KAJIAN TEORITIS DARI *SEMIDIRECT PRODUCT*

SKRIPSI

oleh :

RINA FAIZAH

0410940048-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG

2009

KAJIAN TEORITIS DARI *SEMIDIRECT PRODUCT*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang matematika

oleh :

RINA FAIZAH

0410940048-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

KAJIAN TEORITIS DARI *SEMIDIRECT PRODUCT*

Oleh :
RINA FAIZAH
0410940048-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 23 April 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc	**Drs. Noor Hidayat, M.Si**
NIP. 131 993 383	**NIP. 131 759 590**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: RINA FAIZAH**
NIM	**: 0410940048**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**:KAJIAN TEORITIS DARI *SEMIDIRECT PRODUCT***

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar - benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama - nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 23 April 2009
Yang menyatakan,

<u>Rina Faizah</u>
NIM. 0410940048

KAJIAN TEORITIS DARI *SEMIDIRECT PRODUCT*

ABSTRAK

Pada skripsi ini akan dibahas tentang pembuktian beberapa teorema yang berhubungan dengan *direct* dan *semidirect product* pada grup. Suatu *direct product* adalah hasil kali kartesius dari himpunan yang membentuk grup baru atas operasi biner tertentu. *Direct product* dibagi dua yaitu *internal direct product* dan *eksternal direct product* yang keduanya isomorfik. *Semidirect product* merupakan grup yang dibangun dari subgrup-subgrup yang isomorfik dengan grup penggandaan, dimana salah satu subgrupnya normal dan irisan dari subgrupnya merupakan elemen identitas. Dalam hal bila semua subgrupnya normal, *semidirect product* bisa menjadi sebuah *direct product*.

Kata kunci: subgrup normal, *direct product, semidirect product*.

THEORITICAL STUDY OF SEMIDIRECT PRODUCT

ABSTRACT

In this paper we will discuss about the proof of several theorems associated with direct product and semidirect product in group. A direct product is a new group constructed from cartesian product of sets under a binary operation. Direct product is divided into two types that are internal direct product and external direct product, whose both of them are isomorphic. Semidirect product is a group generated from several subgroups that are isomorphic with multiplication group, which one of subgroups is normal and intersection of this subgroups is identity elemen. In this case, if all subgroups are normal, then the semidirect product becomes a direct product group.

Keywords: normal subgrup, direct product, semidirect product.

KATA PENGANTAR

Bismillahi wal hamdulillah, segala puji hanya bagi Allah, *Rabb* yang Maha Segala. Shalawat dan salam semoga selalu terlimpah kepada *Murabbi* besar kita Rasulullah Muhammad saw, beserta keluarga, sahabat serta orang-orang beriman yang mengikuti jejaknya.

Atas izin Allah SWT penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Kajian Teoritis Dari *Semidirect Product*"**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana sains pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya. Skripsi ini dapat terselesaikan berkat bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada :

1. Dr. Abdul Rouf Alghofari, M.Sc selaku dosen pembimbing I dan Drs. Noor Hidayat, MSi selaku dosen pembimbing II, atas segala ilmu, perhatian, nasehat, kesabaran, bantuan dan bimbingannya selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr. Wuryansari Muharini K, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika.
3. Drs. M.Aruman Imron, MSi selaku dosen penasehat akademik atas nasehat dan saran selama penulis menempuh studi.
4. Dosen-dosen penguji yang telah banyak memberi masukan, saran dan kritik untuk skripsi ini.
5. Segenap dosen Jurusan Matematika FMIPA UNIBRAW atas transfer ilmu yang diberikan, dan staf Tata Usaha Jurusan Matematika .
6. Ibu, Bapak, dek Lia dan dek Ayu terimakasih atas do'a, dukungan dan semuanya.
7. Semua teman-teman Matematika 2004, teman-teman Forkalam atas doa, dukungan dan semangatnya.
8. Keluarga Besar di Malang, terimakasih atas ilmu, do'a dan semangatnya sehingga skripsi ini bisa selesai.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari adanya kekurangan dalam penulisan skipsi ini. Kritik dan saran dari para pembaca sangat penulis perlukan untuk perbaikan penulisan ke depan. Harapan penulis semoga skripsi ini bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca pada umumnya.

Malang, 23 April 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR NOTASI

Notasi	**Keterangan**
$\in$	Elemen dari
$\subseteq$	Himpunan bagian
$\cap$	Irisan
$\Rightarrow$	Mengakibatkan (maka)
$\Leftrightarrow$	Jika dan hanya jika
$\ni$	Sedemikian sehingga
$\exists$	Terdapat
$\forall$	Untuk setiap
$S \times S$	Hasil kali kartesius dari S ke S
$f : A \to B$	Pemetaan dari A ke B
N	Himpunan bilangan asli
$H \leq G$	H subgrup dari G
$\lvert G \rvert$	Order dari G
◘	Akhir dari bukti
$\rtimes$	*Semidirect product*
$\bullet$	*Action*
$Aut(H)$	Automorfisma H
$\sum_{j=1}^{k_2}$	Jumlah dari j = 1 sampai k_2
$\cong$	Isomorfik
$N_G(H)$	*Normalizer* dari H di G
$C_G(H)$	*Centralizer* dari H di G

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Perkembangan ilmu aljabar semakin lama semakin kompleks dan menarik untuk dibahas secara mendalam, terutama aljabar abstrak yang merupakan salah satu bidang ilmu aljabar yang meliputi berbagai struktur aljabar dengan masing-masing sifatnya yang berbeda. Pada dasarnya struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen yaitu himpunan tak kosong, operasi biner dan aksioma-aksioma. Antara struktur aljabar yang satu dengan yang lain saling berhubungan dan suatu struktur aljabar lahir dari perkembangan struktur aljabar yang lain. Contohnya dari grup bisa dibentuk grup baru yakni *direct product* dan *semidirect product*.

Dalam penulisan tugas akhir ini akan dibahas mengenai *direct product* dan *semidirect product*, yang cukup menarik karena belum ada yang membahas tentang ini serta merupakan perkembangan grup yang baru. Suatu *direct product* adalah hasil kali kartesius dari himpunan yang membentuk grup baru atas operasi biner tertentu. *Direct product* dibagi dua yaitu *internal direct product* dan *eksternal direct product* yang keduanya isomorfik. Definisi *Semidirect product* bisa lebih dari satu, namun pada dasarnya semua sama, *semidirect product* merupakan grup yang dibangun dari subgrup-subgrup yang isomorfik dengan grup penggandaan, dan irisan dari subgrupnya merupakan elemen identitas. Dalam hal ini, jika semua subgrupnya normal, maka *semidirect product* dapat menjadi sebuah *direct product*. Dalam pengertian lain *semidirect product* dari grup juga melibatkan homomorfisma.

1.2 Rumusan Masalah

1. Bagaimana bukti dari sifat-sifat tentang *direct product* pada grup.
2. Bagaimana bukti dari sifat-sifat tentang *semidirect product* pada grup.

1.3 Batasan Masalah

Pada tugas akhir ini akan dibahas definisi dan sifat-sifat tentang *direct product* dan *semidirect product* pada grup, dan tidak dibandingkan dengan sistem aljabar abstrak yang lainnya.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini adalah:

1. Membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan *direct product* pada grup.
2. Membuktikan sifat-sifat yang berhubungan dengan *semidirect product* pada grup.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas mengenai hal-hal yang mendukung pembahasan, meliputi definisi, teorema dan contoh.

2.1 Operasi Biner

Operasi biner merupakan salah satu unsur yang penting dari pembahasan dalam aljabar, banyaknya operasi dalam aksioma yang berlaku menjadi pembeda antara struktur aljabar satu dengan yang lain, berikut adalah definisi operasi biner.

Definisi 2.1.1 (Operasi Biner dan Sifatnya) Misalkan *S* adalah suatu himpunan tak kosong. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan *S* adalah pemetaan yang mengawankan setiap pasangan terurut $(a,b) \in S \times S$ ke $a * b \in S$. Ditulis dalam bentuk notasi:

$$\begin{aligned} *: S \times S &\to S \\ (a,b) &\mapsto *(a,b) = a * b. \end{aligned}$$

Diberikan operasi biner $*$ dan $\bullet$ pada suatu himpunan *S*. Maka $*$ dikatakan:

a. Komutatif jika $x * y = y * x$,$\forall x, y \in S$.
b. Assosiatif jika $x * (y * z) = (x * y) * z$,$\forall x, y, z \in S$.
c. distributif kiri atas $\bullet$ jika
   $x * (y \bullet z) = (x * y) \bullet (x * z)$, $\forall x, y, z \in S$.
d. distributif kanan atas $\bullet$ jika $(y \bullet z) * x = (y * x) \bullet (z * x)$,
   $\forall x, y, z \in S$.

Jika $*$ distributif kiri sekaligus distributif kanan atas $\bullet$, maka $*$ disebut distributif atas $\bullet$.

(Bhattacharya, 1994)

Contoh 2.1.2 Bila $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ merupakan himpunan berhingga, operasi biner pada *A* dapat disajikan dalam Tabel 2.1. $a_i * a_j$ terletak pada baris ke-*i* kolom ke-*j*.

$*$	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
a_1						
a_2						
.						
a_i				$a_i * a_j$		
.						
a_n						

Tabel 2.1

2.2 Grup

Dalam aljabar abstrak dikenal istilah grup yang memiliki peranan mendasar dalam perkembangan ilmu matematika. Grup merupakan salah satu sistem aljabar yang sederhana dan didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan satu buah operasi biner sehingga memenuhi beberapa aksioma diantaranya tertutup, assosiatif, memiliki elemen identitas dan elemen invers. Apabila salah satu aksioma tidak terpenuhi, maka himpunan tersebut bukan merupakan grup. Selanjutnya definisi grup sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 (Grup) Suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ dinotasikan dengan $(G,*)$ disebut grup jika memenuhi aksioma berikut :

1. Tertutup, yaitu $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$.
2. Berlaku hukum assosiatif, yaitu $\forall a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
3. Memiliki elemen satuan (identitas), yaitu $\forall a \in G, \exists e \in G$ sedemikian sehingga berlaku $e * a = a * e = a$, selanjutnya e disebut elemen satuan.
4. Memiliki elemen invers, yaitu $\forall a \in G, \exists b \in G$ sedemikian sehingga berlaku $a * b = b * a = e$. Selanjutnya b disebut invers dari a dan dinotasikan $b = a^{-1}$.

Grup $(G,*)$ disebut suatu grup abelian atau grup komutatif jika berlaku hukum komutatif, yaitu $\forall a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$.

(Durbin, 1992)

Teorema 2.2.2 Misalkan himpunan G dengan operasi biner membentuk suatu grup.

1. Elemen identitas dari G adalah tunggal. Jadi, jika e dan f adalah elemen identitas dari G, maka $e = f$.
2. Setiap elemen dalam grup memiliki invers tunggal. Jadi, jika x, y adalah invers dari a dan e elemen identitas dari G, maka $x = y$.

(Durbin, 1992)

Bukti: 1. Misalkan e elemen identitas dari G. Maka $e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ dan $e * f = f$. (1)
Dengan cara yang sama, jika f elemen identitas dari G maka $f * a = a$ untuk setiap $a \in G$ dan $e * f = e$. (2)
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $f = e * f = e$.

2. $x = x * e$ (e adalah elemen identitas)
$= x * (a * y)$ ($a * y = e$)
$= (x * a) * y$ (assosiatif)
$= e * y$
$= y$.

Definisi 2.2.3 (Order Grup) Jika *G* sebuah grup berhingga, maka order dari *G* adalah banyaknya elemen dari *G*, ditulis $|G|$.

(Kandasamy, 2002)

2.3 Subgrup

Definisi 2.3.1 (Subgrup) Misalkan $(G,*)$ grup dan *H* himpunan bagian tak kosong dari grup *G*. *H* disebut subgrup dari *G* jika dan hanya jika *H* merupakan grup terhadap operasi yang sama dengan *G*. *H* subgrup dari *G* dapat ditulis dengan notasi $H \le G$.

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.3.2 Jika $G = \{1, -1, i, -i\}$, dimana i = $\sqrt{-1}$, maka $(G, \bullet)$ merupakan suatu grup, dan $\{1, -1\}$ adalah subgrup dari G. Akan tetapi $\{1, i\}$ bukan merupakan subgrup dari G karena sifat tertutup terhadap G tidak dipenuhi, yaitu $i \cdot i = -1 \notin \{1, i\}$.

■

Teorema 2.3.3 Misalkan G grup terhadap operasi $*$, dan $H \subseteq G$. H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika
(i) H himpunan tak kosong ,
(ii) jika $a, b \in H$ maka $a * b \in H$ dan
(iii) jika $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$.

(Durbin, 1992)

Bukti : $(\Rightarrow)$ Jika diketahui H subgrup dari G maka harus diperlihatkan.

(i) $H \neq \phi$, karena H grup maka terdapat $e \in H$ sedemikian hingga $H \neq \phi$.
(ii) Karena $(H, *)$ grup sedemikian hingga $\forall a, b \in H \Rightarrow a * b \in H$.
(iii) $\forall a \in H \Rightarrow \exists b \in H$ sedemikian hingga $a * b = b * a = e$ berdasarkan aksioma ke-3 dari grup, mengakibatkan $b = a \in H$.

Jadi terbukti (i), (ii) dan (iii) terpenuhi.

$(\Leftarrow)$ Diketahui H subset tak kosong dari G, $(G, *)$ grup, H tertutup terhadap operasi *. Dan berlaku kondisi (i), (ii) dan (iii). Akan dibuktikan H subgrup G. Untuk membuktikan bahwa H merupakan grup tinggal dibuktikan bahwa pada H berlaku sifat assosiatif, memiliki elemen identitas dan setiap elemen di H memiliki invers.

(1) ambil $a, b, c \in H$, karena $H \subseteq G$ maka $a * (b * c) = (a * b) * c$ berlaku untuk setiap elemen di H sehingga sifat assosiatif terpenuhi

(2) $e \in H \Rightarrow e \in G$ dan $a \in H \Rightarrow a \in G$ mengakibatkan $a * e = e * a = a \in H$ sehingga terbukti adanya elemen identitas dalam H

(3) dari kondisi (iii) yaitu $a \in H \Rightarrow b \in H$ maka $a \in H \Rightarrow a \in G$ dan $b \in H \Rightarrow b \in G$ mengakibatkan $a * b = b * a = e \in H$ sehingga terbukti setiap elemen di H mempunyai invers.

Karena $H \subseteq G$ maka terbukti bahwa H subgrup dari G. ◘

2.4 Subgrup Normal, Koset dan Grup Faktor

Definisi 2.4.1 (Subgrup Normal) Misalkan $(G,*)$ adalah grup, N merupakan subgrup dari G. N disebut subgrup normal dari G (ditulis $N \lhd G$), jika $xNx^{-1} \subset N$, untuk setiap $x \in G$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Teorema 2.4.2 Misalkan G grup, jika A subgrup dari G dan B subgrup normal dari G, maka AB subgrup dari G, dimana $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Bukti: Untuk membuktikan subgrup harus memenuhi:

(i) $AB \neq \phi$

Karena A, B merupakan grup, maka $\exists\, e.e \in AB$. Sehingga terbukti bahwa $AB \neq \phi$.

(ii) Jika $x, y \in AB$ maka $xy \in AB$.

Ambil sebarang $x \in AB \rightarrow x = a_1 b_1,\ \forall a_1 \in A, b_1 \in B$

Ambil sebarang $y \in AB \rightarrow y = a_2 b_2,\ \forall a_2 \in A, b_2 \in B$

Sehingga $x\,y = (a_1b_1)(a_2b_2)$

$= a_1b_1\, a_2b_2$

$= a_1eb_1a_2b_2$

$= a_1a_2\,(a_2^{-1}b_1a_2)b_2$

Karena A subgrup, maka $a_1a_2 \in A$ dan karena B subgrup normal maka $a_2^{-1}b_1a_2 \in B$, sehingga $(a_2^{-1}b_1a_2)b_2 \in B$. Jadi $xy \in AB$.

(iii) Jika $x \in AB$ maka $x^{-1} \in AB$. Misalkan $x=(ab)^{-1}$

Sehingga diperoleh $x = b^{-1} a^{-1}$

$= (ab^{-1} a^{-1}) a^{-1}$ (karena $B \lhd G$)

$= (a^{-1}b^{-1}a) a^{-1}$

karena $a^{-1} \in A$ dan $(a^{-1}b^{-1}a) \in B$, maka $(ab)^{-1} \in AB$.

Dari (i-iii) terbukti $AB \leq G$. ◘

Teorema 2.4.3 Misakan G adalah grup, N subgrup dari G, maka pernyataan berikut ekuivalen:

(i) $N \lhd G$.

(ii) $xNx^{-1}=N$, $\forall x \in G$.

(iii) $xN=Nx$, $\forall x \in G$.

(iv) $(xN)(yN)=(xy)N$, $\forall x, y \in G$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Bukti : (i) $\rightarrow$ (ii) Andaikan $N \lhd G$, ambil sebarang $x \in G$, maka dari definisi subgrup normal $xNx^{-1} \subseteq N$, selanjutnya ambil $x^{-1} \in G$, maka $x^{-1}Nx \subseteq N$. Karena $N=x(x^{-1}Nx\ )x^{-1} \subseteq xN\ x^{-1}$, jadi $xNx^{-1} \subseteq N$. Sehingga terbukti $xNx^{-1}=N$.

(ii) $\rightarrow$ (iii) $Nx=(\ xNx^{-1})x=\ xNx^{-1}x=\ xNe=xN$. Sehingga terbukti bahwa $xN=Nx$.

(iii) $\rightarrow$ (iv)Karena $xN=Nx$, maka $(xN)(yN)=x(Ny)N=x(yN)N=xy(NN)$. Karena N tertutup terhadap perkalian, maka $NN \subseteq N$, dengan kata lain $N=eN \subseteq NN$ sehingga $NN=N$, jadi $(xN)(yN)=(xy)N$.

(iv) $\rightarrow$ (i) Karena $(xN)(yN)=(xy)N$, maka $xNx^{-1}= xNx^{-1}e \subseteq xNx^{-1}N$. Sedangkan $xNx^{-1}N =(xN)x^{-1}N= xx^{-1}N=eN=N$ sehingga $N \lhd G$.

Terbukti pernyataan (i), (ii), (iii) dan (iv) ekuivalen. ◘

Teorema 2.4.4 Sebarang subgrup *H* dari suatu grup komutatif adalah normal .

(Whitelaw, 1995)

Bukti: Misalkan *h* adalah sebarang elemen dari *H* dan misalkan *g* adalah sebarang elemen dari *G*. Karena merupakan grup komutatif maka $g^{-1}hg=hg^{-1}g=h$, termasuk *H*. Sehingga terlihat bahwa *H* adalah subgrup normal. ◘

Definisi 2.4.5 (Koset) Jika *H* adalah subgrup dari *G* dan untuk sebarang $a \in G$, maka himpunan

$aH = \{ah \mid h \in H\}$ disebut koset kiri dari *H* dalam *G*, himpunan semua koset kiri dari *H* dalam *G*, biasa ditulis G/H .

$Ha = \{ha \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari *H* dalam *G*.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.4.6 (Grup Faktor) Misalkan *G* grup dan *N* subgrup normal dari *G*, maka G/N disebut grup faktor *G* oleh *N*.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.4.7 (Konjugasi dan G-*set*) Misalkan *G* adalah sebuah grup dan *X* adalah sebuah himpunan. *G* disebut *act on X* jika terdapat pemetaan $\phi : G \times X \to X$, dimana $\phi(a,x) = a \bullet x$, sedemikian sehingga untuk setiap $a,b \in G,\ x \in X$ berlaku:

(i) $a \bullet (b \bullet x) = (ab) \bullet x$

(ii) $e \bullet x = x$.

Pemetaan ϕ disebut *action* dari *G on X*, dan *X* disebut sebagai sebuah G-set . Sedangkan *action* dari grup *G on G* dengan pemetaan $\phi : G \times G \to G$ dimana $\phi(a,x) = a \bullet x = axa^{-1}$. Pemetaan ini bisa disebut sebagai konjugasi.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

2.5 Homomorfisma Grup

Dalam membandingkan dua grup, diperlukan pemetaan yang mengawankan setiap elemen dari grup yang satu ke elemen grup yang lain atas operasi tertentu. Dalam hal ini terdapat istilah-istilah berikut.

Definisi 2.5.1 (Homomorfisma, Isomorfisma Grup) Misalkan G dan H adalah grup, sebuah pemetaan $\phi : G \to H$ disebut homomorfisma jika untuk semua $x, y \in G$ berlaku:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

Selanjutnya jika ϕ bijektif (satu-satu dan onto), maka ϕ disebut sebagai isomorfisma dari G onto H dan ditulis $G \cong H$ atau dikatakan G isomorfik dengan H.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Contoh 2.5.2 Misalkan G adalah grup dari bilangan real atas penjumlahan, misalkan G' adalah grup bilangan real positif atas perkalian. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan $\phi : G \to G'$, yang didefinisikan sebagai $\phi(a) = 2^a$, adalah sebuah isomorfisma?

Bukti: Pemetaan ϕ adalah homomorfisma, karena

$$\phi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a 2^b = \phi(a)\phi(b)$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan satu-satu atau injektif. Jika $\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow a = b$, karena $\phi(a) = \phi(b) \Rightarrow 2^a = 2^b$, jadi $a=b$. Terbukti bahwa injektif ϕ.

Akan ditunjukkan bahwa ϕ adalah surjektif atau onto. Ambil sebarang $y \in G'$ akan dibuktikan $x \in G \ni \phi(x) = y$.

$y \in G' \Rightarrow y = 2^b$, $\phi(x) = 2^b = y$. Jadi terbukti ϕ surjektif.

Karena terbukti bijektif, maka ϕ merupakan isomorfisma. ■

Definisi 2.5.3 Jika sebuah homomorfisma memenuhi pemetaan injektif, maka disebut homomorfisma injektif.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.5.4 Jika sebuah homomorfisma memenuhi pemetaan surjektif, maka disebut homomorfisma surjektif.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.5.5 (Automorfisma Grup) Automorfisma dari G yang dinotasikan Aut (G) adalah sebuah isomorfisma dari G onto G.

(Scott, 1964)

Teorema 2.5.6 Jika G suatu grup, maka terhadap fungsi komposisi, Aut (G) membentuk grup.

(Arifin, 2000)

Contoh 2.5.7 Misalkan G adalah sebuah grup, dan didefinisikan pemetaan $I_a : G \to G$ dimana $I_a(x) = axa^{-1}, \forall a, x \in G$ Buktikan I_a adalah sebuah automorfisma dari G.

Bukti: (i). Akan dibuktikan homomorfisma, dalam hal ini $I_a(xy) = I_a(x)I_a(y),$ untuk setiap $a, x, y \in G,$ sehingga $I_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1})(aya^{-1}) = I_a(x)I_b(y).$

Terbukti bahwa I_a adalah homomorfisma.

(ii). Akan dibuktikan I_a adalah injektif, dalam hal ini jika $I_a(x)I_a(y) \Rightarrow x = y,$ karena $I_a(x) = axa^{-1}$ dan $I_a(y) = aya^{-1}$, dengan menggunakan hukum kanselasi, dimana jika $axa^{-1} = aya^{-1} \Rightarrow x = y$. Sehingga terbukti I_a adalah injektif

(iii). Akan dibuktikan I_a adalah surjektif, dalam hal ini karena untuk setiap x di G , berlaku $x = a(a^{-1}xa)a^{-1} = I_a(a^{-1}xa)$ yang menunjukkan bahwa I_a surjektif.

Dari (i)-(iii) Terbukti bahwa I_a merupakan automorfisma dari G yang ditentukan oleh a . ◘

Teorema 2.5.8 Misalkan G dan H adalah Grup, sebuah pemetaan homomorfisma $\phi: G \to H$ maka berlaku:

(i) $\phi(e) = e'$

(ii) $\phi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}$, $\forall x \in G$.

(iii) $\varphi(x)\phi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = e'$, $\forall x \in G$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Definisi 2.5.9 Misalkan G dan H adalah Grup, dan ϕ homomorfisma dari G into H. Kernel dari ϕ didefinisikan sebagai himpunan berikut:

$$\mathrm{Ker}\phi = \{x \in G \mid \phi(x) = e'\}.$$

dimana *e'* adalah elemen identitas dari *H*. Sedangkan Ruang peta (*range*) atau *image* dari ϕ, ditulis $\mathrm{Im}\,\phi$

$$\mathrm{Im}\phi = \{y \in H \mid y = \phi(x)\}.$$

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Teorema 2.5.10 Sebuah homomorfisma $\phi: G \to H$ adalah injektif jika dan hanya jika $\mathrm{Ker}\phi = \{e\}$.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Teorema 2.5.11 (Teorema Isomorfisma Pertama) Jika $\phi: G \to G'$ adalah homomorfisma dengan $\mathrm{Ker}\,\phi$, maka

(i). $\mathrm{Ker}\,\phi \lhd G$

(ii). $G/Ker\phi \cong \mathrm{Im}\,\phi$

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Bukti: (i). Dari Teorema 2.5.8 berlaku $\phi(e) = e'$, maka $e \in Ker\phi$ ambil sebarang $x, y \in Ker\phi$ dan $g \in G$, maka $\phi(x) = e'$ dan $\phi(y) = e'$. Sehingga

$$\begin{aligned}\phi(xy) &= \phi(x)\phi(y)\\ &= e'e'\\ &= e'\end{aligned}$$

$$\phi(x^{-1}) = \phi(x)^{-1}$$
$$= e'^{-1}$$
$$= e'$$

Selanjutnya untuk membuktikan subgrup normal, maka harus ditunjukkan $\phi(xyx^{-1}) = e'$.

$$\phi(xyx^{-1}) = \phi(x)\phi(y)\phi(x^{-1})$$
$$= \phi(x)e'\phi(x)^{-1}$$
$$= (\phi(x)e')\phi(x)^{-1}$$
$$= \phi(x)\phi(x)^{-1}$$
$$= e'$$

Jadi terbukti bahwa Ker$\phi \lhd G$.

(ii). Misalkan *H subset* dari *G'* adalah $\mathrm{Im}\phi$, dan didefinisikan sebuah pemetaan:

$\psi : G/Ker\phi \to \mathrm{Im}\phi$ dengan $\psi(xK) = \phi(x)$, dimana $K = Ker\phi$. Selanjutnya akan ditunjukkan ψ adalah homomorfisma yaitu

$$\psi((xK, yK)) = \psi(xyK)$$
$$= \phi(xy)$$
$$= \phi(x)\phi(y)$$
$$= \psi(xK)\psi(yK)$$

Selanjutnya akan dibuktikan ψ injektif, dalam hal ini akan ditunjukkan jika $\psi(xK) = \psi(yK) \Rightarrow xK = yK$, untuk setiap *x*, $y \in K$. Selanjutnya $\psi(xK) = \psi(yK) \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$, karena $\psi(xK) = \phi(x) = e'$ dan $\psi(yK) = \phi(y) = e'$ yang menunjukkan bahwa $\phi(x) = \phi(y)$. Dari pernyataan tersebut terbukti bahwa ψ injektif. Selanjutnya, karena *H* adalah $\mathrm{Im}\phi$, terdapat suatu $x \in G$ sedemikian sehingga $\phi(x) = h$. Karena $\psi(xK) = \phi(x) = h$, maka terbukti ψ adalah surjektif.

Jadi terbukti bahwa ψ adalah sebuah isomorfisma selanjutnya terbukti bahwa $G/Ker\phi \cong \mathrm{Im}\,\phi$. ◘

2.6 *Centralizer* dan *Normalizer*

Dalam aljabar abstrak dikenal pula istilah *centralizer* dan *normalizer* yang berkaitan dengan subgrup normal. Berikut definisi *centralizer* dan *normalizer*.

Definisi 2.6.1 (*Centralizer dan Normalizer*) Jika S adalah himpunan bagian dari G, maka *centralizer* dari S pada G dinotasikan $C_G(S)$, didefinisikan

$$C_G(S) = \{x \in G \mid \text{ jika } s \in S \text{ maka } xs = sx\}$$

Sedangkan *normalizer* dari S pada G dinotasikan $N_G(S)$, didefinisikan

$$N_G(S) = \{x \in G \mid xS = Sx\}$$

Jika x adalah satu-satunya elemen dari S , dimana $x \in G$, maka $C_G(\{x\}) = C(x)$ dan $N_G(\{x\}) = N(x)$, sehingga bisa dinyatakan secara langsung $N(x)=C(x)$.

(Scott, 1964)

Contoh 2.6.2 Misalkan G adalah grup dan H adalah himpunan bagian dari G yang didefinisikan sebagai berikut :

$$G = A_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dimana A_3 merupkan grup permutasi dengan elemen bilangan bulat positif kurang dari 4. Carilah Normalizer dari H pada G?

Jawab:

i. Ambil $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in A_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Karena $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Maka $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in N_G(H)$

ii. Ambil $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in A_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Karena $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

maka $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \notin N_G(H)$

iii. Ambil $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in A_3$, jelas $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in N_G(H)$

Jadi $N_G(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Teorema 2.6.3 *Centralizer* dan *Normalizer* dari sebuah grup *G* adalah sebuah subgrup dari *G*.

(Bhattacharya, dkk, 1990)

Teorema 2.6.4 Jika *G* adalah grup, dan *H* adalah subgrup dari *G*, maka $H \subset N(H)$ dimana $N(H)$ adalah subgrup terbesar dari *G*, sehingga *H* adalah normal.

(Scott, 1964)

BAB III
PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas tentang definisi-definisi dan teorema-teorema dari *direct product* dan *semidirect product* beserta buktinya.

3.1 *Direct Product*

Sebelum membahas tentang *semidirect product*, berikut akan dibahas tentang *direct product* yang berkaitan dengan *semidirect product*.

Definisi 3.1.1 (*Direct Product*)

1. *Direct product* $G_1 \times G_2 ...... \times G_n$ dari grup $(G_1,*_1),(G_2,*_2),....,(G_n,*_n)$ adalah himpunan *n-tuples* ($g_1, g_2,....., g_n$) dimana $g_i \in G_i$ dan $n \in Z^+$ dengan operasi yang didefinisikan oleh:
$$(g_1,g_2,...g_n) * (h_1,h_2,..h_n) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2,.....g_n *_n h_n)$$
2. Dengan cara yang sama, *direct product* $G_1 \times G_2 ......$ dari grup $(G_1,*_1),(G_2,*_2),....$ adalah himpunan barisan $(g_1, g_2,.....)$ di mana $g_i \in G_i$ dengan operasi yang didefinisikan oleh:
$$(g_1, g_2,.....) * (h_1, h_2,.....) = (g_1 *_1 h_1, g_2 *_2 h_2,.....)$$

Pada dasarnya kedua definisi di atas adalah sama, namun terdapat perbedaan pada banyaknya grup. Definisi pertama menyatakan *direct product* dari banyaknya grup yang berhingga, sedangkan definisi kedua adalah definisi *direct product* untuk banyaknya grup yang tak berhingga. Meskipun operasi dari masing-masing faktor dari *direct product* (dalam hal ini grup) berbeda, tetapi secara umum bila grup dinyatakan dalam operasi penggandaan, maka dinyatakan:

$$(g_1,g_2,.....g_n)\,(h_1,h_2,.....,h_n) = (g_1h_1, g_2h_2,......, g_nh_n)$$

(Dummit,1991)

Teorema 3.1.2 Jika $(G_1, \circ)$ dan $(G_2, \bullet)$ keduanya adalah grup, maka *direct product* $(G_1 \times G_2, *)$ adalah grup terhadap operasi biner yang didefinisikan sebagai:

$$* : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2$$
$$((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mapsto (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 \bullet b_2)$$

untuk setiap $a_1, a_2 \in G_1, b_1, b_2 \in G_2$.

(Durbin, 1992)

Bukti: Akan dibuktikan bahwa $(G_1 \times G_2, *)$ adalah grup. Ambil sebarang $x, y, z \in G_1 \times G_2$ misalkan:

$x = (a_1, b_1)$, untuk suatu $a_1 \in G_1, b_1 \in G_2$

$y = (a_2, b_2)$, untuk suatu $a_2 \in G_1, b_2 \in G_2$

$z = (a_3, b_3)$, untuk suatu $a_3 \in G_1, b_3 \in G_2$

Akan ditunjukkan bahwa $(G_1 \times G_2, *)$ memenuhi aksioma dibawah ini:

1. Tertutup.

   $(\forall x, y \in G_1 \times G_2 \ni x * y \in G_1 \times G_2)$

   $(x * y) = (a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \circ a_2, b_1 \bullet b_2)$, karena G_1 dan G_2 bersifat tertutup maka $a_1 \circ a_2 \in G_1$ dan $b_1 \bullet b_2 \in G_2$, jadi $x * y \in G_1 \times G_2$.

2. Assosiatif.

   $(\forall x, y, z \in G_1 \times G_2 \ni (x * y) * z = x * (y * z))$

   $$\begin{aligned}(x * y) * z &= ((a_1, b_1) * (a_2, b_2)) * (a_3, b_3) \\ &= (a_1 \circ a_2, b_1 \bullet b_2) * (a_3, b_3) \\ &= ((a_1 \circ a_2) \circ a_3, (b_1 \bullet b_2) \bullet b_3)\end{aligned}$$

   Karena G_1 dan G_2 grup maka:

   $$\begin{aligned}(x * y) * z &= (a_1 \circ (a_2 \circ a_3), b_1 \bullet (b_2 \bullet b_3)) \\ &= (a_1, b_1) * (a_2 \circ a_3, b_2 \bullet b_3) \\ &= x * (y * z)\end{aligned}$$

3. Memiliki elemen identitas

$$(\forall x \in G_1 \times G_2 \exists e \in G_1 \times G_2 \ni x * e = e * x = x)$$

Karena (G_1, $\circ$) dan (G_2, $\bullet$) grup , sehingga G_1 dan G_2 masing masing mempunyai elemen identitas berturut-turut e_1, e_2 . Jadi $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$.

$$\begin{aligned} x * e &= (a_1, b_1) * (e_1, e_2) \\ &= (a_1 \circ e_1), (b_1 \bullet e_2) \\ &= (a_1, b_1) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e * x &= (e_1, e_2) * (a_1, b_1) \\ &= (e_1 \circ a_1), (e_2 \bullet b_1) \\ &= (a_1, b_1) \\ &= x \end{aligned}$$

Jadi $(G_1 \times G_2, *)$ memiliki elemen identitas yaitu $e = (e_1, e_2)$

4. Setiap elemen dari $(G_1 \times G_2, *)$ memiliki invers

$$(\forall x \in G_1 \times G_2 \exists ! x^{-1} \in G_1 \times G_2 \ni x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$$

Ambil sebarang $x \in G_1 \times G_2$ maka $x = (a_1, b_1)$ untuk suatu $a_1 \in G_1, b_1 \in G_2$. Karena G_1 dan G_2 adalah grup, sehingga setiap elemen pada G_1 dan G_2 memiliki invers. Dalam hal ini invers dari $a_1 \in G_1$ adalah $a_1^{-1} \in G_1$, invers dari $b_1 \in G_2$ adalah $b_1^{-1} \in G_2$

Dengan demikian $(a_1^{-1}, b_1^{-1}) \in G_1 \times G_2$.

$$\begin{aligned} x * x^{-1} &= (a_1, b_1)(a_1^{-1}, b_1^{-1}) \\ &= (a_1 \circ a_1^{-1}, b_1 \bullet b_1^{-1}) \\ &= (e_1, e_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{-1} * x &= (a_1^{-1}, b_1^{-1})(a_1, b_1) \\ &= (a_1^{-1} \circ a_1, b_1^{-1} \bullet b_1) \\ &= (e_1, e_2) \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa $(G_1 \times G_2, *)$ adalah grup. ◘

Proposisi 3.1.3 Jika $G_1,\dots.G_n$ adalah grup, maka *direct product* $G_1 \times G_2 \dots\dots \times G_n$ merupakan grup berorder $|G_1||G_2|\dots|G_n|$.

(Dummit, 1991)

Bukti: Misalkan G_i grup berorder k_i, akan dibuktikan order dari $|G_1 \times G_2 \times \dots\dots G_n| = |G_1||G_2|\dots\dots|G_n| = k_1 \cdot k_2 \cdots\cdots k_n$, atau dengan kata lain banyaknya elemen dari $G_1 \times G_2 \dots\dots \times G_n$ adalah $k_1 \cdot k_2 \cdots\cdots k_n$.

Karena $|G_1| = k_1$, maka banyaknya elemen G_1 adalah k_1 dan $|G_2| = k_2$, maka banyaknya elemen G_2 adalah k_2 demikian untuk $|G_i| = k_i$, maka banyaknya elemen G_i adalah k_i

Misalkan:

$$
\begin{aligned}
G_1 &= \{g_1, g_2, \dots\dots g_{k_1}\} \\
G_2 &= \{g_1, g_2, \dots\dots g_{k_2}\} \\
&\vdots \\
G_i &= \{g_1, g_2, \dots\dots g_{k_i}\}
\end{aligned}
$$

Maka hasil kali langsung (*direct product*) dari $G_1 \times G_2 \dots\dots \times G_n =$

$$\{(g_i, g_j, \cdots g_n) | g_i \in G_1, g_j \in G_2 \cdots, g_n \in G_n\}$$

$$\{(g_1, g_1, \dots\dots, g_1), (g_1, g_2, \dots\dots, g_1), \dots\dots\dots\dots, (g_1, g_{k_2}, \dots\dots, g_1), (g_2, g_1, \dots\dots, g_1),$$
$$(g_2, g_2, \dots\dots g_1), \dots\dots\dots, (g_2, g_{k_2}, \dots\dots g_1) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (g_{k_1}, g_1, \dots\dots g_1),$$
$$(g_{k_1}, g_2, \dots\dots g_1), \dots\dots, (g_{k_1}, g_{k_2}, \dots\dots g_1), (g_{k_1}, g_{k_2}, \dots\dots g_2), \dots\dots\dots\dots$$
$$(g_{k_1}, g_{k_2}, \dots\dots, g_{k_n})\}$$

dimana i=1,2,...k_1, j=1,2,....k_2, ... dan n = 1,2,....k_n

Berdasarkan definisi *direct product*, maka banyaknya elemen adalah

$$G_1 \times G_2 \dots\dots \times G_n = \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} \cdots\cdots \sum_{n=1}^{k_n} (g_{k_1}, g_{k_2} \dots\dots g_{k_n}) = k_1 \cdot k_2 \dots\dots k_n$$

jadi $|G_1||G_2|\dots|G_n| = k_1 \cdot k_2 \cdots k_n$. ◘

Proposisi 3.1.4 Misalkan $G_1, G_2, ..., G_n$ adalah grup dan $G = G_1 \times G_2 \times ....G_n$ merupakan *direct product* dari $G_1, G_2 ...., G_n$, maka berlaku:

1. Untuk setiap i tetap, misalkan H adalah himpunan yang elemennya terdiri atas elemen identitas dari G_j pada posisi elemen ke j untuk semua $j \neq i$ dan sebarang elemen dari G_i pada posisi ke- i, maka H membentuk subgrup dari G yang isomorfik dengan G_i :

$$G_i \cong \{(e, e, ..., e, g_i, e, ...e) | g_i \in G_i\}$$

(dimana g_i muncul pada posisi ke-i). Jika G_i diidentifikasi dengan subgrup H, maka G_i merupakan subgrup normal dari G ($G_i \lhd G$) :

$$G / G_i \cong G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ...... \times G_n$$

2. Untuk setiap i tetap didefinisikan $\pi_i : G \to G_i$ dengan

$$\pi_i((g_1, g_2, ..., g_n)) = g_i$$

Maka π_i adalah homomorfisma surjektif dengan

$$\text{Ker}(\pi_i) = \{(g_1, ...g_{i-1}, e, g_{i+1}, ...g_n) | g_j \in G_j \forall j \neq i\}$$
$$\cong G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ...... \times G_n$$

(Dimana e muncul pada posisi ke i).

3. Dibawah identifikasi pada bagian (1), jika $x \in G_i$, dan $y \in G_j$ untuk suatu $i \neq j$, maka $x\,y = y\,x$.

(Dummit, 1991)

Bukti: 1. Misalkan $H = \{(e, e, ..., e, g_i, e, ...e) | g_i \in G_i\}$, akan dibuktikan bahwa H adalah subgrup dari G.

i. $H \neq \phi$, telah jelas karena berdasarkan definisi.

ii. Jika $h \in H$ maka $h^{-1} \in H$, untuk i=5. Ambil sebarang $h \in H$, misalkan $h=(e,e,...e,g_5,e,...e)$, untuk suatu $g_5 \in G_5$, sehingga $h^{-1}=(e,e,...e,g_5,e,...e)^{-1}$, untuk suatu $g_5^{-1} \in G_5$.
Jadi terbukti $h^{-1} \in H$.

iii. Jika $h,g \in H$ maka $hg \in H$, untuk $i=5$. Ambil sebarang $h \in H$, misalkan $h=(e,e,...e,g_5,e,...e) \in H$, untuk suatu $g_5 \in G_5$
untuk $i=6$, ambil sebarang $g \in H$, misalkan $g=(e,e,.e,g_6,e,...e) \in H$, untuk suatu $g_6 \in G_5$.
maka $hg=(e,e,...e,g_5,e,...e)\,(e,e,.e,g_6,e,...e)$
$=(e,e,.e,g_5g_6,e,...e)$, untuk suatu $g_5, g_6 \in G_5$
Jadi $hg \in H$.

Sehingga terbukti $\{(e,e,....,e,g_i,e,.....e) | g_i \in G\}$ adalah sebuah subgrup dari G. ◘

Selanjutnya akan dibuktikan :

$$G_i \cong \{(e,e,....,e,g_i,e,.....e) | g_i \in G_i\}$$

didefiniskan relasi $\varphi : G_i \rightarrow H$

$$g_i \mapsto (e,....e,g_i,e,....,e)$$

i. Akan ditunjukkan φ adalah pemetaan, akan dibuktikan jika $g_1 = g_2$, maka $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$

$$\begin{aligned} \varphi(g_1) &= (e,....,e,g_1,e........e) \\ &= (e,.....e,g_2,e......e) \text{, karena } g_1 = g_2 \\ &= \varphi(g_2) \end{aligned}$$

ii. Akan ditunjukkan φ adalah injektif, dalam hal ini jika $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ maka $g_1 = g_2$.
Karena $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, maka $(e,....,e,g_1,e,...,e) = (e,...,e,g_2,e,...,e)$ yang menunjukkan bahwa $g_1 = g_2$, jadi terbukti φ adalah injektif.

iii. Akan ditunjukkan φ homomorfisma, dalam hal ini ditunjukkan

$$\varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2),\ \forall g_1g_2 \in G_i$$

$$\begin{aligned} \varphi(g_1g_2) &= \varphi((e,...,e,g_1,e,...e)(e,...,e,g_2,e,...e)) \\ &= \varphi(e,....,e,g_1g_2,e,....,e) \\ &= (e,...,e,g_1g_2,e,...,e) = \\ &(e,...,e,g_1,e,....,e)(e,....,e,g_2,e,...,e) \end{aligned}$$

$$=\varphi(g_1)\varphi(g_2)$$

iv. Akan ditunjukkan φ surjektif, dalam hal ini ambil sebarang $y \in H$, akan dibuktikan terdapat $g_i \in G_i$ sedemikian sehingga $\varphi(g_i) = y$.

$$y \in H \rightarrow y = (e,....e, g_i, e......e)$$

$$\varphi(g_i) = (e,...e, g_i, e,.....,e)$$
$$= y$$

Artinya terdapat $g_i \in G_i$, sedemikian sehingga $\varphi(g_i) = y$. Jadi terbukti surjektif.

Jadi dari bukti (i-iv) diatas terbukti bahwa terdapat pemetaan isomorfisma, sehingga $G_i \cong \{(e, e,...., e, g_i, e,.....e) | g_i \in G_i\}$. ◘

Selanjutnya akan ditunjukkan pula bahwa G_i merupakan subgrup normal dari G ($G_i \lhd G$). Untuk membuktikan G_i subgrup normal dari G, harus ditunjukkan:

$ghg^{-1} \in G_i$, untuk semua $g \in G$ dan $h \in G_i$

Ambil sebarang $g \in G$ dan $h \in G_i$, maka $g = (g_1, g_2,..., g_n)$ dan h= (e,....e,g_i,e,...,e), untuk suatu $g_i \in G_i$. Dimana invers dari $(g_1, g_2,.., g_n)$ adalah $(g_1^{-1}, g_2^{-1}......g_n^{-1})$

$$\begin{aligned} ghg^{-1} &= (g_1, g_2,....,g_n)\ (e,....e, g_i, e.....e)\ (g_1, g_2,....,g_n)^{-1} \\ &= (g_1e, g_2e,......g_i,...,g_ne)\ (g_1^{-1}, g_2^{-1}......g_n^{-1}) \\ &= (g_1, g_2,....,g_i,....,g_n)\ (g_1^{-1}, g_2^{-1}, \cdots, g_n^{-1}) \\ &= (g_1g_1^{-1}, g_2g_2^{-1},......g_i,......g_ng_n^{-1}) \\ &= (e,......e, g_i, e......e) \\ &= (e,....,e, g_i, e,....,e) \in G_i \end{aligned}$$

Jadi G_i merupakan subgrup normal dari G ($G_i \lhd G$). ◘

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa:

$$G/G_i \cong G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ...... \times G_n$$

karena pemetaan $g_i \mapsto (e, e, ...e, g_i, e, ...e)$ menunjukkan isomorfisma dari G_i dengan subgrup $G = G_1 \times G_2 \times ....G_n$. Sehingga menunjukkan bahwa G_i isomorfik pada G (Karena berdasarkan definisi bahwa bila terdapat sebuah pemetaan isomorfisma antara dua grup maka grup akan isomorfik).

Sehingga untuk membuktikannya menurut teorema isomorfisma pertama secara langsung dapat didefinisikan relasi dibawah ini:

$$\varphi : G \to G_1 \times G_2 \times ....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ....G_n$$

$$\varphi(g_1, ..., g_n) = (g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n)$$

i. Akan dibuktikan φ merupakan pemetaan, jika $(g_1, g_2 ......g_n) = (h_1, h_2 ....h_n)$, maka $\varphi(g_1, g_2 ......g_n) = \varphi(h_1, h_2 ......h_n)$

$$\varphi(g_1, g_2, ..., g_n) = (g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n)$$

$$= (h_1, ..., h_{i-1}, h_{i+1}, ..., h_n) \quad \text{karena } g_i = h_i$$

$$= \varphi(h_1, h_2, ..., h_n)$$

Jadi terbukti bahwa φ pemetaan .

ii. Akan dibuktikan φ injektif , dalam hal ini jika $\varphi(g_1, g_2, ..., g_n) = \varphi(h_1, h_2, ..., h_n)$, maka $(g_1, g_2, ..., g_n) = (h_1, h_2, ..., h_n)$

$$\varphi(g_1, g_2 ......g_n) = \varphi(h_1, h_2, ..., h_n)$$

$$(g_1, ..., g_{i-1}, g_{i+1}, ..., g_n) = (h_1, ..., h_{i-1}, h_{i+1}, ..., h_n)$$

$$\forall i \in N, g_i = h_i$$

Jadi terbukti bahwa $(g_1, g_2, ..., g_n) = (h_1, h_2, ..., h_n)$.

iii. Akan dibuktikan φ surjektif, dalam hal ini ambil sebarang $h \in G_1 \times \ldots \times G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots . \times G_n$, akan dibuktikan terdapat $x \in G$, sedemikian sehingga $\varphi(x) = h$

$h \in G_1 \times \ldots G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots . G_n \;\; \rightarrow \;\; h = (g_1, \ldots \ldots g_{i-1}, g_{i+1} \ldots . g_n)$

$$\begin{aligned}\varphi((g_1, g_2, \ldots ., g_n)) &= (g_1, \ldots ., g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n) \\ &= h\end{aligned}$$

artinya $\exists (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G$, sedemikian sehingga $\varphi(x) = h$, sehingga terbukti φ surjektif .

iv. Akan dibuktikan φ homomorfisma , dalam hal ini akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\varphi((g_1, \ldots, g_n)(h_1, \ldots, h_n)) &= \varphi((g_1 h_1, \ldots, g_n h_n)) \\ &= (g_1 h_1, \ldots ., g_{i-1} h_{i-1}, g_{i+1} h_{i+1}, \ldots, g_n h_n) \\ &= (g_1, \ldots \ldots g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots \ldots g_n)(h_1, \ldots \ldots h_{i-1}, h_{i+1}, \ldots h_n) \\ &= \varphi(g_1, \ldots ., g_n)\varphi(h_1, \ldots ., h_n)\end{aligned}$$

Jadi terbukti bahwa H membentuk subgrup dari G yang isomorfik dengan G_i :

$$G_i \cong \{(e, e, \ldots ., e, g_i, e, \ldots . e) | g_i \in G_i\}$$

(dimana g_i muncul pada posisi ke-*i*). Selanjutnya terbukti bahwa berdasarkan teorema pertama isomorfisma:

$$G / G_i \cong G_1 \times \ldots . G_{i-1} \times G_{i+1} \times \ldots \ldots \times G_n . \qquad \blacksquare$$

2. Akan dibuktikan bahwa π_i adalah homomorfisma surjektif.

Definisikan relasi $\pi_i : G \rightarrow G_i$

$$(g_1, g_2, \ldots ., g_n) \mapsto \pi_i((g_1, g_2, \ldots ., g_n)) = g_i$$

i. Akan dibuktikan π_i pemetaan, dalam hal ini ambil sebarang $(g_1, g_2, \cdots, g_n), (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in G$, jika $(g_1, g_2, \cdots, g_n) = (h_1, h_2, \cdots, h_n)$, maka $\pi_i((g_1, g_2, \ldots ., g_n)) = \pi_i((h_1, h_2, \ldots ., h_n))$

$$\pi_i((g_1, g_2, ..., g_n)) = g_i$$
$$= h_i \qquad \text{, karena } g_i = h_i$$
$$= \pi_i((h_1, h_2, ..., h_n))$$

Jadi terbukti π_i pemetaan.

ii. Akan ditunjukkan π_i homomorfisma, dalam hal ini ambil sebarang $(g_1, ..., g_n), (h_1, ..., h_n) \in G$, akan dibuktikan $\pi_i((g_1, ..., g_n)(h_1, ..., h_n)) = \pi_i(g_1, ..., g_n)\pi_i(h_1, ..., h_n)$

$$\pi_i((g_1, ..., g_n)(h_1, ..., h_n)) = \pi_i((g_1 h_1, ..., g_n h_n))$$
$$= g_i h_j \text{, karena } \pi_i \text{ pemetaan}$$
$$= \pi_i(g_1, ..., g_n)\pi_i(h_1, ..., h_n)$$

Jadi terbukti π_i homomorfisma.

iii. Akan dibuktikan π_i surjektif , dalam hal ini ambil sembarang $g_i \in G_i$ akan dibuktikan terdapat $y \in G$ sedemikian sehingga $\pi_i(y) = g_i$

$$y \in G \rightarrow y = (g_1, g_2, \cdots, g_n) \in G$$
$$\pi_i(y) = \pi_i((g_1, g_2, \cdots, g_n))$$
$$= g_i$$

Artinya terdapat $y \in G$ sedemikain sehingga $\pi_i(y) = g_i$, jadi terbukti π_i surjektif .

Jadi dari (i)-(iii) terbukti bahwa π_i homomorfisma surjektif. $\blacksquare$

Selanjutnya didefinisikan :

$$\ker(\pi_i) = \{(g_1, ..., g_{i-1}, e, g_{i+1}, ..., g_n) \mid g_j \in G_j \forall j \neq i\}$$

Akan ditunjukkan bahwa:

$$\ker(\pi_i) \cong G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ...... \times G_n = G_i$$

didefinisikan relasi :

$$\varphi : \text{Ker}(\pi_i) \rightarrow G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ...... \times G_n$$

$$(g_1,....g_{i-1},e,g_{i+1},....g_n)\mapsto \pi_i(g_1,...,g_{i-1},e,g_{i+1},....,g_n)$$
$$(g_1,....g_{i-1},e,g_{i+1},....g_n)\mapsto (g_1,...,g_{i-1},g_{i+1},....,g_n)$$

i. Akan ditunjukkan φ adalah pemetaan, dalam hal ini misalkan $(g_1,.....,g_{i-1},e,g_{i+1},....,g_n)=(h_1,....,h_{i-1},e,h_{i+1},....,h_n)$, sedemikian sehingga $g_1=h_1$, $g_{i-1}=h_{i-1}$....., $g_n=h_n$, akan dibuktikan jika $(g_1,....,g_{i-1},e,g_{i+1},....,g_n)=(h_1,....,h_{i-1},e,h_{i+1},....,h_n)$ maka $\varphi(g_1,....g_{i-1},g_{i+1},....g_n)=\varphi(h_1,....h_{i-1},h_{i+1},....h_n)$

$$\begin{aligned}\varphi(g_1,....,g_{i-1},g_{i+1},....,g_n) &= (g_1,....g_{i-1},g_{i+1},....g_n)\\ &= (h_1,....,h_{i-1},h_{i+1},....,h_n)\\ &= \varphi(h_1,....,h_{i-1},e,h_{i+1},....,h_n)\end{aligned}$$

Terbukti φ adalah pemetaan.

ii. Akan dibuktikan φ adalah injektif, dalam hal ini ditunjukkan jika $\varphi(g_1,...,g_{i-1},e,g_{i+1},...,g_n)=\varphi(h_1,....h_{i-1},e,h_{i+1},....h_n)$ maka $(g_1,...,g_{i-1},g_{i+1},...,g_n)=(h_1,....h_{i-1},e,h_{i+1},....h_n)$

$$\varphi(g_1,....g_{i-1},e,g_{i+1},....g_n)=\varphi(h_1,....h_{i-1},e,h_{i+1},....h_n)$$
$$(g_1,....g_{i-1},g_{i+1},....g_n)=(h_1,....h_{i-1},h_{i+1},....h_n)$$
$$\varphi(g_1,....g_{i-1},e,g_{i+1},....g_n)=\varphi(h_1,....h_{i-1},e,h_{i+1},....h_n)$$
$$\varphi(g_1-h_1,....g_{i-1}-h_{i-1},e-e,g_{i+1}h_{i-1},....g_n-h_n)=0$$
$$(g_1-h_1,....,g_{i-1}-h_{i-1},e-e,g_{i+1}h_{i-1},....,g_n-h_n)\in Ker(\pi_i)$$
$$Ker(\pi_i)+(g_1-h_1,...g_{i-1}-h_{i-1},e-e,g_{i+1}h_{i-1},...g_n-h_n)=Ker(\pi_i)$$
$$(g_1-h_1,....,\ g_{i-1}-h_{i-1},e-e,g_{i+1}h_{i-1},....,\ g_n-h_n)=0$$
$$(g_1,....,g_{i-1},e,g_{i+1},....,g_n)=(h_1,....,h_{i-1},e,h_{i+1},....,h_n)$$

iii. Akan dibuktikan φ adalah surjektif, dalam hal ini ambil sebarang $y\in G_1\times......G_{i-1}\times G_{i+1}....\times G_n$, terdapat $g\in Ker\pi_i$, sedemikian sehingga $\varphi(g)=y$.

$$y \in G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} .... \times G_n \to y = (g_1,...,g_{i-1}, g_{i=1},....,g_n)$$

$$\varphi(g) = \pi_i (g_1,....g_{i-1}, e, g_{i+1},....g_n)$$

$$= (g_1,....g_{i-1}, g_{i+1},....g_n)$$

$$= y$$

Jadi φ terbukti surjektif.

iv. Akan dibuktikan φ adalah homomorfisma, dalam hal ini ditunjukkan untuk setiap $(g_1,...., g_{i-1}, e, g_{i+1},.....g_n), (h_1,....h_{i-1}, e, h_{i-1},...., h_n)$ $\in G_1 \times .....G_{i-1} \times G_{i+1} \times ...... \times G_n$, berlaku:

$$\varphi((g_1,...., g_{i-1}, e, g_{i+1},.....g_n)(h_1,....h_{i-1}, e, h_{i-1},...., h_n)) =$$
$$\varphi(g_1,....g_{i-1}, e, g_{i+1},....g_n)\ \varphi(h_1,....h_{i-1}, e, h_{i+1},....h_n)$$

$$\varphi((g_1,...., g_{i-1}, e, g_{i+1},.....g_n)(h_1,....h_{i-1}, e, h_{i-1},...., h_n))$$
$$= \varphi(g_1 h_1,...., g_{i-1} h_{i-1}, ee, g_{i+1} h_{i+1},...., g_n h_n)$$
$$= (g_1 h_1,...., g_{i-1} h_{i-1}, g_{i+1} h_{i+1},...., g_n h_n)$$
$$= (g_1,...., g_{i-1}, g_{i+1},...., g_n)\ (h_1,...., h_{i-1}, h_{i+1},...., h_n)$$
$$= \varphi(g_1,....g_{i-1}, e, g_{i+1},....g_n)\ \varphi(h_1,....h_{i-1}, e, h_{i+1},....h_n)$$

Jadi terbukti φ homomorfisma .

Dari (i)-(iv) terbukti bahwa φ merupakan isomorfisma, sehingga terbukti bahwa $\ker(\pi_i)$ isomorfik dengan G_i. ◘

3. Jika $x = (e..., e, g_i, e,..., e)$ dan $y = (e,..., g_j, e...., e)$, maka

$$xy = (e....., e, g_i, e,....., e)(e,....., e, g_j, e....., e)$$
$$= (e,...., e, g_i, e,...., e, g_j, e,...., e)$$
$$= (e,..., e, g_j, e,..., e, g_i, e,..., e) \quad , \quad \text{untuk} \quad i < j$$
$$= yx$$

Dengan demikian pembuktian Proposisi 3.1.4 ini telah lengkap. ◘

Proposisi di atas menjelaskan bahwa *direct product* $G = G_1 \times G_2 \times \ldots G_n$ adalah isomorfik pada masing-masing G_i.

Definisi 3.1.5 Misalkan $(G,*)$ grup, H dan K adalah subgrup normal dari G dan $H \cap K=\{e\}$, maka HK disebut *internal direct product* dari H dan K, sedangkan jika H dan K adalah grup maka $H \times K$ disebut *external direct product* dari H dan K.

(Dummit,1991)

Teorema 3.1.6 Misalkan $(G,*)$ adalah grup, dengan subgrup H dan K sedemikian sehingga:

1. H dan K adalah normal di G
2. $H \cap K=\{e\}$

maka $HK \cong H \times K$.

(Dummit, 1991)

Bukti: HK adalah subgrup pada G (Teorema 2.4.2), maka $h \in H$ dan $k \in K$. Karena $H \lhd G$, maka $k^{-1}hk \in H$ dan $h^{-1}(k^{-1}hk) \in H$, dengan cara yang sama $(h^{-1}k^{-1}h)k \in K$. Karena $H \cap K=\{e\}$ yang menunjukkan bahwa $h^{-1}k^{-1}hk = \{e\}$, maka $hk=kh$ sehingga setiap elemen H komutatif dengan setiap elemen dari K.

Sehingga elemen HK dapat ditulis dengan tunggal sebagai *product* hk, dengan $h \in H$ dan $k \in K$ maka pemetaan:

$$\varphi : HK \to H \times K$$
$$hk \mapsto (h,k)$$

Untuk membuktikan bahwa φ adalah homomorfisma, untuk setiap $h_1,h_2 \in H$ dan $k_1,k_2 \in K$, karena h_2 dan k_1 komutatif sehingga dapat dinyatakan: $(h_1k_1)(h_2k_2) = (h_1h_2)(k_1k_2)$

dan *product* bisa dinyatakan dengan tunggal $(h_1k_1)(h_2k_2)$ pada bentuk hk dengan $h \in H$ dan $k \in K$, ini menunjukkkan bahwa:

$$\begin{aligned}\varphi(h_1k_1h_2k_2) &= \varphi(h_1h_2k_1k_2)\\ &= (h_1h_2, k_1k_2)\\ &= (h_1,k_1)(h_2,k_2)\\ &= \varphi(h_1,k_1)\varphi(h_2,k_2)\end{aligned}$$

sehingga φ adalah homomorfisma. Homomorfisma φ adalah bijektif karena menggambarkan masing-masing elemen dari *HK* sebagai *product hk* tunggal, yang membuktikan bahwa pemetaan φ adalah isomorfisma, sehingga terbukti *HK isomorfik* dengan $H \times K$.

■

Contoh 3.1.7 Ilustrasikan bentuk grup *direct product* (operasi korespondensi), misal $G_1=Z$, misal $G_2=S_3$, misal $G_3=GL_2(R)$, di mana operasi grup adalah penjumlahan, komposisi, dan perkalian matrik, maka operasi $G_1 \times G_2 \times G_3$ didefinisikan dengan:

$$(n,\sigma,\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(m,r,\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}) = (n+m,\sigma \circ r,\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix})$$

3.2 *Semidirect Product*

Dalam matematika khususnya aljabar abstrak, *semidirect product* merupakan grup yang dibangun dari subgrup-subgrup yang isomorfik dengan grup penggandaan, dan irisan dari subgrupnya merupakan elemen identitas. Dalam hal ini jika semua subgrupnya normal, maka *semidirect product* menjadi sebuah *direct product.*

Teorema 3.2.1 Misalkan H dan K adalah grup dan φ adalah homomorfisma dari K ke *Aut* (*H*). Misalkan ($\bullet$) menyatakan *action* dari K pada H ditentukan oleh φ. Misalkan G adalah himpunan pasangan berurutan (*h*,*k*) dengan $h \in H$ dan $k \in K$ dan didefinisikan penggandaan pada *G*:

$$(h_1,k_1)*(h_2,k_2) = (h_1k_1 \bullet h_2, k_1k_2), \text{ maka}$$

1. Penggandaan diatas membuat G adalah grup berorder $|G| = |H||K|$
2. Himpunan $\{(h,e_k)|h \in H\}$ dan $\{(e_h,k)|k \in K\}$ adalah subgrup dari G serta $H \cong \{(h,e_k)|h \in H\}$ dan $K \cong \{(e_h,k)|k \in K\}$
3. H merupakan subgrup normal dari G ($H \lhd G$).

4. $H \cap K = \{e\}$.
5. Untuk semua $h \in H$ dan $k \in K$, $khk^{-1} = k \bullet h = \varphi(k)(h)$.

(Dummit, 1991)

Bukti: 1. Akan dibuktikan bahwa $(G, *)$ adalah grup:

i. Tertutup.
Ambil sebarang $(h_1,k_1),(h_2,k_2) \in G$, akan dibuktikan

$$(h_1, k_1) * (h_2, k_2) = (h_1k_1 \bullet h_2, k_1k_2)$$
$$= (h_1k_1h_2k_1^{-1}, k_1k_2)$$

Karena grup K *act on* H dapat dinyatakan sebagai konjugasi sehingga menunjukkan bahwa penggandaan pada HK bergantung hanya pada perkalian di H, sehingga $k_1h_2k_1^{-1} \in H$ dan $kk^{-1} \in K$. Jadi terbukti G tertutup.

ii. Assosiatif
Ambil sebarang $(a, x), (b, y), (c, z) \in G$. Akan ditunjukkan $((a, x) * (b, y)) * (c, z) = (a, x) * ((b, y) * (c, z))$

$$\begin{aligned}((a, x) * (b, y)) * (c, z) &= (ax \bullet b, xy) * (c, z)\\
&= (axbx^{-1}, xy) * (c, z)\\
&= (axbx^{-1}xy \bullet c, xyz)\\
&= (axbx^{-1}xyc(xy)^{-1}, xyz)\\
&= (axbx^{-1}xycx^{-1}y^{-1}, xyz)\\
&= (axbycx^{-1}y^{-1}, xyz)\\
&= (ax \bullet bycy^{-1}, xyz)\\
&= (a, x) * (bycy^{-1}, yz)\\
&= (a, x) * (by \bullet c, yz)\\
&= (a, x) * ((b, y) * (c, z))\end{aligned}$$

iii. Untuk setiap $(a, x), (b, y), (c, z) \in G$, maka (e_h,e_k) adalah elemen identitas dari G dengan bukti

$$\begin{aligned}(a,x) * (e_h,e_k) &= (ax \bullet e_h, xe_k)\\
&= (axe_hx^{-1}, xe_k)\\
&= (ae_h, xe_k)\\
&= (a,x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e_h,e_k)*(a,x) &= (e_he_k \bullet a,\ e_k x)\\ &= (e_h\, e_k\, ae_k^{-1}, e_k x)\\ &= (e_h a, e_k x)\\ &= (a,x)\end{aligned}$$

iv. Setiap $(h,k)\in G,$ mempunyai invers berbentuk:

$$(h,k)^{-1} = (k^{-1}\bullet h^{-1}, k^{-1})$$

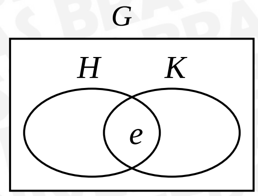
Bukti : $(h,k)^{-1} * (h,k) = (k^{-1}\bullet h^{-1}, k^{-1}) * (h,k)$

$$\begin{aligned}&= ((k^{-1}\bullet h^{-1})(k^{-1}\bullet h), k^{-1}k)\\ &= ((k^{-1}h^{-1}k)(k^{-1}hk), k^{-1}k)\\ &= (k^{-1}h^{-1}kk^{-1}hk, k^{-1}k)\\ &= (k^{-1}h^{-1}e_k hk, k^{-1}k)\\ &= (e_k k^{-1}e_h k, k^{-1}k)\\ &= (e_k e_h, e_k)\\ &= (e_h, e_k)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(h,k)*(h,k)^{-1} &= (h,k)*(k^{-1}\bullet h^{-1}, k^{-1})\\ &= (hk\bullet(k^{-1}\bullet h^{-1}), k^{-1}k)\\ &= (hk\bullet(k^{-1}h^{-1}k), k^{-1}k)\\ &= (hk(k^{-1}h^{-1}k)k^{-1}, k^{-1}k)\\ &= (hkk^{-1}h^{-1}kk^{-1}, k^{-1}k)\\ &= (he_k h^{-1}k, k^{-1}k)\\ &= (e_k e_h, e_k)\\ &= (e_h, e_k)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Dari pembuktian invers di atas dapat disimpulkan sebuah asumsi bahwa $he_k = e_k h = h,\ \forall h\in H$ demikian juga $ke_h = e_h k = k,\ \ \forall k\in K$ sehingga $e_h = e_k$. Bila digambarkan dalam diagram venn maka:



Dari (i)-(iv) terbukti bahwa $(G,*)$ adalah grup.

Selanjutnya akan dibuktikan ordernya:
Misalkan $|G| = n_1 n_2$, berarti banyaknya elemen G adalah $n_1 n_2$, karena $G=HK$, maka order dari G = order H $\times$order K, atau dengan kata lain banyaknya elemen dari HK adalah $n_1.n_2$.
Sehingga secara langsung $|H| = n_1$, berarti banyaknya elemen H adalah n_1 dan $|K| = n_2$, berarti banyaknya elemen K adalah n_2.
Berdasarkan definisi $G=HK$, maka banyaknya elemen G adalah

$$G = HK = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} (h_i, k_j) = n_1 n_2 = |H||K|$$

Jadi terbukti bahwa G adalah grup berorder $|G| = |H||K|$. ◘

2. a. Diketahui $\widetilde{H} = \{(h,e) | h \in H\}$, dimana e adalah elemen identitas dari K, akan dibuktikan $\widetilde{H}$ adalah subgrup dari G, dalam hal ini akan ditunjukkan:

i. $\widetilde{H} \neq \phi$, sebab terdapat $(e_h, e) \in \widetilde{H}$ untuk e_h adalah elemen identitas dari H.

ii. Jika $\alpha \in \widetilde{H}$, akan dibuktikan $\alpha^{-1} \in \widetilde{H}$. Ambil sebarang $\alpha \in \widetilde{H}$, misalkan $\alpha = (h,e)$, untuk suatu $h \in H$, dalam hal ini akan ditunjukkan bahwa $(h^{-1}, e) \in \widetilde{H}$, yaitu dengan membuktikan $(h,e) * (h^{-1}, e) = (e_h, e_k)$, sehingga diperoleh:

$$(h,e)*(h^{-1},e) = (he \bullet h^{-1}, ee)$$
$$= (heh^{-1}e, ee)$$
$$= (e_h, e_k)$$

Karena $h \in H$ dan $h^{-1} \in H$, sehingga $(h^{-1},e) \in \widetilde{H}$. Jadi terbukti jika $\alpha \in \widetilde{H}$ maka $\alpha^{-1} \in \widetilde{H}$.

iii. Jika $\alpha, \beta \in \widetilde{H}$, maka $\alpha * \beta \in \widetilde{H}$. Ambil sebarang $\alpha \in \widetilde{H}$, misalkan $\alpha = (h,e)$, untuk suatu $h \in H$. Ambil sebarang $\beta \in \widetilde{H}$, misalkan $\beta = (g,e)$, untuk suatu $g \in H$, maka

$$\alpha * \beta = (h,e)*(g,e)$$
$$= (he \bullet g, ee)$$
$$= (hege^{-1}, ee)$$
$$= (hg, e_k)$$

karena H grup maka $hg \in H$, sehingga $\alpha * \beta = (hg,e) \in \widetilde{H}$.

Jadi dari (i)-(iii) terbukti bahwa $\widetilde{H}$ adalah subgrup dari G. ◘

b. Diketahui $\widetilde{K} = \{(e,k) | k \in K\}$, dimana e adalah elemen identitas dari K, akan dibuktikan $\widetilde{K}$ adalah sub grup dari G, dalam hal ini akan ditunjukan:

i. $\widetilde{K} \neq \phi$, sebab terdapat $(e,e_k) \in \widetilde{H}$, untuk e_k adalah elemen identitas dari K.

ii. Jika $\alpha \in \widetilde{K}$, akan dibuktikan $\alpha^{-1} \in \widetilde{K}$. Ambil sebarang $\alpha \in \widetilde{K}$, misalkan $\alpha = (e,k_1)$, untuk suatu $k_1 \in K$, dalam hal ini akan ditunjukkan bahwa $(e,k_1^{-1}) \in \widetilde{K}$ yaitu dengan membuktikan $(e,k_1)*(e,k_1^{-1}) = (e_h, e_k)$, maka

$$(e,k_1)*(e,k_1^{-1}) = (ek_1 \bullet e, k_1k_1^{-1})$$
$$= (ek_1ek_1^{-1}, e_k)$$
$$= (e, e_k)$$

karena $k \in K$ dan $k^{-1} \in K$, sehingga $(e,k^{-1}) \in \tilde{K}$. Jadi terbukti jika $\alpha \in \tilde{K}$ maka $\alpha^{-1} \in \tilde{K}$.

iii. Jika $\alpha, \beta \in \tilde{K}$, maka $\alpha * \beta \in \tilde{K}$. Ambil sebarang $\alpha \in \tilde{K}$, misalkan $\alpha = (e,k)$, untuk suatu $k \in K$. Ambil sebarang $\beta \in \tilde{K}$, misalkan $\beta = (e,g)$, untuk suatu $g \in K$, maka

$$\alpha * \beta = (e,h)*(e,g)$$
$$= (eh \bullet e, hg)$$
$$= (eheh^{-1}, hg)$$
$$= (e_h, hg)$$

karena K grup maka $hg \in K$, sehingga $\alpha * \beta = (e,hg) \in \tilde{K}$.

Jadi dari (i)-(iii) terbukti bahwa $\tilde{K}$ adalah subgrup dari *G*.

Dari (a)-(b) terbukti bahwa $\tilde{H}$, $\tilde{K}$ merupakan subgrup dari *G*. ◘

Selanjutnya akan dibuktikan $H \cong \{(h,e_k) | h \in H\}$ dan $K \cong \{(e_h,k) | k \in K\}$.

a. Akan ditunjukkan $H \cong \{(h,e_k) | h \in H\}$

Didefinisikan: $\rho : H \to \{(h,e_k) | h \in H\}$

$$h \mapsto (h,e_k)$$

i. Akan dibuktikan φ adalah pemetaan, dalam hal ini jika $h_1 = h_2$, maka $\rho(h_1) = \rho(h_2)$

$$\rho(h_1) = (h_1, e_k)$$
$$= (h_2, e_k) \quad \text{karena } h_1 = h_2$$
$$= \rho(h_2)$$

Jadi terbukti $\rho(h_1) = \rho(h_2)$, sehingga ρ adalah pemetaan.

ii. Akan dibuktikan ρ adalah injektif, dalam hal ini jika $\rho(h_1) = \rho(h_2)$, maka $h_1 = h_2$

$\rho(h_1) = \rho(h_2) \rightarrow (h_1, e_k) = (h_2, e_k)$, berdasarkan definisi himpunan pasangan terurut maka $h_1 = h_2$, sehingga ρ adalah injektif.

iii. Akan dibuktikan ρ adalah surjektif. Ambil sebarang $a \in \{(h, e_k) | h \in H\}$, akan dibuktikan terdapat $b \in H$, sedemikian sehingga $\rho(b) = a$

$a \in \{(h, e_k) | h \in H\} \rightarrow a = (b, e_k)$, untuk suatu $b \in H$ tetapi $\rho(b) = (b, e_k) = a$, jadi $\exists\, b \in H \ni \rho(b) = a$, sehingga ρ adalah surjektif.

iv. Akan dibuktikan ρ adalah homomorfisma, dalam hal ini ditunjukkan : $\rho(h_1 h_2) = \rho(h_1) * \rho(h_2) \quad \forall h_1 h_2 \in H$

$$\begin{aligned}
\rho(h_1 h_2) &= (h_1 h_2, e) \\
&= (h_1 e_k^{-1} e_k h_2 e_k^{-1} e_k, e_k) \\
&= (h_1 e_k^{-1} e_k \bullet h_2 e_k, e_k) \\
&= (h_1 e_k \bullet h_2, e_k e_k) \\
&= (h_1, e_k) * (h_2, e_k) \\
&= \rho(h_1) \rho(h_2)
\end{aligned}$$

Dari (i)-(iv) terbukti bahwa $H \cong \{(h, e_k) | h \in H\}$. ◘

b. Akan ditunjukkan $K \cong \{(e_h, k) | k \in K\}$

Didefinisikan: $\rho : K \rightarrow \{(e_h, k) | k \in K\}$

$$k \mapsto (e_h, k)$$

i. Akan dibuktikan ρ adalah pemetaan, dalam hal ini jika $k_1 = k_2$, maka $\rho(k_1) = \rho(k_2)$

$$\rho(k_1) = (e_h, k_1)$$
$$= (e_h, k_2) \quad \text{karena } k_1 = k_2$$
$$= \rho(k_2)$$

karena $\rho(k_1) = \rho(k_2)$ maka ρ adalah pemetaan.

ii. Akan dibuktikan ρ adalah injektif, dalam hal ini akan dibuktikan jika $\rho(k_1) = \rho(k_2)$, maka $k_1 = k_2$

$\rho(k_1) = \rho(k_2) \rightarrow (e_h, k_1) = (e_h, k_2)$, berdasarkan definisi himpunan pasangan terurut maka $k_1 = k_2$, sehingga ρ adalah injektif.

iii. Akan dibuktikan ρ adalah surjektif. Ambil sebarang $a \in \{(e_h, k) | k \in K\}$, akan dibuktikan terdapat $b \in K$, sedemikian sehingga $\rho(b) = a$

$a \in \{(e_h, k) | k \in K\} \rightarrow a = (e_h, k)$, untuk suatu $b \in K$

tetapi $\rho(b) = (e_h, k) = a$, jadi $\exists\, b \in K \ni \rho(b) = a$

sehingga ρ adalah surjektif.

iv. Akan dibuktikan ρ adalah homomorfisma, dalam hal ini :

$\rho(k_1 k_2) = \rho(k_1)\rho(k_2) \quad , \forall k_1, k_2 \in K$

$\rho(k_1 k_2) = (e_h, k_1 k_2)$, dengan asumsi $e_k = e_h$, maka

$$\begin{aligned}
(e_h, k_1 k_2) &= (e_h k_1 k_1^{-1} e_h k_1 k_1^{-1}, k_1 k_2) \\
&= (e_h k_1 e_h k_1^{-1}, k_1 k_2) \\
&= (e_h k_1 \bullet e_h, k_1 k_2) \\
&= (e_h, k_1) * (e_h, k_2) \\
&= \rho(k_1)\rho(k_2)
\end{aligned}$$

Dari (i-iv) terbukti bahwa $K \cong \{(e_h, k) | k \in K\}$. ◘

3. Untuk membuktikan subgrup normal maka cukup berdasarkan teorema (2.2.4) yang menyatakan bahwa jika K merupakan subgrup dari *normalizer* H pada G ($K \le N_G(H)$) dan H juga

merupakan subgrup dari *normalizer* H pada G ($H \leq N_G(H)$), maka didapatkan $N_G(H)=G$, sehingga $H \triangleleft G$, maka terbukti $H \triangleleft G$.

∎

4. Telah jelas berdasarkan asumsi, jika $\tilde{H} \cap \tilde{K} = \{e\}$, maka $H \cap K = \{e\}$, sehingga telah terpenuhi bahwa $H \cap K = \{e\}$. ∎

5. $$\begin{aligned}(e,k)*(h,e)*(e,k)^{-1} &= ((e,k)*(h,e))*(e,k^{-1}) \\ &= (k \bullet h, k)*(e,k^{-1}) \\ &= (k \bullet hk \bullet e, kk^{-1}) \\ &= (khk^{-1}kek^{-1}, kk^{-1}) \\ &= (khk^{-1}, kk^{-1}) \\ &= (k \bullet h, e)\end{aligned}$$

Bukti di atas menunjukkan $khk^{-1} = k \bullet h$, karena ($\bullet$) bisa dinyatakan sebagai pemetaan homomorfisma. Selanjutnya didefinisikan $Aut(H) = \{f \mid f \text{ hom}: H \to H\}$, dan pemetaan $\varphi : K \to Aut(H)$, dimana $k \mapsto \varphi_k(H)$. Karena dalam hal ini $\varphi_k : H \to H$, maka $h \mapsto \varphi_k(h) = \varphi(k)(h) = khk^{-1} = k \bullet h$, untuk $\forall h \in H$. Selanjutnya akan dibuktikan $khk^{-1} \in H$ dan $\varphi_k(H)$ merupakan homomorfisma.

i. Akan ditunjukkan $khk^{-1} \in H$.

   Sebagaimana uraian di atas pada pembuktian aksioma tertutup.

ii. $\varphi_k(H)$ adalah homomorfisma.

   Misalkan $\varphi_k(h_1) = kh_1k^{-1}$, $\varphi_k(h_2) = kh_2k^{-1}$

$$\begin{aligned}\varphi_k(h_1h_2) &= kh_1h_2k^{-1} \\ &= kh_1k^{-1}kh_2k^{-1} \\ &= \varphi_k(h_1)\varphi_k(h_2)\end{aligned}$$

   terbukti bahwa $\varphi_k(H)$ homomorfisma.

Jadi terbukti berlaku untuk semua $h \in H$ dan $k \in K$, $khk^{-1} = k \bullet h = \varphi(k)(h)$. ◘

Definisi 3.2.2 Misalkan G adalah grup, jika *H* dan *K* adalah dua buah grup dan φ adalah suatu homomorfisma dari *K* ke *Aut*(*H*). Dimana $G=H\times K$ yang di dalamnya didefinisikan penggandaan :

$$(h_1,k_1)*(h_2,k_2)=(h_1k_1 \bullet h_2, k_1k_2)$$

Maka *G* disebut *semidirect product* dari *H* dan *K* bersama dengan φ dan dinotasikan $H\times_{\varphi} K$ atau secara singkat ditulis $H \rtimes K$.

(Dummit, 1991)

Definisi 3.2.3 Jika *H* adalah subgrup dari *G*. Maka sebuah subgrup *K* pada *G* disebut sebuah komplemen dari *H* pada *G*, jika *G*=*HK* dan $H\cap K=\{e\}$.

(Dummit, 1991)

Dari definisi diatas dapat disimpulkan bahwa sebuah *semidirect product* bisa dinyatakan secara singkat yakni harus terdapat sebuah komplemen dari beberapa subgrup normal sejati dari *G* (*proper* normal subgrup *G*).

Definisi 3.2.4 Didefinisikan sebuah grup *G*=*HK*, dimana *H* adalah normal di *G* dan $H\cap K=\{e\}$, maka *G* disebut *semidirect product* dari *H* dan *K*. Jika *K* normal pada *G*, maka *semidirect product* menjadi sebuah *direct product*.

(www.math.niu.edu)

Contoh 3.2.5

$(H,+)=(Z_2,+)=\{\bar{1},\bar{2}\}$ dan $(K,+)=(Z_3,+)=\{\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}$

Maka $G=H\times K=\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{1},\bar{2}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{2},\bar{2}),(\bar{2},\bar{3})\}$.

Akan dibuktikan bahwa $(H\times K,*)$ adalah grup, sebelumnya didefinisikan terlebih dahulu homomorfismanya.

$$\varphi : K \to Aut(H)$$

$$k \mapsto \varphi(k)=\varphi_k(H)=k\bullet h = khk^{-1}, \forall h\in H$$

Selanjutnya untuk membuktikan grup, ambil sebarang x, y, z $\in$ $H \times K$ misalkan:

$$x = (\bar{1},\bar{3}), \text{ untuk suatu } \bar{1} \in H, \bar{3} \in K$$
$$y = (\bar{1},\bar{1}), \text{ untuk suatu } \bar{1} \in H, \bar{1} \in K$$
$$z = (\bar{1},\bar{2}), \text{ untuk suatu } \bar{1} \in H, \bar{2} \in K$$

Akan ditunjukkan bahwa $(H \times K,*)$ memenuhi aksioma:

i. Tertutup.

$(\forall x, y \in H \times K \ni x * y \in H \times K)$

$$(x * y) = (\bar{1},\bar{3}) * (\bar{1},\bar{1}) = (\bar{1}.\bar{3} \bullet \bar{1},\bar{3}.\bar{1})$$
$$= (\bar{1}.\bar{3}.\bar{1}.\bar{3}^{-1},\bar{3}.\bar{1})$$
$$= (\bar{1},\bar{3}) \in H \times K$$

karena H dan K bersifat tertutup maka $\bar{1}.(\bar{3}.\bar{1}.\bar{3}^{-1}) \in H$ dan $\bar{3} \in K$, jadi $x * y \in H \times K$.

ii. Assosiatif.

$(\forall x, y, z \in H \times K \ni (x * y) * z = x * (y * z))$

$$(x * y) * z = ((\bar{1},\bar{3}) * (\bar{1},\bar{1})) * (\bar{1},\bar{2})$$
$$= (\bar{1}\,\bar{3} \bullet \bar{1},\bar{3}\,\bar{1}) * (\bar{1},\bar{2})$$
$$= (\bar{1}.\bar{3}.0 \bullet (1 \bullet 1),\bar{3}\,\bar{1}.\bar{2})$$
$$= (\bar{1}.\bar{3} \bullet (\bar{1}.\bar{1} \bullet \bar{1}),\ \bar{3}\,\bar{1}.\bar{2})$$
$$= (\bar{1},\bar{3})(\bar{1}.\bar{1}. \bullet \bar{1},\bar{1}.\bar{2})$$
$$= (\bar{1},\bar{3})((\bar{1},\bar{1})(\bar{1},\bar{2}))$$
$$= x * (y * z)$$

iii. Setiap elemennya memiliki elemen identitas

$$(\forall x \in H \times K \quad \exists e \in H \times K \ni x * e = e * x = x)$$

Karena $(H,+)$ dan $(K,+)$ grup , sehingga H dan K masing masing mempunyai elemen identitas berturut-turut e_1,e_2 . Jadi $(e_1,e_2) \in H \times K$.

$$x * e = (\bar{1}.\bar{2}) * (e_1, e_2)$$
$$= (\bar{1}.\bar{2} \bullet e_1,\ \bar{2}.e_2)$$

$$= (\overline{1}.\overline{2}.e_1.\overline{2}^{-1}, \overline{2}.e_2)$$
$$= (\overline{1}.e.e_1, \overline{2}e_2)$$
$$= (\overline{1}.e_1, \overline{2}e_2)$$
$$= (\overline{1}, \overline{2})$$
$$= x$$
$$e * x = (e_1, e_2) * (\overline{1}.\overline{2})$$
$$= (e_1 e_2 \bullet \overline{1}, e_2\, \overline{2})$$
$$= (e_1.e_2.\overline{1}.e_2^{-1}, e_2.\overline{2})$$
$$= (e_1.\overline{1}, e_2.\overline{2})$$
$$= (\overline{1}, \overline{2})$$
$$= x$$

Jadi $(H \times K, *)$ memiliki elemen identitas yaitu $e = (e_1, e_2)$

iv. Setiap elemen dari $(H \times K, *)$ memiliki invers

$(\forall x \in H \times K \quad \exists !\, x^{-1} \in H \times K \ni x * x^{-1} = x^{-1} * x = e)$

Ambil sebarang $x \in H \times K$ maka $x = (\overline{1}, \overline{3})$ untuk suatu $\overline{1} \in H, \overline{3} \in K$. Karena H dan K adalah grup, sehingga setiap elemen pada H dan K memiliki invers. Dalam hal ini invers dari $\overline{1} \in G_1$ adalah $\overline{1}^{-1} \in H$, invers dari $\overline{3} \in K$ adalah $\overline{3}^{-1} \in K$

Dengan demikian inversnya $(\overline{3}^{-1} \bullet \overline{1}^{-1}, \overline{3}^{-1}) \in H \times K$.

$$x * x^{-1} = (\overline{1}, \overline{3}) * (\overline{3}^{-1} \bullet \overline{1}^{-1}, \overline{3}^{-1})$$
$$= (\overline{1}.\overline{3} \bullet (\overline{3}^{-1} \bullet \overline{1}^{-1}), \overline{3}.\overline{3}^{-1})$$
$$= (\overline{1}.\overline{3}. \bullet (\overline{3}^{-1}.\overline{1}^{-1}.\overline{3}), \overline{3}.\overline{3}^{-1})$$
$$= (\overline{1}.\overline{3}.(\overline{3}^{-1}.\overline{1}^{-1}.\overline{3}).\overline{3}^{-1}, \overline{3}.\overline{3}^{-1})$$
$$= (\overline{1}.e_1.\overline{1}.e_2, e_2)$$
$$= (e_1, e_2) \text{ asumsi } e_1 = e_2$$
$$x^{-1} * x = (\overline{3}^{-1} \bullet \overline{1}^{-1}, \overline{3}^{-1}) * (\overline{1}, \overline{3})$$
$$= ((\overline{3}^{-1} \bullet \overline{1}^{-1}).\overline{3}^{-1} \bullet \overline{1}, \overline{3}^{-1}\overline{3})$$
$$= (\overline{3}^{-1}.\overline{1}^{-1}.\overline{3}).\overline{3}^{-1}.\overline{1}.\overline{3}, \overline{3}.\overline{3}^{-1})$$

$=(\overline{3}^{-1}.\overline{1}^{-1}.\overline{3}.\overline{3}^{-1}.\overline{1}.\overline{3},\ \overline{3}.\overline{3}^{-1})$
$=(\overline{3}^{-1}.\overline{1}^{-1}.e_2.\overline{1}.\overline{3},\ \overline{3}.\overline{3}^{-1})$
$=(.e_1.e_2,\ e_2)$
$=(e_1,e_2)$ asumsi $e_1=e_2$

Sehingga terbukti bahwa $(H \times K, *)$ adalah grup. Jadi $(G,*)$ adalah *semidirect product* $H \rtimes K$.
■

Proposisi 3.2.6 Misalkan H dan K adalah grup dan misalkan $\varphi : K \to Aut(H)$ adalah homomorfisma. Maka pernyataan dibawah ini ekuivalen:

(1). Pemetaan identitas dari $H \times K$ dan $H \rtimes K$ adalah sebuah grup homomorfisma.
(2). φ adalah *trivial* homomorfisma dari K into *Aut (H).*
(3). $K \lhd H \rtimes K$.

(Dummit, 1991)

Bukti: (1)$\rightarrow$(2) Dengan definisi dari operasi grup pada $H \rtimes K$

$$(h_1,k_1)*(h_2,k_2)=(h_1k_1 \bullet h_2, k_1k_2)$$

untuk semua $h_1,h_2 \in H$ dan $k_1,k_2 \in K$. Dengan asumsi (1) $(h_1k_1)(h_2k_2)=(h_1h_2)(k_1k_2)$, dengan menyamakan faktor pertama dari pasangan terurut diperoleh $k_1 \bullet h_2 = h_2$ untuk $h_2 \in H$ dan $k_1 \in K$, sehingga *K act trivially on H*, dalam hal ini menunjukkan bahwa setiap elemen H dipetakan ke pemetaan identitas automorfisma N, atau dinyatakan, $Aut(H)=\{f \mid f \text{ hom}: H \to H\}$

$$\varphi : K \to Aut(H)$$
$$k \mapsto \varphi_k(h)$$

Dalam hal ini $\varphi_k : H \to H$

$$h \mapsto \varphi_k(h) = khk^{-1} = k \bullet h, \text{ untuk } \forall h \in H$$

(2)$\rightarrow$(3) Jika φ adalah *trivial* dalam hal ini dinyatakan dalam $\varphi : K \to Aut(H)$, maka *action* dari K pada H adalah *trivial,* sehingga elemen dari *H* *commute* dengan *K* (Teorema 3.2.1 pernyataan 5). Maka *H* *normalize* terhadap *K*. Karena *K* normal terhadap dirinya sendiri, maka *G*=*HK* normal terhadap *K*, sehingga pernyataan (3) terbukti.

$(3) \rightarrow (1)$ Jika *K* normal pada $H \rtimes K$ maka telah dibuktikan pada *direct product* (Teorema 3.1.2), untuk semua $h \in H$ dan $k \in K$, komutator $[h,k] \in H \cap K = \{e\}$ sehingga *hk*=*kh* dan *action* dari *K* ke *H* adalah *trivial*. Penggandaan pada *semidirect product* adalah sama dengan pada *direct product*:

$$(h_1, k_1) * (h_2, k_2) = (h_1 h_2, k_1 k_2)$$

untuk setiap $h_1, h_2 \in H$ dan $k_1, k_2 \in K$. Sehingga bukti (1) telah lengkap. ◘

Proposisi di atas menunjukkan hubungan *semidirect product* dengan *direct product*.

Teorema 3.2.7 Misalkan $(G,*)$ grup dan *H*, *K* subgrup dari *G* sedemikian sehingga:

a. $H \lhd G$

b. $H \cap K = \{e\}$

Misalkan $\varphi : K \rightarrow Aut(H)$ adalah homomorfisma yang memetakan $k \in K$ ke automorfisma dari konjungsi oleh k pada *H*. Maka $HK \cong H \rtimes K$. Khususnya, jika *G*=*HK* dengan *H* dan *K* memenuhi pernyataan (a) dan (b), maka *G* adalah *semidirect product* dari *H* dan *K*.

(Dummit, 1991)

Bukti: Karena $H \lhd G$, *HK* adalah subgrup dari *G*. Dari Teorema 3.1.2 dimana setiap elemen *HK* dapat dinyatakan secara tunggal dari *hk*, untuk $h \in H$ dan $k \in K$. Definisikan $f : HK \rightarrow H \rtimes K$ maka pemetaan $hk \mapsto (h,k)$ adalah himpunan yang bijektif dari *HK* onto $H \rtimes K$, karena grup *H* muncul sebagai himpunan elemen (*h*,*e*) dan *K* muncul sebagai himpunan dari elemen (*e*,*k*), sebagaimana telah dibuktikan bahwa *H* isomorfik dengan himpunan elemen (*h*,*e*) dan dan *K* isomorfik dengan himpunan elemen (*e*,*k*) (Teorema 3.2.1). Karena isomorfik maka jelas terdapat pemetaan φ yang merupakan homomorfisma sebagaimana pembahasan formulasi dari definisi *semidirect product.* ▪

BAB IV
KESIMPULAN

4.1. Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari pembahasan adalah sebagai berikut :

1. *Direct product* dari beberapa grup adalah isomorfik pada masing-masing subgrup G_i .
2. Diantara sifat-sifat *semidirect product* adalah sebagai berikut:
   i. merupakan grup yang dibangun dari subgrup-subgrup yang isomorfik dengan grup penggandaan, dan irisan dari subgrupnya merupakan elemen identitas.
   ii. Jika semua subgrup pada *semidirect product* normal, maka *semidirect product* bisa menjadi sebuah *direct product*
   iii. Pada *direct product* dan *semidirect product* terdapat hubungan, yaitu *direct product* isomorfik dengan *semidirect product*.

DAFTAR PUSTAKA

Arifin, H. 2000. *Aljabar*. ITB. Bandung.

Bhattacharya, P.B.,dkk. 1990. *Basic Abstrak Algebra*. Cambridge University Press. Cambridge.

Dummit, D.S & Foote,R.M. 1999. *Abstract Algebra*. John wiley and sons Inc. NewYork.

Durbin, J.B. 1992. *Modern Algebra*. John Wiley & Sons Inc. New York.

Fraleigh, J. 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. Fifth Edition. Addison-Wisley Publishing Company. New York.

Kandasamy,W.b.Vasantha. 2002. *Samarandache Near-ring*. American Research Press. USA.

Pinter, Charles C. 1990. *A book of Abstract Algebra*. Second Edition. Mc. Graw-Hill Publishing Company. New York.

Scott, W.R. 1964. *Group Theory*. Prentice-Hall, Inc. Englewodd Cliffs. New Jersey.

Whitelaw, T.A . 1995. *Intruduction to Abstract Algebra*. Chapman & Hall. London.

http://www.math.niu.edu/~beachy/aaol/structure2.html. Tanggal akses 6 November 2008.