PELABELAN-α PADA GRAF GRID DIMENSI DUA DAN DIMENSI TIGA

SKRIPSI

Oleh :

INDI ARNIAN SUKMA
0410940027-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

PELABELAN-α PADA GRAF GRID DIMENSI DUA DAN DIMENSI TIGA

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
INDI ARNIAN SUKMA
0410940027-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PELABELAN-α PADA GRAF GRID DIMENSI DUA DAN DIMENSI TIGA

Oleh :
INDI ARNIAN SUKMA
0410940027-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji pada tanggal 13 Mei 2009 dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Marsudi, MS	**Drs. Imam Nurhadi P., MT**
NIP. 131 759 585	**NIP. 131 837 971**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	:	**Indi Arnian Sukma**
NIM	:	**0410940027-94**
Jurusan	:	**Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	:	**Pelabelan-α pada Graf Grid Dimensi Dua dan Dimensi Tiga**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 13 Mei 2009
Yang menyatakan,

(Indi Arnian Sukma)
NIM. 0410940027-94

PELABELAN-α PADA GRAF GRID DIMENSI DUA DAN DIMENSI TIGA

ABSTRAK

Pelabelan-α adalah variasi dari salah satu jenis pelabelan graf, yaitu pelabelan *graceful*. Pelabelan-α adalah pelabelan *graceful* dengan dengan sifat tambahan, yaitu dalam pelabelan tersebut terdapat suatu bilangan bulat k sedemikian sehingga untuk setiap sisi xy , $f(x) \leq k < f(y)$ atau $f(y) \leq k < f(x)$.

Graf grid dimensi dua $P_m \times P_n$ didefinisikan sebagai hasil pergandaan kartesius dimana P_m adalah graf *path* dengan m titik. Graf grid dimensi dua yang digandakan dengan P_l akan membentuk graf grid dimensi tiga $P_m \times P_n \times P_l$. Dalam Skripsi ini akan ditentukan pelabelan-α pada $P_m \times P_n$ dan $P_m \times P_n \times P_l$ menggunakan metode yang sama dengan pelabelan-α pada graf *path*, yaitu menentukan pelabelan sisi pada graf dan membuktikan bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan sisi sejati.

Kata kunci : Pelabelan-α *,* pelabelan *graceful,* graf *path,* graf grid.

α-LABELING ON GRIDS GRAPH IN TWO-DIMENSIONS AND THREE-DIMENSIONS

ABSTRACT

α-labeling is a variation of *graceful* labeling, which is a type of graph labeling. α-labeling is *graceful* with additional property, that there is exists an integer k so that for each edge xy either $f(x) \le k < f(y)$ or $f(y) \le k < f(x)$.

Grid graf in two-dimensions, $P_m \times P_n$ is defined as Cartesian product, that P_m is *path* with m vertices. Grid graf in two-dimensions that operated with other P_l is create a grid graf in three-dimensions, $P_m \times P_n \times P_l$. This final project will find α-labeling on $P_m \times P_n$ and $P_m \times P_n \times P_l$ using the same method in α-labeling on *path*, there is finding an edge layout of graph, then prove it to be a proper edge layout.

Keywords : α-labeling, *graceful* labeling, *path,* grid graph.

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur Alhamdulillah penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat, taufik, dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Pelabelan-α pada Graf Grid Dimensi Dua dan Dimensi Tiga** ".

Selama penyusunan Skripsi ini, penulis menyadari tidak terlepas dari bantuan, bimbingan dan dorongan serta doa restu dari berbagai pihak. Oleh karena itu dalam kesempatan yang baik ini, tidak lupa penulis menghaturkan rasa hormat dan ucapan terima kasih yang tulus dan sedalam-dalamnya kepada :

1. Drs. Marsudi, MS selaku dosen pembimbing I dan Drs. Imam Nurhadi P., MT selaku dosen pembimbing II yang dengan sabar telah membimbing penulis selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, MSc selaku ketua jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang.
3. Dr. Wuryansari Muharini K., MSi selaku ketua program studi Matematika Universitas Brawijaya Malang.
4. Drs. Noor Hidayat, M.Si selaku dosen pembimbing akademik.
5. Ayah, Ibu, Adik, dan Kakakku tercinta yang selalu mendoakan dan memberi semangat selama penyusunan Skripsi ini.
6. Dosen pengajar dan seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika atas kesabaran dan bimbingan selama masa perkuliahan dan keikhlasan dalam memberikan ilmu yang bermanfaat.
7. Pihak lain yang telah membantu terselesaikannnya Skripsi ini yang tidak bisa penulis sebutkan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih jauh dari sempurna sehingga penulis mengharapkan saran dan kritik membangun dari berbagai pihak. Akhir kata, semoga Skripsi ini bermanfaat bagi teman-teman mahasiswa khususnya fakultas MIPA Universitas Brawijaya.

Malang, 13 Mei 2009

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

DAFTAR LAMPIRAN

DAFTAR SIMBOL

$V(G)$	: Himpunan titik dari graf G
$E(G)$	: Himpunan sisi dari graf G
$\lvert E \rvert$	: Banyak sisi suatu graf
$f(x)$	: Fungsi pelabelan titik x pada graf *path*
$f(x,y)$	: Fungsi pelabelan titik (x,y) pada graf grid dimensi dua
$f(x,y,z)$	: Fungsi pelabelan titik (x,y,z) pada graf grid dimensi tiga
$g(xy)$	: Fungsi pelabelan sisi xy
$(x,y)(x,y+1)$	: Sisi yang menghubungkan titik (x,y) dengan titik $(x,y+1)$

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pelabelan pada teori graf menjadi topik yang banyak mendapat perhatian sekarang ini, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang cukup luas, seperti dalam masalah teori koding, kristalografi, sinar-x, radar, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit (Wijaya, 2004). Pelabelan graf pada teori graf adalah pemberian nilai pada titik, garis atau sisi sedemikian sehingga dua titik, dua garis, atau dua sisi yang *adjacent* mendapat nilai yang berbeda. Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 60-an, seperti *valuasi-β* yang diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967, yang sekarang lebih dikenal dengan pelabelan *graceful* (Gallian, 1997).

Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Fungsi f merupakan pelabelan *graceful* dari G jika f adalah fungsi injektif dari titik-titik G ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$ sedemikian sehingga sisinya mendapatkan label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut, dimana label berbeda untuk setiap sisi dari G (Chen, 2006). Salah satu dari beberapa variasi pelabelan *graceful* adalah pelabelan-α (*α-labeling)*. Pelabelan-α merupakan pelabelan *graceful* dengan sifat tambahan, yaitu dalam pelabelan tersebut terdapat suatu bilangan bulat k sedemikian sehingga untuk setiap sisi (xy), $f(x) \leq k < f(y)$ atau $f(y) \leq k < f(x)$. Graf dengan pelabelan - α adalah graf bipartit dan graf jenis ini telah terbukti berguna pada pengembangan dari teori graf dekomposisi (*theory of graf decompositions*) (Gallian, 1997).

Pelabelan-α dapat diberikan pada beberapa jenis graf, salah satunya pada graf *Path*. Graf *Path* adalah graf yang terdiri dari titik dan sisi sehingga membentuk lintasan. Pergandaan kartesius dari graf *path* membentuk suatu graf grid. Pergandaan dua graf *path* membentuk graf grid dimensi dua, dan pergandaan tiga graf *path* membentuk graf grid dimensi tiga.

Berdasarkan latar belakang di atas, pada skripsi ini akan dibahas penentuan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua $P_m \times P_n$ dan graf grid dimensi tiga $(P_m \times P_n \times P_l)$ untuk l=2 dengan cara mengkonstruksi pelabelan sisi untuk tiap jenis graf dan membuktikan bahwa pelabelan tersebut merupakan pelabelan sisi sejati. Penulis memilih graf $P_m \times P_n$ dan graf $P_m \times P_n \times P_l$ dikarenakan bentuk kedua graf ini tidak jarang ditemui dalam kehidupan sehari-hari sehingga memungkinkan untuk mengaplikasikannya pada bidang keilmuan yang lain. Oleh karena itu penulis mengambil judul **”Pelabelan-*α* pada Graf Grid Dimensi Dua dan Dimensi Tiga”**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang, maka rumusan masalah pada Skripsi ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua.
2. Bagaimana menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi tiga.

1.3 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penulisan Skripsi ini adalah:

1. Graf yang diteliti adalah graf sederhana dan tak berarah.
2. Graf grid dimensi tiga yang dibahas adalah $P_m \times P_n \times P_2$.

1.4 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dari penulisan Skripsi ini adalah:

1. Menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua, $P_m \times P_n$.
2. Menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi tiga, $P_m \times P_n \times P_2$.

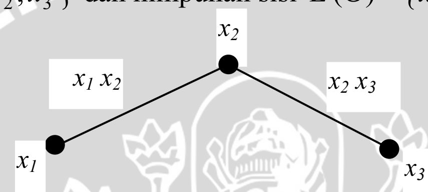
BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Berikut akan diberikan definisi dan konsep dasar graf yang terkait dengan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua dan dimensi tiga.

Definisi 2.1.1 Graf
Suatu graf *G* didefinisikan sebagai pasangan himpunan (*V,E*), ditulis dengan notasi *G* = (*V*(*G*)*,E*(*G*)), di mana *V* adalah himpunan tidak kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan *E* adalah himpunan sisi (*edges* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik (Munir, 2005).

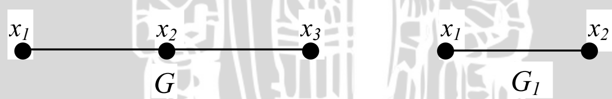
Contoh 2.1:
Gambar 2.1 menunjukkan graf *G* dengan himpunan titik $V(G)=\{x_1,x_2,x_3\}$ dan himpunan sisi $E(G)=\{x_1x_2,x_2x_3\}$.



Gambar 2.1. Graf G

Definisi 2.1.2 Subgraf
Misalkan *G* = (*V,E*) adalah sebuah graf. $G_1 = (V_1,E_1)$ adalah subgraf dari *G* jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq$ E (Munir, 2005).

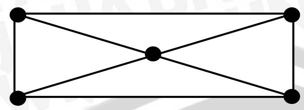
Contoh 2.2:
Gambar 2.2 menunjukkan bahwa graf G_1 adalah subgraf dari G karena $\{x_1,x_2\}\subseteq\{x_1,x_2,x_3\}$ dan $\{x_1x_2\}\subseteq\{x_1x_2,x_2x_3\}$.



Gambar 2.2. Graf G_1 subgraf dari graf *G*

Definisi 2.1.3 Graf Sederhana
Graf sederhana adalah suatu graf yang tidak memiliki *loop* (suatu garis yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri) dan garis ganda (dua garis atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama) (Marsudi, 1998).

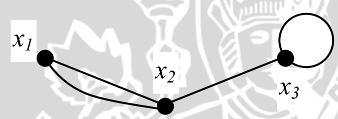
Contoh 2.3:
Graf pada Gambar 2.3 adalah graf sederhana.



Gambar 2.3. Graf sederhana

Definisi 2.1.4 Graf Tak Berarah
Graf tak berarah (*undirected graph*) adalah suatu graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. (Munir, 2005).

Contoh 2.4:
Graf pada Gambar 2.4 adalah graf tak berarah dimana $(x_1x_2) = (x_2x_1)$ adalah sisi yang sama, demikian pula $(x_2x_3) = (x_3x_2)$.



Gambar 2.4. Graf tak berarah

Definisi 2.1.5 *Adjacent* dan *Incident*
Dua buah titik pada graf tak berarah *G* dikatakan *adjacent* (bertetangga) bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi. Dengan kata lain, *x adjacent y* jika (xy) adalah sisi pada sebuah graf *G*. Untuk sembarang sisi $e = (xy)$, sisi *e* dikatakan *incident* (bersisian) dengan titik *x* dan titik *y* (Munir, 2005).

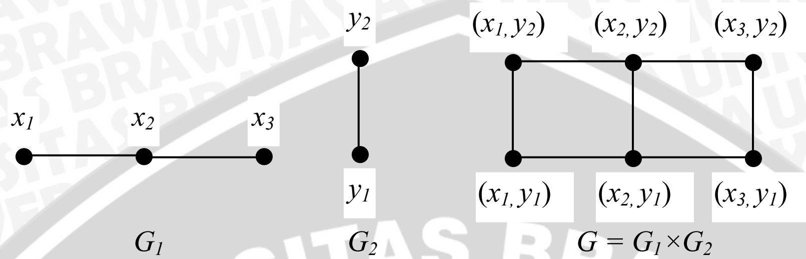
Pada Gambar 2.4, x_1 *adjacent* x_2 dan sisi (x_1x_2) *incident* dengan titik x_1 dan x_2.

Definisi 2.1.6 Pergandaan Kartesius G=G_1×G_2

Pergandaan kartesius $G = G_1 \times G_2$ dari dua graf $G_1 = (V_1,E_1)$ dan $G_2 = (V_2,E_2)$ adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = V_1 \times V_2$ dan (x_1x_2) *adjacent* dengan (y_1y_2) jika dan hanya jika $[(x_1 = y_1$ dan $x_2y_2 \in E_2)$ atau $(x_2 = y_2$ dan $x_1y_1 \in E_1)]$ (Chen, 2006).

Contoh 2.5:

Gambar 2.5 menunjukkan pergandaan kartesius $G = G_1 \times G_2$ dari dua graf $G_1=(V_1,E_1)$ dan $G_2=(V_2,E_2)$.



Gambar 2.5. Graf G merupakan hasil pergandaan kartesius $G_1 \times G_2$

Definisi 2.1.7 Fungsi

Misalkan X dan Y himpunan tidak kosong. Relasi biner f dari X ke Y merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam X dihubungkan dengan tepat satu elemen di dalam Y. X disebut domain dan Y disebut kodomain. Jika f adalah fungsi dari X ke Y, maka dapat ditulis:

$$f : X \rightarrow Y$$

yang artinya f memetakan X ke Y (Munir, 2005).

Dengan perkataan lain:

$f : X \rightarrow Y$ fungsi $\Leftrightarrow (\forall\, x_1, x_2 \in X)\,(x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2))$

Fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi injektif (*one to one*) jika dan hanya jika $(\forall\, x_1, x_2 \in X)$ $f(x_1) = f(x_2)$ $\Rightarrow$ $x_1 = x_2$, fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi surjektif (*onto*) jika dan hanya jika $(\forall\, y \in Y)$ $(\exists\, x \in X)$ $f(x) = y$, dan fungsi $f : X \rightarrow Y$ disebut fungsi bijektif (*berkorespondensi satu-satu*) jika dan hanya jika fungsi f injektif dan surjektif.

Definisi 2.1.8 Partisi
Himpunan tak kosong $\Re$ disebut partisi dari himpunan V jika berlaku (Johnsonbaugh, 1989):

1. $\bigcup \Re = V$.
2. Untuk sebarang $V_1, V_2 \in \Re$, $V_1 \cap V_2 = \phi$.

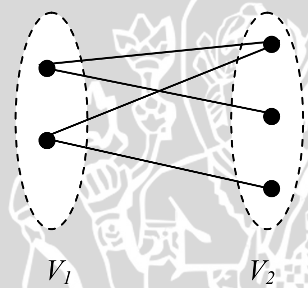
2.2 Jenis-jenis Graf

Berikut akan diberikan jenis-jenis graf yang terkait dengan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua dan dimensi tiga.

2.2.1 Graf Bipartit

Graf bipartit (*bipartite graph)* adalah graf G yang himpunan titiknya dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan bagian V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap sisi di dalam G menghubungkan sebuah titik di V_1 ke sebuah titik di V_2. Dengan kata lain, setiap pasang titik di V_1 (demikian pula dengan titik-titik di V_2) tidak *adjacent*. Graf bipartit dinyatakan dengan $G = (V_1, V_2)$ (Munir, 2005).

Contoh 2.6:
Graf G pada Gambar 2.6 adalah graf bipartit karena graf G dipartisi menjadi dua himpunan titik, V_1 dan V_2.

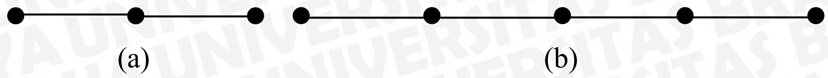


Gambar 2.6. Graf bipartit $G = (V_1, V_2)$

2.2.2 Graf *Path*

Jika $G=(V,E)$ sebuah graf dengan $V = \{x \mid x = 0, 1,\ldots,m-1\}$ dan $E = \{xy \mid x, y \in V, |x-y|=1\}$ maka G adalah graf *path* atau graf lintasan (Chen, 2006).

Contoh 2.7:
Graf *Path* dengan tiga titik ditunjukkan pada Gambar 2.7 (a) dan Graf *Path* dengan lima titik ditunjukkan pada Gambar 2.7 (b).

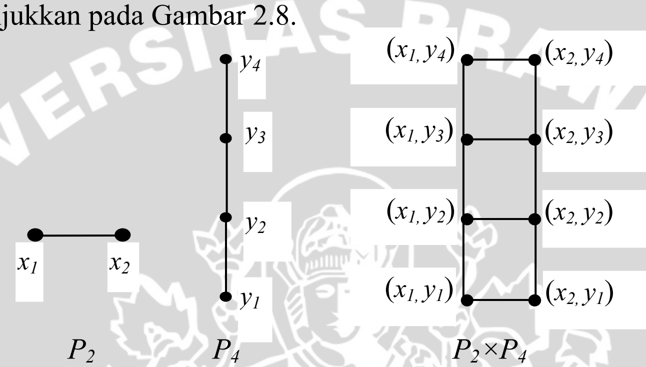


Gambar 2.7. Graf *path* (P_m) (a) P_3 (b) P_5

2.2.3 Graf Tangga

Graf tangga (*ladder*) adalah graf hasil pergandaan graf *path* P_2 dan P_n, yaitu $P_2 \times P_n$. Graf tangga biasanya dinotasikan dengan L_n (Chen, 2006).

Contoh 2.8:
Pembentukan graf tangga L_4 dari hasil pergandaan graf *path* P_2 dan P_4 ditunjukkan pada Gambar 2.8.

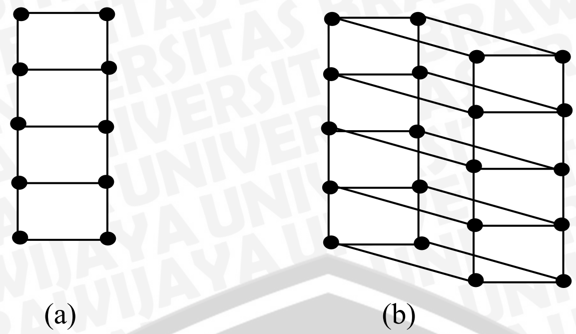


Gambar 2.8. Graf tangga L_4

2.2.4 Graf Grid Dimensi Dua dan Graf Grid Dimensi Tiga

Graf grid dimensi dua (*2-dimensional grids*) didefinisikan sebagai pergandaan kartesius $P_m \times P_n$ dengan P_m adalah graf *path* dengan m titik. Graf grid dimensi dua yang dioperasikan dengan graf *path* P_l, sehingga membentuk pergandaan kartesius $P_m \times P_n \times P_l$, disebut graf grid dimensi tiga (*3-dimensional grids*) (Chen, 2006).

Contoh 2.9:
Graf grid dimensi dua dengan $m = 5$ dan $n = 2$ $(P_5 \times P_2)$ ditunjukkan pada Gambar 2.9 (a) dan graf $P_5 \times P_2$ yang digandakan dengan P_2 membentuk $P_5 \times P_2 \times P_2$ ditunjukkan pada Gambar 2.9 (b).

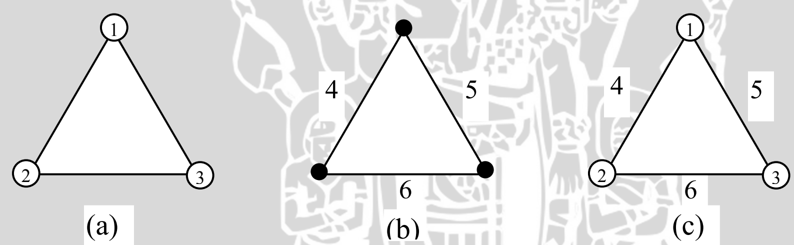


Gambar 2.9. Graf grid (a) graf grid dimensi dua ($P_5 \times P_2$) (b) graf grid dimensi tiga ($P_5 \times P_2 \times P_2$)

2.3 Pelabelan Graf

Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memetakan himpunan dari elemen graf (titik, garis, dan keduanya) ke himpunan bilangan bulat positif. Jika domainnya himpunan titik maka pelabelannya disebut pelabelan titik, dan jika domainnya himpunan garis atau sisi maka pelabelannya disebut pelabelan garis atau pelabelan sisi. Jika domain dari suatu fungsi adalah himpunan titik dan sisi maka pelabelannya disebut pelabelan total (Baĉa dkk., 2003).

Contoh 2.10:
Gambar 2.10 (a) menunjukkan pelabelan titik, Gambar 2.10 (b) menunjukkan pelabelan sisi, dan Gambar 2.10 (c) menunjukkan pelabelan total pada graf G.



Gambar 2.10. Pelabelan graf G (a) pelabelan titik (b) pelabelan sisi (c) pelabelan total

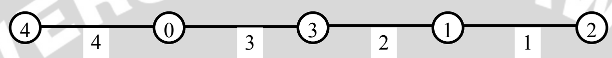
Definisi 2.3.1 Pelabelan *Graceful*

Misalkan G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Fungsi f merupakan pelabelan *graceful* dari G jika f adalah fungsi injektif dari titik-titik G ke himpunan $\{0, 1, \ldots, |E|\}$ sedemikian sehingga sisinya mendapatkan label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut. Dengan kata lain, jika x dan y titik yang *adjacent* pada G, $f(x)$ dan $f(y)$ adalah pelabelan titik-titik tersebut, maka pelabelan untuk sisi yang menghubungkan x dan y adalah $|f(x) - f(y)|$, dimana nilainya berbeda untuk $|E|$ pasang dari titik-titik G.

Graf yang dilabeli dengan aturan pelabelan *graceful* disebut graf *graceful* (Chen, 2006).

Contoh 2.11:

Gambar 2.11 menunjukkan pelabelan *graceful* pada P_5, dimana pelabelan setiap sisi didapat dengan mengurangkan label pada dua titik yang dihubungkan oleh sisi tersebut dan nilainya pelabelan sisinya berbeda untuk tiap pasang titik.



Gambar 2.11. Pelabelan *graceful* pada graf P_5

Definisi 2.3.2 Pelabelan - α

Jika G mempunyai pelabelan *graceful* f dan G graf *bipartit* dengan bipartisi $V_1 = \{x \in V | f(x) > k\}$ dan $V_2 = \{y \in V | f(y) \leq k\}$ untuk suatu bilangan bulat k, maka f disebut pelabelan-α (α-*labeling*) (Chen, 2006).

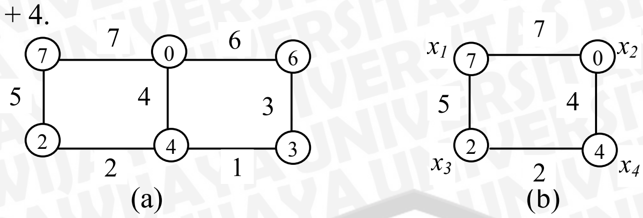
Pada Contoh 2.11, graf P_5 memuat pelabelan-α, karena terdapat bipartisi $V_1 = \{0,2,4\}$ dan $V_2 = \{1,3\}$ dengan nilai k = 1. Keterangan lebih lanjut dapat dilihat pada Sub bab 2.4.

Definisi 2.3.3 Sel dan Pembatas sel

Misalkan $G = (V,E)$ adalah subgraf dari grid dengan $V = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Jika x_1 dan x_4 masing-masing *adjacent* dengan x_2 dan x_3, maka G disebut sel (*cell*). Jika G sel dan fungsi $g : E \rightarrow N$ adalah pelabelan sisi pada sisi-sisi G, maka sel ini dikatakan memenuhi pembatas sel (*cell constraint*) jika $g(x_1x_2)+g(x_3x_4) = g(x_1x_3)+g(x_2x_4)$.

Pembatas sel ini berperan penting pada pelabelan-α (Chen, 2006).

Contoh 2.12:
Gambar 2.12 (a) menunjukkan pelabelan pada $P_2 \times P_3$ dan Gambar 2.12 (b) adalah sel dari $P_2 \times P_3$ yang memenuhi pembatas sel karena $7 + 2 = 5 + 4$.

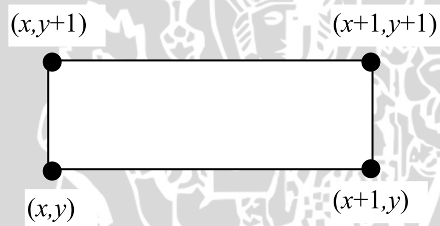


Gambar 2.12. Sel dan pembatas sel (a) pelabelan pada $P_2 \times P_3$
(b) sel dari $P_2 \times P_3$ yang memenuhi pembatas sel

Definisi 2.3.4 Pelabelan Sisi pada Graf Grid
Misalkan $G = (V,E)$ adalah graf grid dan terdapat fungsi bijektif g, dengan $g : E \rightarrow \{1, \ldots, |E|\}$. Sebuah sel dalam G merupakan subgraf dari G dengan himpunan titik $\{(x,y),(x+1,y),(x,y+1),(x+1,y+1)\}$ jika untuk setiap titik (x, y) berlaku:

$$g((x,y)(x+1,y))+g((x,y+1)(x+1,y+1))=g((x,y)(x,y+1))+g((x+1,y),(x+1,y+1))$$

Fungsi g seperti ini dinamakan pelabelan sisi dari G (Chen, 2006).
Ilustrasi graf grid dengan himpunan titik $\{(x,y),(x+1,y),(x,y+1),(x+1,y+1)\}$ disajikan pada Gambar 2.13.



Gambar 2.13. Ilustrasi graf grid dengan himpunan titik
$\{(x,y),(x+1,y),(x,y+1), (x+1,y+1)\}$

Definisi 2.3.5 Pelabelan Sisi Sejati pada Graf Grid
Misalkan $G = (V,E)$ graf grid dan $g : E \rightarrow \{1, \ldots, |E|\}$ adalah pelabelan sisi dari G. Jika terdapat fungsi $f : V \rightarrow \{0, 1, \ldots, |E|\}$ yang merupakan pelabelan-α dari G dan $g(xy) = |f(x) - f(y)|$, maka g dinamakan pelabelan sisi sejati (Chen, 2006).

Teorema 2.1 :

Untuk graf grid $G = P_m \times P_n$, jika didefinisikan $g : E \rightarrow \{1, \dots, |E|\}$ dengan

$$g((x,y)(x+1,y)) = |E| + (x + (2m-1)y) \quad \text{dan}$$

$$g((x,y)(x,y+1)) = |E| - (x + (2m-1)y + m - 1)$$

maka g merupakan pelabelan sisi dari $P_m \times P_n$.

Bukti :

1. Karena terdapat $|E|$ sisi, maka jelas bahwa pelabelan sisi adalah onto (g surjektif).
2. Untuk semua sisi e, akan ditunjukkan $g(e)$ berbeda (g injektif).

   a) Ambil $(x_1, y_1)(x_1+1, y_1), (x_2, y_2)(x_2+1, y_2) \in E$ dengan

   $g((x_1, y_1)(x_1+1, y_1)) = g((x_2, y_2)(x_2+1, y_2))$

   Akan ditunjukkan $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

   $g((x_1, y_1)(x_1+1, y_1)) = g((x_2, y_2)(x_2+1, y_2))$

   $\Leftrightarrow |E| - (x_1 + (2m-1)y_1) = |E| - (x_2 + (2m-1)y_2)$

   $\Leftrightarrow |E| - (x_1 + (2m-1)y_1) - |E| + (x_2 + (2m-1)y_2) = 0$

   $\Leftrightarrow x_1 + (2m-1)y_1 - x_2 - (2m-1)y_2) = 0$

   $\Leftrightarrow (x_1 - x_2) + (2m-1)(y_1 - y_2) = 0$

   $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

   b) Ambil $(x_1, y_1)(x_1, y_1+1), (x_2, y_2)(x_2, y_2+1) \in E$ dengan

   $g((x_1, y_1)(x_1, y_1+1)) = g((x_2, y_2)(x_2, y_2+1))$

   Akan ditunjukkan $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

   $g((x_1, y_1)(x_1, y_1+1)) = g((x_2, y_2)(x_2, y_2+1))$

   $\Leftrightarrow |E| - (x_1 + (2m-1)y_1 + m - 1) = |E| - (x_2 + (2m-1)y_2 + m - 1)$

   $\Leftrightarrow |E| - (x_1 + (2m-1)y_1 + m - 1) - |E| + (x_2 + (2m-1)y_2 + m - 1) = 0$

   $\Leftrightarrow x_1 + (2m-1)y_1 + m - 1 - x_2 - (2m-1)y_2 - m + 1 = 0$

   $\Leftrightarrow (x_1 - x_2) + (2m-1)(y_1 - y_2) = 0$

   $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

c) Ambil $(x_1, y_1)(x_1+1, y_1), (x_2, y_2)(x_2, y_2+1) \in E$ dengan

$g((x_1, y_1)(x_1+1, y_1)) = g((x_2, y_2)(x_2, y_2+1))$

Akan ditunjukkan $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

$$g((x_1, y_1)(x_1+1, y_1)) = g((x_2, y_2)(x_2, y_2+1))$$
$$\Leftrightarrow |E| - (x_1 + (2m-1)y_1) = |E| - (x_2 + (2m-1)y_2 + m - 1)$$
$$\Leftrightarrow |E| - (x_1 + (2m-1)y_1) - |E| + (x_2 + (2m-1)y_2 + m - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 + (2m-1)y_1 - x_2 - (2m-1)y_2 - m + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2) + (2m-1)(y_1 - y_2) - m + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ dan } y_1 = y_2$$

(Jika $y_1 \neq y_2$, maka $|x_1 - x_2|$ paling tidak *m* (tidak mungkin))

Dari (a), (b), dan (c), terbukti *g* injektif.

Dari (1) dan (2), terbukti $g : E \rightarrow \{1,..., |E|\}$ fungsi bijektif. Jadi, *g* merupakan pelabelan sisi dari $P_m \times P_n$.

2.4 Pelabelan-*α* Pada Graf *Path*

Definisi 2.4.1 Fungsi Karakteristik

Misalkan *G* graf dengan titik *x* di *G*. Fungsi-fungsi karakteristik μ dan θ di *x* didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \text{ genap} \\ 0 & \text{jika } x \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \text{ ganjil} \\ 0 & \text{jika } x \text{ genap} \end{cases}$$

Definisi 2.4.2 Fungsi *Floor* dan Fungsi *Ceiling*

Misalkan *x* adalah bilangan riil, berarti *x* berada di antara dua bilangan bulat. Fungsi *floor* dari *x* , yang dinotasikan dengan $\lfloor x \rfloor$, menyatakan nilai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan *x*. Fungsi *ceiling* dari *x*, yang dinotasikan dengan $\lceil x \rceil$, menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan *x* (http://www.freewebs.com).

Dengan kata lain, fungsi *floor* membulatkan *x* ke bawah, sedangkan fungsi *ceiling* membulatkan *x* ke atas.

Contoh 2.13:

Berikut diberikan contoh nilai fungsi *floor* dan fungsi *ceiling*:

1. $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ $\quad \lceil 3{,}5 \rceil = 4$
2. $\lfloor 4{,}8 \rfloor = 4$ $\quad \lceil 4{,}8 \rceil = 5$
3. $\lfloor -0{,}5 \rfloor = -1$ $\quad \lceil -0{,}5 \rceil = 0$
4. $\lfloor -3{,}5 \rfloor = -4$ $\quad \lceil -3{,}5 \rceil - 3$

Lemma 2.1 :

Untuk semua titik x berlaku:

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = x$$

Bukti :

1. untuk x genap , $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$

2. untuk x ganjil , $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \frac{x-1}{2} + \frac{x+1}{2} = x$

Teorema 2.2 :

Graf *path* P_m dengan m titik adalah graf *graceful* dan mempunyai pelabelan-α.

Bukti:

1. Akan dibuktikan P_m adalah graf *graceful*

Didefinisikan pelabelan titik $f : V(P_m) \rightarrow \{0, 1, \ldots , m-1\}$ (Chen, 2006) dengan

$$f(x) = \mu(x)(m-1) - (-1)^x \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor \tag{2.1}$$

dan sisi (xy) dengan $y = x + 1$ diberi label :

$$g(xy) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(x+1)|$$

$$= \left|(m-1) - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor\right| \tag{2.2}$$

$$= (m-1) - x . \tag{2.3}$$

Dengan demikian dapat diketahui bahwa (m–1) sisi P_m berturut-turut diberi label (m–1), (m–2),…, 2, 1. Jadi, terbukti P_m adalah graf *graceful*.

2. Akan ditunjukkan P_m graf bipartit pada himpunan titik V_e dan V_o dan $\exists k \ni f(x) > k, \forall x \in V_e$ dan $f(y) \le k, \forall y \in V_o$.

Untuk $x \in V_e$, $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor = \frac{x}{2}$

$$min\{f(x) | x \in V_e\} \ge min\left\{(m-1) - \frac{x}{2} \middle| 0 \le x \le m-1\right\}$$

$$\ge m - 1 - \left(\frac{m-1}{2}\right) = \frac{m-1}{2}.$$

Ini berarti, $\forall x \in V_e$, $f(x) \ge \frac{m-1}{2}$. (2.4)

Untuk $y \in V_o$,

jika (m–1) ganjil, maka

$$max\{f(y) | y \in V_o\} \le max\left\{\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor \middle| 0 \le y \le m-1\right\} \le \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor.$$

Ini berarti, $f(y) \le \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$. (2.5)

Jika (m–1) genap, maka

$$max\{f(y) | y \in V_o\} \le max\left\{\left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor \middle| 0 \le y \le m-1\right\} \le \left\lfloor \frac{m-1-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m-2}{2} \right\rfloor.$$

Ini berarti, $f(y) \le \left\lfloor \frac{m-2}{2} \right\rfloor$. (2.6)

Dari (2.4), (2.5) dan (2.6) diperoleh

$$k = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{m-1}{2} \right\rfloor & \text{, jika } (m–1) \text{ genap} \\ \left\lfloor \dfrac{m-2}{2} \right\rfloor & \text{, jika } (m–1) \text{ ganjil} \end{cases}$$

Terlihat bahwa G adalah graf bipartit dengan himpunan titik:

Untuk (m–1) ganjil,

$$V_e = \left\{ x \middle| 0 \le x \le m-1, f(x) > \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \right\} \quad \text{dan}$$

$$V_o = \left\{ y \middle| 0 \le y \le m-1, f(y) \le \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Untuk (m–1) genap,

$$V_e = \left\{ x \middle| 0 \le x \le m-1, f(x) > \left\lfloor \frac{m-2}{2} \right\rfloor \right\} \quad \text{dan}$$

$$V_o = \left\{ y \middle| 0 \le y \le m-1, f(y) \le \left\lfloor \frac{m-2}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Jadi, terbukti f adalah pelabelan-α untuk P_m.
Dari (1) dan (2), Teorema 2.1 terbukti.

Metode pada pelabelan-α graf *Path* ini akan dijadikan dasar untuk menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua dan graf grid dimensi tiga.

Contoh 2.14:

Berikut akan ditunjukkan pelabelan-α pada P_5.

$V(P_5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1. Pelabelan titik-titik dari P_5:

   Fungsi pelabelan titik untuk graf *path* (P_m) adalah:

$$f(x) = \mu(x)(m-1) - (-1)^x \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

Jadi,

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \mu(0)(5-1) - (-1)^0 \left\lfloor \frac{0}{2} \right\rfloor = 1.4 - 1.0 = 4$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \mu(1)(5-1) - (-1)^1 \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = 0.4 - (-1).0 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \mu(2)(5-1) - (-1)^2 \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor = 1.4 - 1.1 = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = \mu(3)(5-1) - (-1)^3 \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 0.4 - (-1).1 = 1$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \mu(4)(5-1) - (-1)^4 \left\lfloor \frac{4}{2} \right\rfloor = 1.4 - 1.2 = 2$$

2. Pelabelan sisi-sisi dari P_5:

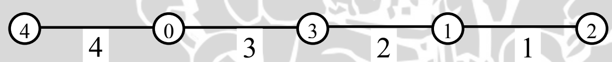
   Fungsi pelabelan titik untuk graf *path* (P_m) adalah:

$$g(xy) = |f(x) - f(x+1)|$$

   Jadi,

$$x = 0, x+1 = 1 \Rightarrow g(01) = |f(0) - f(1)| = |4 - 0| = 4$$
$$x = 1, x+1 = 2 \Rightarrow g(12) = |f(1) - f(2)| = |0 - 3| = 3$$
$$x = 2, x+1 = 3 \Rightarrow g(23) = |f(2) - f(3)| = |3 - 1| = 2$$
$$x = 3, x+1 = 4 \Rightarrow g(34) = |f(3) - f(4)| = |1 - 2| = 1$$

Himpunan bipartisi dari adalah V_e = {0, 2, 4} dengan $f(x) > 1$ untuk setiap $x \in V_e$ dan V_o = {1, 3} dengan $f(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in V_o$, dengan demikian nilai $k = 1$.
Jadi, pelabelan-α pada P_5 dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 2.14. Pelabelan-α pada P_5

BAB III
PEMBAHASAN

Pada Bab III ini ditunjukkan cara menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi dua ($P_m \times P_n$), dan graf grid dimensi tiga ($P_m \times P_n \times P_2$).

3.1 Pelabelan-α pada Graf Grid Dimensi Dua

Teorema 2.3

Graf grid dimensi dua, $P_m \times P_n$ mempunyai pelabelan-α.

Bukti:

Misalkan graf $G(V,E) = P_m \times P_n$ dengan

$$V = \{(x, y) | x = 0,1, \dots, m-1; y = 0,1, \dots, n-1\}$$

$$E = \{(x_1, y_1)(x_2, y_2) | (x_1 = x_2 \wedge |y_1 - y_2| = 1) \vee (y_1 = y_2 \wedge |x_1 - x_2| = 1)\}$$

Misalkan label titik (0,0) adalah $|E|$ dan label titik (0,1) adalah 0, maka pelabelan titik dari G didefinisikan dengan (Chen, 2006)

$$f(x, y) = |E| \mu(x + y) - (-1)^{x+y} \left(my + \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor \right) \qquad (3.1)$$

di mana $|E| = m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n$

Berdasar fungsi pelabelan titik tersebut, dirumuskan fungsi pelabelan sisi sebagai berikut:

Pelabelan sisi tegak atau sisi $(x,y)(x,y+1)$ dari graf $P_m \times P_n$,

$$\begin{aligned} g((x, y)(x, y+1)) &= |f(x, y) - f(x, y+1)| \\ &= \left| |E| \mu(x + y) - (-1)^{x+y} \left(my + \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor \right) - |E| \mu(x + y + 1) \right. \\ &\quad \left. - (-1)^{x+y+1} \left(my + m + \left\lfloor \frac{x - y - 1}{2} \right\rfloor \right) \right| \\ &= \left| |E| - \left(my + \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor \right) - \left(my + m + \left\lfloor \frac{x - y - 1}{2} \right\rfloor \right) \right| \end{aligned}$$

$$= |E| - \left(2my + m + \left\lfloor \frac{x-y-1+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-y-1}{2} \right\rfloor \right)$$
$$= |E| - (2my + m + x - y - 1) \qquad (3.2)$$

Pelabelan sisi mendatar atau sisi $(x,y)(x+1,y)$ dari graf $P_m \times P_n$,

$$g((x,y)(x+1,y)) = |f(x,y) - f(x+1,y)|$$
$$= \left| |E|\mu(x+y) - (-1)^{x+y}\left(my + \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor\right) - |E|\mu(x+1+y) - (-1)^{x+y+1}\left(my + m + \left\lfloor \frac{x+1-y}{2} \right\rfloor\right) \right|$$
$$= \left| |E| - \left(my + \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor\right) - \left(my + \left\lfloor \frac{x-y+1}{2} \right\rfloor\right) \right|$$
$$= |E| - \left(2my + m + \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x-y+1}{2} \right\rfloor\right)$$
$$= |E| - (2my + x - y) \qquad (3.3)$$

Untuk setiap x dan y, konstruksi pelabelan sisi mendatar pada $P_m \times P_n$ disajikan dalam Tabel 3.1 dan konstruksi pelabelan sisi tegaknya disajikan dalam Tabel 3.2.

Tabel 3.1 Konstruksi pelabelan sisi tegak $P_m \times P_n$

$g((x,y)(x,y+1))$	$y = 0$	$y = 1$	$\cdots$	$y = n-2$
$x = 0$	$\lvert E\rvert - (m-1)$	$\lvert E\rvert - (3m-2)$	$\cdots$	$m-1$
$x = 1$	$\lvert E\rvert - m$	$\lvert E\rvert - (3m-1)$	$\cdots$	$m-2$
$x = 2$	$\lvert E\rvert - (m+1)$	$\lvert E\rvert - 3m$	$\cdots$	$m-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x = m-1$	$\lvert E\rvert - (2m-2)$	$\lvert E\rvert - (4m-3)$	$\cdots$	m

Tabel 3.2 Konstruksi pelabelan sisi mendatar $P_m \times P_n$

$g((x,y)(x+1,y))$	$y = 0$	$y = 1$	$\cdots$	$y = n-1$
$x = 0$	$\lvert E\rvert - 0$	$\lvert E\rvert - (2m-1)$	$\cdots$	$m-1$
$x = 1$	$\lvert E\rvert - 1$	$\lvert E\rvert - 2m$	$\cdots$	$m-2$
$x = 2$	$\lvert E\rvert - 2$	$\lvert E\rvert - (2m+1)$	$\cdots$	$m-3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$x = m-2$	$\lvert E\rvert - (m-2)$	$\lvert E\rvert - (3m-3)$	$\cdots$	m

Untuk menunjukkan bahwa pelabelan sisi pada graf dimensi dua $P_m \times P_n$ adalah pelabelan sisi sejati, berikut ini akan ditunjukkan bahwa semua titik pada $P_m \times P_n$ mempunyai label berbeda dan $P_m \times P_n$ merupakan graf bipartit.

1. Akan ditunjukkan G graf bipartit pada himpunan titik V_o dan V_e dan $\exists k \ni f(x,y) > k, \forall (x,y) \in V_e$ dan $f(x,y) \le k, \forall (x,y) \in V_o$.
   Misalkan
   $V_o = \{(x,y) | \text{jumlah } x \text{ dan } y \text{ ganjil}\}$
   $V_e = \{(x,y) | \text{jumlah } x \text{ dan } y \text{ genap}\}$.
   Untuk $(x,y) \in V_e, \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor = \frac{x-y}{2}$,
   $$min\{f(x,y) | (x,y) \in V_e\}$$
   $$\ge min\left\{|E| - \left(my + \frac{x-y}{2}\right) \middle| 0 \le x \le m-1, 0 \le y \le n-1\right\}$$
   $$\ge |E| - \left(m(n-1) + \frac{m-n}{2}\right)$$
   $$= mn - \frac{m+n}{2} = mn - \left\lfloor \frac{m+n+1}{2} \right\rfloor.$$
   Ini berarti, $\forall (x,y) \in V_e, f(x,y) \ge mn - \left\lfloor \frac{m+n+1}{2} \right\rfloor$. (3.4)
   Untuk $(x,y) \in V_o, \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor = \frac{x-y-1}{2}$,

$$max\{f(x,y)|(x,y)\in V_o\}$$

$$\le max\left\{\left(my+\frac{x-y-1}{2}\right)\middle| 0\le x\le m-1, 0\le y\le n-1\right\}$$

$$\le\left(m(n-1)+\frac{m-n-1}{2}\right)$$

$$= mn-\frac{m+n+1}{2} = mn-\left\lfloor\frac{m+n+2}{2}\right\rfloor.$$

Ini berarti, $\forall (x,y)\in V_o, f(x,y)\le mn-\left\lfloor\frac{m+n+2}{2}\right\rfloor.$ (3.5)

Dari pertidaksamaan (3.4) dan (3.5), diperoleh

$$\forall (x,y)\in V_o, f(x,y)\le mn-\left\lfloor\frac{m+n+2}{2}\right\rfloor \text{ dan}$$

$$\forall (x,y)\in V_e,\ f(x,y) > mn-\left\lfloor\frac{m+n+2}{2}\right\rfloor$$

sehingga diketahui nilai $k = mn-\left\lfloor\frac{m+n+2}{2}\right\rfloor$.

Terbukti G graf bipartit dengan himpunan bipartisi V_o dan V_e serta f adalah pelabelan-α untuk $P_m \times P_n$.

2. Akan ditunjukkan semua label titik-titik $P_m \times P_n$ berbeda

Andaikan $f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$ dengan $x_1 \ne x_2$ atau $y_1 \ne y_2$.

Untuk $x_1 + y_1$ dan $x_2 + y_2$ keduanya genap atau keduanya ganjil,

$$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$$

$$\Leftrightarrow my_1+\left\lfloor\frac{x_1-y_1}{2}\right\rfloor = my_2+\left\lfloor\frac{x_2-y_2}{2}\right\rfloor$$

$$\Leftrightarrow my_1-my_2+\left\lfloor\frac{x_1-y_1}{2}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{x_2-y_2}{2}\right\rfloor = 0$$

$$\Leftrightarrow m(y_1-y_2)+\frac{x_1-x_2-y_1+y_2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2m(y_1-y_2)+(x_1-x_2-y_1+y_2)}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2m(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2 - y_1 + y_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2m-1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2m-1)(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2)$$

Karena $x_1 \neq x_2$ atau $y_1 \neq y_2$, maka y_1 dan y_2 harus berbeda paling tidak 1, sehingga x_1 dan x_2 berbeda paling tidak (2*m*–1). Hal ini tidak mungkin terjadi karena $0 \leq x_1 \leq 2m-1$. Jadi $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$ atau semua titik $(x, y) \in V$ mempunyai label berbeda.

Dari (1) dan (2) terbukti bahwa graf grid dimensi dua $P_m \times P_n$ mempunyai pelabelan-α.

Persamaan (3.1) adalah fungsi pelabelan titik pada graf grid dimensi dua $P_m \times P_n$ yang memenuhi pelabelan - α.

Langkah-langkah dalam menentukan pelabelan-α pada $P_m \times P_n$ dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Diketahui nilai *m* dan *n*.
2. Gunakan nilai *m* dan *n* untuk menentukan jumlah sisi pada graf ($|E|$), dengan
$$|E| = m(n-1) + n(m-1) = 2mn - m - n\,.$$
3. Tentukan pelabelan titik $f(x,y)$ untuk setiap $x, y \in V$ ($P_m \times P_n$) dengan
$$f(x,y) = |E|\mu(x+y) - (-1)^{x+y}\left(my + \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor\right)$$
4. Tentukan pelabelan sisi $g(xy)$, dengan
   a) $g((x,y)(x,y+1)) = |E| - (2my + m + x - y - 1)$, untuk label sisi tegak
   b) $g((x,y)(x+1,y)) = |E| - (2my + x - y)$, untuk label sisi mendatar.
5. Tentukan himpunan bipartisi dari $P_m \times P_n$ dan dapatkan nilai *k*.

Contoh 3.1:

Berikut akan diberikan contoh pelabelan pada graf grid dimensi dua dengan kasus di mana nilai m dan n berbeda.

1. Kasus dengan nilai m dan n keduanya genap.

Ambil $m = 4$ dan $n = 2$, akan ditentukan pelabelan-α pada $P_4 \times P_2$

$$m = 4, n = 2 \Rightarrow |E| = 2mn - m - n = 10$$

$$V(P_4 \times P_2) = \{(x, y) | x = 0,1,2,3; y = 0,1\}$$

a) Pelabelan titik $f(x,y)$

$$f(x, y) = 10\mu(x + y) - (-1)^{x+y}\left(4y + \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,0) = 10\mu(0) - (-1)^0\left(4.0 + \left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor\right) = 10 - 0 = 10$$

$$f(1,0) = 10\mu(1) - (-1)^1\left(4.0 + \left\lfloor \frac{1-0}{2} \right\rfloor\right) = 0 + 0 = 0$$

$$f(2,0) = 10\mu(2) - (-1)^2\left(4.0 + \left\lfloor \frac{2-0}{2} \right\rfloor\right) = 10 - 1 = 9$$

$$f(3,0) = 10\mu(3) - (-1)^3\left(4.0 + \left\lfloor \frac{3-0}{2} \right\rfloor\right) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0,1) = 10\mu(1) - (-1)^1\left(4.1 + \left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor\right) = 0 + 4 - 1 = 3$$

$$f(1,1) = 10\mu(2) - (-1)^2\left(4.1 + \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor\right) = 10 - 4 = 6$$

$$f(2,1) = 10\mu(3) - (-1)^3\left(4.1 + \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor\right) = 0 + 4 = 4$$

$$f(3,1) = 10\mu(4) - (-1)^4\left(4.1 + \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor\right) = 10 - 5 = 5$$

a) Pelabelan sisi

Tabel 3.1 digunakan untuk menentukan pelabelan sisi tegak pada $P_4 \times P_2$, dan Tabel 3.2 digunakan untuk menentukan pelabelan sisi mendatar pada $P_4 \times P_2$.

Tabel 3.3 Pelabelan sisi tegak pada $P_4 \times P_2$

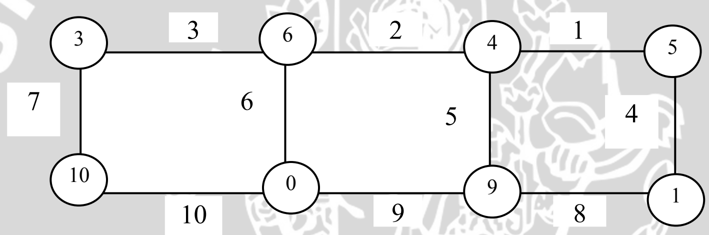
$g((x,y)(x,y+1))$	$y = 0$
$x = 0$	$10 - (4 - 1) = 7$
$x = 1$	$10 - 4 = 6$
$x = 2$	$10 - 5 = 5$
$x = 3$	$10 - 4 - 2 = 4$

Tabel 3.4 Pelabelan sisi mendatar pada $P_4 \times P_2$

$g((x,y)(x+1,y))$	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	$10 - 0 = 10$	$10 - (2.4 - 1) = 3$
$x = 1$	$10 - 1 = 9$	$10 - 2.4 = 2$
$x = 2$	$10 - 2 = 8$	$10 - (2.4 + 1) = 1$

Himpunan bipartisi dari $P_4 \times P_2$ adalah V_e = {0,2,4} dengan $f(x,y) > 4, \forall (x,y) \in V_e$ dan V_o = {1,3} dengan $f(x,y) \leq 4$, $\forall (x,y) \in V_o$, sehingga didapat nilai $k = 4$.

Jadi pelabelan-α pada $P_4 \times P_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1 Pelabelan-α pada $P_4 \times P_2$

2. Kasus dengan nilai m dan n keduanya ganjil

   Ambil m = 3 dan n = 3, akan ditentukan pelabelan-α pada $P_3 \times P_3$

   $m = 3, n = 3 \Rightarrow |E| = 2mn - m - n = 12$

   $V(P_3 \times P_3) = \{(x,y) | x = 0,1,2\,;\, y = 0,1,2\}$

a) Pelabelan titik $f(x,y)$

$$f(x,y)=12\mu(x+y)-(-1)^{x+y}\left(3y+\left\lfloor\frac{x-y}{2}\right\rfloor\right)$$

$$f(0,0)=12\mu(0)-(-1)^{0}\left(3.0+\left\lfloor\frac{0-0}{2}\right\rfloor\right)=12-0=12$$

$$f(1,0)=12\mu(1)-(-1)^{1}\left(3.0+\left\lfloor\frac{1-0}{2}\right\rfloor\right)=0+0=0$$

$$f(2,0)=12\mu(2)-(-1)^{2}\left(3.0+\left\lfloor\frac{2-0}{2}\right\rfloor\right)=12-1=11$$

$$f(0,1)=12\mu(1)-(-1)^{1}\left(3.1+\left\lfloor\frac{0-1}{2}\right\rfloor\right)=0+3-1=2$$

$$f(1,1)=12\mu(2)-(-1)^{2}\left(3.1+\left\lfloor\frac{1-1}{2}\right\rfloor\right)=12-3=9$$

$$f(2,1)=12\mu(3)-(-1)^{3}\left(3.1+\left\lfloor\frac{2-1}{2}\right\rfloor\right)=0+3=3$$

$$f(0,2)=12\mu(2)-(-1)^{2}\left(3.2+\left\lfloor\frac{0-2}{2}\right\rfloor\right)=12-6+1=7$$

$$f(1,2)=12\mu(3)-(-1)^{3}\left(3.2+\left\lfloor\frac{1-2}{2}\right\rfloor\right)=0+6-1=5$$

$$f(2,2)=12\mu(4)-(-1)^{4}\left(3.2+\left\lfloor\frac{2-2}{2}\right\rfloor\right)=12-6=6$$

b) Pelabelan sisi

Tabel 3.5 Pelabelan sisi tegak pada $P_3 \times P_3$

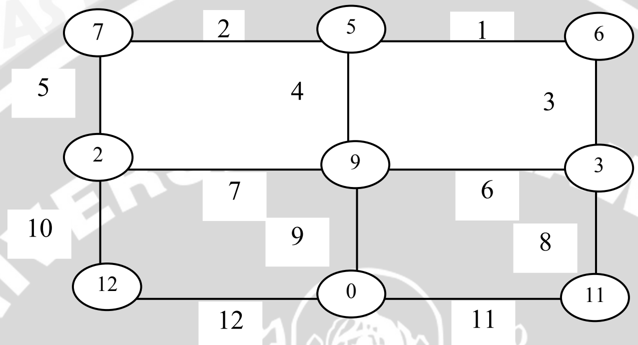
$g((x,y)(x,y+1))$	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	12 – (3 –1) = 10	12 – (3.3 – 2) = 5
$x = 1$	12 – 3 = 9	12 – (3.3 – 1) = 4
$x = 2$	12 – 4 = 8	12 – 3.3 = 3

Tabel 3.6 Pelabelan sisi mendatar pada $P_3 \times P_3$

$g((x,y)(x+1,y))$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	12 – 0 = 12	12 – 5 = 7	12 – 10 = 2
$x = 1$	12 – 1 = 11	12 – 6 = 6	12 – 11 = 1

Himpunan bipartisi dari $P_3 \times P_3$ adalah V_e = {0, 2, 4} dengan $f(x,y) > 5, \forall (x,y) \in V_e$ dan V_o = {1,3} dengan $f(x,y) \le 5$, $\forall (x,y) \in V_o$, sehingga didapat nilai $k = 5$.

Jadi pelabelan-α pada $P_3 \times P_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.2 Pelabelan-α pada $P_3 \times P_3$

3. Kasus dengan nilai m genap dan n ganjil

   Ambil $m = 4$ dan $n = 3$, akan ditentukan pelabelan-α pada $P_4 \times P_3$

   $m = 4, n = 3 \Rightarrow |E| = 2mn - m - n = 17$

   $V(P_4 \times P_3) = \{(x,y) | x = 0,1,2,3 \,;\, y = 0,1,2\}$

   a. Pelabelan titik $f(x,y)$

$$f(x,y) = 17\mu(x+y) - (-1)^{x+y}\left(3y + \left\lfloor \frac{x-y}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,0) = 17\mu(0) - (-1)^{0}\left(4.0 + \left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor\right) = 17 - 0 = 17$$

$$f(1,0) = 17\mu(1) - (-1)^{1}\left(4.0 + \left\lfloor \frac{1-0}{2} \right\rfloor\right) = 0 + 0 = 0$$

$$f(2,0)=17\mu(2)-(-1)^2\left(4.0+\left\lfloor\frac{2-0}{2}\right\rfloor\right)=17-1=16$$

$$f(3,0)=17\mu(3)-(-1)^3\left(4.0+\left\lfloor\frac{3-0}{2}\right\rfloor\right)=0+1=1$$

$$f(0,1)=17\mu(1)-(-1)^1\left(4.1+\left\lfloor\frac{0-1}{2}\right\rfloor\right)=0+4-1=3$$

$$f(1,1)=17\mu(2)-(-1)^2\left(4.1+\left\lfloor\frac{1-1}{2}\right\rfloor\right)=17-4=13$$

$$f(2,1)=17\mu(3)-(-1)^3\left(4.1+\left\lfloor\frac{2-1}{2}\right\rfloor\right)=0+4=4$$

$$f(3,1)=17\mu(4)-(-1)^4\left(4.1+\left\lfloor\frac{3-1}{2}\right\rfloor\right)=17-4-1=12$$

$$f(0,2)=17\mu(2)-(-1)^2\left(4.2+\left\lfloor\frac{0-2}{2}\right\rfloor\right)=17-8+1=10$$

$$f(1,2)=17\mu(3)-(-1)^3\left(4.2+\left\lfloor\frac{1-2}{2}\right\rfloor\right)=0+8-1=7$$

$$f(2,2)=17\mu(4)-(-1)^4\left(4.2+\left\lfloor\frac{2-2}{2}\right\rfloor\right)=17-8=9$$

$$f(3,2)=17\mu(5)-(-1)^5\left(4.2+\left\lfloor\frac{3-2}{2}\right\rfloor\right)=0+8=8$$

b. Pelabelan sisi

Tabel 3.7 Pelabelan sisi tegak pada $P_4 \times P_3$

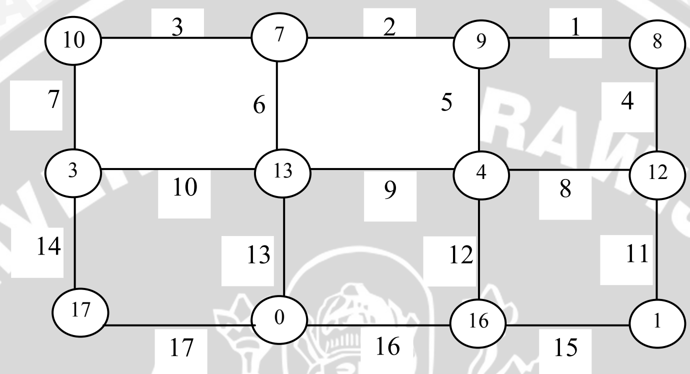
$g((x,y)(x,y+1))$	$y = 0$	$y = 1$
$x = 0$	17 – (4 –1) = 14	17 – (3.4 –2) = 7
$x = 1$	17 – 4 = 13	17 – (3.4 –1) = 6
$x = 2$	17 – 5 = 12	17 – 3.4 = 5
$x = 3$	17 – 6 = 11	17 – (8 + 5) = 4

Tabel 3.8 Pelabelan sisi mendatar pada $P_4{\times}P_3$

$g((x,y)(x+1,y))$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	17 – 0 = 17	17 – 7 = 10	17 –14 = 3
$x = 1$	17 – 1 = 16	17 – 2.4 = 9	17 – 15= 2
$x = 2$	17 – 2 = 15	17 – 9 = 8	17 – 16= 1

Himpunan bipartisi dari $P_4{\times}P_3$ adalah V_e = {0, 2, 4} dengan $f(x,y) > 8, \forall(x,y) \in V_e$ dan V_o = {1, 3} dengan $f(x,y) \le 8$, $\forall(x,y) \in V_o$, sehingga didapat nilai $k = 8$.

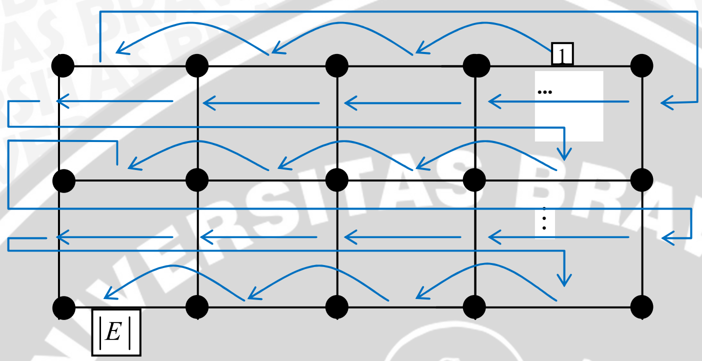
Jadi pelabelan-α pada $P_4{\times}P_3$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.3 Pelabelan-α pada $P_4{\times}P_3$

Untuk m ganjil dan n genap, dalam pelabelannya digunakan metode yang sama seperti pada contoh di atas karena pergandaan bersifat komutatif, yaitu $P_m{\times}P_n = P_n{\times}P_m$.

Dari tiga contoh yang diberikan, dapat dilihat bahwa pelabelan sisi pada graf $P_m{\times}P_n$ menghasilkan pola yang sama, yaitu nilainya berurutan dimulai dari 1 sampai $|E|$. Sisi yang berlabel 1 adalah sisi mendatar $((x = m-2)(y = n-1))$ yang terletak di ujung kanan atas dari graf. Selanjutnya, setiap bergeser ke kiri label sisi mendatar ditambah satu. Setelah semua sisi mendatar pada nilai $y = n-1$ mendapatkan label, maka penambahan bergerak menuju sisi tegak $((x = m-1)(y = n-2))$, di mana sisi ini *adjacent* dengan sisi mendatar $((x = m-2)(y = n-1))$. Pola yang sama seperti pelabelan sisi mendatar sebelumnya, pada sisi tegak ini juga berlaku penambahan satu nilai pada label setiap satu kali pergeseran ke arah kiri. Dengan langkah yang sama, sisi berikutnya yang mendapat label adalah sisi mendatar pada nilai $((x = m-2)(y = n-2))$, bergeser ke kiri, kemudian bergerak ke sisi tegak $((x = m-1)(y = n-3))$, demikian seterusnya sampai pada akhirnya sisi (0,0) mendapatkan label $|E|$. Pola pelabelan sisi pada $P_m \times P_n$ dapat diilustrasikan sebagai berikut:



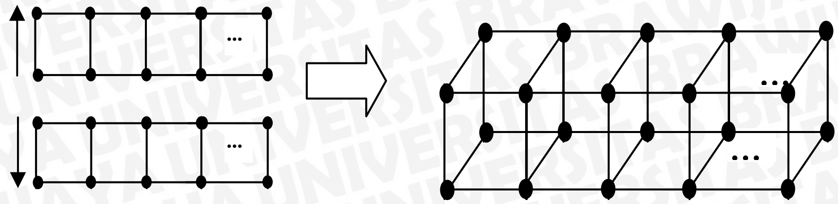
Gambar 3.4 Pola pelabelan sisi pada $P_m \times P_n$

3.2 Pelabelan-α pada Graf Grid Dimensi Tiga

Berikut akan ditunjukkan cara menentukan pelabelan-α pada graf grid dimensi tiga, $P_m \times P_n \times P_2$, yang diawali dengan menentukan pelabelan-α pada $P_m \times P_2 \times P_2$.

3.2.1 Pelabelan-α pada $P_m \times P_2 \times P_2$

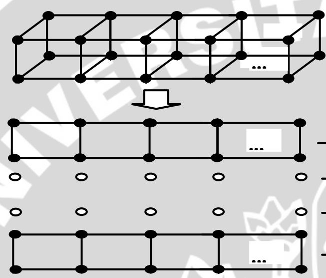
Graf $P_m \times P_2 \times P_2$ merupakan hasil pergandaan dari graf $P_m \times P_2$ dengan P_2, dimana graf $P_m \times P_2$ membentuk graf tangga. Dengan metode pelabelan-α pada graf grid dimensi dua didapat pelabelan-α pada $P_m \times P_2$. Selanjutnya, $P_m \times P_2$ digandakan dengan P_2 atau dengan kata lain menyusun dua graf tangga yang sama dan ditambahkan sisi pada setiap pasang titik yang berhubungan sedemikian sehingga membentuk $P_m \times P_2 \times P_2$. Gambar 3.5 menunjukkan pembentukan $P_m \times P_2 \times P_2$ dari $P_m \times P_2$.



Gambar 3.5 Pembentukan $P_m \times P_2 \times P_2$ dari $P_m \times P_2$

Untuk mempermudah pengamatan pelabelan-α pada $P_m \times P_2 \times P_2$, diilustrasikan bahwa graf terdiri dari empat bagian, yaitu graf $P_m \times P_2$ bagian belakang, sisi penghubung graf bagian atas, sisi penghubung graf bagian bawah, dan graf $P_m \times P_2$ bagian depan.Sisi penghubung graf dilambangkan dengan titik berlubang.

Ilustrasi pengamatan disajikan pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6 Ilustrasi pengamatan untuk pelabelan-α pada $P_m \times P_2 \times P_2$

Ilustrasi pengamatan seperti pada Gambar 3.6 juga dapat diberikan untuk pelabelan-α pada $P_m \times P_n \times P_2$.

Secara umum, berdasar pelabelan sisi pada graf tangga, dapat diberikan fungsi pelabelan sisi untuk $P_m \times P_2 \times P_2$ yaitu (Chen, 2006):

Pelabelan sisi mendatar atau sisi $(x,y,z)(x+1,y,z)$ dari $P_m \times P_2 \times P_2$,

$$g((x,y,z)(x+1,y,z)) = \begin{cases} |E| - (x + (2m-1)z) & , y = 0 \\ |E| - (x + (2m-1)(1-z) + 5m - 2) & , y = 1 \end{cases} . \quad (3.6)$$

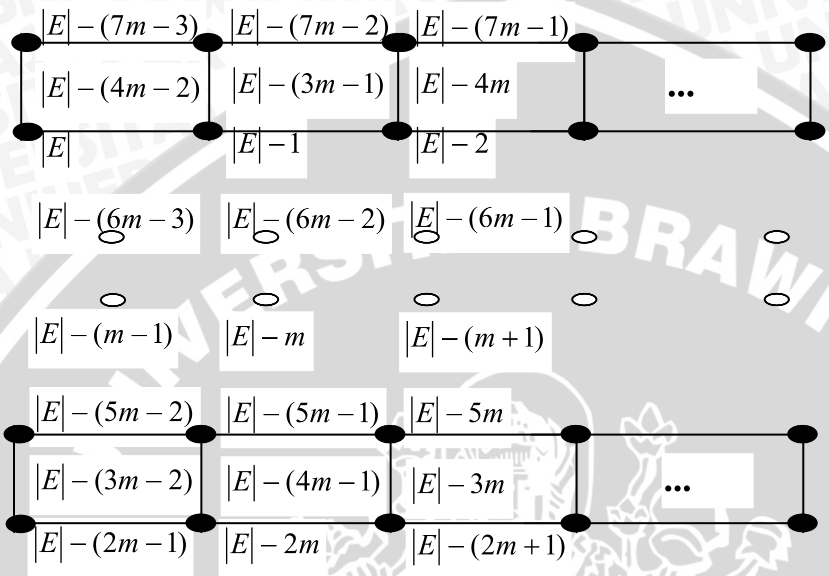
Pelabelan sisi tegak atau sisi $(x,y,z)(x,y+1,z)$ dari $P_m \times P_2 \times P_2$,

$$g((x,y,z)(x,y+1,z)) = \mu(x+z)\cdot(|E|-(x+4m-2)) + \theta(x+z)\cdot(|E|-(x+3m-2)). \tag{3.7}$$

Pelabelan sisi penghubung atau sisi $(x,y,z)(x,y,z+1)$ dari $P_m \times P_2 \times P_2$

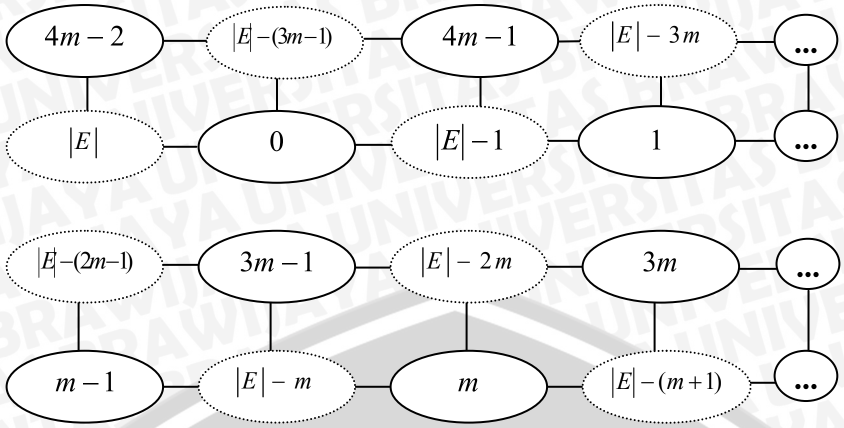
$$g((x,y,z)(x,y,z+1)) = |E|-(x+(5m-2)y+m-1). \tag{3.8}$$

Pelabelan sisi pada $P_m \times P_2 \times P_2$ dapat dilihat pada Gambar 3.7



Gambar 3.7 Pelabelan sisi pada $P_m \times P_2 \times P_2$

Pelabelan titik pada $P_m \times P_2 \times P_2$ dapat diberikan dengan cara yang sama dengan pelabelan pada $P_m \times P_n$, yaitu diawali dengan memisalkan label titik (0,0) adalah $|E|$ dan label titik (0,1) adalah 0. Selanjutnya, untuk titik yang lain, pelabelan dilakukan berdasarkan pelabelan sisi pada $P_m \times P_2 \times P_2$ dan dengan menerapkan aturan pembatas sel (Definisi 2.3.4). Pelabelan titik pada $P_m \times P_2 \times P_2$ dapat dilihat pada Gambar 3.8.



Gambar 3.8 Pelabelan titik pada $P_m \times P_2 \times P_2$

Dari gambar dapat dilihat bahwa terdapat beda yang sama antara titik ganjil dengan titik ganjil yang lain, dan titik genap dengan titik genap yang lain. Titik ganjil adalah titik dimana nilai $x+y+z$ ganjil pada Gambar 3.8 dilambangkan dengan lingkaran penuh, dan titik genap adalah titik dimana nilai $x+y+z$ genap, pada Gambar 3.8 dilambangkan dengan lingkaran bergaris putus-putus. Definisikan Δ_e adalah beda antar titik genap dan Δ_o beda antar titik ganjil, maka $\Delta_e = |E| - (|E| - (2m-1)) = 2m-1$ dan $\Delta_o = 3m-1-0 = 3m-1$. Untuk m yang bernilai ganjil maka yang berlaku adalah Δ_o, dan sebaliknya untuk m genap maka yang berlaku adalah dan Δ_e .Nilai Δ_e dan Δ_o ini yang menjadi acuan pada Teorema 3.2, yaitu pada pendefinisian s.

Hasil pembahasan pada pelabelan $P_m \times P_2 \times P_2$ ini akan diperluas dan dipergunakan sebagai dasar untuk pelabelan pada $P_m \times P_n \times P_2$.

3.2.2 Pelabelan-*α* pada $P_m \times P_n \times P_2$

Teorema 2.4

Graf grid dimensi tiga $P_m \times P_n \times P_2$ mempunyai pelabelan-*α*.

Jika

$$s = \begin{cases} (2m-1)y, \text{ untuk } m \text{ genap} \\ (3m-1)y, \text{ untuk } m \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$z' = \begin{cases} z \quad\ , \textit{untuk } y \textit{ genap} \\ 1-z, \textit{untuk } y \textit{ ganjil} \end{cases}$$

$$t = (5m-2)(n-y) - 2m$$

maka pelabelan titik (Chen, 2006)

$$f(x,y,z) = s(y) + t(y) \cdot \mu(x+z') - (-1)^{x+z'}\left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x-z'}{2} \right\rfloor\right) \quad (3.9)$$

merupakan pelabelan-*α* pada $P_m \times P_n \times P_2$.

Bukti:

Pelabelan titik $f(x,y,z)$ pada persamaan (3.9) diperoleh berdasarkan pelabelan sisi pada persamaan (3.6), dan (3.8), sehingga terjamin bahwa $f(x,y,z)$ menghasilkan pelabelan sisi pada $P_m \times P_n \times P_2$. Untuk membuktikan Teorema 3.2, maka harus ditunjukkan bahwa $P_m \times P_n \times P_2$ adalah graf bipartit dan tidak memuat label yang sama.

1. Akan dibuktikan $P_m \times P_n \times P_2$ adalah graf bipartit

$$f(x,y,z) = \begin{cases} f_e(x,y,z) = s(y) + t(y) - \left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x-z'}{2} \right\rfloor\right), \textit{untuk titik genap} \\ f_o(x,y,z) = s(y) + \left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x-z'}{2} \right\rfloor\right) \quad\quad , \textit{untuk titik ganjil} \end{cases} \quad (3.10)$$

Untuk m genap:

karena $s(y) + t(y) = (5m-2)n - (3m-1)y - 2m$, maka

$$f_e(x,y,z) \geq s(n-1) + t(n-1) - \left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x-z'}{2} \right\rfloor\right)$$

$$= (2m-1)n + m - 1 - \left(m \cdot z' + \frac{x-z'}{2}\right)$$

$$\geq (2m-1)n + m - 1 - \left(m + \frac{m-2}{2} \right)$$

$$= (2m-1)n + m - 1 - \left(\frac{3m}{2} - 1 \right)$$

$$= (2m-1)n - \frac{m}{2} \qquad (3.11)$$

persamaan berlaku jika $y = n-1, x = m-1, z' = 1$ dan

$$f_o(x,y,z) \leq s(n-1) + \left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x-z'}{2} \right\rfloor \right)$$

$$= (2m-1)(n-1) + \left(m \cdot z' + \frac{x - z' - 1}{2} \right)$$

$$\leq (2m-1)(n-1) - \left(m + \frac{m-4}{2} \right)$$

$$= (2m-1)n - 2m + 1 + \left(\frac{3m}{2} - 2 \right)$$

$$= (2m-1)n - \frac{m}{2} - 1 \qquad (3.12)$$

persamaan berlaku jika $y = n-1, x = m-2, z' = 1$.

Dari (3.11) dan (3.12) diperoleh

$$f_o(x,y,z) \leq (2m-1)n - \frac{m}{2} - 1 < f_e(x,y,z). \qquad (3.13)$$

Untuk m ganjil:

$$f_e(x,y,z) \geq (3m-1)n - 1 - \left(m \cdot z' + \frac{x-z'}{2} \right)$$

$$\geq (3m-1)n - 1 - \left(\frac{3m-3}{2} \right)$$

$$= (3m-1)n - \frac{3m}{2} + \frac{1}{2} \qquad (3.14)$$

$$f_o(x,y,z) \le (3m-1)(n-1) + \left(m \cdot z' + \frac{x - z' - 1}{2} \right)$$
$$\le (3m-1)n - 3m + 1 + \left(\frac{3m-3}{2} \right)$$
$$= (3m-1)n - \frac{3m}{2} - \frac{1}{2}. \qquad (3.15)$$

Dari (3.14) dan (3.15) diperoleh

$$f_o(x,y,z) \le (3m-1)n - \frac{3m}{2} - \frac{1}{2} < f_e(x,y,z). \qquad (3.16)$$

Dari (3.13) dan (3.16), didapat nilai $k = (2m-1)n - \frac{m}{2} - 1$ untuk nilai m genap, dan $k = (3m-1)n - \frac{3m}{2} - \frac{1}{2}$ untuk nilai m ganjil. Karena $f_e(x,y,z) \le s(y) + t(y) \le |E|$, dan $f_o(x,y,z) \ge s(y) \ge 0$, maka label dari titik-titik graf $P_m \times P_n \times P_2$ berada antara selang 0 sampai $|E|$ dan dipartisi ke dalam dua himpunan, yaitu himpunan dengan nilai label besar dan himpunan dengan nilai label kecil. Terbukti bahwa $P_m \times P_n \times P_2$ adalah graf bipartit dan f adalah pelabelan-α untuk $P_m \times P_n \times P_2$.

2. Akan dibuktikan label dari $P_m \times P_n \times P_2$ berbeda.

Andaikan $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$.
Dari $f_e(x,y,z) > f_o(x,y,z)$, maka diketahui $x_1 + y_1 + z_1$ dan $x_2 + y_2 + z_2$ keduanya genap atau keduanya ganjil. Misalkan $x_1 + y_1 + z_1$ dan $x_2 + y_2 + z_2$ keduanya genap dan m genap, sehingga

$$f(x_1,y_1,z_1) - f(x_2,y_2,z_2) = (3m-1)(y_1 - y_2) + \frac{1}{2}(x_1 - x_2) + (m - \frac{1}{2})(z_1' - z_2')$$
$$= 0. \qquad (3.17)$$

Karena $-\frac{1}{2}(m-1) \le \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \le \frac{1}{2}(m-1)$ dan $-1 \le (z_1' - z_2') \le 1$

maka $-\left(\frac{3}{2}m-1\right) \le \frac{1}{2}(x_1-x_2)+(m-\frac{1}{2})(z_1'-z_2') \le \left(\frac{3}{2}m-1\right)$ (3.18)

Jika $y_1 \ne y_2$, nilai $(3m-1)(y_1-y_2)$ lebih besar dari $(3m–1)$ atau lebih kecil dari $–(3m–1)$. Berdasar persamaan (3.15) dan (3.16), maka y_1 harus sama dengan y_2.

Dari $y_1 = y_2$ dan persamaan (3.14) didapat

$$\frac{1}{2}(x_1-x_2)+(m-\frac{1}{2})(z_1'-z_2')=0$$

$$x_1-x_2 = (2m-1)(z_1'-z_2')$$

$$x_1-x_2 = 0 \ \textit{atau} \ \pm(2m-1).$$

Untuk $0 \le x \le n-1$, penyelesaian yang mungkin adalah $x_1 = x_2$ dan $z_1' = z_2'$. Oleh karena itu, jika $f(x_1, y_1, z_1) = f(x_2, y_2, z_2)$ maka $x_1, y_1, z_1 = x_2, y_2, z_2$ atau semua titik $(x, y, z) \in V$ mempunyai label berbeda.

Dari (1) dan (2), terbukti bahwa graf grid dimensi tiga $P_m \times P_n \times P_2$ mempunyai pelabelan-α.

Persamaan (3.9) adalah fungsi pelabelan titik pada graf grid dimensi tiga $P_m \times P_n \times P_2$ yang memenuhi aturan pelabelan-α. Untuk nilai m dan n keduanya genap, fungsi tersebut tidak dapat digunakan, karena pelabelan-α pada $P_{2m} \times P_{2n} \times P_{2k}$ mempunyai fungsi pelabelan yang berbeda.

Langkah-langkah dalam menentukan pelabelan-α pada $P_m \times P_n \times P_2$ dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Diketahui nilai m dan n, di mana nilai m dan n keduanya tidak genap
2. Gunakan nilai m dan n untuk menentukan nilai $s(y)$ dan $t(y)$, dengan

$$s = \begin{cases} (2m-1)y, \text{untuk } m \text{ genap} \\ (3m-1)y, \text{untuk } m \text{ ganjil} \end{cases} \quad \text{dan} \quad t = (5m-2)(n-y)-2m$$

3. Tentukan pelabelan titik $f(x,y,z)$ untuk nilai y genap dengan $z' = z$, sehingga

$$f(x,y,z) = s(y) + t(y) \cdot \mu(x+z) - (-1)^{x+z}\left(m \cdot z + \left\lfloor \frac{x-z}{2} \right\rfloor\right).$$

4. Tentukan pelabelan titik $f(x,y,z)$ untuk nilai y ganjil dengan $z' = 1 - z$, sehingga

$$f(x,y,z) = s(y) + t(y) \cdot \mu(x+1-z) - (-1)^{x+1-z}\left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x+1-z}{2} \right\rfloor\right).$$

5. Masukkan nilai pelabelan titik pada gambar
6. Gunakan Definisi 2.3.1 untuk menentukan pelabelan sisinya, yaitu dengan mengurangkan label pada dua titik yang dihubungkan oleh sisi.
7. Tentukan himpunan bipartisi dari $P_m \times P_n \times P_2$ dan dapatkan nilai k.

Contoh 3.2:

Berikut akan diberikan contoh pelabelan pada graf grid dimensi tiga dengan kasus di mana nilai m dan n berbeda.

1. Kasus dengan nilai m dan n keduanya ganjil

Ambil m = 5 dan n = 3, maka akan ditentukan pelabelan-α pada $P_5 \times P_3 \times P_2$.

$V(P_5 \times P_3 \times P_2) = \{(x,y,z) | x = 0,1,2,3,4\ ; y = 0,1,2; z = 0,1\}$

Karena m ganjil, maka $s = (3m-1)y = (3.5-1)y = 14y$ dan $t = (5.5-2)(3-y) - 2.5 = 59 - 23y$.

Untuk y genap :

$$f(x,y,z) = 14y + (59-23y)\mu(x+z) - (-1)^{x+z}\left(5z + \left\lfloor \frac{x-z}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,0,0) = 0 + 59 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor\right) = 59$$

$$f(1,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1-0}{2} \right\rfloor\right) = 0$$

$$f(2,0,0) = 0 + 59 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-0}{2} \right\rfloor\right) = 58$$

$$f(3,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-0}{2} \right\rfloor\right) = 1$$

$$f(4,0,0) = 0 + 59 - \left(0 + \left\lfloor \frac{4-0}{2} \right\rfloor\right) = 57$$

$$f(0,0,1) = 0 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor\right) = 4$$

$$f(1,0,1) = 0 + 59 - \left(5 + \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor\right) = 54$$

$$f(2,0,1) = 0 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor\right) = 5$$

$$f(3,0,1) = 0 + 59 - \left(5 + \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor\right) = 53$$

$$f(4,0,1) = 0 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor\right) = 6$$

$$f(0,2,0) = 28 + 59 - 46 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor\right) = 41$$

$$f(1,2,0) = 28 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1-0}{2} \right\rfloor\right) = 28$$

$$f(2,2,0) = 28 + 59 - 46 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-0}{2} \right\rfloor\right) = 40$$

$$f(3,2,0) = 28 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-0}{2} \right\rfloor\right) = 29$$

$$f(4,2,0) = 28 + 59 - 46 - \left(0 + \left\lfloor \frac{4-0}{2} \right\rfloor\right) = 39$$

$$f(0,2,1) = 28 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor\right) = 32$$

$$f(1,2,1) = 28 + 59 - 46 - \left(5 + \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor\right) = 36$$

$$f(2,2,1) = 28 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor\right) = 33$$

$$f(3,2,1) = 28 + 59 - 46 - \left(5 + \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor\right) = 35$$

$$f(4,2,1) = 28 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{4-1}{2} \right\rfloor\right) = 34\,.$$

Untuk y ganjil :

$$f(x,y,z) = 14y + (59 - 23y)\mu(x+1-z) - (-1)^{x+1-z}\left(5(1-z) + \left\lfloor \frac{x-1+z}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,1,0) = 14 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{0-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 18$$

$$f(1,1,0) = 14 + 59 - 23 - \left(5 + \left\lfloor \frac{1-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 45$$

$$f(2,1,0) = 14 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{2-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 19$$

$$f(3,1,0) = 14 + 59 - 23 - \left(5 + \left\lfloor \frac{3-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 44$$

$$f(4,1,0) = 14 + 0 + \left(5 + \left\lfloor \frac{4-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 20$$

$$f(0,1,1) = 14 + 59 - 23 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 50$$

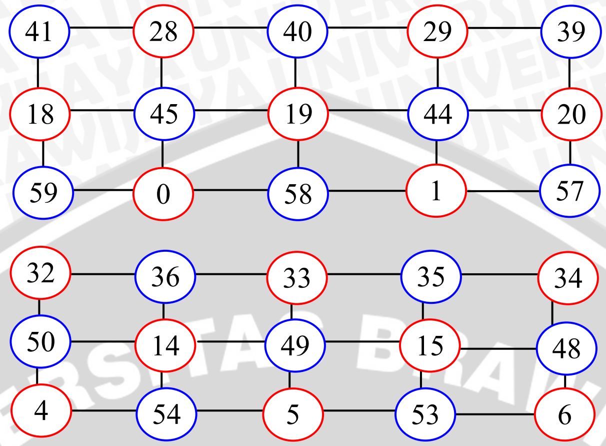
$$f(1,1,1) = 14 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 14$$

$$f(2,1,1) = 14 + 59 - 23 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 49$$

$$f(3,1,1) = 14 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 15$$

$$f(4,1,1) = 14 + 59 - 23 - \left(0 + \left\lfloor \frac{4-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 48\,.$$

Pelabelan titik pada $P_5 \times P_3 \times P_2$ ini dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu V_1 = {label bernilai kecil} = {0,1,4,5,6,14,15,18, 19,20,28,29,32,33,34} dan V_2 = {label bernilai besar}= {35,36,39,40,41,44,45,48,49,50,53,54,57,58,59} , sehingga dapat diketahui nilai k = 34. Pelabelan titik $P_5 \times P_3 \times P_2$ dapat dilihat pada Gambar 3.9.

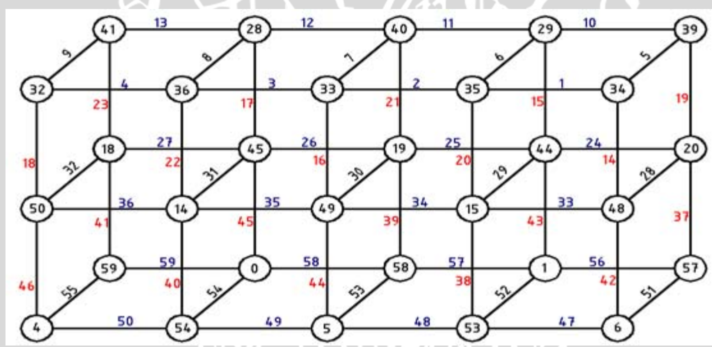


Keterangan : ○ = titik yang nilai labelnya kecil
○ = titik yang nilai labelnya besar

Gambar 3.9 Pelabelan titik pada $P_5 \times P_3 \times P_2$

Pelabelan sisi pada $P_5 \times P_3 \times P_2$ dilakukan dengan mengurangkan label dari dua titik yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Jadi, pelabelan-α pada $P_5 \times P_3 \times P_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.10 Pelabelan pada $P_5 \times P_3 \times P_2$

2. Kasus dengan nilai m ganjil dan n genap

Ambil m = 7 dan n = 2 maka akan ditentukan pelabelan-α pada $P_7 \times P_2 \times P_2$.

$V(P_7 \times P_2 \times P_2) = \{(x, y, z) | x = 0,1,2,3,4,5,6 ; y = 0,1; z = 0,1\}$.

Karena m ganjil, maka $s = (3m-1)y = (3.7-1)y = 20y$ dan $t = (5.7-2)(2-y) - 2.7 = 52 - 33y$.

Untuk y genap :

$$f(x, y, z) = 20y + (52-33y)\mu(x+z) - (-1)^{x+z}\left(7z + \left\lfloor \frac{x-z}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,0,0) = 0 + 52 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor\right) = 52$$

$$f(1,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1-0}{2} \right\rfloor\right) = 0$$

$$f(2,0,0) = 0 + 52 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-0}{2} \right\rfloor\right) = 51$$

$$f(3,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-0}{2} \right\rfloor\right) = 1$$

$$f(4,0,0) = 0 + 52 - \left(0 + \left\lfloor \frac{4-0}{2} \right\rfloor\right) = 50$$

$$f(5,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{5-0}{2} \right\rfloor\right) = 2$$

$$f(6,0,0) = 0 + 52 - \left(0 + \left\lfloor \frac{6-0}{2} \right\rfloor\right) = 49$$

$$f(0,0,1) = 0 + 0 + \left(7 + \left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor\right) = 6$$

$$f(1,0,1) = 0 + 52 - \left(7 + \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor\right) = 45$$

$$f(2,0,1) = 0 + 0 + \left(7 + \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor\right) = 7$$

$$f(3,0,1)=0+52-\left(7+\left\lfloor\frac{3-1}{2}\right\rfloor\right)=44$$

$$f(4,0,1)=0+0+\left(7+\left\lfloor\frac{4-1}{2}\right\rfloor\right)=8$$

$$f(5,0,1)=0+52-\left(7+\left\lfloor\frac{5-1}{2}\right\rfloor\right)=43$$

$$f(6,0,1)=0+0+\left(7+\left\lfloor\frac{6-1}{2}\right\rfloor\right)=9$$

Untuk y ganjil :

$$f(x,y,z)=20y+(52-33y)\mu(x+1-z)-(-1)^{x+1-z}\left(7(1-z)+\left\lfloor\frac{x-1+z}{2}\right\rfloor\right)$$

$$f(0,1,0)=20+0+\left(7+\left\lfloor\frac{0-1+0}{2}\right\rfloor\right)=26$$

$$f(1,1,0)=20+52-33-\left(7+\left\lfloor\frac{1-1+0}{2}\right\rfloor\right)=32$$

$$f(2,1,0)=20+0+\left(7+\left\lfloor\frac{2-1+0}{2}\right\rfloor\right)=27$$

$$f(3,1,0)=20+52-33-\left(7+\left\lfloor\frac{3-1+0}{2}\right\rfloor\right)=31$$

$$f(4,1,0)=20+0+\left(7+\left\lfloor\frac{4-1+0}{2}\right\rfloor\right)=28$$

$$f(5,1,0)=20+52-33-\left(7+\left\lfloor\frac{5-1+0}{2}\right\rfloor\right)=30$$

$$f(6,1,0)=20+0+\left(7+\left\lfloor\frac{6-1+0}{2}\right\rfloor\right)=29$$

$$f(0,1,1)=20+52-33-\left(0+\left\lfloor\frac{0-1+1}{2}\right\rfloor\right)=39$$

$$f(1,1,1)=20+0+\left(0+\left\lfloor\frac{1-1+1}{2}\right\rfloor\right)=20$$

$$f(2,1,1) = 20 + 52 - 33 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 38$$

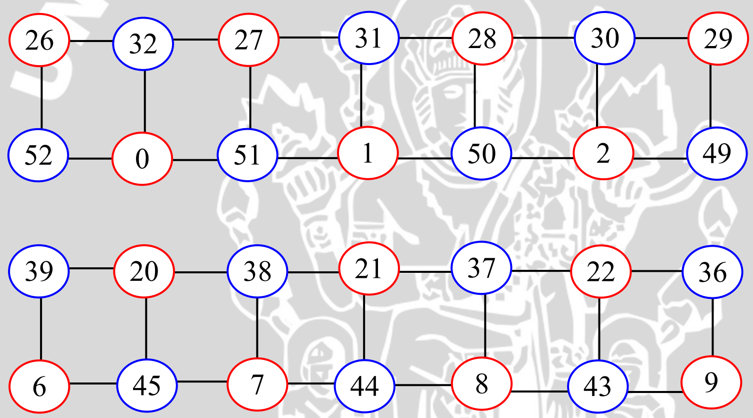
$$f(3,1,1) = 20 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 21$$

$$f(4,1,1) = 20 + 52 - 33 - \left(0 + \left\lfloor \frac{4-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 37$$

$$f(5,1,1) = 20 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{5-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 22$$

$$f(6,1,1) = 20 + 52 - 33 - \left(0 + \left\lfloor \frac{6-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 36.$$

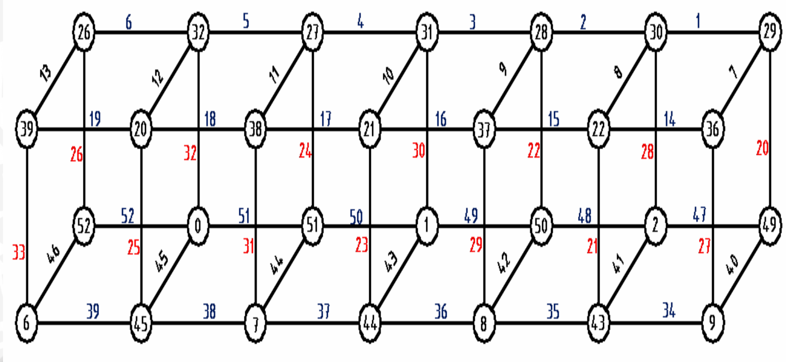
Pelabelan titik pada $P_7 \times P_2 \times P_2$ ini dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu V_1 = {label bernilai kecil} = {0,1,2,6,7,8,9,20, 21,22,26,27,28,29} dan V_2 = {label bernilai besar}= {30,31,32, 36,37,38,39,43,44,45,49,50,51,52} ,sehingga dapat diketahui nilai k = 29. Pelabelan titik $P_7 \times P_2 \times P_2$ dapat dilihat pada Gambar 3.11.



Gambar 3.11 Pelabelan titik pada $P_7 \times P_2 \times P_2$

Pelabelan sisi pada $P_7 \times P_2 \times P_2$ dilakukan dengan mengurangkan label dari dua titik yang menghubungkan kedua titik tersebut.

Jadi, pelabelan-α pada $P_7 \times P_2 \times P_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.12 Pelabelan pada $P_7 \times P_2 \times P_2$

3. Kasus dengan nilai m genap dan n ganjil

   Ambil $m = 4$ dan $n = 3$, maka akan ditentukan pelabelan-α pada $P_4 \times P_3 \times P_2$.

   $V(P_4 \times P_3 \times P_2) = \{(x, y, z) | x = 0,1,2,3 \,; y = 0,1,2; z = 0,1\}$

   Karena m genap, maka $s = (2m - 1)y = (2.4 - 1)y = 7y$ dan $t = (5.4 - 2)(3 - y) - 2.4 = 46 - 18y$.

   Untuk y genap :

$$f(x, y, z) = 7y + (46 - 18y)\mu(x + z) - (-1)^{x+z}\left(4z + \left\lfloor \frac{x - z}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,0,0) = 0 + 46 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0 - 0}{2} \right\rfloor\right) = 46$$

$$f(1,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1 - 0}{2} \right\rfloor\right) = 0$$

$$f(2,0,0) = 0 + 46 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2 - 0}{2} \right\rfloor\right) = 45$$

$$f(3,0,0) = 0 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3 - 0}{2} \right\rfloor\right) = 1$$

$$f(0,0,1) = 0 + 0 + \left(4 + \left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor\right) = 3$$

$$f(1,0,1) = 0 + 46 - \left(4 + \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor\right) = 42$$

$$f(2,0,1) = 0 + 0 + \left(4 + \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor\right) = 4$$

$$f(3,0,1) = 0 + 46 - \left(4 + \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor\right) = 41$$

$$f(0,2,0) = 14 + 46 - 36 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0-0}{2} \right\rfloor\right) = 24$$

$$f(1,2,0) = 14 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1-0}{2} \right\rfloor\right) = 14$$

$$f(2,2,0) = 14 + 46 - 36 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-0}{2} \right\rfloor\right) = 23$$

$$f(3,2,0) = 14 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-0}{2} \right\rfloor\right) = 15$$

$$f(0,2,1) = 14 + 0 + \left(4 + \left\lfloor \frac{0-1}{2} \right\rfloor\right) = 17$$

$$f(1,2,1) = 14 + 46 - 36 - \left(4 + \left\lfloor \frac{1-1}{2} \right\rfloor\right) = 20$$

$$f(2,2,1) = 14 + 0 + \left(4 + \left\lfloor \frac{2-1}{2} \right\rfloor\right) = 18$$

$$f(3,2,1) = 14 + 46 - 36 - \left(4 + \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor\right) = 19.$$

Untuk y ganjil :

$$f(x,y,z) = 7y + (46-18y)\mu(x+1-z) - (-1)^{x+1-z}\left(4(1-z) + \left\lfloor \frac{x-1+z}{2} \right\rfloor\right)$$

$$f(0,1,0) = 7 + 0 + \left(4 + \left\lfloor \frac{0-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 10$$

$$f(1,1,0) = 7 + 46 - 18 - \left(4 + \left\lfloor \frac{1-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 31$$

$$f(2,1,0) = 7 + 0 + \left(4 + \left\lfloor \frac{2-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 11$$

$$f(3,1,0) = 7 + 46 - 18 - \left(4 + \left\lfloor \frac{3-1+0}{2} \right\rfloor\right) = 30$$

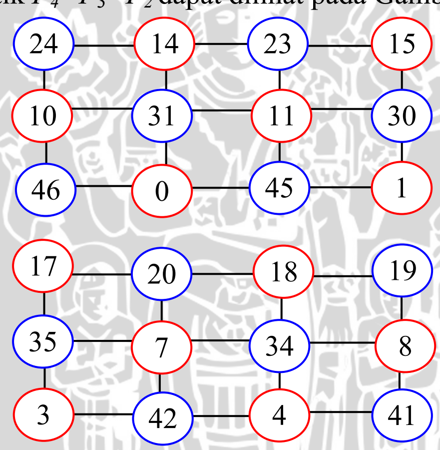
$$f(0,1,1) = 7 + 46 - 18 - \left(0 + \left\lfloor \frac{0-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 35$$

$$f(1,1,1) = 7 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{1-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 7$$

$$f(2,1,1) = 7 + 46 - 18 - \left(0 + \left\lfloor \frac{2-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 34$$

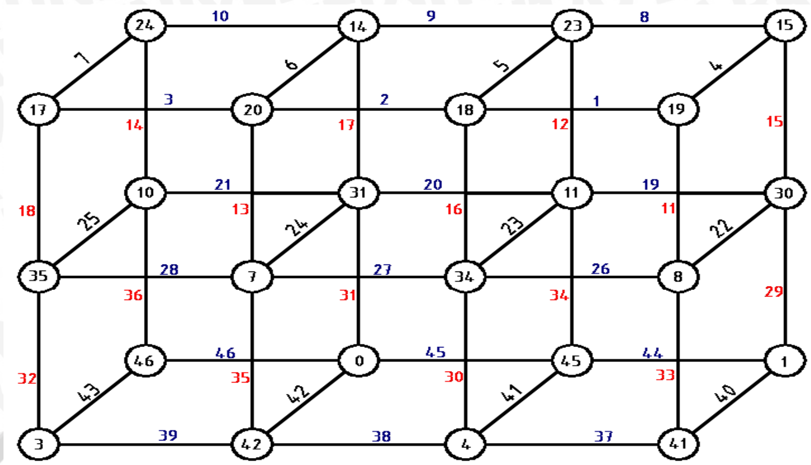
$$f(3,1,1) = 7 + 0 + \left(0 + \left\lfloor \frac{3-1+1}{2} \right\rfloor\right) = 8.$$

Pelabelan titik pada $P_4 \times P_3 \times P_2$ ini dipartisi menjadi dua himpunan, yaitu V_1 = {label bernilai kecil} = {0,1,3,4,7,8,10, 11,14,15,17,18} dan V_2 = {label bernilai besar}= {19,20,23,24, 30,31,34,35,41,42,45,46} ,sehingga dapat diketahui nilai k = 18. Pelabelan titik $P_4 \times P_3 \times P_2$ dapat dilihat pada Gambar 3.13.



Gambar 3.13 Pelabelan titik pada $P_4 \times P_3 \times P_2$

Pelabelan sisi pada $P_4 \times P_3 \times P_2$ dilakukan dengan mengurangkan label dari dua titik yang menghubungkan kedua titik tersebut.
Jadi, pelabelan-α pada $P_4 \times P_3 \times P_2$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.14 Pelabelan pada $P_4 \times P_3 \times P_2$

Dari tiga contoh yang diberikan, dapat dilihat bahwa setiap pelabelan sisi masing-masing kasus mempunyai pola yang berbeda. Untuk pola pelabelan sisi masing-masing kasus, dapat dilihat pada Lampiran 1, Lampiran 2, dan Lampiran 3.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dalam Skripsi ini adalah:

1. Graf grid dimensi dua ($P_m \times P_n$) diperoleh dengan menggandakan graf *path* P_m dengan graf *path* P_n. Pelabelan-α pada graf $P_m \times P_n$ diberikan oleh fungsi berikut:

$$f(x, y) = |E| \mu(x + y) - (-1)^{x+y}\left(my + \left\lfloor \frac{x - y}{2} \right\rfloor\right).$$

   Graf $P_m \times P_n$ adalah graf bipartit dengan himpunan bipartisi:

   $V_o = \{(x, y) | \text{jumlah } x \text{ dan } y \text{ ganjil}\}$ dan

   $V_e = \{(x, y) | \text{jumlah } x \text{ dan } y \text{ genap}\}$

   dengan nilai $k = mn - \left\lfloor \frac{m + n + 2}{2} \right\rfloor$.

2. Graf grid dimensi tiga ($P_m \times P_n \times P_2$) diperoleh dengan menggandakan graf grid dimensi dua ($P_m \times P_n$) dengan graf *Path* P_2. Pelabelan-α pada graf $P_m \times P_n \times P_2$ diberikan oleh fungsi berikut:

$$f(x, y, z) = s(y) + t(y) \cdot \mu(x + z') - (-1)^{x+z'}\left(m \cdot z' + \left\lfloor \frac{x - z'}{2} \right\rfloor\right).$$

   Graf $P_m \times P_n \times P_2$ adalah graf bipartit dengan himpunan bipartisi V_1 yang elemennya adalah titik dengan label kecil dan himpunan V_2 yang elemennya adalah titik dengan label besar, dengan $k = (2m-1)n - \frac{m}{2} - 1$ untuk m genap, dan $k = (3m-1)n - \frac{3m}{2} - \frac{1}{2}$ untuk m ganjil.

4.2 Saran

Skripsi ini hanya membahas penentuan pelabelan-α pada graf grid dimensi tiga sampai dengan graf $P_m \times P_n \times P_2$. Bagi yang berminat dalam bidang ini, diharapkan untuk mengkaji pelabelan-α pada graf grid dimensi tiga yang lain, seperti graf $P_m \times P_n \times P_4$, $P_{2m} \times P_{2n} \times P_{2l+1}$, dan $P_{2m} \times P_{2n+1} \times P_{2l+1}$. Selain itu, juga diharapkan untuk mengembangkan pengkajian pelabelan-α pada graf grid dimensi empat, $P_m \times P_n \times P_l \times P_j$.

DAFTAR PUSTAKA

Baĉa, M., Bertault, F., *et.al*. ***Vertex-antimagic Total Labelings of Graphs***. http://www.newcastle.edu.au/school-old/math-physicalscience/ourstaff/downloads/macdougalljim vertexantimagic.pdf, tanggal akses : 15 Oktober 2008.

Chen, Y. 2006. ***Graceful Labeling on Grids in 3-dimensions and4-Dimensions***. *Thesis*. http://140.112.28.144/ALab/Publications/yxchen. pdf., tanggal akses : 7 Oktober 2008.

Gallian, J.A. 1997. ***A Dynamic Survey of Graph Labeling***. http://www.combinatorics.org/Surveys/ds6.pdf, tanggal akses : 3 September 2008.

Http://www.freewebs.com/infoitn/materi/diskrit/Relasi%20 dan %20 Fungsi.pdf , tanggal akses : 16 Mei 2009.

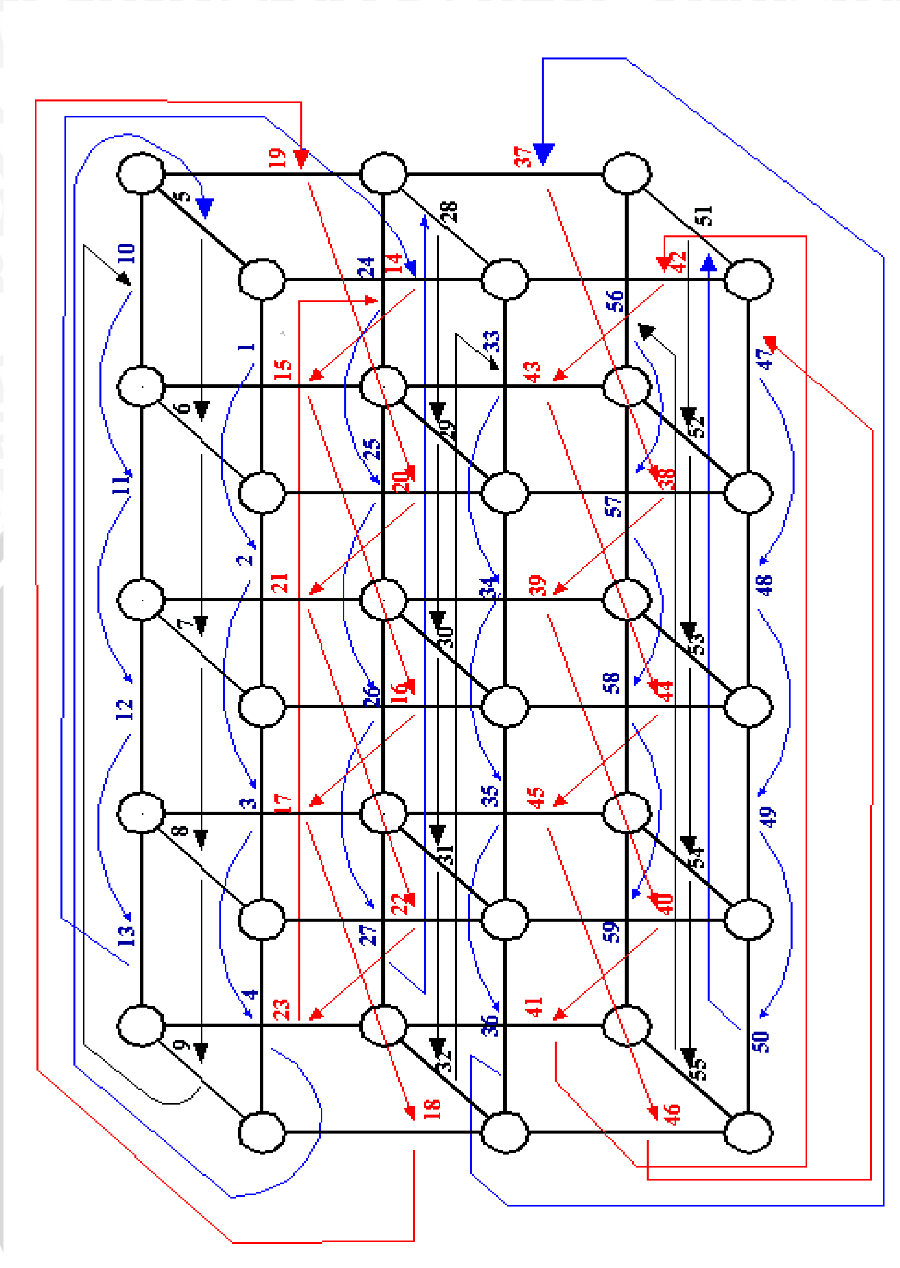
Johnsonbaugh, R. 1989. ***Discrete Mathematics***, Revised Edition. Macmillan Publishing Company. New York.

Marsudi, 1998. ***Pengantar Teori Graph***. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Brawijaya. Malang.

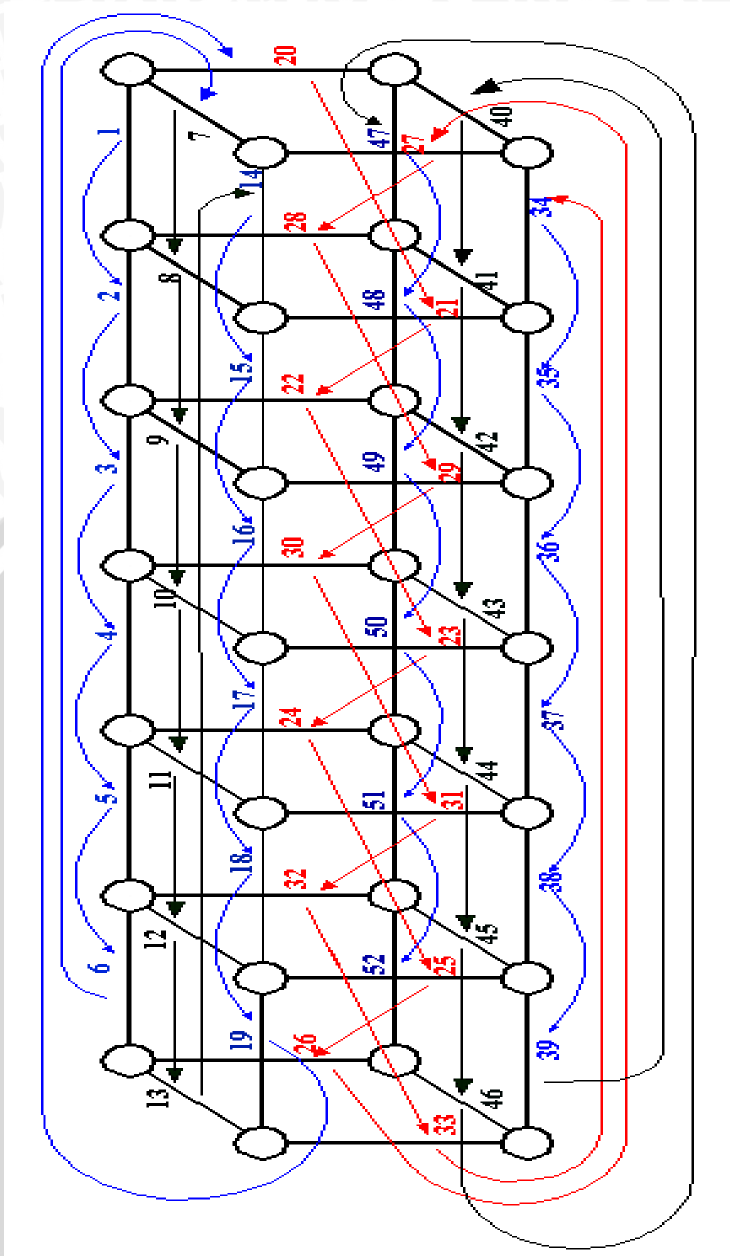
Munir, R. 2005. ***Matematika Diskrit***, Edisi Ketiga. Informatika. Bandung.

Wijaya, K. 2004. ***Pelabelan Konsekutif Pada Graf Sikel Dan Graf Bipartit Komplit***. Jurnal Ilmu Dasar 5 : 1-7.

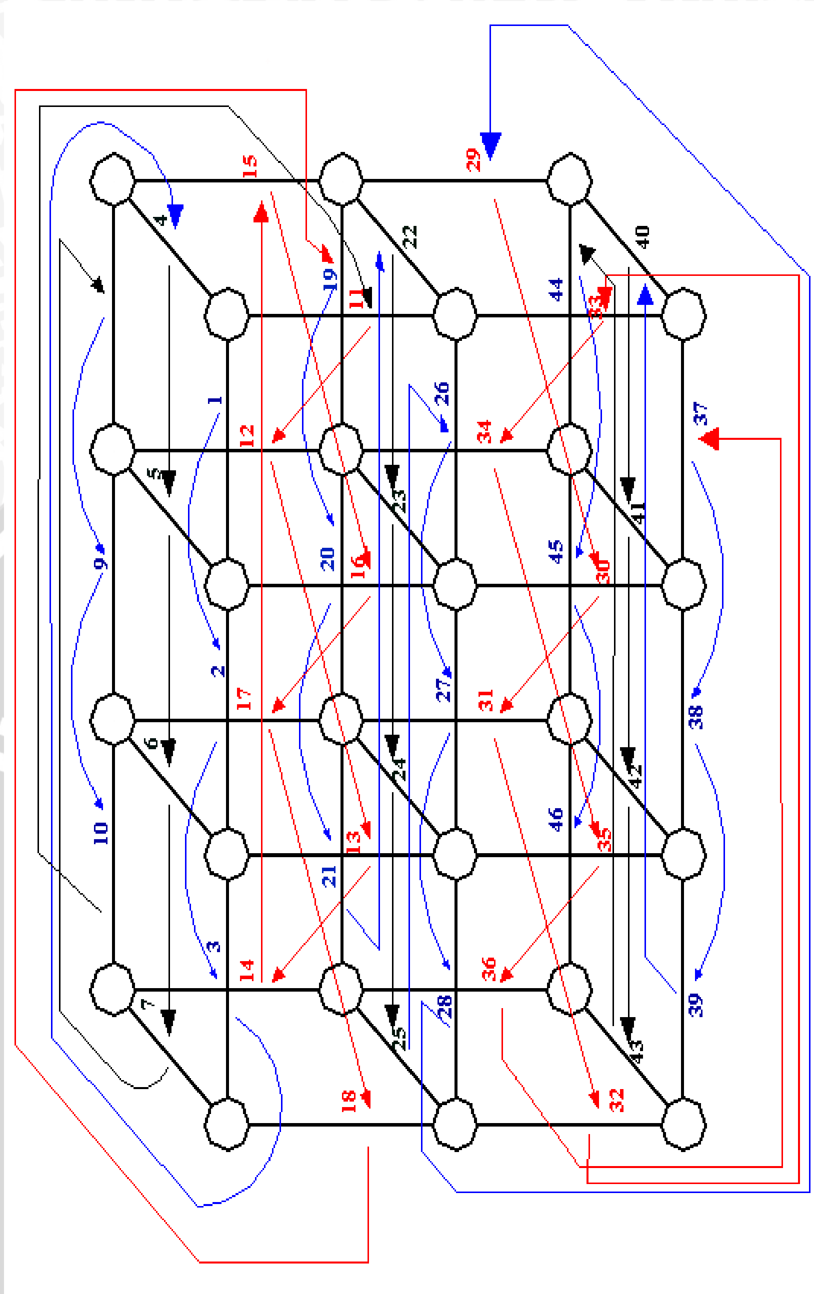
Lampiran 1. Pola pelabelan sisi pada $P_5 \times P_3 \times P_2$.



Lampiran 2. Pola pelabelan sisi pada $P_7 \times P_2 \times P_2$.



Lampiran 3. Pola pelabelan sisi pada $P_4 \times P_3 \times P_2$.



Keterangan:

Angka warna hitam	: label pada sisi penghubung
Angka warna biru	: label pada sisi mendatar
Angka warna merah	: label pada sisi tegak
→	: langkah memberi label pada sisi penghubung
→	: langkah memberi label pada sisi mendatar
→	: langkah memberi label pada sisi tegak