

**ANALISIS KESTABILAN MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS
YANG BERGANTUNG PADA KEPADATAN POPULASI**

SKRIPSI

**Oleh:
INDAH SURYANDARI
0410940026-94**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009**





**ANALISIS KESTABILAN MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS
YANG BERGANTUNG PADA KEPADATAN POPULASI**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
INDAH SURYANDARI
0410940026-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009**





LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS KESTABILAN MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS
YANG BERGANTUNG PADA KEPADATAN POPULASI**

Oleh:
INDAH SURYANDARI
0410940026-94

Setelah dipertahankan di depan majelis penguji
pada tanggal 29 Januari 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Dosen Pembimbing I

Dosen Pembimbing II

Dra. Trisilowati, M.Sc
NIP. 131 837 955

Dr. Wuryansari M. K, M.Si
NIP. 132 048 784

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **INDAH SURYANDARI**
NIM : **0410940026-94**
Jurusan : **MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul : **ANALISIS KESTABILAN MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT
TUBERKULOSIS YANG
BERGANTUNG PADA
KEPADATAN POPULASI**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di dalam isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 29 Januari 2009
Yang menyatakan,

(Indah Suryandari)
NIM. 0410940026-94



repository.ub.ac

ANALISIS KESTABILAN MODEL
PENYEBARAN PENYAKIT TUBERKULOSIS
YANG BERGANTUNG PADA KEPADATAN POPULASI

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas konstruksi dan analisis kestabilan model penyebaran penyakit tuberkulosis (TB) yang bergantung pada kepadatan populasi. Pada konstruksi model, digunakan analisis kompartemen. Penyebaran penyakit TB dimodelkan dalam sistem persamaan diferensial biasa nonlinier dengan empat variabel, yaitu *susceptible* (S), *latently infected* (L), *infectious* (I), dan *treated* (T). Berdasarkan hasil analisis diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Sifat kestabilan titik kesetimbangan tersebut ditentukan dengan menggunakan analisis R_0 (angka reproduksi dasar). Untuk menentukan nilai R_0 dapat digunakan pendekatan operator generasi selanjutnya, yang didefinisikan sebagai jari-jari spektrum dari operator generasi selanjutnya. Pada saat $R_0 < 1$ populasi terbebas dari penyakit dan pada saat $R_0 > 1$ penyakit akan mewabah. Berdasarkan hasil analisis R_0 tersebut, diperoleh karakteristik area, yaitu area yang sebaiknya dihuni tiap individu agar populasi terbebas dari penyakit. Hasil simulasi model menunjukkan bahwa kepadatan populasi sangat mempengaruhi laju penyebaran penyakit TB. Semakin padat populasi dalam wilayah yang sudah ditetapkan, maka semakin besar pula laju penyebaran penyakit TB.

Kata kunci : tuberkulosis, kestabilan titik kesetimbangan, angka reproduksi dasar, pendekatan operator generasi selanjutnya, karakteristik area.



repository.ub.ac

STABILITY ANALYSIS
OF TRANSMISSION TUBERCULOSIS DISEASE MODEL
IN DENSITY DEPENDENT POPULATION

ABSTRACT

This final project studies the construction and analyzes the stability of transmission model of tuberculosis (TB) disease in density dependent population. To construct the model, compartment analysis is used. Transmission of TB disease is modelled as a nonlinear differential equation systems of four variables, namely *susceptibles (S)*, *latently infected (L)*, *infectious (I)*, and *treated (T)*. According to the analysis, the model has two equilibrium points, namely disease free and endemic equilibrium point. Stability of these equilibrium points can be analyzed using R_0 (basic reproductive number). R_0 can be determined using the next generation operator approach and it is defined as spectral radius of next generation operator. When $R_0 < 1$ the population will be free of disease and when $R_0 > 1$ the disease will be spread. Based on the result of the analysis of R_0 , a characteristic area which describes the area occupied per individual in order to eradicate of disease is obtained. The results of the simulation model show that population density affects transmission of TB disease. If the population density in the area is high, transmission of TB disease is also high.

Key words : tuberculosis, stability of equilibrium points, basic reproductive number, the next generation operator approach, characteristic area.



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, pertolongan dan petunjuk-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai suri tauladan bagi penulis.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini tidak dapat terealisasi tanpa bimbingan dan bantuan baik yang bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dra. Trisilowati, M.Sc selaku pembimbing I dan Dr. Wuryansari M.K, M.Si selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan dan ilmu yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Drs. Hery Subagio, M.Kes, Drs. Marsudi, M.S, dan Isnani Darti, S.Si, M.Si selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan skripsi ini.
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika dan Drs. M. Muslikh, M.Si selaku dosen penasihat akademik atas segala pengarahan, motivasi dan ilmu yang telah diberikan selama penulis melaksanakan studi.
4. Ayahanda dan Ibunda tersayang atas kasih sayang, dan do'a yang tiada henti demi kesuksesan putrinya, juga kakak-kakakku tersayang.
5. Seluruh dosen beserta staf pengajar yang telah mencurahkan ilmunya selama penulis melaksanakan studi.
6. Tommy Andryanto, atas kesabaran, motivasi, semangat dan pengorbanan yang diberikan selama penulisan skripsi ini.
7. Haris Asri, Firman, Indri, Riza, Potter dan sahabat-sahabat seperjuangan Matematika angkatan 2004 yang tercinta atas semua bantuan dan semangat yang diberikan kepada penulis.
8. Segenap staf dan karyawan TU Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
9. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, semua kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan selanjutnya.

Akhir kata, penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 29 Januari 2009

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah.....	2
1.3 Batasan Masalah.....	3
1.4 Tujuan.....	3
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Persamaan Diferensial.....	5
2.2 Sistem Dinamik.....	6
2.3 Sistem Otonomus Linier.....	8
2.4 Sistem Otonomus Nonlinier.....	9
2.5 Sistem Otonomus Linier Dua Dimensi.....	13
2.6 Angka Reproduksi Dasar (R_0).....	14
2.7 Pendekatan Operator Generasi Selanjutnya (<i>the next generation operator approach</i>).....	15
BAB III PEMBAHASAN	25
3.1 Model Kompartemen Penyebaran TB yang Bergantung pada Kepadatan Populasi.....	25
3.2 Variabel-variabel dan Parameter-parameter Model TB yang Bergantung pada Kepadatan Populasi.....	25
3.3 Konstruksi Model.....	26
3.4 Titik Kesetimbangan.....	30
3.5 Kestabilan Titik Kesetimbangan.....	34

3.5.1	Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit	34
3.5.2	Kestabilan Titik Keseimbangan Endemik	36
3.5.3	R_0 untuk TB dengan Pendekatan Operator Generasi Selanjutnya (<i>the next generation operator approach</i>).....	36
3.6	Simulasi Model	41
3.6.1	Karakteristik Area.....	41
3.6.2	Kestabilan Model dengan Analisis Sistem Dinamik	42
3.6.3	Kestabilan Model dengan Analisis R_0	46
	3.6.3.1 Kasus $R_0 < 1$	46
	3.6.3.2 Kasus $R_0 > 1$	49
3.6.4	Simulasi Model Apabila Diberikan Ukuran Area yang Berbeda.....	52
3.6.5	Simulasi Model Apabila Diberikan Laju Rekrutment yang Berbeda	55
BAB IV PENUTUP		59
4.1	Kesimpulan	59
4.2	Saran	60
DAFTAR PUSTAKA		61



DAFTAR GAMBAR

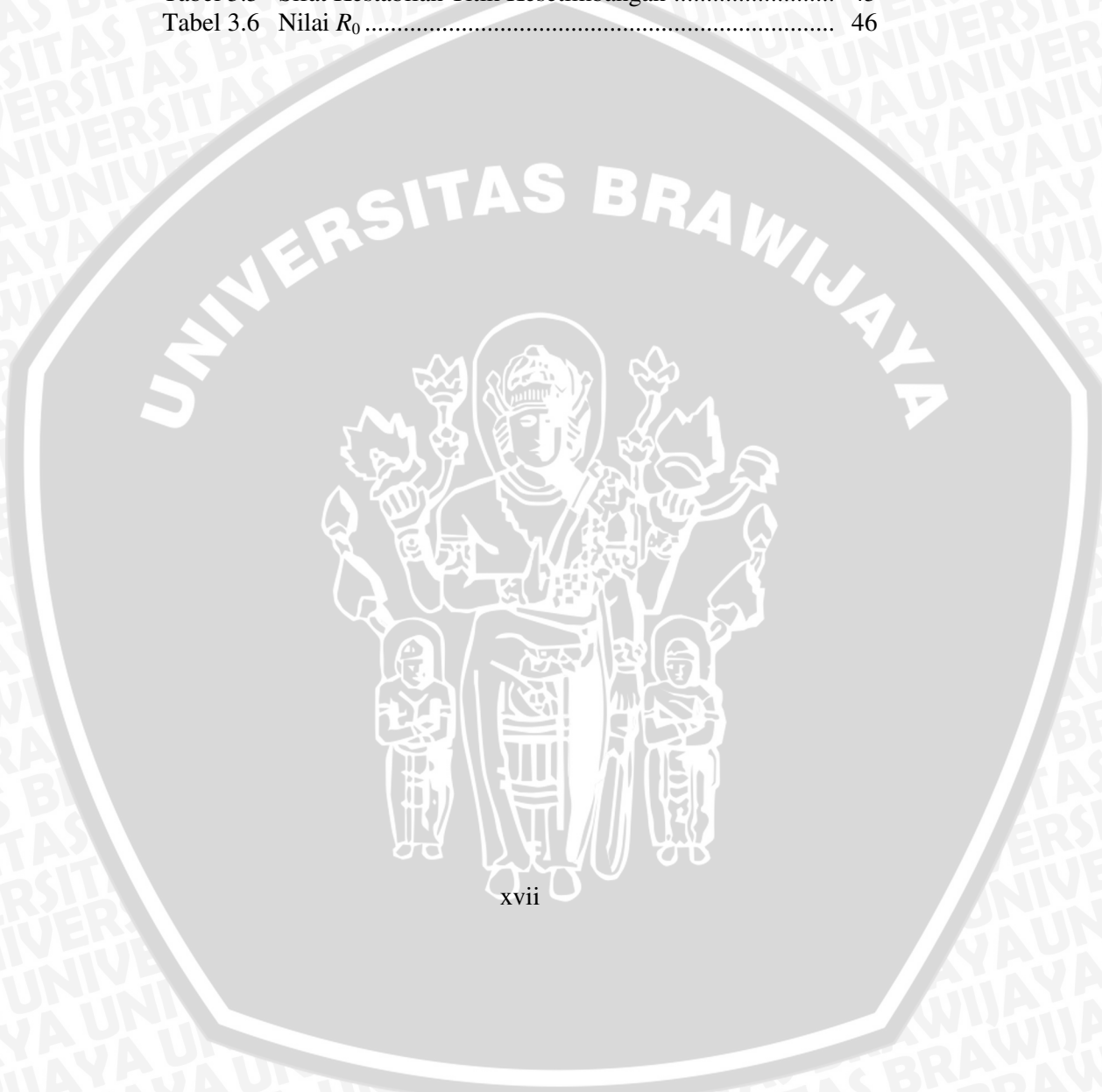
	Halaman
Gambar 3.1 Diagram kompartemen penyakit TB yang bergantung pada kepadatan populasi.....	25
Gambar 3.2 Simulasi model untuk kasus $R_0 < 1$	48
Gambar 3.3 Simulasi model untuk kasus $R_0 > 1$	51
Gambar 3.4 Simulasi model dengan perbedaan ukuran area ...	54
Gambar 3.5 Simulasi model dengan perbedaan laju rekrutment	57





DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1 Nilai Parameter	41
Tabel 3.2 Nilai Syarat Awal	41
Tabel 3.3 Titik Kesetimbangan Model	43
Tabel 3.4 Nilai Eigen.....	44
Tabel 3.5 Sifat Kestabilan Titik Kesetimbangan	45
Tabel 3.6 Nilai R_0	46





BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Penyakit tuberkulosis (TB) adalah penyakit menular langsung yang disebabkan oleh kuman TB yaitu *Mycobacterium Tuberculosis*. Sebagian besar kuman TB menyerang paru, tetapi dapat juga menyerang organ tubuh lainnya. Mereka yang mengidap HIV/AIDS atau yang mengalami gizi buruk sangat rentan terhadap penyakit ini. Lemahnya daya tahan tubuh mempermudah perkembangbiakan kuman TB.

Menurut WHO, kira-kira sepertiga penduduk dunia terinfeksi TB, terutama penduduk di negara berkembang yang 99% kematiannya disebabkan penyakit TB. Penderita TB yang tidak dirawat dapat menularkan penyakitnya dengan cepat, terutama di lingkungan penampungan dan *camp* pengungsian, karena tingkat kepadatan penduduk di lingkungan tersebut sangat tinggi. Jika tidak ada penanganan secara serius dari pemerintah atau masyarakat, maka penyebaran penyakit menular tersebut dapat mengakibatkan suatu epidemik atau wabah penyakit, yang sulit dikendalikan bila tidak dikenali model penyebarannya.

Model epidemik penyakit TB merupakan salah satu contoh pemodelan matematika dalam bidang biologi dan kedokteran. Model tersebut diformulasikan sebagai model SLIT, yang merupakan model penyebaran penyakit dengan empat kompartemen, yaitu: *susceptible*, *latently infected*, *infectious*, dan *treated*. *Susceptible* adalah kelompok individu sehat yang mempunyai kemungkinan untuk tertular penyakit. *Latently infected* adalah kelompok individu yang telah tertular penyakit tetapi belum mempunyai kemampuan untuk menularkan penyakitnya kepada individu lain. *Infectious* adalah kelompok individu yang telah tertular penyakit dan sudah mempunyai kemampuan untuk menularkan penyakitnya kepada individu lain. *Treated* adalah kelompok individu yang telah sembuh dari penyakitnya.

Model SLIT penyebaran TB yang dikaji dalam skripsi ini bergantung pada kepadatan populasi. Model ini dikonstruksi dari model kompartemen sehingga diperoleh sistem persamaan

diferensial. Dengan menggunakan analisis sistem dinamik, maka titik kesetimbangan dan sifat kestabilan titik kesetimbangan model tersebut dapat ditentukan. Namun, tidak mudah menentukan sifat kestabilan model menggunakan analisis sistem dinamik untuk model yang berdimensi tinggi seperti model TB. Oleh karena itu, dalam skripsi ini akan dilakukan analisis R_0 (*basic reproduction number*) untuk menentukan sifat kestabilan titik kesetimbangan model. R_0 adalah suatu angka yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi epidemik atau tidak. R_0 umumnya diperoleh dari perhitungan nilai eigen dari matriks Jacobi pada titik kesetimbangan. Namun, perhitungan nilai eigen tersebut sulit dilakukan apabila matriks Jacobi pada titik kesetimbangannya berordo tinggi. Oleh karena itu, dalam skripsi ini, untuk menentukan nilai R_0 digunakan pendekatan operator generasi selanjutnya (*the next generation operator approach*). Dari analisis kestabilan R_0 , dapat ditentukan karakteristik area/wilayah yang sebaiknya dihuni individu untuk meminimumkan terjadinya TB. Selanjutnya, dengan menggunakan paket program MATLAB, akan disimulasikan perilaku solusi apabila diberikan nilai parameter yang berbeda.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang permasalahan di atas, maka pokok permasalahan yang dikaji dalam penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana mengkonstruksi model SLIT pada dinamika penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi?
2. Bagaimana menentukan titik kesetimbangan model penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi berdasarkan model matematika yang diperoleh?
3. Bagaimana nilai R_0 dan karakteristik area dari model penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi?
4. Bagaimana hasil simulasi model apabila diberikan perbedaan nilai parameter tertentu?

1.3 Batasan Masalah

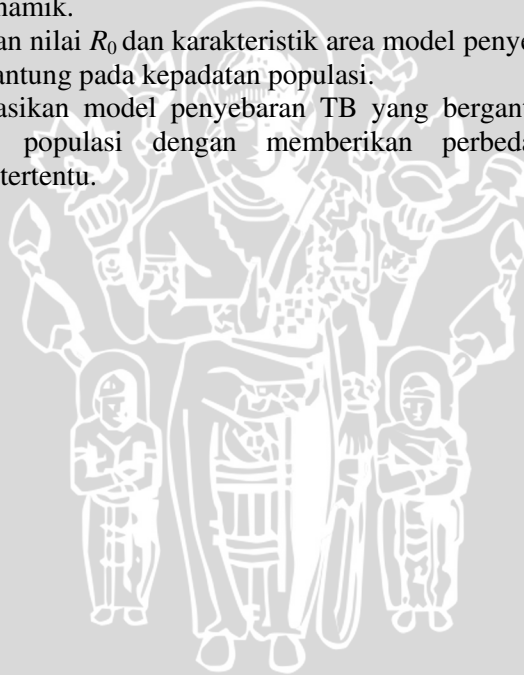
Penulisan skripsi ini difokuskan pada pembahasan dengan beberapa batasan masalah sebagai berikut.

1. Populasi bersifat homogen, artinya semua individu dapat terinfeksi penyakit TB apabila melakukan kontak langsung dengan penderita TB (individu *infectious*).
2. Penduduk didistribusikan di seluruh wilayah.
3. Mengabaikan pengaruh aktivitas lain yang dilakukan individu yang dapat mempercepat penyebaran TB.
4. Semua imigran dan individu yang baru lahir diasumsikan tidak terinfeksi dan oleh karena itu masuk dalam kategori *susceptibles*.

1.4 Tujuan

Tujuan penulisan dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkonstruksi model SLIT pada dinamika penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi.
2. Menentukan titik kesetimbangan model penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi dengan menggunakan analisis dinamik.
3. Menentukan nilai R_0 dan karakteristik area model penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi.
4. Mensimulasikan model penyebaran TB yang bergantung pada kepadatan populasi dengan memberikan perbedaan nilai parameter tertentu.





BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu turunan atau lebih dari suatu fungsi yang tidak diketahui (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.2 (Orde Persamaan Diferensial)

Orde persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari turunan yang muncul dalam suatu persamaan diferensial (Ross, 1984).

Definisi 2.1.3 (Derajat Persamaan Diferensial)

Derajat atau *degree* suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi yang muncul dalam suatu persamaan diferensial (Wibisono, 1999).

Definisi 2.1.4 (Persamaan Diferensial Biasa)

Persamaan diferensial biasa ialah persamaan diferensial yang memuat hanya satu peubah bebas (Finizio dan Ladas, 1982). Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y^{(n)} \quad (2.1)$$

dengan $y, y', \dots, y^{(n)}$ adalah fungsi dari x (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.1.5 (Persamaan Diferensial Biasa Linier)

Suatu persamaan diferensial biasa berorde n dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y disebut linier, jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = f(x) \quad (2.2)$$

dengan $a_0(x) \neq 0$ (Ross, 1984).

Definisi 2.1.6 (Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier)

Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang tidak berbentuk seperti persamaan (2.2) atau dengan kata lain, derajat persamaan diferensial tersebut tidak sama dengan satu dan atau terdapat perkalian antara variabel tak bebas dengan turunannya (Ross, 1984).

Definisi 2.1.7 (Sistem Persamaan Diferensial Biasa)

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah suatu sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui dan n merupakan bilangan bulat positif ≥ 2 . Bentuk umum sistem persamaan diferensial orde satu dengan n fungsi yang tidak diketahui adalah

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, \dots, x_n; t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = X_n(x_1, \dots, x_n; t) \end{cases} \quad (2.3)$$

dengan X_i adalah fungsi dari $n+1$ variabel, untuk $i = 1, \dots, n$ (Birkhoff dan Rota, 1989).

2.2 Sistem Dinamik**Definisi 2.2.1 (Sistem Dinamik)**

Suatu sistem dinamik adalah suatu sistem yang dapat diketahui nilainya di masa yang akan datang jika diberikan suatu kondisi awal pada masa sekarang atau di masa yang telah lalu (Naggle dan Edward, 1993).

Definisi 2.2.2 (Sistem Otonomus)

Suatu sistem dinamik yang berbentuk

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = F_1(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ \frac{df_2}{dt} = F_2(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ \frac{df_3}{dt} = F_3(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ \frac{df_4}{dt} = F_4(f_1, f_2, f_3, f_4) \end{cases} \quad (2.4)$$

dengan fungsi F_i tidak bergantung terhadap waktu t disebut sistem dinamik yang bersifat otonomus, untuk $i = 1, \dots, 4$ (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.2.3 (Titik Keseimbangan)

Misalkan diberikan suatu sistem otonomus (2.4), maka titik $(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)$ yang memenuhi $F_1(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*) = F_2(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*) = F_3(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*) = F_4(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*) = 0$ disebut titik keseimbangan atau titik tetap sistem tersebut (Ross, 1984).

Definisi 2.2.4 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik keseimbangan $(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)$ disebut

- (a) stabil jika $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga untuk

$$\|(f_1(0), f_2(0), f_3(0), f_4(0)) - (f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)\| < \delta$$
 berlaku $\|(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) - (f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)\| < \epsilon, t > 0$
- (b) tak stabil apabila titik tersebut tidak stabil atau tidak memenuhi kriteria (a)
- (c) stabil asimtotik jika ia stabil dan $\exists \delta_0, 0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $f_1 = f_1(t), f_2 = f_2(t), f_3 = f_3(t)$, dan $f_4 = f_4(t)$ yang memenuhi

$$\|(f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) - (f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)\| < \delta_0$$

$$\text{berlaku } \lim_{t \rightarrow \infty} (f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)) = (f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)$$

(Robinson, 2004).

2.3 Sistem Otonomus Linier

Suatu sistem otonomus dikatakan linier bila tidak ada perkalian di antara variabel tak bebasnya. Sebagai contoh, berikut ini merupakan sistem otonomus linier berdimensi empat.

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + a_{13}f_3 + a_{14}f_4 \\ \frac{df_2}{dt} = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + a_{23}f_3 + a_{24}f_4 \\ \frac{df_3}{dt} = a_{31}f_1 + a_{32}f_2 + a_{33}f_3 + a_{34}f_4 \\ \frac{df_4}{dt} = a_{41}f_1 + a_{42}f_2 + a_{43}f_3 + a_{44}f_4 \end{cases} \quad (2.5)$$

dengan a_{ij} adalah konstanta real, untuk $i, j = 1, \dots, 4$. Persamaan (2.5) dapat dinyatakan dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} \frac{df_1}{dt} \\ \frac{df_2}{dt} \\ \frac{df_3}{dt} \\ \frac{df_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

atau dapat dinyatakan dalam

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = A\vec{f} \quad (2.6)$$

dengan $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ dan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ disebut

matriks koefisien. Bila $\det(A) \neq 0$, maka titik $(0,0,0,0)$ merupakan satu-satunya titik kesetimbangan sistem otonomus linier tersebut.

Teorema 2.1

- Titik kesetimbangan sistem (2.5) bersifat stabil, jika semua nilai eigen dari matriks koefisien A sistem tersebut adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real tak positif.
- Titik kesetimbangan sistem (2.5) bersifat stabil asimtotik, jika semua nilai eigen dari matriks koefisien A sistem tersebut adalah real dan negatif atau mempunyai bagian real negatif.
- Titik kesetimbangan sistem (2.5) bersifat tak stabil, jika paling sedikit satu nilai eigen dari matriks koefisien A sistem tersebut memiliki bagian real yang positif.

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.4 Sistem Otonomus Nonlinier

Perhatikan sistem otonomus nonlinier berikut.

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = F_1(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ \frac{df_2}{dt} = F_2(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ \frac{df_3}{dt} = F_3(f_1, f_2, f_3, f_4) \\ \frac{df_4}{dt} = F_4(f_1, f_2, f_3, f_4) \end{cases} \quad (2.7)$$

Asumsikan F_1, F_2, F_3 dan F_4 mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik $\vec{f}^* = (f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)$. Deret Taylor fungsi F_1, F_2, F_3 dan F_4 di sekitar \vec{f}^* adalah

$$F_1(\bar{f}) = F_1(\bar{f}^*) + \frac{\partial F_1(\bar{f}^*)}{\partial f_1}(f_1 - f_1^*) + \frac{\partial F_1(\bar{f}^*)}{\partial f_2}(f_2 - f_2^*) + \frac{\partial F_1(\bar{f}^*)}{\partial f_3}(f_3 - f_3^*) + \frac{\partial F_1(\bar{f}^*)}{\partial f_4}(f_4 - f_4^*) + \eta_1(\bar{f}) \quad (2.8)$$

$$F_2(\bar{f}) = F_2(\bar{f}^*) + \frac{\partial F_2(\bar{f}^*)}{\partial f_1}(f_1 - f_1^*) + \frac{\partial F_2(\bar{f}^*)}{\partial f_2}(f_2 - f_2^*) + \frac{\partial F_2(\bar{f}^*)}{\partial f_3}(f_3 - f_3^*) + \frac{\partial F_2(\bar{f}^*)}{\partial f_4}(f_4 - f_4^*) + \eta_2(\bar{f}) \quad (2.9)$$

$$F_3(\bar{f}) = F_3(\bar{f}^*) + \frac{\partial F_3(\bar{f}^*)}{\partial f_1}(f_1 - f_1^*) + \frac{\partial F_3(\bar{f}^*)}{\partial f_2}(f_2 - f_2^*) + \frac{\partial F_3(\bar{f}^*)}{\partial f_3}(f_3 - f_3^*) + \frac{\partial F_3(\bar{f}^*)}{\partial f_4}(f_4 - f_4^*) + \eta_3(\bar{f}) \quad (2.10)$$

dan

$$F_4(\bar{f}) = F_4(\bar{f}^*) + \frac{\partial F_4(\bar{f}^*)}{\partial f_1}(f_1 - f_1^*) + \frac{\partial F_4(\bar{f}^*)}{\partial f_2}(f_2 - f_2^*) + \frac{\partial F_4(\bar{f}^*)}{\partial f_3}(f_3 - f_3^*) + \frac{\partial F_4(\bar{f}^*)}{\partial f_4}(f_4 - f_4^*) + \eta_4(\bar{f}) \quad (2.11)$$

dengan $\eta_1(\bar{f})$, $\eta_2(\bar{f})$, $\eta_3(\bar{f})$ dan $\eta_4(\bar{f})$ adalah suku sisa.

Karena $\frac{df_1}{dt} = \frac{d}{dt}(f_1 - f_1^*)$, $\frac{df_2}{dt} = \frac{d}{dt}(f_2 - f_2^*)$,

$\frac{df_3}{dt} = \frac{d}{dt}(f_3 - f_3^*)$, dan $\frac{df_4}{dt} = \frac{d}{dt}(f_4 - f_4^*)$, maka persamaan (2.8)

– (2.11) dapat ditulis dalam bentuk matriks, sebagai

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_1 - f_1^* \\ f_2 - f_2^* \\ f_3 - f_3^* \\ f_4 - f_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(\bar{f}^*) \\ F_2(\bar{f}^*) \\ F_3(\bar{f}^*) \\ F_4(\bar{f}^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial f_1} & \frac{\partial F_1}{\partial f_2} & \frac{\partial F_1}{\partial f_3} & \frac{\partial F_1}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial f_1} & \frac{\partial F_2}{\partial f_2} & \frac{\partial F_2}{\partial f_3} & \frac{\partial F_2}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial f_1} & \frac{\partial F_3}{\partial f_2} & \frac{\partial F_3}{\partial f_3} & \frac{\partial F_3}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial f_1} & \frac{\partial F_4}{\partial f_2} & \frac{\partial F_4}{\partial f_3} & \frac{\partial F_4}{\partial f_4} \end{bmatrix}_{(\bar{f}^*)} \begin{bmatrix} f_1 - f_1^* \\ f_2 - f_2^* \\ f_3 - f_3^* \\ f_4 - f_4^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(\bar{f}) \\ \eta_2(\bar{f}) \\ \eta_3(\bar{f}) \\ \eta_4(\bar{f}) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Matriks

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial f_1} & \frac{\partial F_1}{\partial f_2} & \frac{\partial F_1}{\partial f_3} & \frac{\partial F_1}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial f_1} & \frac{\partial F_2}{\partial f_2} & \frac{\partial F_2}{\partial f_3} & \frac{\partial F_2}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial f_1} & \frac{\partial F_3}{\partial f_2} & \frac{\partial F_3}{\partial f_3} & \frac{\partial F_3}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial f_1} & \frac{\partial F_4}{\partial f_2} & \frac{\partial F_4}{\partial f_3} & \frac{\partial F_4}{\partial f_4} \end{bmatrix}_{(\bar{f}^*)}$$

disebut matriks Jacobi atau *partial derivative matrix (derivative matrix)* dan dinotasikan dengan $DF(\bar{f}^*)$ atau disingkat dengan DF .

Jika dimisalkan $\hat{f}_1 = f_1 - f_1^*$, $\hat{f}_2 = f_2 - f_2^*$, $\hat{f}_3 = f_3 - f_3^*$ dan $\hat{f}_4 = f_4 - f_4^*$, serta mengingat $F_1(\bar{f}^*) = F_2(\bar{f}^*) = F_3(\bar{f}^*) = 0$, dan $F_4(\bar{f}^*) = 0$, maka persamaan (2.12) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{d\hat{f}_1}{dt} \\ \frac{d\hat{f}_2}{dt} \\ \frac{d\hat{f}_3}{dt} \\ \frac{d\hat{f}_4}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial f_1} & \frac{\partial F_1}{\partial f_2} & \frac{\partial F_1}{\partial f_3} & \frac{\partial F_1}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_2}{\partial f_1} & \frac{\partial F_2}{\partial f_2} & \frac{\partial F_2}{\partial f_3} & \frac{\partial F_2}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_3}{\partial f_1} & \frac{\partial F_3}{\partial f_2} & \frac{\partial F_3}{\partial f_3} & \frac{\partial F_3}{\partial f_4} \\ \frac{\partial F_4}{\partial f_1} & \frac{\partial F_4}{\partial f_2} & \frac{\partial F_4}{\partial f_3} & \frac{\partial F_4}{\partial f_4} \end{bmatrix}_{(\vec{f}^*)} \begin{bmatrix} \hat{f}_1 \\ \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \\ \hat{f}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w} + \vec{\eta} \quad (2.14)$$

dengan $\vec{w} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4)$ dan $\vec{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$. Bila (f_1, f_2, f_3, f_4) cukup dekat dengan $(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)$, maka $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4)$ bernilai kecil, sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu, $\vec{\eta}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinier (2.7) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF\vec{w}. \quad (2.15)$$

Untuk $f_1 = f_1^*, f_2 = f_2^*, f_3 = f_3^*$ dan $f_4 = f_4^*$ diperoleh $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4) = (0, 0, 0, 0)$, sehingga sistem linier (2.15) memiliki titik kesetimbangan $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3, \hat{f}_4) = (0, 0, 0, 0)$ dan DF identik dengan A pada persamaan (2.6) (Robinson, 2004).

Teorema 2.2 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinier)

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinier (2.7) bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinier (2.7) bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan tak stabil.
3. Jika salah satu nilai eigen matriks $DF(\vec{f}^*)$ bernilai nol dan yang lainnya mempunyai bagian real negatif, maka titik

kesetimbangannya bersifat stabil tetapi tidak stabil asimtotik (Robinson, 2004).

2.5 Sistem Otonomus Linier Dua Dimensi

Pandang sistem otonomus linier dua dimensi

$$\begin{cases} \frac{df_1}{dt} = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 \\ \frac{df_2}{dt} = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) dapat dinyatakan dalam

$$\frac{d\vec{f}}{dt} = A\vec{f} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Nilai eigen matriks A dapat diperoleh dari

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

yaitu

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \lambda^2 - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0 \\ \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Persamaan (2.17) disebut persamaan karakteristik matriks A . Akar-akar persamaan, yaitu λ_1 dan λ_2 disebut nilai karakteristik atau nilai eigen. Mengingat $(a_{11} + a_{22})$ merupakan *trace* A , dan $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ adalah determinan A , maka persamaan (2.17) dapat dinyatakan sebagai

$$\lambda^2 - Tr(A)\lambda + Det(A) = 0$$

dengan $Tr(A)$ adalah *trace* (A) dan $Det(A)$ adalah determinan A .

Teorema 2.3 (Kestabilan Sistem Otonomus Linier Dua Dimensi)

Titik kesetimbangan sistem (2.16) bersifat

1. tidak stabil jika $Det(A) < 0$ atau jika $Det(A) > 0$ dan $Tr(A) > 0$
2. stabil asimtotik jika $Det(A) > 0$ dan $Tr(A) < 0$ (Robinson, 2004).

2.6 Angka Reproduksi Dasar (R_0)

Angka reproduksi dasar (R_0) didefinisikan sebagai angka rata-rata banyaknya infeksi berikutnya (infeksi baru) yang disebabkan oleh satu individu *infectious* selama individu tersebut hidup sebagai individu *infectious*.

Infeksi TB dan *re*-infeksi selalu ada dalam komunitas dikarenakan adanya kontak pernapasan antara individu *susceptible*, individu *treated* dan individu *infectious*. Untuk mengetahui dinamika penyebaran penyakit TB, digunakan suatu angka yang menjadi ukuran untuk mengetahui apakah dalam suatu populasi terjadi epidemik atau tidak. Angka tersebut dikenal sebagai angka reproduksi dasar (R_0). Dengan demikian, kestabilan titik kesetimbangan dapat dianalisis menggunakan R_0 . Kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik jika $R_0 < 1$ dan tidak stabil jika $R_0 > 1$. Dengan kata lain, ketika $R_0 < 1$ setiap individu *infectious* akan menyebabkan kurang dari satu infeksi baru, akibatnya dalam populasi tidak terjadi epidemik dan untuk jangka waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit. Sebaliknya, ketika $R_0 > 1$ setiap individu *infectious* akan menyebabkan lebih dari satu infeksi baru, akibatnya dalam populasi akan terjadi epidemik dan apabila tidak dilakukan penanganan akan menjadi suatu endemik (wabah), atau secara matematis titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik.

R_0 umumnya dapat diperoleh dari perhitungan nilai eigen dari matriks Jacobi pada titik kesetimbangan model. Namun, dalam model TB yang bergantung pada kepadatan populasi ini, matriks Jacobi pada titik kesetimbangan model berordo 4×4 dan melibatkan banyak parameter, sehingga perhitungan R_0 akan sulit dilakukan. Oleh karena itu, digunakan metode pendekatan operator generasi selanjutnya (*the next generation operator approach*) untuk menghitung R_0 .

Definisi 2.6.1 (Spektrum dan Jari-Jari Spektrum)

Spektrum atau *spectral* suatu matriks adalah kumpulan nilai eigen matriks tersebut. Jari-jari spektrum atau *spectral radius* suatu matriks G yang dinotasikan dengan $\rho(G)$ adalah nilai terbesar dari

modulus semua nilai eigen matriks G , dengan G adalah matriks operator generasi selanjutnya.

2.7 Pendekatan Operator Generasi selanjutnya (*the next generation operator approach*)

Dalam pendekatan operator generasi selanjutnya, kelas-kelas epidemik dalam suatu model dapat dikelompokkan berdasarkan tingkatan infeksi suatu individu. Model epidemik dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = f(X, Y, Z) \\ \frac{dY}{dt} = g(X, Y, Z) \\ \frac{dZ}{dt} = h(X, Y, Z) \end{cases} \quad (2.18)$$

dengan $X \in R^r$, $Y \in R^s$, $Z \in R^n$, $r, s, n \geq 0$ dan $h(X, 0, 0) = 0$. Komponen X menyatakan banyaknya individu *susceptible*, individu *treated/recovered*, dan kelas-kelas individu yang tidak terinfeksi. Komponen Y menyatakan banyaknya individu yang terinfeksi tapi tidak dapat menularkan penyakitnya kepada individu lain (individu *latently infected* atau *non-infected stages*). Sedangkan komponen Z merepresentasikan banyaknya individu terinfeksi yang dapat menularkan penyakitnya kepada individu lain (individu *infectious* dan individu *non-quarentined*).

Misalkan $U_0 = (X^*, 0, 0) \in R^{r+s+n}$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit, yaitu

$$f(X^*, 0, 0) = g(X^*, 0, 0) = h(X^*, 0, 0) = 0. \quad (2.19)$$

Diasumsikan bahwa persamaan $g(X^*, Y, Z) = 0$ secara implisit menentukan fungsi $Y = \hat{g}(X^*, Z)$. Selanjutnya, dimisalkan $A = D_Z h(X^*, \hat{g}(X^*, 0), 0)$ dan diasumsikan bahwa A dapat ditulis ke dalam bentuk $A = M - D$, dengan $m_{ij} \geq 0$ dan D adalah matriks diagonal.

Angka reproduksi dasar R_0 didefinisikan sebagai jari-jari spektrum dari matriks MD^{-1} yang dinotasikan sebagai $\rho(MD^{-1})$, yaitu

$$R_0 = \rho(MD^{-1}). \quad (2.20)$$

Persamaan (2.20) mendefinisikan angka reproduksi dasar (R_0) sebagai jari-jari spektrum dari operator generasi selanjutnya (Castillo-Chavez dkk, 2002).

Contoh 2.1

Diberikan suatu model SEIR sebagai berikut.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\ \frac{dE}{dt} = \beta S \frac{I}{N} - (\mu + k)E \\ \frac{dI}{dt} = kE - (\gamma + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{array} \right. \quad (2.19)$$

$$\quad \quad \quad (2.20)$$

$$\quad \quad \quad (2.21)$$

$$\quad \quad \quad (2.22)$$

$$N = S + E + I + R$$

dengan

- S : banyaknya individu *susceptible* pada waktu t
- E : banyaknya individu *exposed/latently infected* pada waktu t
- I : banyaknya individu *infectious* pada waktu t
- R : banyaknya individu *recovered* pada waktu t
- Λ : laju rekrutment
- μ : laju kematian alami
- β : probabilitas individu *susceptible* menjadi individu terinfeksi oleh satu individu *infectious* per unit waktu
- k : laju perubahan menjadi tuberkulosis aktif
- γ : laju penyembuhan dari klas *infectious*
- N : total banyaknya populasi

Titik kesetimbangan sistem (2.19)-(2.22) diperoleh jika

$$\begin{cases} \Lambda - \beta S \frac{I}{N} - \mu S = 0 & (2.23) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta S \frac{I}{N} - (\mu + k)E = 0 & (2.24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} kE - (\gamma + \mu)I = 0 & (2.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma I - \mu R = 0. & (2.26) \end{cases}$$

Keadaan bebas penyakit diartikan bahwa tidak ada individu yang terinfeksi, maka jumlah individu *exposed* dan *infectious* adalah nol. Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit U_0 dari sistem persamaan (2.19)-(2.22) dan total banyaknya populasi awal, yaitu

$$U_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \text{ dan } N = \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (2.27)$$

Selanjutnya kelas-kelas epidemik tersebut dikelompokkan menjadi tiga kelas, yaitu $X = (S, R)$, $Y = E$, $Z = I$, sehingga diperoleh sistem persamaan baru, yaitu

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \Lambda - \beta X \frac{Z}{N} - 2\mu X + \gamma Z = f(X, Y, Z) & (2.28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dY}{dt} = \beta X \frac{Z}{N} - (\mu + k)Y = g(X, Y, Z) & (2.29) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = kY - (\gamma + \mu)Z = h(X, Y, Z). & (2.30) \end{cases}$$

Dimisalkan $U_0 = (X^*, 0, 0)$ dan diasumsikan bahwa persamaan $g(X^*, Y, Z) = 0$ secara implisit menentukan fungsi $Y = \hat{g}(X^*, Z)$. Dari persamaan (2.29) dan dengan mensubstitusikan nilai

$X^* = N = \frac{\Lambda}{\mu}$, maka diperoleh fungsi $Y = \hat{g}(X^*, Z)$, yaitu

$$\begin{aligned} g(X^*, Y, Z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta \cdot \frac{\Lambda}{\mu} \cdot \frac{Z}{\mu} - (\mu + k)Y &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta Z - (\mu + k)Y &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{\beta Z}{(\mu + k)} = \hat{g}(X^*, Z).$$

Kemudian, dari persamaan (2.30) dan $\hat{g}(X^*, Z)$ dapat ditentukan fungsi $h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z)$, yaitu

$$\begin{aligned} h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z) &= k \cdot \hat{g}(X^*, Z) - (\gamma + \mu)Z \\ &= k \cdot \frac{\beta Z}{(\mu + k)} - (\gamma + \mu)Z. \end{aligned}$$

Turunan parsial terhadap Z dari fungsi $h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z)$ adalah

$$\begin{aligned} D_Z h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z) &= \frac{\partial h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z)}{\partial Z} \\ &= \frac{k\beta}{(\mu + k)} - (\gamma + \mu). \end{aligned}$$

Jika dimisalkan $A = D_Z h(X^*, \hat{g}(X^*, 0), 0)$ dan $A = M - D$, maka

$$A = \frac{k\beta}{(\mu + k)} - (\gamma + \mu)$$

$$M = \frac{k\beta}{(\mu + k)} \quad \text{dan} \quad D = (\gamma + \mu).$$

Dengan demikian diperoleh nilai R_0 , yaitu

$$R_0 = MD^{-1}$$

$$= \frac{k\beta}{(\mu + k)} \cdot \frac{1}{(\gamma + \mu)}$$

$$R_0 = \frac{k\beta}{(\mu + k)(\gamma + \mu)}. \quad (2.31)$$

Contoh 2.2

Model berikut ini adalah model penyebaran penyakit TB yang sensitif terhadap obat (*drug-sensitive*) dan kebal terhadap obat (*drug-resistant*)

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \Lambda - \beta_1 S \frac{I_1}{N} - \beta_2 S \frac{I_2}{N} - \mu S & (2.32) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= \beta_1 S \frac{I_1}{N} - (\mu + k_1 + r_1)E_1 + pr_2 I_1 - \beta_2 E_1 \frac{I_2}{N} & (2.33) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= k_1 E_1 - (\mu + d_1 + r_2) I_1 & (2.34) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= r_1 E_1 + (1 - p - q)r_2 I_1 - \sigma \beta_1 T \frac{I_1}{N} - \beta_2 T \frac{I_2}{N} - \mu T & (2.35) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dE_2}{dt} &= qr_2 I_1 - (\mu + k_2) E_2 + \beta_2 (S + E_1 + T) \frac{I_2}{N} & (2.36) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dI_2}{dt} &= k_2 E_2 - (\mu + d_2) I_2 & (2.37) \end{aligned} \right.$$

dengan

- S : banyaknya individu *susceptible* pada waktu t
- E_1 : banyaknya individu *exposed/latently infected* yang sensitif terhadap obat pada waktu t
- I_1 : banyaknya individu *infectious* yang sensitif terhadap obat pada waktu t
- T : banyaknya individu *treated* pada waktu t
- E_2 : banyaknya individu *exposed/latently infected* yang kebal terhadap obat pada waktu t
- I_2 : banyaknya individu *infectious* yang kebal terhadap obat pada waktu t
- Λ : laju rekrutment
- μ : laju kematian alami
- d_1 : laju kematian individu yang sensitif terhadap obat dikarenakan penyakit TB
- d_2 : laju kematian individu yang kebal terhadap obat dikarenakan penyakit TB

- β_1 : probabilitas individu *susceptible* menjadi individu terinfeksi oleh satu individu *infectious* per unit waktu
- β_2 : probabilitas individu *susceptible* menjadi individu terinfeksi oleh satu individu *infectious* per unit waktu
- k_1 : laju perubahan menjadi tuberkulosis aktif untuk individu yang sensitif terhadap obat
- k_2 : laju perubahan menjadi tuberkulosis aktif untuk individu yang kebal terhadap obat
- r_1 : laju kesembuhan untuk individu yang sensitif terhadap obat
- r_2 : laju kesembuhan untuk individu yang sensitif terhadap obat
- N : total banyaknya populasi
- $p + q$: proporsi individu *treated* yang belum sepenuhnya menjalani pengobatan.

Titik kesetimbangan diperoleh dengan cara membuat ruas kanan persamaan (2.32)-(2.37) sama dengan nol. Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit U_0 dan total banyaknya populasi, yaitu

$$U_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right) \text{ dan } N = \frac{\Lambda}{\mu} \quad (2.38)$$

Selanjutnya kelas-kelas epidemik tersebut dikelompokkan menjadi tiga kelas, yaitu $X = (S, T)$, $Y = (E_1, E_2)$, $Z = (I_1, I_2)$, dan dimisalkan $\hat{g}(X^*, Z) = (\hat{g}_1(X^*, Z_1), \hat{g}_2(X^*, Z_2))$, sehingga diperoleh sistem persamaan baru, yaitu

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \Lambda - (\beta_1 + \sigma\beta_1)Z - 2\beta_2Z - 2\mu X - r_1Y + (1-p-q)r_2Z \\ &= f(X, Y, Z) \\ \frac{dY_1}{dt} &= \beta_1 X \frac{Z_1}{N} - (\mu + k_1 + r_1)Y_1 + pr_2Z_1 - \beta_2 Y_1 \frac{Z_2}{N} \\ &= g_1(X, Y, Z) \\ \frac{dY_2}{dt} &= qr_2Z_1 - (\mu + k_2)Y_2 + \beta_2 Z_2 + \frac{\beta_2 Z_2}{N} Y_1 \\ &= g_2(X, Y, Z) \\ \frac{dZ_1}{dt} &= k_1 Y_1 - (\mu + d_1 + r_2)Z_1 = h_1(X, Y, Z) \\ \frac{dZ_2}{dt} &= k_2 Y_2 - (\mu + d_2)Z_2 = h_2(X, Y, Z). \end{aligned} \right.$$

Dimisalkan $U_0 = (X^*, 0, 0)$, maka $X^* = \frac{\Lambda}{\mu} = N$. Diasumsikan bahwa persamaan $g_1(X^*, Y, Z) = 0$ secara implisit menentukan fungsi $Y_1 = \hat{g}_1(X^*, Z)$, dan $g_2(X^*, Y, Z) = 0$ menentukan fungsi $Y_2 = \hat{g}_2(X^*, Z)$. Dengan mensubstitusikan nilai X^* ke dalam persamaan $g_1(X^*, Y, Z) = 0$, diperoleh fungsi $Y_1 = \hat{g}_1(X^*, Z)$, yaitu

$$\begin{aligned} g_1(X^*, Y, Z) &= 0 \\ \Leftrightarrow \beta_1 Z_1 - (\mu + k_1 + r_1)Y_1 + pr_2 Z_1 - \frac{\mu\beta_2 Z_2}{\Lambda} Y_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow Y_1 &= \frac{(\beta_1 + pr_2)Z_1}{(\mu\beta_2 Z_2 / \Lambda) + (\mu + k_1 + r_1)} = \hat{g}_1(X^*, Z). \end{aligned}$$

Kemudian dengan mensubstitusikan nilai X^* ke dalam persamaan $g_2(X^*, Y, Z) = 0$, diperoleh fungsi $Y_2 = \hat{g}_2(X^*, Z)$,

$$\begin{aligned} g_2(X^*, Y, Z) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\mu + k_2)Y_2 &= qr_2 Z_1 + \beta_2 Z_2 + O(2) \\ \Leftrightarrow Y_2 &= \frac{qr_2 Z_1 + \beta_2 Z_2}{(\mu + k_2)} + O(2) = \hat{g}_2(X^*, Z). \end{aligned}$$

Dari persamaan $h_1(X, Y, Z)$ dan $\hat{g}_1(X^*, Z)$ dapat ditentukan fungsi $h_1(X^*, \hat{g}_1(X^*, Z), Z)$, yaitu

$$h_1(X^*, \hat{g}_1(X^*, Z), Z) = k \cdot \hat{g}_1(X^*, Z) - (\mu + d_1 + r_2)Z_1$$

$$= k \cdot \frac{(\beta_1 + pr_2)Z_1}{(\mu\beta_2 Z_2 / \Lambda) + (\mu + k_1 + r_1)} - (\mu + d_1 + r_2)Z_1.$$

Kemudian dari persamaan $h_2(X, Y, Z)$ dan $\hat{g}_2(X^*, Z)$ dapat ditentukan fungsi $h_2(X^*, \hat{g}_2(X^*, Z), Z)$, yaitu

$$h_2(X^*, \hat{g}_2(X^*, Z), Z) = k_2 \cdot \hat{g}_2(X^*, Z) - (\mu + d_2)Z_2$$

$$= k_2 \cdot \frac{qr_2 Z_1 + \beta_2 Z_2}{(\mu + k_2)} - (\mu + d_2)Z_2.$$

Dimisalkan $A = D_Z h(X^*, \hat{g}(X^*, 0), 0)$, maka

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(X^*, \hat{g}_1(X^*, 0), 0)}{\partial Z_1} & \frac{\partial h_1(X^*, \hat{g}_1(X^*, 0), 0)}{\partial Z_2} \\ \frac{\partial h_2(X^*, \hat{g}_2(X^*, 0), 0)}{\partial Z_1} & \frac{\partial h_2(X^*, \hat{g}_2(X^*, 0), 0)}{\partial Z_2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{k_1(\beta_1 + pr_2)}{(\mu + k_1 + r_1)} - (\mu + d_1 + r_2) & 0 \\ 0 & \frac{k_2\beta_2}{(\mu + k_2)} - (\mu + d_2) \end{bmatrix}$$

Jika dimisalkan $A = M - D$, maka

$$M = \begin{bmatrix} \frac{k_1(\beta_1 + pr_2)}{(\mu + k_1 + r_1)} & 0 \\ 0 & \frac{k_2\beta_2}{(\mu + k_2)} \end{bmatrix} \text{ dan } D = \begin{bmatrix} (\mu + d_1 + r_2) & 0 \\ 0 & (\mu + d_2) \end{bmatrix}.$$

Karena $D^{-1} = \frac{1}{(\mu + d_1 + r_2)(\mu + d_2)} \begin{bmatrix} -(\mu + d_2) & 0 \\ 0 & -(\mu + d_1 + r_2) \end{bmatrix}$,
maka diperoleh matriks MD^{-1} , yaitu

$$MD^{-1} = \frac{1}{(\mu + d_1 + r_2)(\mu + d_2)} \begin{bmatrix} \frac{-k_1(\beta_1 + pr_2)(\mu + d_2)}{(\mu + k_1 + r_1)} & 0 \\ 0 & \frac{-k_2\beta_2(\mu + d_1 + r_2)}{(\mu + k_2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-k_1(\beta_1 + pr_2)}{(\mu + k_1 + r_1)(\mu + d_1 + r_2)} & 0 \\ 0 & \frac{-k_2\beta_2}{(\mu + k_2)(\mu + d_1 + r_2)} \end{bmatrix}$$

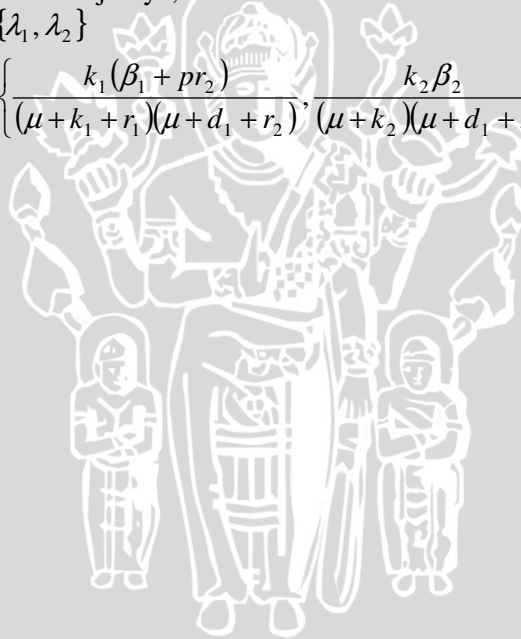
Dari matriks MD^{-1} , diperoleh dua nilai eigen

$$\lambda_1 = \frac{k_1(\beta_1 + pr_2)}{(\mu + k_1 + r_1)(\mu + d_1 + r_2)} \text{ dan } \lambda_2 = \frac{k_2\beta_2}{(\mu + k_2)(\mu + d_1 + r_2)}$$

Angka reproduksi dasar (R_0) adalah jari-jari spektrum dari operator generasi selanjutnya, maka

$$R_0 = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$$

$$= \max\left\{ \frac{k_1(\beta_1 + pr_2)}{(\mu + k_1 + r_1)(\mu + d_1 + r_2)}, \frac{k_2\beta_2}{(\mu + k_2)(\mu + d_1 + r_2)} \right\}$$

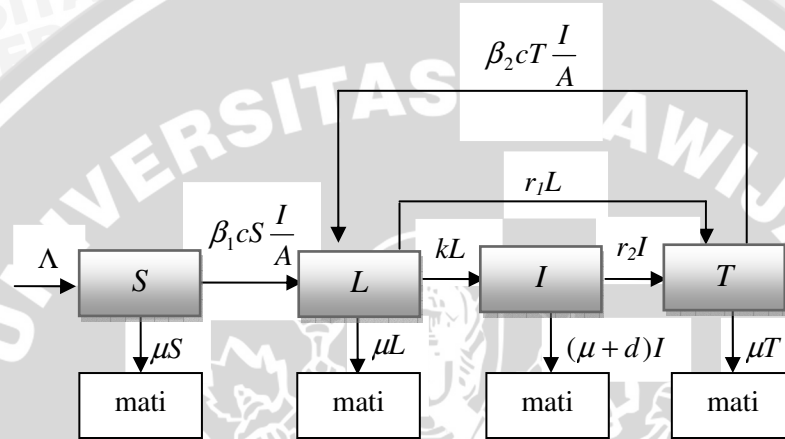




BAB III PEMBAHASAN

3.1 Model Kompartemen Penyebaran Penyakit TB yang Bergantung pada Kepadatan Populasi

Penyebaran penyakit TB yang bergantung pada kepadatan populasi dapat digambarkan dengan menggunakan model kompartemen. Model ini membagi populasi ke dalam empat kompartemen, yaitu *susceptible*, *latently infected*, *infectious* dan *treated*. Arus perpindahan materi dari kompartemen-kompartemen tersebut secara skematis disajikan dalam Gambar 3.1 berikut.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen penyakit TB yang bergantung pada kepadatan populasi

3.2 Variabel-variabel dan Parameter-parameter Model TB yang Bergantung pada Kepadatan Populasi

Pada model dinamika TB ini, digunakan variabel-variabel dan parameter-parameter berikut.

$S(t)$: banyaknya individu *susceptible* pada waktu t

$L(t)$: banyaknya individu *latently infected* pada waktu t

- $I(t)$: banyaknya individu *infectious* pada waktu t
 - $T(t)$: banyaknya individu *treated* pada waktu t
 - A : total area yang dihuni populasi
 - λ : laju rekrutment
 - μ : laju kematian alami perkapita
 - d : laju kematian disebabkan TB
 - β_1 : probabilitas individu *susceptible* menjadi individu terinfeksi oleh satu individu *infectious* per kontak per unit waktu
 - β_2 : probabilitas individu *treated* menjadi individu terinfeksi oleh satu individu *infectious* per kontak per unit waktu
 - k : laju pergerakan menjadi TB aktif
 - r_1 : laju *recovery*/penyembuhan dari klas *latent*
 - r_2 : laju *recovery*/penyembuhan dari klas *infectious*
 - c : laju kontak per kapita
- dengan

$$\mu = \frac{1}{\text{rata - rata nilai harapan hidup}}$$

$$r = \frac{1}{\text{waktu antara aktifasi TB dan penyembuhan melalui pengobatan}}$$

3.3 Konstruksi Model

Model SLIT untuk epidemik TB yang bergantung pada kepadatan populasi diperoleh dengan menerjemahkan kompartemen pada Gambar 3.1 ke dalam model matematika. Karena menyatakan populasi, maka $S(t), L(t), I(t), T(t) \geq 0$. Laju perubahan dari individu *susceptible*, *latently infected*, *infectious*, dan *treated* diperoleh sebagai berikut.

1. Laju Perubahan Individu *Susceptible*

λ menyatakan laju rekrutment yaitu laju banyaknya individu yang menempati area yang sudah ditetapkan. Semua individu sehat termasuk imigran dan individu yang baru lahir mempunyai kemungkinan terinfeksi penyakit TB dan disebut individu *susceptible*. Laju perubahan individu *susceptible* tersebut berbanding lurus dengan laju rekrutment pada saat t , yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda,$$

dengan $\Lambda > 0$.

Banyaknya individu *susceptible* bisa berkurang disebabkan kematian alami individu yaitu kematian bukan karena terinfeksi TB, sehingga laju perubahan individu *susceptible* pada waktu t berbanding lurus dengan berkurangnya individu *susceptible* karena kematian alami, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\mu S(t),$$

μ menyatakan laju kematian alami individu per kapita.

Penyebaran penyakit TB dalam area yang dihuni populasi terjadi melalui kontak langsung dengan penderita TB. Jika individu *susceptible* melakukan kontak dengan individu *infectious*, maka individu *susceptible* akan terinfeksi. Individu yang terinfeksi oleh TB belum mampu menularkan penyakitnya pada individu lain, dan disebut individu *latently infected*. Keadaan ini menyebabkan berkurangnya individu *susceptible*, sedangkan individu *latently infected* bertambah. Oleh karena itu, laju perubahan individu *susceptible* berbanding lurus dengan berkurangnya individu *susceptible* karena kontak langsung dengan satu individu *infectious* per kapita per satuan waktu, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta_1 c S(t) \frac{I(t)}{A},$$

dengan β_1 menyatakan probabilitas individu *susceptible* menjadi individu terinfeksi, dan c menyatakan laju kontak per kapita.

Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan individu *susceptible* terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) - \beta_1 c S(t) \frac{I(t)}{A}. \quad (3.1)$$

2. Laju Perubahan Individu *Latently Infected*

Bertambahnya individu *susceptible* yang melakukan kontak langsung dengan individu *infectious* menyebabkan bertambahnya individu *latently infected*, sehingga laju perubahan individu *latently infected* berbanding lurus dengan jumlah individu *susceptible* yang melakukan kontak langsung dengan individu *infectious* per kapita per satuan waktu, yaitu

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta_1 cS(t) \frac{I(t)}{A}.$$

Setelah periode laten yaitu waktu pada saat individu mulai terinfeksi sampai munculnya gejala, individu *latently infected* akan berubah menjadi individu *infectious* dengan laju k . Individu *latently infected* akan berkurang, sedangkan individu *infectious* akan bertambah. Berkurangnya individu *latently infected* dapat pula disebabkan oleh kematian alami dengan laju μ . Kemungkinan lain yang menyebabkan berkurangnya individu *latently infected* adalah karena individu tersebut sembuh (*treated*) sebelum berkembang menjadi individu *infectious*. Keadaan ini menyebabkan bertambahnya individu *treated*. Oleh karena itu, dapat dibuat model laju perubahan berkurangnya individu *latently infected* pada waktu t yaitu

$$\frac{dL(t)}{dt} = -(\mu + k + r_1)L(t),$$

dengan μ menyatakan koefisien laju kematian alami, $k > 0$ menyatakan laju infeksi (laju perkembangan menjadi aktif TB) dan r_1 menyatakan laju *recovery* (penyembuhan) pada klas *latently infected*.

Apabila individu *treated* melakukan kontak langsung dengan individu *infectious*, maka ada kemungkinan individu *treated* tersebut akan terinfeksi kembali dikarenakan daya tahan tubuh menurun dan status gizi yang buruk (malnutrisi) yang kerap kali terjadi dalam populasi padat penduduk seperti *camp* pengungsian dan penjara. Namun, individu yang terinfeksi kembali tersebut masuk dalam kategori individu *latently infected*. Keadaan ini menyebabkan bertambahnya individu *latently infected*, sedangkan individu *treated* berkurang, sehingga laju perubahan *latently infected* berbanding lurus dengan bertambahnya individu *treated* yang terinfeksi kembali karena kontak dengan individu *infectious*, yaitu

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta_2 cT(t) \frac{I(t)}{A},$$

dengan β_2 menyatakan probabilitas individu *treated* menjadi individu terinfeksi oleh satu individu *infectious* per kontak per unit waktu.

Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan individu *latently infected* terhadap waktu t , yaitu

$$\frac{dL(t)}{dt} = \beta_1 cS(t) \frac{I(t)}{A} - (\mu + k + r_1)L(t) + \beta_2 cT(t) \frac{I(t)}{A}. \quad (3.2)$$

3. Laju Perubahan Individu *Infectious*

Perubahan individu *latently infected* menjadi individu *infectious* menyebabkan bertambahnya individu *infectious*, sehingga laju perubahan individu *infectious* berbanding lurus dengan jumlah individu *latently infected* pada saat t , yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = kL(t),$$

dengan k menyatakan laju infeksi.

Ada dua kemungkinan yang menyebabkan kematian individu *infectious*, kemungkinan yang pertama dikarenakan adanya kematian individu secara alami dengan laju $\mu > 0$ dan kemungkinan yang kedua adalah adanya kematian individu karena menderita penyakit TB dengan laju $d > 0$. Kedua kemungkinan tersebut menyebabkan berkurangnya individu *infectious*. Berkurangnya individu *infectious* juga bisa dikarenakan individu tersebut sembuh (*treated*) dari TB dengan laju $r_2 > 0$. Oleh karena itu, laju perubahan individu *infectious* pada saat t dapat dinyatakan sebagai

$$\frac{dI(t)}{dt} = -(\mu + d + r_2)I(t).$$

Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan individu *infectious* terhadap waktu t , yaitu

$$\frac{dI(t)}{dt} = kL(t) - (\mu + d + r_2)I(t). \quad (3.3)$$

4. Laju Perubahan Individu *Treated*

Berkurangnya individu *latently infected* karena sembuh dari penyakit sebelum berkembang menjadi individu *infectious* menyebabkan bertambahnya individu *treated*. Bertambahnya individu *treated* juga disebabkan karena adanya individu *infectious* yang sembuh dari TB. Oleh karena itu, laju perubahan individu *treated* pada waktu t berbanding lurus dengan bertambahnya individu *latently infected* dan *infectious* yang sembuh dari penyakit, yaitu

$$\frac{dT(t)}{dt} = r_1L(t) + r_2I(t).$$

Berkurangnya individu *treated* bisa disebabkan karena kematian alami, sehingga laju perubahannya terhadap t adalah

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\mu T(t).$$

Bertambahnya individu *latently infected* karena individu *treated* terinfeksi kembali menyebabkan berkurangnya individu *treated*. Oleh karena itu, laju perubahan individu *treated* berbanding lurus dengan berkurangnya individu *treated* karena kontak langsung dengan individu *infectious* per kapita per satuan waktu, yaitu

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\beta_2 c T(t) \frac{I(t)}{A}.$$

Dengan demikian, dapat dibuat model laju perubahan individu *treated* terhadap waktu, yaitu

$$\frac{dT(t)}{dt} = r_1 L(t) + r_2 I(t) - \mu T(t) - \beta_2 c T(t) \frac{I(t)}{A}. \quad (3.4)$$

Oleh karena itu, model dinamika TB yang bergantung pada kepadatan populasi dirumuskan oleh persamaan-persamaan (3.1)-(3.4), dengan $N = S(t) + L(t) + I(t) + T(t)$ adalah total populasi.

3.4 Titik Kesetimbangan

Misalkan (S^*, L^*, I^*, T^*) adalah titik kesetimbangan/titik kritis dari sistem persamaan (3.1)-(3.4). Titik kesetimbangan sistem tersebut diperoleh jika

$$\frac{dS(t)}{dt} = \frac{dL(t)}{dt} = \frac{dI(t)}{dt} = \frac{dT(t)}{dt} = 0,$$

sehingga diperoleh sistem persamaan yang baru, yaitu

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda - \mu S(t) - \beta_1 c S(t) \frac{I(t)}{A} = 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_1 c S(t) \frac{I(t)}{A} - (\mu + k + r_1) L(t) + \beta_2 c T(t) \frac{I(t)}{A} = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} kL(t) - (\mu + d + r_2) I(t) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 L(t) + r_2 I(t) - \mu T(t) - \beta_2 c T(t) \frac{I(t)}{A} = 0 \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Dari persamaan (3.7), diperoleh

$$I(t) = \frac{kL(t)}{(\mu + d + r_2)}. \quad (3.9)$$

Substitusikan (3.9) ke dalam persamaan (3.5) dan persamaan (3.8), sehingga diperoleh

$$S(t) = \frac{\Lambda A(\mu + d + r_2)}{\mu A(\mu + d + r_2) + \beta_1 ckL(t)} \quad (3.10)$$

$$T(t) = \frac{AL(t)(r_1(\mu + d + r_2) + r_2 k)}{A\mu(\mu + d + r_2) + \beta_2 ckL(t)}. \quad (3.11)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (3.9)–(3.11) ke dalam persamaan (3.6), sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta_1 \beta_2 c^2 k^2}{(\mu + d + r_2)} (r_1(\mu + d + r_2) + r_2 k) - (\beta_1 ck)^2 (\mu + k + r_1) \right) [L(t)]^3 \\ & + (\Lambda \beta_1 \beta_2 (ck)^2 - \beta_2 ck\mu A(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) - \beta_1 ck\mu A \\ & (\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) + \beta_2 ck\mu A(r_1(\mu + d + r_2) + r_2 k)) [L(t)]^2 \\ & + (\beta_1 c\Lambda k\mu A(\mu + d + r_2) - (\mu A)^2 (\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2)^2) L(t) = 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dari persamaan (3.12) diperoleh dua persamaan, yaitu

$$L(t) = 0$$

atau

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta_1 \beta_2 c^2 k^2}{(\mu + d + r_2)} (r_1(\mu + d + r_2) + r_2 k) - (\beta_1 ck)^2 (\mu + k + r_1) \right) [L(t)]^2 \\ & + (\Lambda \beta_1 \beta_2 (ck)^2 - \beta_2 ck\mu A(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) - \beta_1 ck\mu A \\ & (\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) + \beta_2 ck\mu A(r_1(\mu + d + r_2) + r_2 k)) [L(t)] \\ & + (\beta_1 c\Lambda k\mu A(\mu + d + r_2) - (\mu A)^2 (\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2)^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Apabila $L(t)=0$ disubstitusikan ke dalam persamaan (3.9)–(3.11), diperoleh nilai $S(t)=\frac{\Lambda}{\mu}$, $I(t)=T(t)=0$. Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang pertama, yaitu

$$U_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right). \quad (3.14)$$

Dari persamaan (3.14) dapat diperoleh total banyaknya individu dalam populasi, yaitu

$$N = \frac{\Lambda}{\mu}. \quad (3.15)$$

Titik kesetimbangan U_0 menjelaskan bahwa pada keadaan ini terdapat individu *susceptible* sebanyak jumlah individu dalam populasi, yaitu $\frac{\Lambda}{\mu}$, sedangkan jumlah individu *latently infected*, *infectious* dan *treated* sama dengan nol. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terdapat individu *latently infected*, *infectious* dan *treated* dalam populasi, sehingga tidak pernah terjadi kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infectious* atau dengan kata lain semua individu dalam keadaan sehat. Keadaan seperti ini disebut keadaan bebas penyakit. Oleh karena itu, jumlah individu *susceptible* tidak pernah berkurang dan selalu bernilai $N = \frac{\Lambda}{\mu}$, sedangkan jumlah individu *latently infected*, *infectious* dan *treated* tidak pernah bertambah dan selalu bernilai nol. Dengan demikian, titik kesetimbangan ini disebut sebagai titik kesetimbangan bebas penyakit.

Dari persamaan (3.13) diperoleh

$$L(t) = \frac{-\xi \pm \sqrt{\psi}}{2\theta}, \quad (3.16)$$

dengan

$$\xi = \Lambda\beta_1\beta_2(ck)^2 - \beta_2ck\mu A(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) - \beta_1ck\mu A(\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) + \beta_2ck\mu A(r_1(\mu + d + r_2) + r_2k))$$

$$\begin{aligned} \psi &= \Lambda\beta_1\beta_2(ck)^2 - \beta_2ck\mu A(\mu+k+r_1)(\mu+d+r_2) - \beta_1ck\mu A \\ &\quad (\mu+k+r_1)(\mu+d+r_2) + \beta_2ck\mu A(r_1(\mu+d+r_2)+r_2k))^2 - 4 \cdot \\ &\quad \left(\frac{\beta_1\beta_2c^2k^2}{(\mu+d+r_2)}(r_1(\mu+d+r_2)+r_2k) - (\beta_1ck)^2(\mu+k+r_1) \right) \cdot \\ &\quad (\beta_1c\Lambda k\mu A(\mu+d+r_2) - (\mu A)^2(\mu+k+r_1)(\mu+d+r_2)^2) \\ \theta &= \frac{\beta_1\beta_2c^2k^2}{(\mu+d+r_2)}(r_1(\mu+d+r_2)+r_2k) - (\beta_1ck)^2(\mu+k+r_1) \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (3.16) ke dalam persamaan (3.9)–(3.11), diperoleh

$$S(t) = \frac{2\theta\Lambda A(\mu+d+r_2)}{2\theta\mu A(\mu+d+r_2) - \beta_1ck\xi \pm \beta_1ck\sqrt{\psi}} \quad (3.17)$$

$$I(t) = \frac{k(-\xi \pm \sqrt{\psi})}{2\theta(\mu+d+r_2)} \quad (3.18)$$

$$T(t) = \frac{A(r_1(\mu+d+r_2)+r_2k)(-\xi \pm \sqrt{\psi})}{2\theta A\mu(\mu+d+r_2) + \beta_2ck(-\xi \pm \sqrt{\psi})}. \quad (3.19)$$

Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan yang ke dua, yaitu

$$U_e = \left[\frac{2\theta\Lambda A(\mu+d+r_2)}{2\theta\mu A(\mu+d+r_2) - \beta_1ck\xi \pm \beta_1ck\sqrt{\psi}}, \frac{-\xi \pm \sqrt{\psi}}{2\theta}, \frac{k(-\xi \pm \sqrt{\psi})}{2\theta(\mu+d+r_2)}, \frac{A(r_1(\mu+d+r_2)+r_2k)(-\xi \pm \sqrt{\psi})}{2\theta A\mu(\mu+d+r_2) + \beta_2ck(-\xi \pm \sqrt{\psi})} \right]. \quad (3.20)$$

Titik kesetimbangan U_e menjelaskan bahwa pada keadaan ini banyaknya individu terinfeksi (individu *latently infected* dan individu *infectious*) adalah tidak nol, artinya terdapat individu terinfeksi dalam populasi. Oleh karena itu, akan terjadi kontak antara individu *susceptible* dengan individu *infectious*, yang dapat mengakibatkan penyakit menyebar. Dengan demikian, titik kesetimbangan U_e disebut sebagai titik kesetimbangan endemik.

3.5 Kestabilan Titik Keseimbangan

Matriks Jacobi dari sistem persamaan (3.1)–(3.4) adalah

$$DF(S, L, I, T) = \begin{pmatrix} -\left(\mu + \beta_1 c \left(\frac{I}{A}\right)\right) & 0 & -\beta_1 c \left(\frac{S}{A}\right) & 0 \\ \beta_1 c \left(\frac{I}{A}\right) & -(\mu + k + r_1) & \beta_1 c \left(\frac{S}{A}\right) + \beta_2 c \left(\frac{T}{A}\right) & \beta_2 c \left(\frac{I}{A}\right) \\ 0 & k & -(\mu + d + r_2) & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 - \beta_2 c \left(\frac{T}{A}\right) & -\left(\mu + \beta_2 c \left(\frac{I}{A}\right)\right) \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

3.5.1 Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Dari persamaan (3.14) diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit, yaitu

$$U_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right)$$

Substitusikan U_0 ke dalam matriks Jacobi (3.21)

$$DF(U_0) = DF\left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1 c \left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right) & 0 \\ 0 & -(\mu + k + r_1) & \beta_1 c \left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right) & 0 \\ 0 & k & -(\mu + d + r_2) & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & -\mu \end{pmatrix}$$

Nilai eigen (λ) dari matriks $DF(U_0)$ dapat diperoleh dari

$$|DF(U_0) - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(\mu + \lambda) & 0 & -\beta_1 c \left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right) & 0 \\ 0 & -(\mu + k + r_1) - \lambda & \beta_1 c \left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right) & 0 \\ 0 & k & -(\mu + d + r_2) - \lambda & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 & -(\mu + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Diperoleh

$$(\mu + \lambda)^2 \det \begin{bmatrix} -((\mu + k + r_1) + \lambda) & \beta_1 c \left(\frac{\lambda \mu}{A} \right) \\ k & -((\mu + d + r_2) + \lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.22)$$

Dari persamaan (3.22), kedua nilai eigennya adalah negatif, yaitu

$$\lambda_1 = -\mu$$

$$\lambda_2 = -\mu$$

Selanjutnya, dari matriks

$$\det \begin{bmatrix} -((\mu + k + r_1) + \lambda) & \beta_1 c \left(\frac{\lambda \mu}{A} \right) \\ k & -((\mu + d + r_2) + \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

dimisalkan

$$B = \begin{bmatrix} -(\mu + k + r_1) & \beta_1 c \left(\frac{\lambda \mu}{A} \right) \\ k & -(\mu + d + r_2) \end{bmatrix}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$Det(B) = (\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) - k\beta_1 c \left(\frac{\lambda \mu}{A} \right)$$

dan

$$Tr(B) = -((\mu + k + r_1) + (\mu + d + r_2))$$

Karena semua parameter μ, k, r_1, d, r_2 positif, maka $Tr(B) < 0$.

Menurut Teorema (2.3), agar titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik, maka $Det(B)$ harus lebih besar dari nol, yaitu

$$Det(B) > 0$$

$$\Leftrightarrow (\mu + k + r_1)(\mu + d + r_2) - k\beta_1 c \left(\frac{\lambda \mu}{A} \right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\lambda \mu}{A} \right) < \left(\frac{(\mu + k + r_1)}{k} \right) \left(\frac{(\mu + d + r_2)}{\beta_1 c} \right)$$

Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik jika

$$\left(\frac{A}{N/\mu}\right) > \left(\frac{k}{(\mu+k+r_1)}\right) \left(\frac{\beta_1 c}{(\mu+d+r_2)}\right). \quad (3.23)$$

3.5.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik

Misalkan $U_e = (S^*, L^*, I^*, T^*)$ adalah titik kesetimbangan endemik, dengan $(S^*, L^*, I^*, T^*) \neq (0,0,0,0)$. Matriks Jacobi untuk titik kesetimbangan endemik (U_e) adalah

$$DF(E_e) = DF(S^*, L^*, I^*, T^*) = \begin{bmatrix} -\left(\mu + \beta_1 c \left(\frac{I^*}{A}\right)\right) & 0 & -\beta_1 c \left(\frac{S^*}{A}\right) & 0 \\ \beta_1 c \left(\frac{I^*}{A}\right) & -(\mu+k+r_1) & \beta_1 c \left(\frac{S^*}{A}\right) + \beta_2 c \left(\frac{T^*}{A}\right) & \beta_2 c \left(\frac{I^*}{A}\right) \\ 0 & k & -(\mu+d+r_2) & 0 \\ 0 & r_1 & r_2 - \beta_2 c \left(\frac{T^*}{A}\right) & -\left(\mu + \beta_2 c \left(\frac{I^*}{A}\right)\right) \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Nilai eigen dari matriks (3.24) sulit dicari secara analitik apabila nilai parameter yang ditetapkan tidak disubstitusikan ke dalam matriks tersebut, oleh karena itu, digunakan *basic reproductive number* (angka reproduksi dasar/ R_0) untuk menganalisis kestabilan titik kesetimbangan.

3.5.3 R_0 untuk TB dengan Pendekatan Operator Generasi Selanjutnya

Dalam pendekatan operator generasi selanjutnya, populasi dikelompokkan ke dalam tiga kelas dan untuk model TB yang bergantung pada kepadatan populasi, tiga kelas-kelas tersebut adalah $X = (S, T)$, $Y = (L)$, dan $Z = (I)$. Komponen dari X menyatakan banyaknya individu yang tidak terinfeksi yaitu individu *susceptible*, dan individu *treated*. Komponen dari Y merepresentasikan banyaknya individu yang terinfeksi yang tidak dapat menularkan penyakitnya yaitu individu *latently infected*. Komponen dari Z merepresentasikan banyaknya individu terinfeksi yang dapat menularkan penyakitnya yaitu individu *infectious*.

Karena $X=(S,T)$, maka persamaan (3.1) dan (3.4) dikelompokkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \Lambda - \mu X - \beta_1 cX \left(\frac{Z}{A} \right) + r_1 Y + r_2 Z - \mu X - \beta_2 cX \left(\frac{Z}{A} \right) \\ &= \Lambda - 2\mu X - \beta_1 cX \left(\frac{Z}{A} \right) + r_1 Y + r_2 Z - \beta_2 cX \left(\frac{Z}{A} \right) \\ &= f(X, Y, Z). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Karena $Y=(L)$, maka persamaan (3.2) menjadi

$$\frac{dY}{dt} = \beta_1 cX \left(\frac{Z}{A} \right) - (\mu + k + r_1) Y + \beta_2 cX \left(\frac{Z}{A} \right) = g(X, Y, Z). \quad (3.26)$$

Selanjutnya, karena $Z=(I)$ maka persamaan (3.3) menjadi

$$\frac{dZ}{dt} = kY - (\mu + d + r_2) Z = h(X, Y, Z). \quad (3.27)$$

Dengan demikian, setelah pengelompokan kelas-kelas epidemik dari persamaan (3.1)-(3.4), diperoleh sistem persamaan baru (3.25)-(3.27).

Dari persamaan (3.14) dan (3.15) diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit dan total populasi, yaitu

$$U_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \text{ dan } N = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Dimisalkan $U_0 = (X^*, 0, 0)$ dan diasumsikan $g(X^*, Y, Z) = 0$ secara implisit menentukan fungsi $Y = \hat{g}(X^*, Z)$. Dari persamaan (3.26) diperoleh fungsi $g(X^*, Y, Z) = 0$, yaitu

$$\beta_1 cX^* \left(\frac{Z}{A} \right) - (\mu + k + r_1) Y + \beta_2 cX^* \left(\frac{Z}{A} \right) = 0. \quad (3.28)$$

Karena $X^* = \frac{\Lambda}{\mu}$, maka persamaan (3.28) menjadi

$$\beta_1 c \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \left(\frac{Z}{A} \right) - (\mu + k + r_1) Y + \beta_2 c \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \left(\frac{Z}{A} \right) = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh fungsi $Y = \hat{g}(X^*, Z)$, yaitu

$$Y = \frac{(\beta_1 + \beta_2)c\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\left(\frac{Z}{A}\right)}{(\mu + k + r_1)}. \quad (3.29)$$

Dengan mensubstitusikan nilai X^* dan persamaan (3.29) ke dalam persamaan (3.27) diperoleh fungsi $h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z)$ sebagai berikut

$$h(X^*, \hat{g}(X^*, Y), Z) = k \cdot \frac{(\beta_1 + \beta_2)c\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right)\left(\frac{Z}{A}\right)}{(\mu + k + r_1)} - (\mu + d + r_2)Z.$$

Turunan parsial terhadap Z dari fungsi $h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z)$ adalah

$$\begin{aligned} D_Z h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z) &= \frac{\partial h(X^*, \hat{g}(X^*, Z), Z)}{\partial Z} \\ &= \frac{k(\beta_1 + \beta_2)c\left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right)}{(\mu + k + r_1)} - (\mu + d + r_2). \end{aligned}$$

Dimisalkan $A = D_Z h(X^*, \hat{g}(X^*, 0), 0)$, maka

$$A = \frac{k(\beta_1 + \beta_2)c\left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right)}{(\mu + k + r_1)} - (\mu + d + r_2).$$

Selanjutnya diasumsikan $A = M - D$, sehingga diperoleh

$$M = \frac{k(\beta_1 + \beta_2)c\left(\frac{\Lambda/\mu}{A}\right)}{(\mu + k + r_1)} \quad \text{dan} \quad D = (\mu + d + r_2). \quad (3.30)$$

R_0 didefinisikan sebagai jari-jari spektrum dari matriks MD^{-1} , maka dari persamaan (3.30) diperoleh nilai R_0 yaitu

$$R_0 = \frac{k(\beta_1 + \beta_2)c \left(\frac{N}{A}\right)}{(\mu + k + r_1)} \cdot \left(\frac{1}{(\mu + d + r_2)}\right)$$

$$R_0 = \left(\frac{N}{A}\right) \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{(\mu + d + r_2)}\right) \left(\frac{k}{(\mu + k + r_1)}\right) \quad (3.31)$$

dengan

$\left(\frac{N}{A}\right)$: kepadatan individu *susceptible*

$\beta_1 c$ dan $\beta_2 c$: laju transmisi/peralihan efektif

$\left(\frac{1}{(\mu + d + r_2)}\right)$: periode *infectious* efektif

$\left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{(\mu + d + r_2)}\right)$: banyaknya individu *latently infected* yang dihasilkan oleh individu *infectious* selama periode *infectious*

$\left(\frac{k}{(\mu + k + r_1)}\right)$: probabilitas individu yang dapat bertahan dari tingkat *latent* ke dalam tingkat *infectious*.

Jika $R_0 < 1$, maka titik kestabilan bebas penyakit adalah stabil asimtotik, sedangkan jika $R_0 > 1$ kesetimbangan bebas penyakit adalah tidak stabil dan kestabilan endemik adalah stabil asimtotik. Jadi:

a. jika $R_0 > 1$, maka

$$\left(\frac{N}{A}\right) \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{(\mu + d + r_2)}\right) \left(\frac{k}{(\mu + k + r_1)}\right) > 1$$

$$\left(\frac{N}{A}\right) > \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{(\mu + d + r_2)}\right) \left(\frac{k}{(\mu + k + r_1)}\right) \quad (3.32)$$

Kepadatan individu *susceptible* $\left(\frac{N/\mu}{A}\right)$ menentukan peranan

ukuran area yang akan dihuni populasi yang dinotasikan dengan A . Ketika areanya cukup besar, kepadatan akan menjadi kecil, dengan cara demikian mengurangi ukuran bilangan dasar reproduktif R_0 . Sedangkan ketika ukuran areanya kecil, kepadatan akan menjadi lebih besar, sehingga bilangan dasar reproduktif atau jumlah infeksi kedua dikarenakan satu individu *infectious* akan menjadi lebih besar.

b. jika $R_0 < 1$, maka

$$\left(\frac{N/\mu}{A}\right) \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{\mu + d + r_2}\right) \left(\frac{k}{\mu + k + r_1}\right) < 1 \tag{3.33}$$

Persamaan (3.33) mengimplikasikan bahwa

$$\left(\frac{A}{N/\mu}\right) > \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{\mu + d + r_2}\right) \left(\frac{k}{\mu + k + r_1}\right) \tag{3.34}$$

dengan

$\left(\frac{A}{N/\mu}\right)$: karakteristik area atau area yang dihuni tiap individu.

Dengan demikian, agar terbebas dari penyakit TB, area yang dihuni tiap individu (karakteristik area) harus selalu lebih besar dari perkalian antara probabilitas individu yang dapat bertahan dari tingkat *latent* ke dalam tingkat *infectious* dan banyaknya individu *latently infected* yang dihasilkan dari individu *infectious*. Oleh karena itu, $\left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{\mu + d + r_2}\right) \left(\frac{k}{\mu + k + r_1}\right)$ didefinisikan sebagai ukuran area kritis yang diharapkan dapat mengendalikan penyebaran TB.

3.6 Simulasi Model

Berdasarkan studi yang dilakukan Ssematimba dkk (2005) diperoleh estimasi untuk setiap parameter pada sistem persamaan (3.1)-(3.4) yang disajikan dalam Tabel 3.1, dan untuk nilai syarat awal disajikan dalam Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.1 Nilai Parameter

Parameter	Nilai
μ	0.0222 / tahun
A	1500 individu / tahun
r_1	1.5 per individu / tahun
r_2	1.5 per individu / tahun
β_1	0.2 / tahun
β_2	0.2 / tahun
c	100 / tahun
d	0.365 / tahun
k	0.00396 / tahun

Tabel 3.2 Nilai Syarat Awal

Syarat Awal	Nilai
S_0	30.000 individu / tahun
L_0	20.000 individu / tahun
I_0	7.568 individu / tahun
T_0	10.000 individu / tahun

3.6.1 Karakteristik Area

Dari persamaan (3.34) diperoleh syarat agar dalam sistem terbebas dari penyakit, yaitu area yang dihuni tiap individu (karakteristik area) harus selalu lebih besar dari perkalian antara probabilitas individu yang dapat bertahan dari tingkat *latent* ke dalam tingkat *infectious* dan banyaknya individu *latently infected* yang dihasilkan dari individu *infectious*.

Dengan mensubstitusikan nilai parameter dari Tabel 3.1 ke dalam persamaan (3.34), diperoleh

$$\begin{aligned} \left(\frac{A}{N/\mu}\right) &> \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{\mu + d + r_2}\right) \left(\frac{k}{\mu + k + r_1}\right) \\ \left(\frac{A}{N/\mu}\right) &> \left(\frac{(0.2 + 0.2)100}{0.0222 + 0.365 + 1.5}\right) \left(\frac{0.00396}{0.0222 + 0.00396 + 1.5}\right) \\ \left(\frac{A}{N/\mu}\right) &> \left(\frac{40}{1.8872}\right) \left(\frac{0.00396}{1.52616}\right) \\ \left(\frac{A}{N/\mu}\right) &> 0.055. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Dengan demikian, agar sistem terbebas dari penyakit TB maka area yang harus dihuni tiap individu (karakteristik area) harus lebih besar dari 0.055 km², dengan ketentuan menggunakan parameter pada Tabel 3.1.

Selanjutnya, dengan mensubstitusikan nilai parameter Λ dan μ dari Tabel 3.1 ke dalam persamaan (3.35), maka diperoleh syarat ukuran area agar titik kesetimbangan bebas penyakitnya stabil asimtotik, yaitu

$$A > 3716.22. \tag{3.36}$$

Dengan demikian, sistem akan terbebas dari penyakit apabila ukuran area yang sebaiknya dihuni semua individu adalah lebih besar dari 3716.22 km².

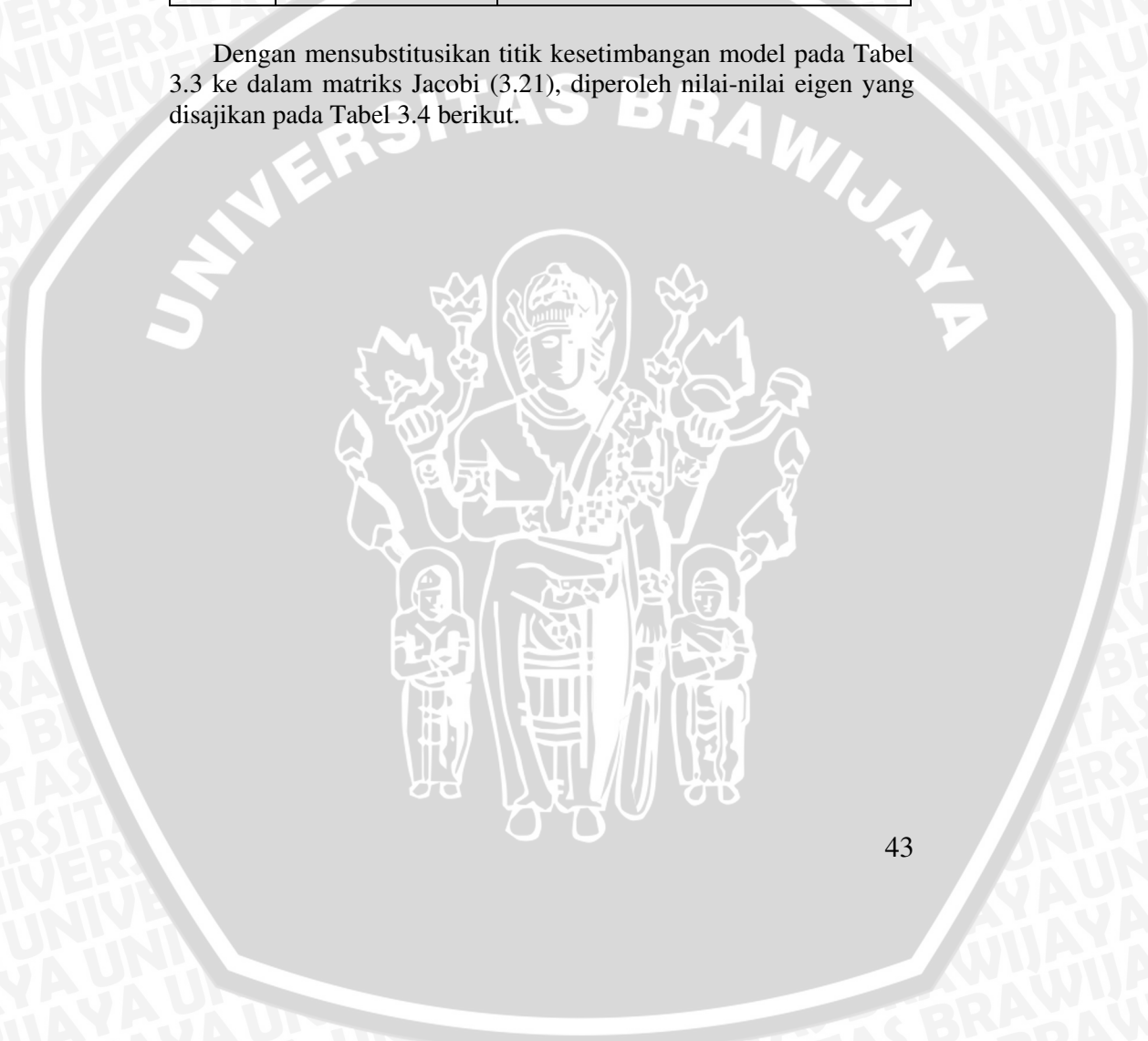
3.6.2 Kestabilan Model dengan Analisis Sistem Dinamik

Dalam penentuan kestabilan model dengan analisis sistem dinamik, akan diberikan beberapa nilai parameter untuk ukuran area. Sedangkan untuk nilai parameter yang lain, digunakan nilai parameter yang disajikan pada Tabel 3.1. Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 3.1 ke dalam sistem persamaan (3.5)-(3.8), diperoleh titik kesetimbangan model dari masing-masing ukuran area yang ditetapkan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit (U_0) dan titik kesetimbangan endemik (U_e) yang disajikan pada Tabel 3.3 berikut.

Tabel 3.3 Titik Kesetimbangan Model

Area (km ²)	U_0	U_e
500	(67567.57,0,0,0)	(373.05,47641.1 , 99.97,17809.84)
1000	(67567.57,0,0,0)	(1166.94,30100.18,63.16,35198.83)
1500	(67567.57,0,0,0)	(4015.18,12559.26,26.35,50533.48)
4000	(67567.57,0,0,0)	(-1975.7,-75145.3,-157.7,1.47×10 ⁵)
40000	(67567.57,0,0,0)	(-1085.6,-1.4×10 ⁶ ,-2807.8,1.5×10 ⁶)
400000	(67567.57,0,0,0)	(-1039,-1.4×10 ⁷ ,-29308.8,1.5×10 ⁷)

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan model pada Tabel 3.3 ke dalam matriks Jacobi (3.21), diperoleh nilai-nilai eigen yang disajikan pada Tabel 3.4 berikut.



Tabel 3.4 Nilai Eigen

Area(km ²)	Nilai Eigen untuk U_0	Nilai Eigen untuk U_e
500	$\lambda_1 = -0.0222$ $\lambda_2 = -0.0222$ $\lambda_3 = -4.9832$ $\lambda_4 = 1.56979$	$\lambda_1 = -6.1907$ $\lambda_2 = -0.0229$ $\lambda_3 = -1.2206$ $\lambda_4 = -4.0209$
1000	$\lambda_1 = -0.0222$ $\lambda_2 = -0.0222$ $\lambda_3 = -4.0270$ $\lambda_4 = 0.61365$	$\lambda_1 = -4.0930$ $\lambda_2 = -0.0230$ $\lambda_3 = -0.5828$ $\lambda_4 = -1.2854$
1500	$\lambda_1 = -0.0222$ $\lambda_2 = -0.0222$ $\lambda_3 = -3.6041$ $\lambda_4 = 0.19073$	$\lambda_1 = -3.5791$ $\lambda_2 = -0.0231$ $\lambda_3 = -0.1848$ $\lambda_4 = -0.3736$
4000	$\lambda_1 = -0.0222$ $\lambda_2 = -0.0222$ $\lambda_3 = -2.8773$ $\lambda_4 = -0.5360$	$\lambda_1 = -3.1047$ $\lambda_2 = -0.0230$ $\lambda_3 = 0.48053$ $\lambda_4 = 0.76707$
40000	$\lambda_1 = -0.0222$ $\lambda_2 = -0.0222$ $\lambda_3 = -2.1146$ $\lambda_4 = -1.2988$	$\lambda_1 = -3.6701$ $\lambda_2 = -0.0226$ $\lambda_3 = 14.2959$ $\lambda_4 = 14.0167$
400000	$\lambda_1 = -0.0222$ $\lambda_2 = -0.0222$ $\lambda_3 = -1.9211$ $\lambda_4 = -1.4923$	$\lambda_1 = -0.0229$ $\lambda_2 = -2.9025$ $\lambda_3 = 0.95533$ $\lambda_4 = 1.44328$



Dari Tabel 3.4, dapat dilihat bahwa untuk ukuran area 500 km^2 , 1000 km^2 , dan 1500 km^2 , ketiga nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit (U_0) adalah real negatif, sedangkan λ_4 bernilai real positif. Menurut Teorema 2.1, dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit untuk ketiga area tersebut bersifat tidak stabil. Namun, pada titik kesetimbangan endemik (U_e), keempat nilai eigennya bernilai real negatif, sehingga titik kesetimbangan endemik untuk ketiga area tersebut bersifat stabil asimtotik. Sedangkan untuk ukuran area 4000 km^2 , 40000 km^2 , dan 400000 km^2 , keempat nilai eigen pada titik kesetimbangan bebas penyakit (U_0) adalah real negatif, sehingga dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit untuk ketiga area tersebut bersifat stabil asimtotik. Pada titik kesetimbangan endemik (U_e), kedua nilai eigennya bernilai real negatif, sedangkan kedua nilai eigen yang lainnya bernilai real positif, hal ini mengakibatkan titik kesetimbangan endemik untuk ketiga area tersebut bersifat tidak stabil. Sifat kestabilan titik kesetimbangan model untuk keenam area tersebut, dapat disajikan pada Tabel 3.5 berikut.

Tabel 3.5 Sifat Kestabilan Titik Kesetimbangan

Area (km^2)	U_0	U_e
500	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik
1000	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik
1500	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik
4000	Stabil Asimtotik	Tidak Stabil
40000	Stabil Asimtotik	Tidak Stabil
400000	Stabil Asimtotik	Tidak Stabil

Dengan demikian, untuk ukuran area 500 km^2 , 1000 km^2 , dan 1500 km^2 , penyakit TB akan mewabah. Hal ini sesuai pada persamaan (3.36), yaitu ukuran area yang dihuni semua populasi harus lebih besar dari 3716.22 km^2 agar terbebas dari TB. Karena ukuran area yang ditetapkan kurang dari 3716.22 km^2 , maka TB akan mewabah. Namun, dengan ukuran area 4000 km^2 , 40000 km^2 , dan 400000 km^2 , penyakit TB tidak akan mewabah dan dalam waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit TB.

3.6.3 Kestabilan Model dengan Analisis R_0

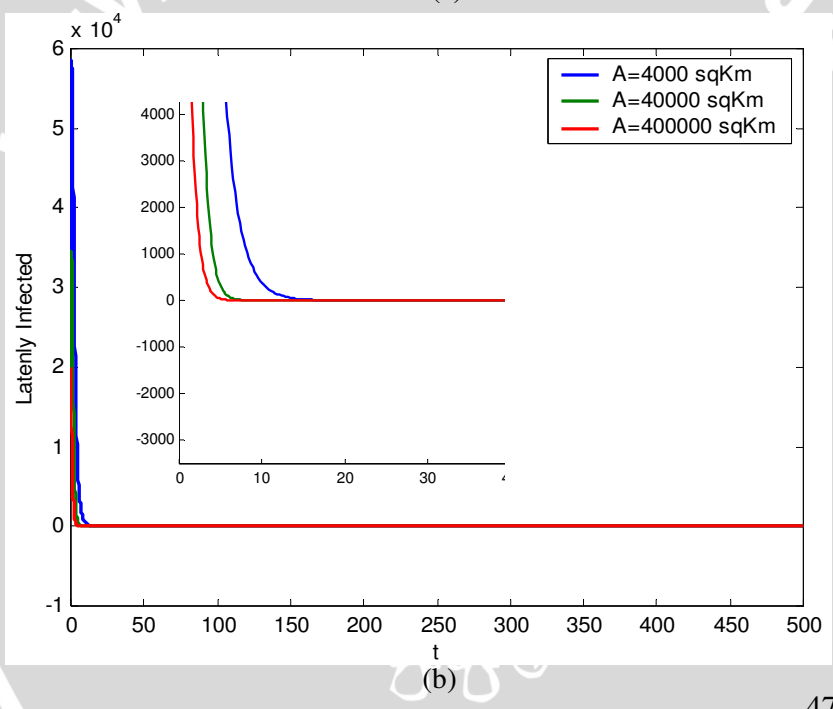
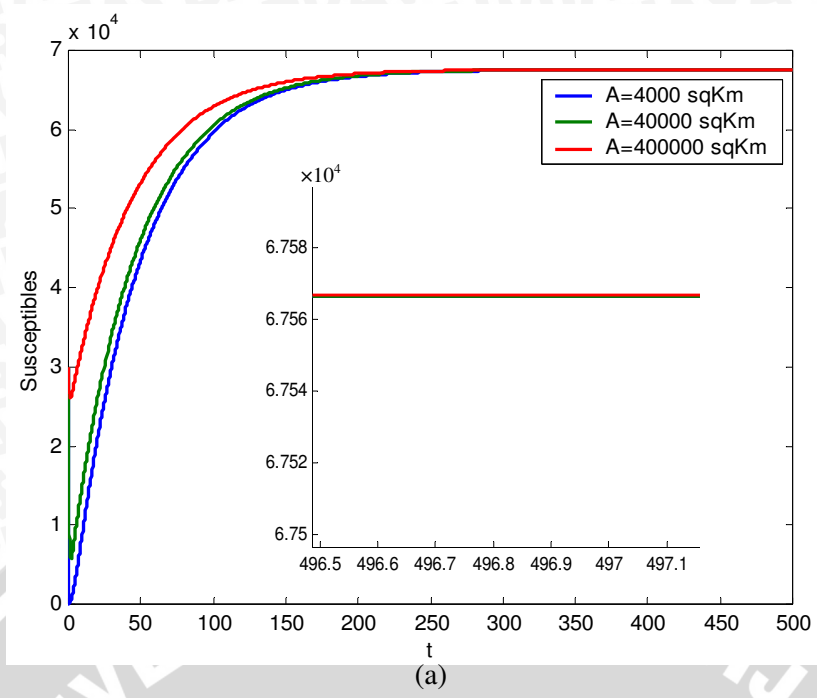
Dalam penentuan kestabilan model dengan analisis R_0 , diberikan beberapa nilai parameter untuk ukuran area. Sedangkan untuk nilai parameter yang lain, digunakan nilai parameter yang disajikan pada Tabel 3.1. Dengan mensubstitusikan nilai parameter pada Tabel 3.1 ke dalam persamaan (3.31), diperoleh nilai R_0 untuk masing-masing area yang disajikan pada Tabel 3.5 berikut.

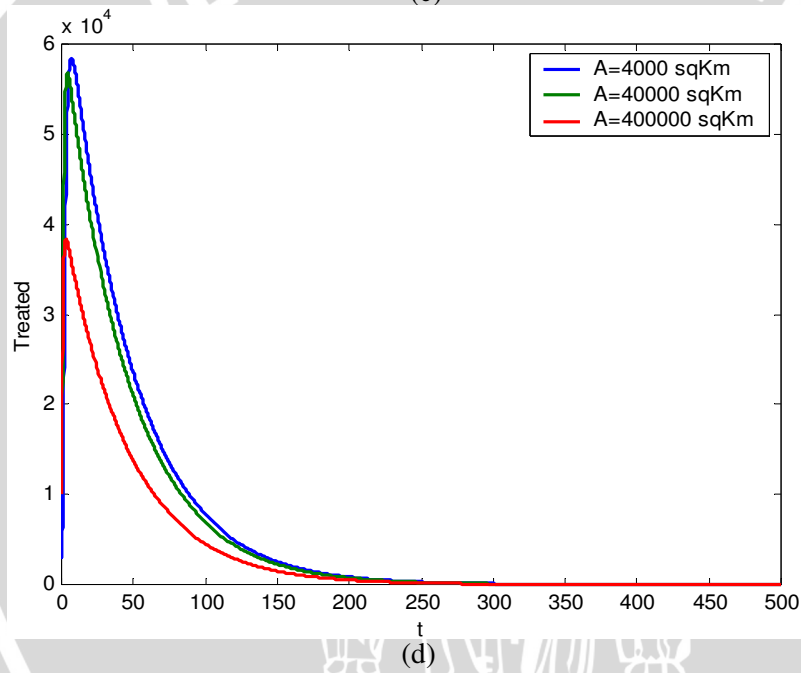
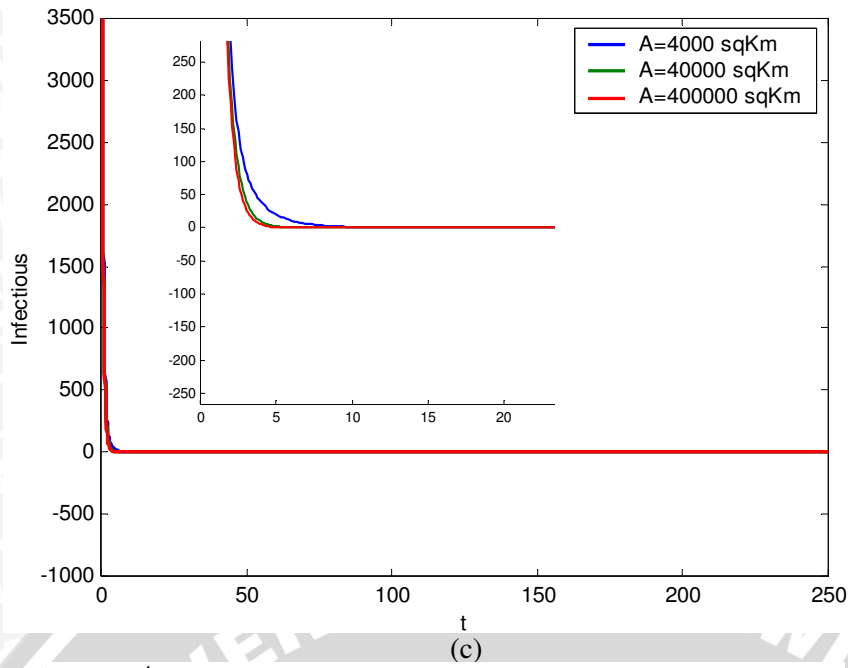
Tabel 3.6 Nilai R_0

Area (km ²)	Nilai R_0
500	7.433
1000	3.716
1500	2.477
4000	0.929
40000	0.0929
400000	0.00929

3.6.3.1 Kasus $R_0 < 1$

Pada Tabel 3.6, dapat dilihat bahwa nilai R_0 untuk ukuran area 4000 km², 40000 km² dan 400000 km² adalah kurang dari 1 ($R_0 < 1$), sehingga di ketiga area tersebut titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat stabil asimtotik. Hal ini sesuai dengan analisis kestabilan menggunakan sistem dinamik, yang disajikan pada Tabel 3.5. Hasil dari kedua analisis kesetimbangan tersebut, sesuai dengan persamaan (3.36), yaitu ukuran yang dihuni semua populasi harus lebih besar dari 3716.22 km² agar penyakit TB tidak mewabah. Dengan demikian, dalam jangka waktu yang lama, banyaknya individu akan konvergen ke titik kesetimbangan bebas penyakit. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.2 berikut.



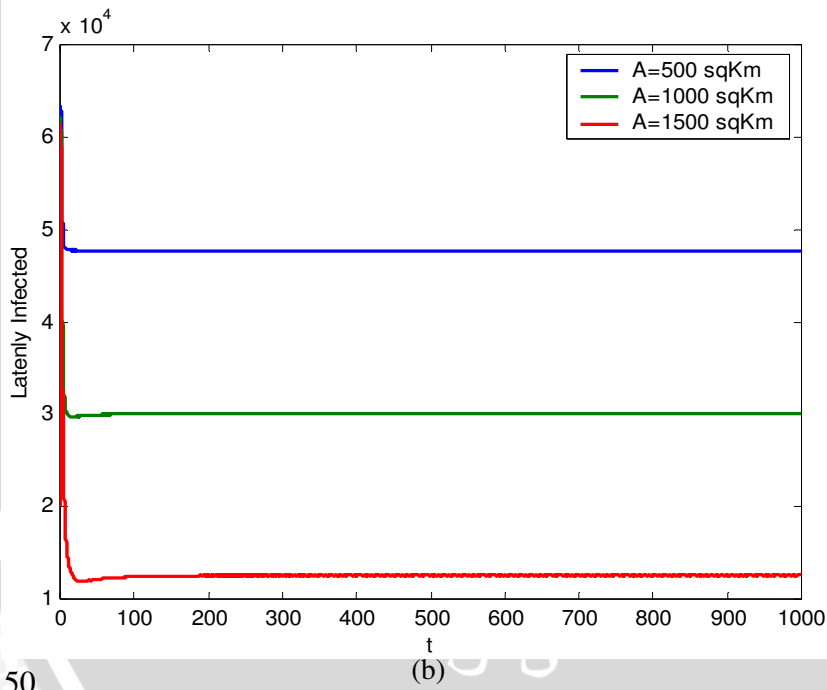
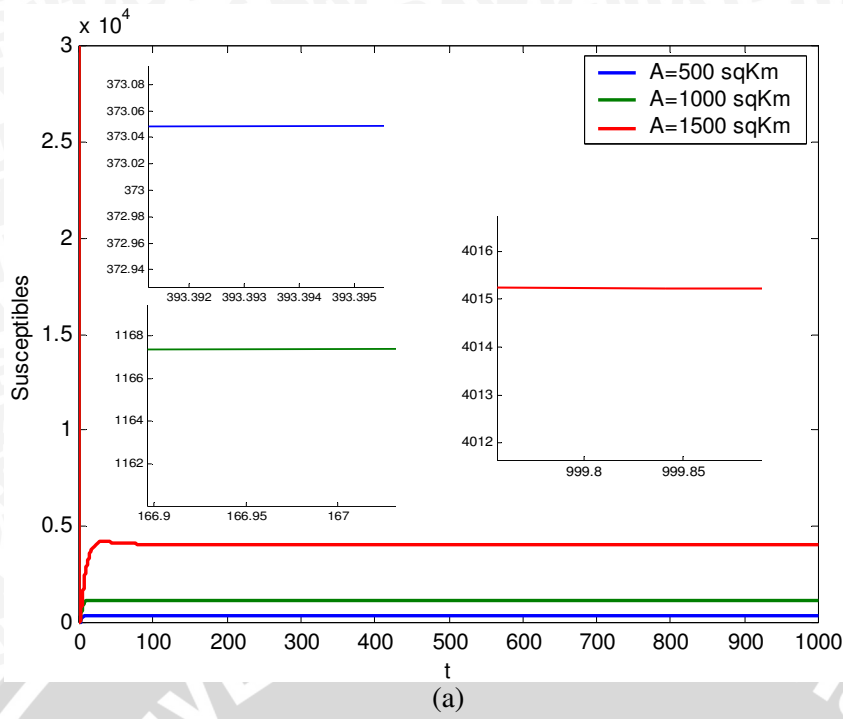


Gambar 3.2 Simulasi model untuk kasus $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 3.2 (a) dapat dilihat bahwa banyaknya individu *susceptible* untuk ketiga area, pada awalnya sesuai dengan nilai awal yang diberikan. Kemudian banyaknya individu *susceptible* dalam populasi berkurang, dikarenakan adanya kematian alami individu *susceptible* dan adanya kontak dengan individu *infectious*. Dengan berjalannya waktu, banyaknya individu *susceptible* mengalami peningkatan yang terus terjadi sampai pada saat menuju kondisi kesetimbangan untuk waktu yang lama, yaitu 67567.57 individu. Pada Gambar 3.2 (b), (c), dan (d) dapat dilihat bahwa banyaknya individu *latently infected*, *infectious* dan individu *treated* mengalami penurunan, bahkan dalam jangka waktu yang lama banyaknya individu tersebut adalah nol (tidak ada individu *latently infected*, *infectious* dan individu *treated* dalam populasi), dengan kata lain menuju kondisi kesetimbangan. Hal ini dikarenakan kepadatan populasi di dalam area tersebut kecil, sehingga kemungkinan individu *susceptible* akan terinfeksi juga sangat kecil. Oleh karena itu, tidak terjadi wabah penyakit TB dalam populasi, yang dapat diartikan sebagai keadaan bebas penyakit. Jadi, dengan ukuran area 4000 km², 40000 km² atau 400000 km² penyakit TB tidak akan mewabah, dan dalam waktu yang lama populasi akan terbebas dari penyakit TB.

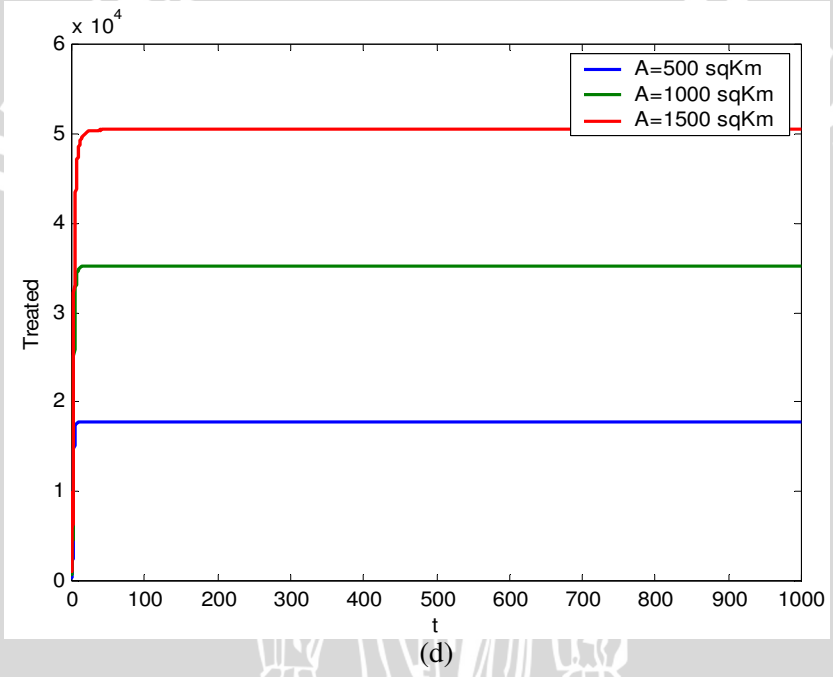
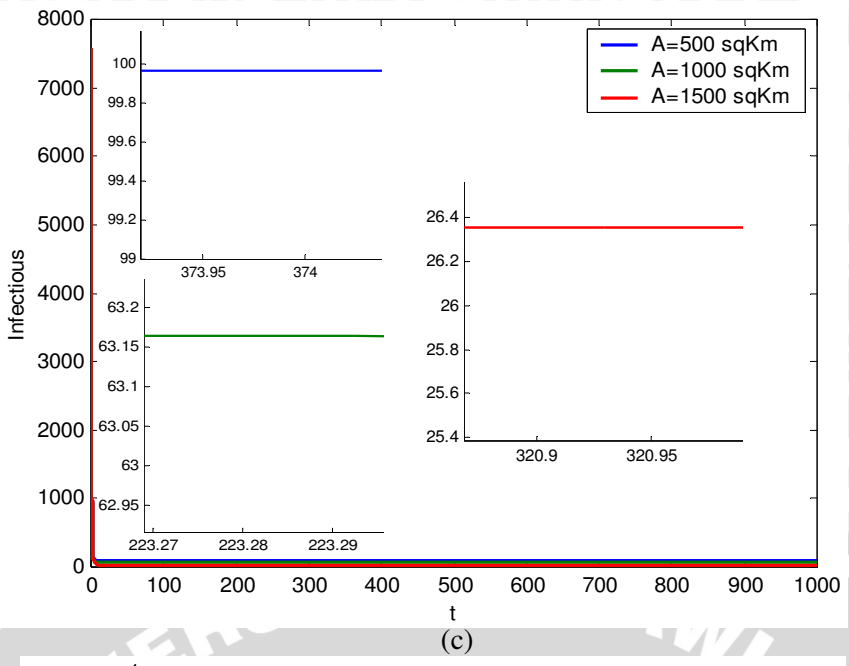
3.6.3.2 Kasus $R_0 > 1$

Pada Tabel 3.6, dapat dilihat bahwa nilai R_0 untuk ukuran area 500 km², 1000 km² dan 1500 km² adalah lebih besar dari 1 ($R_0 > 1$), sehingga di ketiga area tersebut titik kesetimbangan bebas penyakit bersifat tidak stabil, namun titik kesetimbangan endemik yang disajikan pada Tabel 3.3 bersifat stabil asimtotik. Hal ini sesuai dengan analisis kestabilan menggunakan sistem dinamik, yang disajikan pada Tabel 3.5. Hasil dari kedua analisis kesetimbangan tersebut, sesuai dengan persamaan (3.36), yaitu ukuran yang dihuni semua populasi harus lebih besar dari 3716.22 km² agar penyakit TB tidak mewabah. Dengan demikian, dalam jangka waktu yang lama, banyaknya individu akan konvergen ke titik kesetimbangan endemik. Hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.3 berikut.



50



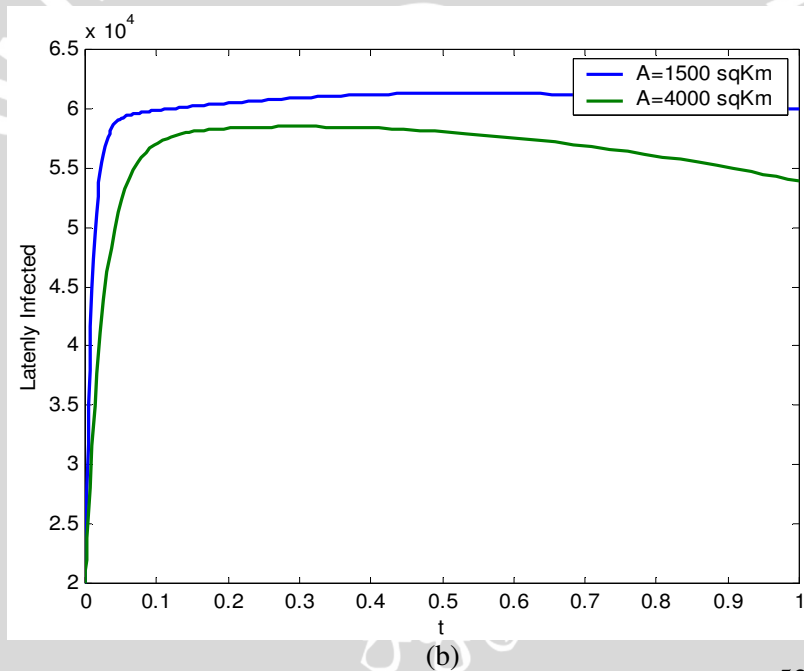
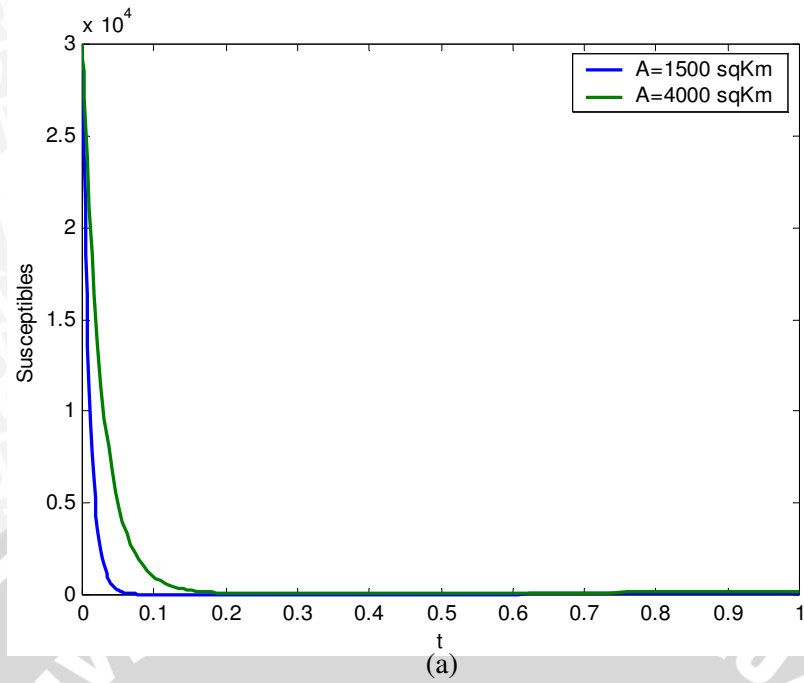


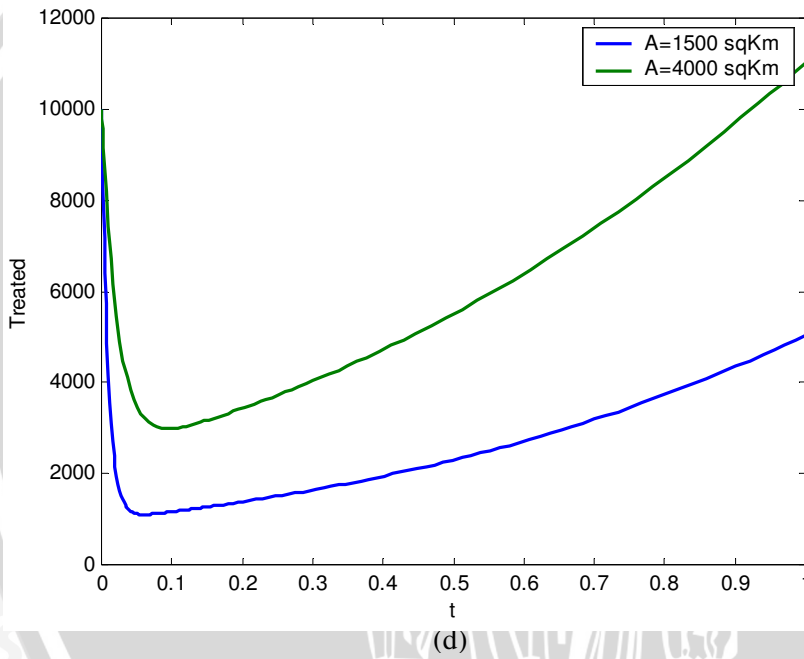
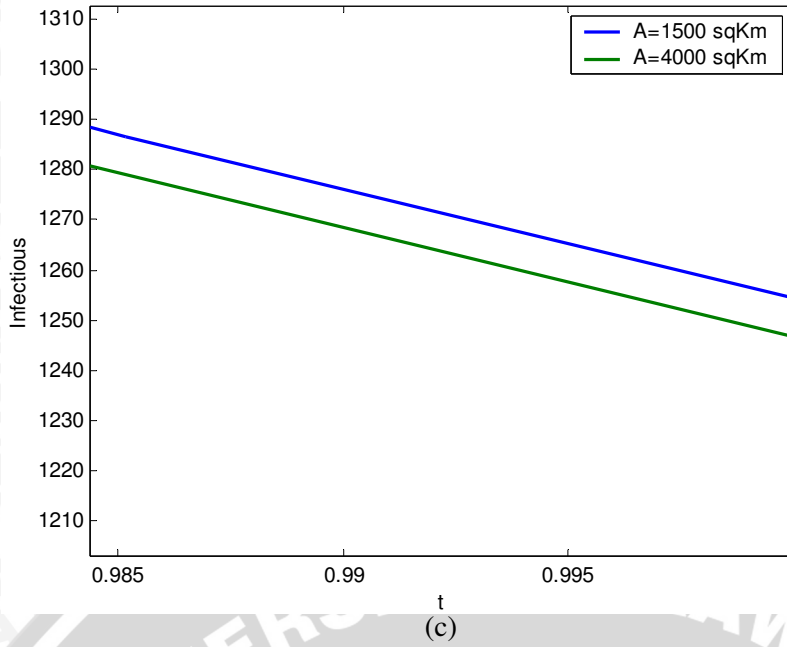
Gambar 3.3 Simulasi model untuk kasus $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 3.3 (a) dapat dilihat bahwa pada awalnya, banyaknya individu *susceptible* dalam populasi sesuai dengan nilai awal yang diberikan. Dengan berjalannya waktu, banyaknya individu *susceptible* mengalami penurunan yang cukup tajam. Hal ini disebabkan adanya tingkat kontak dengan individu *infectious* yang cukup besar dikarenakan tingginya kepadatan populasi dalam wilayah tersebut, sehingga kemungkinan individu *susceptible* menjadi individu terinfeksi akan semakin besar. Kemudian, banyaknya individu *susceptible* dalam populasi mengalami peningkatan karena kelahiran dan migrasi, dan setelah mencapai nilai tertentu akan menuju kondisi kesetimbangan endemik untuk waktu yang lama. Berdasarkan Gambar 3.3 (b), (c), dan (d) dapat dilihat bahwa banyaknya individu *latently infected*, *infectious* dan individu *treated* akan meningkat. Semakin besar banyaknya individu *susceptible* yang terinfeksi, maka banyaknya individu *latently infected*, *infectious* dan individu *treated* akan meningkat dan dalam jangka waktu yang lama banyaknya individu tersebut masing-masing akan menuju kondisi kesetimbangan endemik. Jadi, dengan ukuran area yang lebih kecil dari 3716.22 km², maka penyakit TB akan mewabah.

3.6.4 Simulasi Model Apabila Diberikan Ukuran Area yang Berbeda

Dalam simulasi ini, diberikan dua perbedaan nilai parameter untuk ukuran area A , yaitu 1500 km² dan 4000 km². Nilai parameter yang lain dan syarat awal diberikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2. Perilaku perubahan banyaknya individu dapat dilihat pada Gambar 3.4 berikut.





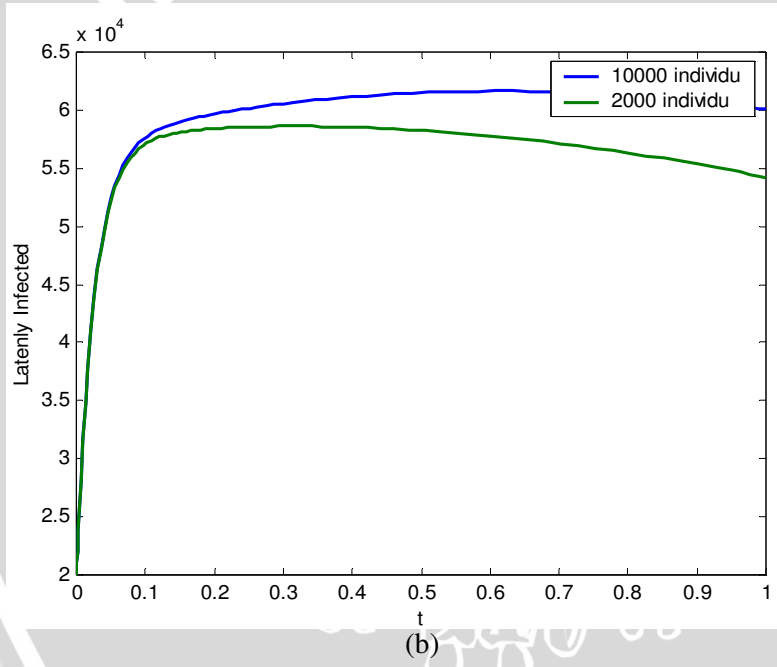
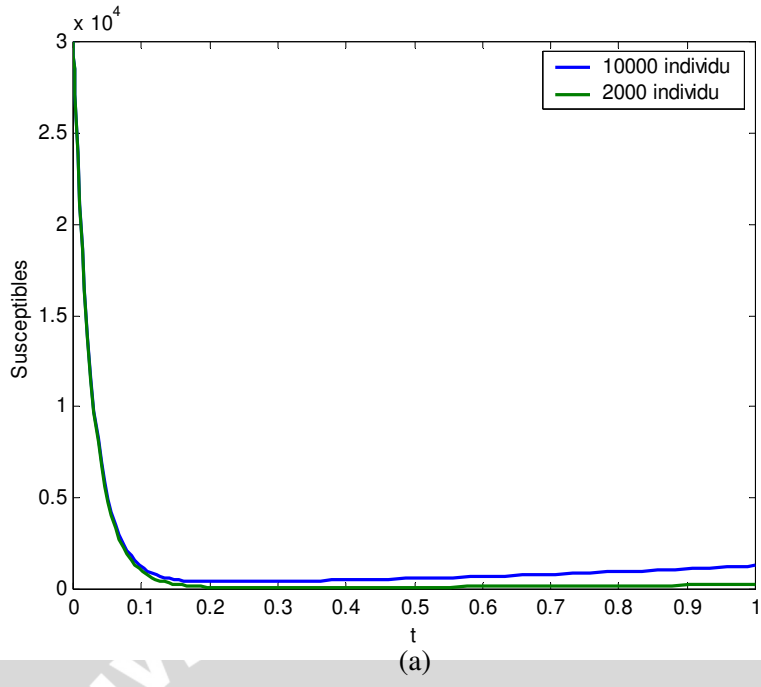
Gambar 3.4 Simulasi model dengan perbedaan ukuran area

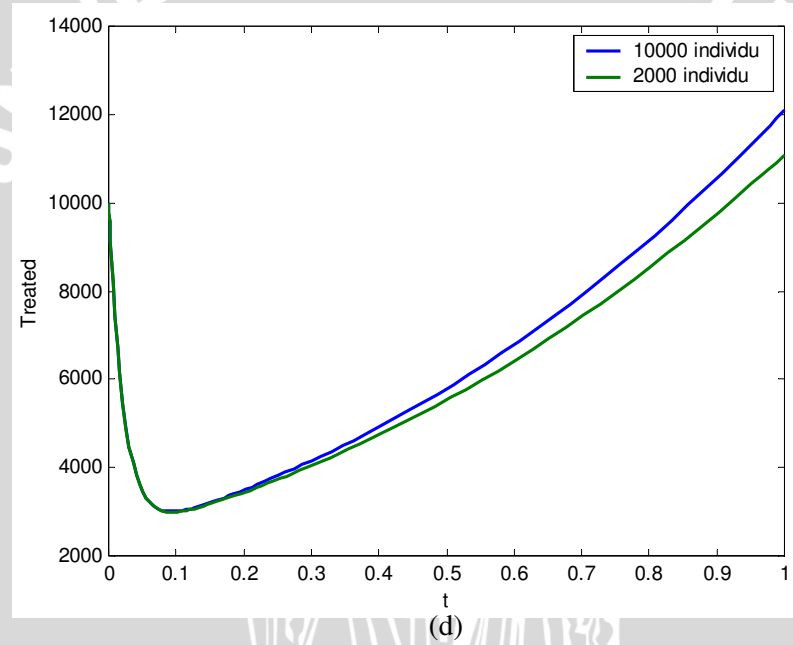
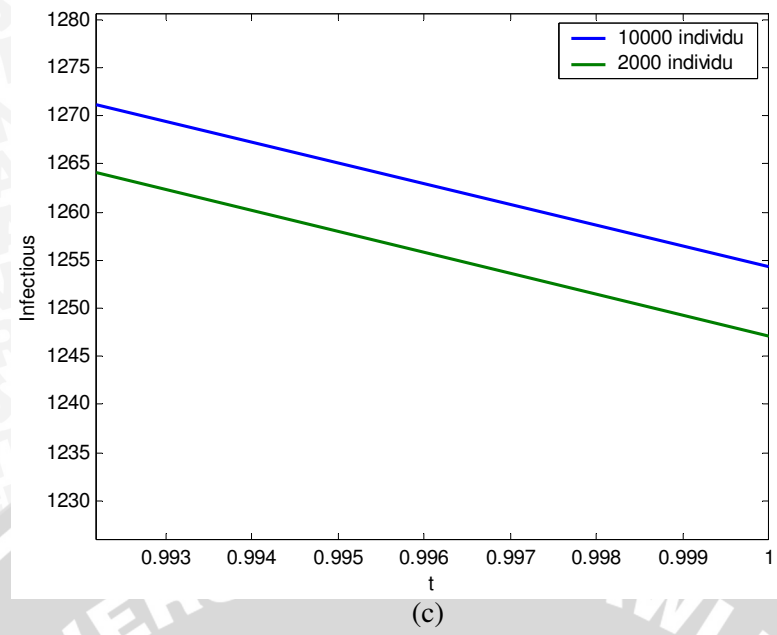
Berdasarkan Gambar 3.4 (a), dapat dilihat bahwa banyaknya individu *susceptible* akan menurun apabila ukuran area yang ditetapkan dipersempit dari 4000 km² menjadi 1500 km². Hal ini, berkaitan dengan kepadatan populasi yang terjadi dalam area tersebut. Semakin padat populasi, maka semakin banyak individu yang akan terinfeksi, sehingga mengakibatkan penurunan jumlah individu *susceptible*. Penurunan jumlah individu *susceptible*, mengakibatkan peningkatan banyaknya individu *latently infected*, hal ini dapat dilihat pada Gambar 3.4 (b). Begitu pula dengan banyaknya individu *infectious* (dapat dilihat pada Gambar 3.4 (c)), yaitu akan meningkat apabila ukuran areanya diperkecil. Namun, banyaknya individu yang sembuh (*treated*) akan menurun apabila kepadatan populasi dalam area tersebut tinggi, begitu juga sebaliknya.

3.6.5 Simulasi Model Apabila Diberikan Laju Rekrutment yang Berbeda

Dalam simulasi ini, diberikan dua nilai parameter yang berbeda untuk laju rekrutment λ (banyaknya individu yang menempati area yang sudah ditetapkan), yaitu 2000 individu dan 10000 individu. Nilai parameter yang lain dan syarat awal diberikan pada Tabel 3.1 dan Tabel 3.2, sedangkan ukuran areanya dimisalkan 4000 km². Perilaku perubahan banyaknya individu dapat dilihat pada Gambar 3.5 berikut.







Gambar 3.5 Simulasi model dengan perbedaan laju rekrutment

Berdasarkan Gambar 3.5 (a), dapat dilihat bahwa banyaknya individu *susceptible* akan meningkat apabila laju rekrutmentnya diperbesar. Hal ini dikarenakan banyaknya individu sehat bertambah apabila banyaknya individu yang menempati area juga diperbesar. Semakin besar banyaknya individu *susceptible*, maka semakin besar pula banyaknya individu *latently infected* dan individu *infectious* (dapat dilihat pada Gambar 3.5 (b) dan (c)). Ini dikarenakan semakin padatnya populasi apabila banyaknya individu diperbesar. Akibatnya, individu yang sehat akan lebih banyak yang terinfeksi. Sedangkan banyaknya individu yang sembuh (*treated*) akan lebih besar apabila banyaknya individu yang menempati area tersebut diperbesar. Banyaknya individu *treated* dapat dikategorikan sebagai individu sehat yang dapat terinfeksi kembali oleh penyakit TB.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Dengan menerjemahkan model kompartemen, diperoleh model penyebaran penyakit TB yang bergantung pada kepadatan populasi, berupa sistem persamaan diferensial nonlinier

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \mu S(t) - \beta_1 cS(t) \frac{I(t)}{A} \\ \frac{dL(t)}{dt} = \beta_1 cS(t) \frac{I(t)}{A} - (\mu + k + r_1)L(t) + \beta_2 cT(t) \frac{I(t)}{A} \\ \frac{dI(t)}{dt} = kL(t) - (\mu + d + r_2)I(t) \\ \frac{dT(t)}{dt} = r_1L(t) + r_2I(t) - \mu T(t) - \beta_2 cT(t) \frac{I(t)}{A} \end{cases}.$$

2. Ada dua macam titik kesetimbangan dari model penyebaran penyakit TB yang bergantung pada kepadatan populasi, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakitnya adalah $(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0)$.
3. Analisis R_0 (*basic reproduction number*) dapat menentukan sifat kestabilan titik kesetimbangan model. Metode generasi selanjutnya (*the next generation operator approach*) dapat digunakan untuk menghitung nilai R_0 , sehingga diperoleh

$$R_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right) \left(\frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{(\mu + d + r_2)} \right) \left(\frac{k}{(\mu + k + r_1)} \right).$$

Berdasarkan syarat kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit yang dianalisis menggunakan R_0 , diperoleh karakteristik area (area yang sebaiknya dihuni tiap individu) agar populasi terbebas dari penyakit, yaitu harus lebih besar dari perkalian antara probabilitas individu yang dapat bertahan dari tingkat *latent* ke dalam tingkat *infectious* dan banyaknya individu *latently infected* yang dihasilkan dari individu *infectious*. Dengan menggunakan nilai parameter yang sudah ditetapkan, diperoleh karakteristik area yang harus dihuni tiap individu yaitu 0.055 km^2 .

4. Dari hasil simulasi model, diperoleh kesimpulan bahwa kepadatan populasi sangat mempengaruhi laju penyebaran penyakit TB. Semakin padat populasi dalam wilayah yang sudah ditetapkan, maka akan semakin besar pula laju penyebaran penyakit TB.

4.2 Saran

Pada pembahasan selanjutnya ada beberapa hal yang dapat dikembangkan dari skripsi ini antara lain:

1. mengembangkan model TB yang tidak hanya bergantung pada kepadatan populasi,
2. mengkaji lebih lanjut eksistensi titik kesetimbangan endemik (U_e) model TB yang bergantung pada kepadatan populasi,
3. menerapkan metode pendekatan operator generasi selanjutnya (*the next operator generation approach*) ke dalam model dinamik yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

- Birkhoff, G. dan G. C. Rota. 1989. *Ordinary Differential Equations*. John Willey&Sons, Inc. Canada.
- Boyce, W. G. dan R. C. DiPrima. 2005. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Eight edition. John Willey & Sons, Inc. United State of America.
- Castillo-Chavez, C., Z. Feng dan W. Huang. 2002. On The Computation R_0 and Its Role On Global Stability. *IMA Volumes in Mathematics and its Applications vol. 125* (hlm.1-22).
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta.
- Naggle, R. K dan Edward B. S. 1993. *Fundamentals of Differential Equations and Boundary Value Problems*. Addison-Wesley Publishing Company. USA.
- Robinson, R. C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems : Continuous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA.
- Ross, S. L. 1984. *Differential Equation*. John Willey & Sons. United State of America.
- Ssematimba, A., J.Y.T. Mugisha dan L.S. Luboobi. 2005. Mathematical Models for the Dynamics of Tuberculosis in density-dependent Populations : The Case of Internally Displaced Peoples's Camps (IDCPs) in Uganda. *Journal of Mathematis and Statistics 1 vol. 3* (hlm. 217-224).
- Wibisono, Y. 1999. *Manual Matematika Ekonomi*. Yogyakarta. Gadjah Mada University Press.