi dari penulis dan begitu pentingnya kaitan materi-materi tersebut dengan bentuk struktur aljabar yang lain, khususnya dengan semiring π-regular.

DAFTAR PUSTAKA

Bhattacharya, P. B., dkk. 1986. *Basic Abstract Algebra*. Cambridge University Press. New York.

Bourne, Samuel. 1951. *The Jacobson Radical of A Semiring*. Prec. Nat. Acad. Sci. Vol. 37: 163-170.

Chaudari, J. N. dan V. Gupta. 1994. *Weak Primary Decomposition Theorem for Right Noetherian Semirings*. Indian J. Pure and Appl. Math. 25(6): 647-654.

Dummit, David S. dan Richard M. Foote. 2002. *Abstract Algebra 2nd ed*. John Wiley & Sons, Inc. Singapore.

Gupta, Vishnu dan J. N. Chaudari. 2003. *Some Remaks on Semirings*. Radovi Matematićki Vol. 12: 13-18.

Gupta, Vishnu dan J. N. Chaudari. 2006. *Right π-regular Semirings*. Sarajevo Journal of Mathematics Vol. 2: 3-9.

Hartley dan Hawkes. 1994. *Ring, Module and Linear Algebra*. Chapman and Hall. London.

Hirano, Yasuyuki. 1978. *Some Studies of Strongly π-regular Rings*. Mathematical Journal of Okayama University Vol. 20: 141-149.

http://math.chapman.edu/cgi-bin/structures.pl?Semirings_with_identity. Tanggal akses: 18 September 2008.

http://en.wikipedia.org/wiki/Well_ordering_principle. Tanggal akses: 23 November 2008.

Kandasamy, W.B.V. 2002. *Smarandache Semirings, Semifield, and Semivector Spaces*. Departement of Mathematics Indian Institute of Technology. Madras.

Kim, Hee Sik. 1989. *On Quotient Semiring and Extension of Quotient Halfring*. Comm. Korean Mathematic Society No. 1: 17-22.

Whitelaw, T.A. 1995. *Introduction to Abstract Algebra*. Chapman and Hall, Inc. New York.