KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON MAKSIMAL

SKRIPSI

Oleh:
MOH. RISKIYADI
0510940039-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON MAKSIMAL

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
MOH. RISKIYADI
0510940039-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2009

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED*
YANG MONOTON MAKSIMAL

Oleh:
MOH. RISKIYADI
0510940039-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 14 April 2009
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Dr. Abdul Rouf A., M.Sc	**Drs. M. Muslikh, M.Si**
NIP. 131 993 383	**NIP. 131 871 740**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: Moh. Riskiyadi**
NIM	**: 0510940039-94**
Jurusan	**: Matematika**
Penulis Skripsi berjudul	**: Karakteristik Fungsi *Set-valued* yang Monoton Maksimal**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 14 April 2009
Yang menyatakan,

Moh. Riskiyadi
NIM. 0510940039

KARAKTERISTIK FUNGSI *SET-VALUED* YANG MONOTON MAKSIMAL

Abstrak

Dalam skripsi ini dibahas karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang Hilbert real. Jika X adalah ruang Hilbert real dan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal, maka karakteristik *set-valued* tersebut adalah sebagai berikut: *set-valued* F monoton dan himpunan $int\big(D(F)\big)$ serta $\overline{D(F)}$ konveks. Di samping itu, *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int\big(D(F)\big)$, tetapi tidak terbatas lokal di batas $D(F)$. Selanjutnya, untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ tertutup dan konveks, sehingga grafik $Gr(F)$ tertutup dalam $X \times X$. Akibatnya, himpunan $F(x)$ kompak di setiap $x \in int\big(D(F)\big)$, tetapi himpunan $F(x)$ tidak kompak di batas $D(F)$.

Kata Kunci: karakteristik, *set-valued*, monoton maksimal, terbatas lokal, kompak dan konveks.

A CHARACTERISTIC OF SET-VALUED FUNCTION WHICH MAXIMAL MONOTONE

Abstract

In this paper we discuss a characteristic set-valued function which maximal monotone in real Hilbert space. If X is real Hilbert space and set-valued $F: D(F) \to P_o(X)$ is maximal monotone, then characteristics of the set-valued are as following: set-valued F is monotone and the sets $int\big(D(F)\big)$ and also $\overline{D(F)}$ are convex. Besides, the set-valued F is locally bounded in every point of $int\big(D(F)\big)$, but not locally bounded in boundary $D(F)$. Furthermore, for each point $x \in D(F)$, a set $F(x)$ is closed and convex, so that the graph $Gr(F)$ closed in $X \times X$. Consequently, the set $F(x)$ is compact in each point $x \in int\big(D(F)\big)$, but the set $F(x)$ is not compact in boundary $D(F)$.

Keyword: characteristic, set-valued, maximal monotone, locally bounded, compact and convex.

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur ke hadirat Allah SWT yang memberikan anugrah dan hidayah kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"Karakteristik Fungsi *Set-valued* yang Monoton Maksimal"**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana di Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik atas dukungan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada:

1. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc selaku dosen pembimbing I dan Drs. M. Muslikh, M.Si selaku dosen pembimbing II, atas segala ilmu, perhatian, nasehat, kesabaran, bantuan dan bimbingannya selama penulisan skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc dan Dr. Wuryansari Muharini K, M.Si selaku Ketua Jurusan Matematika dan Ketua Program Studi Matematika.
3. Dra. Trisilowati, M.Sc selaku dosen Penasehat Akademik atas nasehat dan saran selama penulis menempuh studi.
4. Drs. M. Aruman Imron, M.Si, Prof. Dr. Marjono, M.Phil dan Dra. Ari Andari, M.S selaku dosen penguji yang telah banyak memberi masukan dan saran untuk skripsi ini.
5. Segenap dosen Jurusan Matematika FMIPA UNIBRAW atas transfer ilmu yang diberikan dan staf Tata Usaha Jurusan Matematika atas segala bantuannya selama penulis menempuh studi.
6. Bapak dan Ibu tersayang yang senantiasa memberikan dukungan, semangat dan berdoa kepadaNya untuk kesuksesan penulis.
7. Kakak tercinta yang senantiasa memberikan motivasi dan semangat kepada penulis.
8. Semua teman-teman Matematika 2005 dan teman-teman MathCom Inc. atas doa, dukungan dan semangatnya.
9. Semua pihak yang telah membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis menyadari adanya kekurangan dalam penulisan skipsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran dari pembaca sangat penulis perlukan untuk perbaikan penulisan ke depan. Penulis mengharapkan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan pembaca pada umumnya.

Malang, 14 April 2009

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR GRAFIK

DAFTAR SIMBOL

Simbol	**Keterangan**
$\in$	elemen dari
$\notin$	bukan elemen dari
$\forall$	untuk setiap
$\Leftrightarrow$	jika dan hanya jika
$\times$	operasi penggabungan himpunan
$\subseteq$	himpunan bagian dari
$\neq$	tidak sama dengan
$\cdot^{c}$	komplemen dari
$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$	barisan x_n
$\mathbb{N}$	himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	himpunan bilangan real
$\mathbb{R}_+$	himpunan bilangan real nonnegatif
$\mathbb{C}$	himpunan bilangan kompleks
$d(\cdot,\cdot)$	metrik
$\Vert\cdot\Vert$	norm
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	*inner product*
Re	real dari
$B_r(x)$	bola terbuka (*open ball*) dengan pusat x dan jari-jari r
$\emptyset$	himpunan kosong
$\bar{\cdot}$	penutup (*closure*) dari
$int(\cdot)$	himpunan titik interior dari
$\cdot'$	himpunan titik limit dari
$\cap$	irisan (interseksi) antara
$\cup$	gabungan (union) antara
$co(\cdot)$	konveks hull dari
$D(\cdot)$	domain dari
$P_o(\cdot)$	koleksi himpunan bagian tidak kosong dari
$R(\cdot)$	daerah hasil (*range*) dari
$F: X \to P_o(X)$	fungsi *set-valued* dari X ke $P_o(X)$
$F^-(\cdot)$	invers bawah (*lower inverse*) F pada
$F^+(\cdot)$	invers atas (upper *inverse*) F pada
$Gr(\cdot)$	grafik dari fungsi
$\square$	pembuktian selesai

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Secara umum fungsi dikelompokan menjadi dua kelompok yaitu fungsi bernilai tunggal (*single-valued function*) dan fungsi bernilai himpunan (*set-valued function*). Fungsi bernilai tunggal adalah fungsi yang memiliki satu nilai untuk setiap titik pada daerah asalnya. Sedangkan fungsi *set-valued* adalah fungsi yang memiliki lebih dari satu nilai untuk setiap titik pada daerah asalnya. Dengan demikian fungsi *set-valued* merupakan perumuman dari fungsi *single-valued.*

Fungsi *set-valued* banyak dibahas oleh para ahli, diantaranya Borges, 1967 memperkenalkan konsep-konsep dasar fungsi *set-valued.* Borwein dan Aubin, 1992 memaparkan analisis fungsi *set-valued* dan penerapannya dalam ilmu aplikasi. Konsep-konsep dasar dan analisis tentang fungsi *set-valued* yang dipaparkan oleh Borges dan Aubin memberikan terobosan baru untuk perkembangan analisis fungsi *set-valued*. Dalam perkembangannya diperkenalkan suatu fungsi *set-valued* yang monoton yang merupakan konsep dasar dari fungsi *set-valued* yang monoton maksimal. Fungsi *set-valued* yang monoton maksimal memberikan peranan penting dalam ilmu analisis dan ilmu aplikasi.

Peranan fungsi *set-valued* yang monoton maksimal dalam ilmu analisis dan ilmu aplikasi diantaranya sebagai konsep dasar untuk masalah pertidaksamaan variasi dan masalah *equilibrium* yang merupakan teori dasar dari teknik optimasi, *linier programming*, transportasi dan ekonomi (Phelps, 1993, Luc, 1996, Hassouni, 2003, Kaplan, 2003 dan Beldiman, 2007). Di samping itu, fungsi *set-valued* yang monoton maksimal juga mempunyai peranan penting dalam analisis solusi persamaan diferensial nonlinier (Apreutesei, 2003).

Fungsi *set-valued* yang monoton maksimal juga banyak dibahas dan dipopulerkan oleh para ahli. Sebagai contoh, Browder, 1967 dan Brezis, 1976 memaparkan perkembangan teorema fungsi *set-valued* yang monoton dan monoton maksimal. Weyer, 1976 membahas tentang karakter domain fungsi *set-valued* yang monoton maksimal. Rockafellar, 1968 mengemukakan kekonveksan domain fungsi *set-valued* yang monoton maksimal. Di samping itu, Rockafellar, 1968 juga memaparkan keterbatasan lokal dari fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di setiap titik interior domainnya. Phelps, 1993 mengemukakan teorema-teorema tentang fungsi *set-valued* yang monoton maksimal. Crouzeix, 2006 mengkonstruksi fungsi *set-valued* yang monoton maksimal dari fungsi *set-valued* yang monoton. Dan Lohne, 2007 membahas karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal.

Berdasarkan uraian di atas fungsi *set-valued* yang monoton maksimal sangat penting untuk dibahas. Untuk mengetahui lebih detil tentang fungsi *set-valued* yang monoton maksimal dibahas karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang Hilbert real.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang Hilbert real.

1.3 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini hanya dibahas karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal pada ruang Hilbert real.

1.4 Tujuan

Tujuan yang akan dicapai dalam penulisan skripsi ini adalah memperoleh karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal.

1.5 Manfaat

Manfaat dari skripsi ini adalah menambah wawasan dan pengetahuan tentang ilmu analisis fungsional, khususnya analisis fungsi *set-valued* yang monoton maksimal.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

Sebagai konsep dasar untuk bab pembahasan nantinya diberikan beberapa definisi berikut:

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1.1 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Misalkan X adalah himpunan objek-objek. Fungsi $d: X \times X \to \mathbb{R}_+$ disebut metrik atau fungsi jarak jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $d(x, y) \geq 0$,
(ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,
(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Definisi 2.1.2 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Himpunan objek-objek yang dilengkapi dengan metrik disebut ruang metrik. Ruang metrik X yang dilengkapi dengan metrik d dinotasikan dengan (X, d).

Contoh 2.1.3 Himpunan $\mathbb{R}^k$ yang dilengkapi dengan metrik $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2}$, di mana untuk setiap $i = 1,2 \cdots, k$, $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ dan $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ adalah ruang metrik.

Bukti: Ambil sembarang $x, y, z \in \mathbb{R}^k$. Akan ditunjukkan himpunan $\mathbb{R}^k$ memenuhi aksioma (i)-(iv) pada Definisi 2.1.1

(i) Karena untuk setiap $i = 1,2 \cdots, k$, $|x_i - y_i|^2 \geq 0$ maka $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2} \geq 0$.

(ii) ($\Longrightarrow$) Misalkan $d(x, y) = 0$. Akan ditunjukkan $x = y$. Karena $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2} = 0$, maka $|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2 = 0$. Sehingga untuk setiap $i = 1,2 \cdots, k$, $x_i = y_i$. Akibatnya $x = y$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x = y$. Akan ditunjukkan $d(x,y) = 0$. Karena $x = y$, maka untuk setiap $i = 1,2 \cdots, k$, $x_i = y_i$. Sehingga $d(x,y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2} = 0$.

(iii) $$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2} \\ &= \sqrt{|y_1 - x_1|^2 + |y_2 - x_2|^2 + \cdots + |y_k - x_k|^2} \\ &= d(y,x). \end{aligned}$$

(iv) $$\begin{aligned} d(x,y) &= \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2 + \cdots + |x_k - y_k|^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_k - z_k + z_k - y_k|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1 - z_1|^2 + |x_2 - z_2|^2 + \cdots + |x_k - z_k|^2} + \\ &\quad \sqrt{|z_1 - y_1|^2 + |z_2 - y_2|^2 + \cdots + |z_k - y_k|^2} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$ □

Definisi 2.1.4 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dalam ruang metrik (X,d) disebut konvergen ke $x \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$.

Contoh 2.1.5 Misalkan $(\mathbb{R}, d)$ adalah ruang metrik dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ adalah barisan yang konvergen ke 1.

Bukti: Tentukan sembarang $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\varepsilon = \frac{1}{N}$. Maka untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\left|1 + \frac{1}{n} - 1\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$. Terbukti bahwa barisan $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ konvergen ke 1 atau $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$. □

Definisi 2.1.6 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dalam ruang metrik (X,d) disebut barisan Cauchy, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq N$, berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Contoh 2.1.7 Misalkan $(\mathbb{R}, d)$ ruang metrik, dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$. Barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b > a$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan Cauchy.

Bukti: Ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b > a$ dan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\varepsilon = \frac{b-a}{N}$, maka untuk setiap $m, n \geq N$, sehingga berlaku

$$|x_m - x_n| = \left|a + \frac{(b-a)}{m} - \left(a + \frac{(b-a)}{n}\right)\right|$$
$$= \left|\frac{(b-a)}{m} - \frac{(b-a)}{n}\right|$$
$$\leq \left|\frac{b-a}{m}\right| + \left|\frac{b-a}{n}\right| < 2\frac{b-a}{N} = 2\varepsilon.$$

Karena nilai ε sembarang, maka untuk setiap $m, n \geq N$, $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$ adalah barisan Cauchy. □

Setiap barisan yang konvergen adalah barisan Cauchy. Hal tersebut tercermin dalam Teorema 2.1.8. Tetapi barisan Cauchy belum tentu barisan konvergen. Hal tersebut ditunjukkan pada Contoh 2.1.9.

Teorema 2.1.8 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Jika barisan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dalam ruang metrik (X, d) konvergen maka barisan tersebut adalah barisan Cauchy.

Bukti: Misalkan (X, d) adalah ruang metrik dan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$. Akan ditunjukkan $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan Cauchy. Karena $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah barisan yang konvergen ke $x \in X$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku $d(x_n, x) < \varepsilon$. Karena ε sembarang, maka untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena (X, d) adalah ruang metrik maka $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) = d(x_m, x) + d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Terbukti bahwa setiap barisan yang konvergen adalah barisan Cauchy. □

Contoh 2.1.9 Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a + \frac{(b-a)}{n}$, di mana $a, b \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $b > a$ adalah barisan yang termuat dalam ruang metrik $(a, b]$. Barisan tersebut adalah barisan Cauchy tetapi tidak konvergen, karena tidak ada $a \in (a, b]$ sedemikian sehingga x_n konvergen ke a.

Definisi 2.1.10 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Ruang metrik (X, d) disebut ruang metrik lengkap (*complete metric space*), jika untuk setiap barisan Cauchy dalam X konvergen.

Contoh 2.1.11 Himpunan $\mathbb{R}^k$ yang dilengkapi dengan metrik $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ adalah ruang metrik lengkap. Karena setiap barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}^k$ konvergen.

2.2 Ruang Vektor

Definisi 2.2.1 (Joy, 2000 dan Anonim[3], 2008). Misalkan X adalah himpunan. X disebut ruang vektor atau ruang linier jika untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar α, β memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $x + y \in X$,
(ii) $\alpha x \in X$,
(iii) $x + y = y + x$,
(iv) $(x + y) + z = x + (y + z)$,
(v) terdapat vektor $0 \in X$, sedemikian sehingga $x + 0 = x$,
(vi) terdapat $-x \in X$, sedemikian sehingga $x + (-x) = 0$,
(vii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
(viii) $1x = x$,
(ix) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ dan
(x) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Contoh 2.2.2 Himpunan $\mathbb{R}^k$ dengan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ adalah ruang vektor. Di samping itu, himpunan $\mathbb{C}^k$ dengan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ juga merupakan ruang vektor.

2.3 Ruang Bernorma dan Ruang Banach

Definisi 2.3.1 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Misalkan X adalah ruang vektor. Fungsi $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}_+$ disebut norm pada X jika untuk setiap $x, y \in X$ dan skalar α memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $\|x\| \geq 0$,
(ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ dan
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definisi 2.3.2 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Ruang vektor yang dilengkapi dengan norm disebut dengan ruang bernorma (*normed space*).

Contoh 2.3.3 Ruang vektor $\mathbb{R}^k$ yang dilengkapi dengan norm $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2}$ adalah ruang bernorma.

Bukti: Ambil sembarang $x \in \mathbb{R}^k$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan aksioma (i)-(iv) pada Definisi 2.3.1 terpenuhi.

(i) Karena untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$, $|x_i|^2 \geq 0$ maka $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2 \geq 0$. Akibatnya
$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2} \geq 0.$$

(ii) ($\Longrightarrow$) Misalkan $\|x\| = 0$. Akan ditunjukkan $x = 0$. Karena $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2} = 0$, maka $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2 = 0$. Karena untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$, $|x_i|^2 \geq 0$, maka untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$, $x_i = 0$. Karena untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$, $x_i = 0$, maka $x = 0$.
($\Longrightarrow$) Misalkan $x = 0$. Akan ditunjukkan $\|x\| = 0$. Karena $x = 0$, maka untuk setiap $i = 1,2,\cdots,k$, $x_i = 0$. Sehingga $\|x\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \cdots + 0^2} = 0$.

(iii)
$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \sqrt{|\alpha x_1|^2 + |\alpha x_2|^2 + \cdots + |\alpha x_k|^2} \\ &= \sqrt{|\alpha|^2(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2)} \\ &= |\alpha|\sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2} = |\alpha|\|x\|.\end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned}\|x + y\| &= \sqrt{|x_1 + y_1|^2 + |x_2 + y_2|^2 + \cdots + |x_k + y_k|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_k|^2} \\ &\quad + \sqrt{|y_1|^2 + |y_2|^2 + \cdots + |y_k|^2} \\ &= \|x\| + \|y\|.\end{aligned}$$
□

Definisi 2.3.4 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Ruang bernorma *X* disebut ruang Banach, jika untuk setiap barisan Cauchy dalam *X* konvergen.

Contoh 2.3.5 Ruang bernorma $\mathbb{R}^k$ pada Contoh 2.3.3 adalah ruang Banach, karena setiap barisan Cauchy dalam $\mathbb{R}^k$ konvergen.

2.4 Ruang Pre-Hilbert dan Ruang Hilbert

Definisi 2.4.1 (Heil, 2006, Kajotoni, 2007 dan Anonim[3], 2008). Misalkan X adalah ruang vektor. Fungsi $\langle\cdot,\cdot\rangle: X \times X \to \mathbb{C}$ disebut *inner product* pada X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ dan skalar α, β memenuhi aksioma-aksioma berikut:

(i) $\langle x, x\rangle \geq 0$,
(ii) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
(iii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$ dan
(v) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

Definisi 2.4.2 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Ruang vektor yang dilengkapi dengan *inner product* disebut ruang *inner product* atau ruang pre-Hilbert.

Contoh 2.4.3 Ruang vektor $\mathbb{C}^n$ yang dilengkapi dengan *inner product* $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ adalah ruang pre-Hilbert.

Bukti: Ambil sembarang $x \in \mathbb{C}^n$ dan skalar $\alpha \in \mathbb{C}$. Akan ditunjukkan aksioma (i)-(iv) pada Definisi 2.4.1 terpenuhi.

(i) Karena untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$ $x_i\overline{x_i} = |x_i|^2 \geq 0$ maka $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} \geq 0$.

(ii) ($\Longrightarrow$) Misalkan $\langle x, x\rangle = 0$. Akan ditunjukkan $x = 0$. Karena $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = 0$ dan untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, $x_i\overline{x_i} \geq 0$ maka untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, $x_i = 0$. Karena untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, $x_i = 0$ maka $x = 0$.
($\Longleftarrow$) Misalkan $x = 0$. Akan ditunjukkan $\langle x, x\rangle = 0$. Karena $x = 0$ maka untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, $x_i = 0$. Sehingga $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i} = \sum_{i=1}^{n} 0\,\overline{0} = 0$.

(iii) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\overline{x_i} y_i} = \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i\overline{x_i}} = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(iv) $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha x_i\overline{y_i} = \alpha\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} = \alpha\langle x, y\rangle$.

(v) $\langle x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\overline{z_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z_i} + y_i\overline{z_i}$
$= \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{z_i} + \sum_{i=1}^{n} y_i\overline{z_i} = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$. □

Lemma 2.4.4 (Heil, 2006, Kajotoni, 2007 dan Anonim[3], 2008). Jika $\langle\cdot,\cdot\rangle$ adalah *inner product* pada X, maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Bukti: Karena $z + \bar{z} = 2Re$ z maka

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle &= \|x\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2Re\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2. \qquad \square\end{aligned}$$

Teorema 2.4.5 (Kajotoni, 2007 dan Anonim[3], 2008). Jika $\langle\cdot,\cdot\rangle$ adalah *inner product* pada X maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|.$$

Bukti: Ambil sembarang $x, w \in X$. Karena $\langle\cdot,\cdot\rangle$ adalah *inner inner product* pada X, maka $\langle x-w, x-w\rangle \ge 0$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\langle x-w, x-w\rangle &= \langle x, x-w\rangle - \langle w, x-w\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - \langle x,w\rangle - \langle w,x\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= \langle x,x\rangle - 2Re\,\langle x,w\rangle + \langle w,w\rangle \ge 0.\end{aligned}$$

Dengan demikian $\langle x,x\rangle \ge 2Re\,\langle x,w\rangle - \langle w,w\rangle$. Misalkan $y \neq 0$ sedemikian sehingga $w = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y$, maka

$$\begin{aligned}\langle x,x\rangle &\ge 2Re\ \langle x, \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\rangle - \langle \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y, \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\rangle \\ &= 2Re\left(\overline{\tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}}\langle x,y\rangle\right) - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\langle y, \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle} y\rangle \\ &= 2Re\left(\overline{\tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}}\langle x,y\rangle\right) - \tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}\overline{\tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}}\langle y,y\rangle \\ &= 2Re\left(\overline{\tfrac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}}\langle x,y\rangle\right) - \left(\tfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle^2}\right)\langle y,y\rangle \\ &= 2\tfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} - \tfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle} = \tfrac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}.\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $\langle x,x\rangle \ge \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle}$, sehingga

$$|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\|y\|. \qquad \square$$

Teorema 2.4.6 (Kajotoni 2007). Jika $\langle\cdot,\cdot\rangle$ adalah *inner product* pada X maka untuk setiap $x, y \in X$ berlaku

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Bukti:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle + \langle x, x-y\rangle - \langle y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &\quad + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2(\langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \qquad \square\end{aligned}$$

Lemma 2.4.7 (Anonim[3], 2008). Setiap ruang pre-Hilbert adalah ruang bernorma, di mana norm pada ruang bernormanya didefinisikan

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}.$$

Bukti: Misalkan X adalah ruang pre-Hilbert. Akan ditunjukkan X adalah ruang bernorma. Ambil sembarang $x, y \in X$ dan sembarang skalar α.

(i) Berdasakan definisi, $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. Karena X adalah ruang pre-Hilbert maka $\langle x, x\rangle \geq 0$. Sehingga $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \geq 0$.

(ii) ($\Longrightarrow$) Misalkan $\|x\| = 0$. Akan ditunjukkan $x = 0$. Karena $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = 0$, maka $\langle x, x\rangle = 0$. Karena X adalah ruang pre-Hilbert dan $\langle x, x\rangle = 0$ maka $x = 0$.

($\Longleftarrow$) Misalkan $x = 0$. Akan ditunjukkan $\|x\| = 0$. Karena $x = 0$ maka $\|x\| = \|0\| = \langle 0,0\rangle^{\frac{1}{2}} = 0$. Dengan demikian, jika $x = 0$ maka $\|x\| = 0$.

(iii) Berdasarkan definisi

$$\begin{aligned}\|\alpha x\| &= \langle \alpha x, \alpha x\rangle^{\frac{1}{2}} = (\alpha\langle x, \alpha x\rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\alpha\overline{\langle \alpha x, x\rangle}\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= \left(\alpha\overline{\alpha\langle x, x\rangle}\right)^{\frac{1}{2}} = (\alpha\bar{\alpha}\langle x, x\rangle)^{\frac{1}{2}}\\ &= (\alpha\bar{\alpha})^{\frac{1}{2}}\langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} = |\alpha|\|x\|.\end{aligned}$$

(iv) Berdasarkan definisi

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle\\ &= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle\\ &= \|x\|^2 + 2Re\langle x, y\rangle + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2\\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2\\ &= (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

sehingga diperoleh $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Karena aksioma (i)-(iv) pada Definisi 2.3.1 terpenuhi maka terbukti bahwa X adalah ruang berorma. □

Definisi 2.4.8 (Heil, 2006 dan Anonim[3], 2008). Ruang pre-Hilbert X disebut ruang Hilbert jika untuk setiap barisan Cauchy dalam X konvergen.

Contoh 2.4.9 $\mathbb{C}^n$ yang dilengkapi dengan *inner product* $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ adalah ruang Hilbert. Karena $\mathbb{C}^n$ adalah ruang *inner product* dan setiap barisan Cauchy dalam $\mathbb{C}^n$ konvergen.

2.5 Himpunan Tertutup, Terbatas dan Kompak

Definisi 2.5.1 (Heil, 2006 dan Done, 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma.

(i) Bola terbuka (*open ball*) pada X dengan pusat x dan jari-jari $r > 0$ adalah himpunan

$$B_r(x) = \{y \in X: \|x - y\| < r\}.$$

(ii) Himpunan $A \subseteq X$ disebut terbuka jika untuk setiap $x \in A$, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$.

(iii) Himpunan $F \subseteq X$ disebut tertutup jika F^c terbuka.

Definisi 2.5.2 (Heil, 2006, Done, 2008 dan Anonim[2], 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma.

(i) Titik $a \in X$ disebut titik interior dari $A \subseteq X$, jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$. Himpunan semua titik interior dari A dinotasikan dengan $int(A)$.

(ii) Titik x disebut titik limit dari $A \subseteq X$, jika untuk setiap $r > 0$, $A \cap (B_r(x) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Himpunan semua titik limit dari A dinotasikan dengan A'.

(iii) *Closure* dari A adalah union dari A dan titik limitnya, atau $\bar{A} = A \cup A'$. *Closure* dari A dinotasikan dengan $\bar{A}$.

(iv) Himpunan A disebut *dense* jika $\bar{A} = X$.

Lemma 2.5.3 Himpunan A terbuka jika dan hanya jika untuk setiap titik dalam A adalah titik interior.

Bukti: ($\Longrightarrow$) Misalkan himpunan A terbuka. Akan ditunjukkan setiap titik dalam A adalah titik interior. Ambil sembarang $x \in A$. Akan ditunjukkan terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$. Karena himpunan A terbuka maka terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq A$. Dengan demikian, x adalah titik interior dari A. Karena x adalah sembarang titik dalam A, maka setiap titik dalam A adalah titik interior.

($\Leftarrow$) Misalkan semua titik pada A adalah titik interior. Akan ditunjukkan himpunan A terbuka, yaitu $int(A) = A$. Karena $int(A) = \{x \in A: \ x$ titik interior$\}$, maka $int(A) \subset A$. Langkah selanjutnya akan ditunjukkan $int(A) \supset A$. Karena untuk setiap $x \in A$ adalah titik interior dari A maka $A \subset int(A) = \{x \in A: x$ titik interior$\}$. Dengan demikian $int(A) = A$. Terbukti bahwa himpunan A terbuka. □

Lemma 2.5.4 (Heil, 2006 dan Done, 2008). $\bar{A}$ adalah himpunan tertutup terkecil yang memuat A. Dengan kata lain $\bar{A} = \bigcap\{F \subset X: F \supseteq A$ dan F tertutup$\}$.

Bukti: Langkah pertama akan ditunjukkan bahwa himpunan $\bar{A}$ tertutup. Menurut definisi, himpunan $\bar{A}$ tertutup jika himpunan $\bar{A}^c$ terbuka. Selanjutnya akan ditunjukkan $\bar{A}^c$ terbuka. Jika $x \in \bar{A}^c$ maka $x \notin \bar{A}$. Karena $\bar{A}$ memuat semua titik limit dari A dan $x \notin \bar{A}$ maka x bukan titik limit untuk A. Sehingga terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq \bar{A}^c$ dan $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Karena $B_r(x)$ tidak memuat titik limit A maka $B_r(x) \cap \bar{A} = \emptyset$. Dengan demikian himpunan $\bar{A}^c$ terbuka.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\bar{A} = \bigcap\{F \subset X: F \supseteq A$ dan F tertutup$\}$. Misalkan F adalah himpunan tertutup dan $F \supseteq A$. Karena himpunan F tertutup maka menurut definisi himpunan F^c terbuka. Misalkan $x \in F^c$, maka menurut definisi terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq F^c$. Karena himpunan F^c terbuka dan $x \in F^c$, maka $x \notin \bar{A}$ dan $B_r(x) \cap \bar{A} = \emptyset$. Sehingga x bukan titik limit dari A. Karena $A \subseteq F$ maka $F^c \subseteq A^c$ dan $F^c \subseteq \bar{A}^c$, sehingga $\bar{A} \subseteq F$. Terbukti bahwa $\bar{A} = \bigcap\{F \subseteq X: F \supseteq A$ dan F tertutup$\}$. □

Lemma 2.5.5 (Heil, 2006). Misalkan X adalah ruang bernorma dan $F \subseteq X$. Himpunan F tertutup jika dan hanya jika F memuat semua titik limitnya.

Bukti: ($\Rightarrow$) Jika himpunan F tertutup, maka himpunan F memuat semua titik limitnya. Misalkan himpunan F tertutup. Andaikan ada titik limit dari F yang tidak termuat dalam F, yaitu terdapat barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ sedemikian sehingga x_n konvergen ke x dan $x \in F^c$. Akan ditunjukkan kontradiksi dengan pernyataan. Karena himpunan

F tertutup maka himpunan F^c terbuka, sehingga terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq F^c$. Karena barisan x_n konvergen ke x maka terdapat $x_n \in B_r(x)$, sehingga $x_n \in F^c$. Karena barisan $x_n \in F^c$ dan $x \in F^c$, maka himpunan F^c tertutup. Hal tersebut kontradiksi dengan pernyataan. Sehingga pengandaian harus diingkari.

($\Leftarrow$) Jika himpunan F memuat semua titik limitnya, maka himpunan F tertutup. Jika $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ sedemikian sehingga barisan x_n konvergen ke x maka $x \in F$. Misalkan $y \in F^c$ sedemikian sehingga untuk suatu $r > 0$, $B_r(y) \cap \{x\} = \emptyset$. Karena y bukan titik limit F maka untuk setiap $y \in F^c$, terdapat terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subseteq F^c$. Dengan demikian, himpunan F^c terbuka. Sehingga himpunan F tertutup. □

Contoh 2.5.6 Misalkan X adalah ruang bernorma dan $x \in X$. Setiap $B_r(x) \subset X$, dengan $r > 0$ adalah himpunan terbuka. Di samping itu, dan $\overline{B_r(x)} = \{y \in X: \|x - y\| \leq r\}$ adalah himpunan tertutup.

Definisi 2.5.7 (Nachbar, 2007 dan Done, 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma dan $C \subseteq X$.

(i) $\mathcal{A}$ disebut selimut terbuka (*open cover*) untuk C jika untuk setiap $A \in \mathcal{A}$, himpunan A terbuka dan
$$C \subseteq \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$
(ii) Misalkan $\mathcal{A}$ adalah selimut terbuka untuk C. $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ disebut subselimut (*subcover*) dari $\mathcal{A}$ untuk C jika untuk setiap $B \in \mathcal{B}$, himpunan B terbuka dan
$$C \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}} B.$$

Definisi 2.5.8 (Heil, 2006, Done, 2008 dan Anonim[2], 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma dan $C \subseteq X$.

(i) Himpunan C disebut kompak (*compact*), jika untuk setiap selimut terbuka untuk C memuat subselimut berhingga.
(ii) Himpunan C disebut terbatas (*bounded*), jika terdapat $M < \infty$ dan terdapat $p \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\|x - p\| < M$.

Teorema 2.5.9 (Done, 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma dan himpunan C kompak. Jika himpunan F tertutup dan $F \subseteq C$, maka himpunan F kompak.

Bukti: Misalkan $\mathcal{A}$ adalah selimut terbuka untuk F. Berdasarkan definisi,

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Akan ditunjukkan selimut terbuka $\mathcal{A}$ memuat subselimut berhingga. Karena himpunan F tertutup maka himpunan F^c terbuka. Sehingga $\{F^c\} \cup \mathcal{A}$ adalah selimut terbuka untuk C.

Dengan demikian berlaku

$$C \subseteq F^c \cup \left(\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A\right).$$

Karena himpunan C kompak, maka himpunan C memuat subselimut berhingga. Jika $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ merupakan subselimut berhingga dari $\mathcal{A}$ untuk C, maka

$$C \subseteq F^c \cup \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B\right).$$

Dengan demikian, $F \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ atau selimut terbuka $\mathcal{A}$ memuat subselimut berhingga yang menyelimuti F. □

Teorema 2.5.10 (Heil, 2006 dan Anonim[2], 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma dan $C \subseteq X$. Pernyataan berikut ekivalen:

(i) C kompak,

(ii) C terbatas dan tertutup.

Bukti: (i) $\Longrightarrow$ (ii) Misalkan himpunan C kompak. Akan ditunjukkan C adalah himpunan yang terbatas dan tertutup. Karena himpunan C kompak maka setiap selimut terbuka untuk C memuat subselimut berhingga. Misalkan $\mathcal{A} = \{B_r(x) : x \in C, r > 0\}$ adalah sembarang selimut terbuka untuk C. Akan ditunjukkan terdapat $M < \infty$ dan terdapat $p \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\|x - p\| < M$. Karena himpunan C kompak, maka terdapat subselimut berhingga dari $\mathcal{A}$ untuk C, misalkan $\mathcal{B} = \{B_{r_i}(x_i) : x_i \in C, i = 1,2,\cdots,n\}$. Karena $\mathcal{B}$ adalah subselimut berhingga dari $\mathcal{A}$ untuk C, maka dapat dipilih x_i dan r_i sedemikian sehingga

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i).$$

Berdasarkan Definisi 2.5.1 (i), untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, $B_{r_i}(x_i) = \{y \in X : \|x_i - y\| < r_i\}$. Dengan demikian, dapat dipilih $p \in C$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\|x - p\| < \sum_{i=1}^{n} r_i$. Karena i berhingga, maka terdapat $M < \infty$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} r_i = M$. Akibatnya, untuk sembarang $x \in C$, $\|x - p\| < M$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa himpunan C tertutup. Menunjukkan bahwa himpunan C tertutup, cukup ditunjukkan bahwa C^c adalah himpunan terbuka. Karena himpunan C kompak maka untuk setiap selimut terbuka untuk C memuat subselimut berhingga. Misalkan untuk setiap selimut terbuka $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \{B_{r_i}(x_i): x_i \in C,$ $i = 1,2,\cdots,n\}$ adalah subselimut berhingga dari $\mathcal{A}$ untuk C. Misalkan untuk sembarang titik $y \in C^c$, dipilih $S > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, x tidak termuat dalam $B_s(y)$. Karena $\mathcal{B}$ adalah subselimut berhingga dari $\mathcal{A}$ untuk C maka $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$, di mana $i = 1,2,\cdots,n$. Selanjutnya, $\mathcal{B} \cup \{B_s(y)\}$ adalah subselimut berhingga dari C sedemikian sehingga $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i) \cup B_s(y)$. Dengan demikian, y adalah titik interior dari C^c. Karena y sembarang maka semua titik pada C^c adalah titik interior. Sehingga C^c adalah himpunan terbuka.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Misalkan himpunan C terbatas dan tertutup. Akan ditunjukkan himpunan C kompak. Karena himpunan C terbatas, maka terdapat $M < \infty$ dan terdapat $p \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\|x - p\| < M$. Tentukan sembarang selimut terbuka $\mathcal{A}$, yaitu $\mathcal{A} = \{B_r(x): x \in C, r > 0\}$ sedemikian sehingga

$$C \subseteq \bigcup_{B_r(x) \in \mathcal{A}} B_r(x).$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan selimut terbuka $\mathcal{A}$ memuat subselimut berhingga. Karena himpunan C tertutup, maka himpunan C^C terbuka. Sehingga $C \subseteq \bigcup_{B_r(x) \in \mathcal{A}} B_r(x) \cup C^C$. Akibatnya, $\mathcal{A} \cup \{C^C\}$ adalah selimut terbuka untuk C. Berdasarkan Lemma 2.5.5, himpunan C memuat semua titik limitnya. Karena himpunan C terbatas dan memuat semua titik limitnya, maka dapat dipilih titik behingga dalam C sedemikian sehingga $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_i}(x_i)$, di mana $i = 1,2,\cdots,n$. Dengan demikian, $\mathcal{B} = \{B_{r_i}(x_i): x_i \in C,$ $i = 1,2,\cdots,n\}$ adalah subselimut berhingga dari $\mathcal{A}$ untuk C. □

Akibat 2.5.11 Misalkan X adalah ruang bernorma dan C kompak. Jika F tertutup maka $F \cap C$ kompak.

Bukti: Berdasarkan Teorema 2.5.10, jika himpunan C kompak maka himpunan C tertutup dan terbatas. Karena himpunan F tertutup dan irisan antar himpunan tertutup adalah tertutup maka $F \cap C$ adalah himpunan tertutup. Karena $F \cap C$ subset C maka menurut Teorema 2.5.9, $F \cap C$ adalah himpunan kompak. □

Contoh 2.5.12 Misalkan X adalah ruang bernorma. Himpunan $B_r(0) \subset X$, di mana $r < \infty$ adalah himpunan terbatas. Selanjutnya, himpunan $\overline{B_r(0)} = \{y \in X: \|y\| \leq r\}$ adalah himpunan kompak.

2.6 Himpunan Konveks

Definisi 2.6.1 (Schutt, 2006, Venkatasubramanian, 2007 dan Anonim[1], 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma. Himpunan $A \subseteq X$ disebut konveks (*convex*) jika untuk setiap $p, q \in A$ dan setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku $\lambda p + (1 - \lambda)q \in A$.

Lemma 2.6.2 (Schutt, 2006, Venkatasubramanian, 2007 dan Anonim[1], 2008). Himpunan $A \subseteq X$ konveks jika dan hanya jika untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$, $\lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in A$.

Bukti: $(\Longrightarrow)$ Misalkan himpunan A konveks. Akan ditunjukkan untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$, $\lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in A$. Jika $n = 1$ dan $p_1 \in A$, maka $\lambda_1 = 1$ dan $p_1 \lambda_1 = p_1 \in A$. Misalkan untuk $n = k$, pernyataan tersebut benar, yaitu untuk setiap $i = 1,2, \cdots, k$, $\lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in A$. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $i = 1,2, \cdots, k, k+1$, $\lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p_i \in A$ adalah pernyataan yang benar. Dengan demikian,

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i + \lambda_{i+1} p_{i+1}.$$

Karena $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, maka $\lambda_{i+1} = 1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$. Sehingga

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i + (1 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i) p_{i+1}$$

Karena $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$, maka $1 - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$. Karena $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i \in A$ maka $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i p_i \in A$.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$, $\lambda_i \geq 0$ sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ dan $p_i \in A$ berlaku $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i \in A$ terpenuhi. Akan ditunjukkan himpunan A konveks. Tentukan sembarang $0 \leq \lambda \leq 1$. Pilih $\lambda_1 = \lambda$ dan $\lambda_2 = (1 - \lambda)$, sehingga $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1$ terpenuhi. Selanjutnya tentukan sembarang $p_1, p_2 \in A$ sehingga $\sum_{i=1}^{2} \lambda_i p_i \in A$. Karena λ sembarang, maka terbukti bahwa himpunan A konveks. □

Contoh 2.6.3 Misalkan X adalah ruang bernorma. Untuk setiap $r > 0$ dan setiap $x \in X$, himpunan $B_r(a)$ adalah himpunan konveks. Di samping itu, himpunan $\overline{B_r(a)}$ adalah himpunan konveks. Dengan demikian, himpunan konveks tidak harus himpunan terbuka atau tertutup. Untuk suatu $u, u_0 \in X$, himpuan $\{\alpha u + u_0 \in X : \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ adalah himpunan konveks dan tidak terbatas. Dengan demikian, himpunan konveks tidak harus himpunan yang terbatas. Sehingga himpunan konveks tidak harus himpunan kompak.

Definisi 2.6.4 (Schutt, 2006 dan Anonim[1], 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma.

(i) Separuh garis (*half-line*) atau *ray* adalah himpunan
$$\{x \in X : x = \alpha u, \alpha \geq 0\},$$
untuk suatu $u \neq 0 \in X$. Jika x_o adalah titik yang dilalui separuh garis, maka separuh garis yang melalui x_o dengan arah u adalah himpunan
$$\{x \in X : x = \alpha u + x_o, \alpha \geq 0\},$$
untuk suatu $u \neq 0 \in X$.

(ii) *Hyperplane* adalah himpunan
$$\{x \in X : \langle u, x \rangle = 0\},$$
untuk suatu $u \neq 0 \in X$. Jika x_o merupakan titik dalam *hyperplane,* maka *hyperplane* yang melalui x_o dengan arah u adalah himpunan
$$\{x \in X : \langle u, x - x_o \rangle = 0\},$$
untuk suatu $u \neq 0 \in X$.

Teorema 2.6.5 (Freund, 2004 dan Nachbar, 2008). Jika himpunan C tidak kosong dan konveks serta $\bar{x}$ adalah titik batas C, maka terdapat *supporting hyperplane* pada C di $\bar{x}$, yaitu terdapat $u \neq 0 \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$ berlaku
$$\langle u, x \rangle \leq \langle u, \bar{x} \rangle.$$

Bukti: Misalkan $\bar{x}$ adalah titik batas C dan barisan $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{C}^{\,c}$, sedemikian sehingga y_n konvergen ke $\bar{x}$. Karena himpunan C konveks maka himpunan $\bar{C}$ konveks dan tertutup. Karena himpunan $\bar{C}$ konveks maka terdapat $u_n \neq 0 \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in C$, $\langle u_n, x \rangle \leq 0$ dan $\langle u_n, y_n \rangle > 0$. Misalkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. Jika barisan y_n konvergen ke $\bar{x}$ dan dipilih subbarisan dalam $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sedemikian sehingga subbarisan tersebut konvergen ke suatu titik $\bar{u} \in X$. Maka untuk setiap $x \in C$, $\langle u_n, x\rangle \leq 0 < \langle u_n, y_n\rangle$ atau $\langle u_n, x\rangle \leq \langle u_n, y_n\rangle$. Selanjutnya, jika n menuju ∞, maka untuk setiap $x \in C$, $\langle \bar{u}, x\rangle \leq \langle \bar{u}, \bar{x}\rangle$. □

Definisi 2.6.6 (Freund, 2004, Nachbar, 2008 dan Anonim[1], 2008). Misalkan X adalah ruang bernorma dan $A \subseteq X$. Konveks hull A adalah himpunan konveks terkecil yang memuat A. Konveks hull A dinotasikan dengan $co(A)$.

Lemma 2.6.7 Misalkan X adalah ruang bernorma. Irisan semua himpunan konveks subset X adalah himpunan konveks.

Bukti: Misalkan $\mathcal{C} = \{A_i \subset X\colon \text{untuk } i \in \mathbb{N}, A_i \text{ himpunan konveks}\}$. Akan ditunjukkan $I = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ adalah himpunan konveks. Ambil sembarang $p, q \in I$ dan sembarang $0 \leq \lambda \leq 1$. Akan ditunjukkan $\lambda p + (1-\lambda)q \in I$. Karena $p, q \in I$ dan untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $I \subset A_i$ maka setiap $i \in \mathbb{N}$, $p, q \in A_i$. Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, A_i konveks maka untuk sembarang $0 \leq \lambda \leq 1$, berlaku $\lambda p + (1-\lambda)q \in A_i$. Karena untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, $\lambda p + (1-\lambda)q \in A_i$ maka $\lambda p + (1-\lambda)q \in I$. □

Lemma 2.6.8 Misalkan $A \subset X$. Himpunan $co(A)$ adalah irisan semua himpunan konveks subset X yang memuat A.

Bukti: Misalkan $co(A)$ adalah konveks hull A. Didefinisikan koleksi semua himpunan konveks subset X yang memuat A, yaitu himpunan

$$\mathcal{C} = \{C_A \subset X\colon C_A \text{ adalah himpunan konveks yang memuat } A\}.$$

Misalkan $I = \bigcap_{C_A \in \mathcal{C}} C_A$. Akan ditunjukkan bahwa $I = co(A)$, yaitu $I \subset co(A)$ dan $co(A) \subset I$. Karena himpunan $co(A)$ adalah himpunan konveks yang memuat A, maka $I \subset co(A)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $co(A) \subset I$. Karena himpunan $co(A)$ adalah himpunan konveks terkecil yang memuat A maka untuk setiap $C_A \in \mathcal{C}$, $co(A) \subset C_A$. Karena untuk setiap $C_A \in \mathcal{C}$, himpunan C_A konveks, maka menurut Lemma 2.6.7, himpunan I konveks. Karena untuk setiap $C_A \in \mathcal{C}$, $co(A) \subset C_A$ maka $co(A) \subset I$. Terbukti bahwa $I = co(A)$. □

Contoh 2.6.9 Jika $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$, maka $co(A) = (0,1]$. Selanjutnya, jika $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, maka $co(A) = [0,1]$.

2.7 Fungsi *Set-valued*

Definisi 2.7.1. (Minty, 1961, Borges, 1976 dan Rockafellar, 1968). Misalkan X adalah ruang Hilbert dan $P_o(X) = \{A \subset X : A \neq \emptyset\}$. $F: X \to P_o(X)$ disebut *set-valued* (fungsi bernilai himpunan) pada X.

Misalkan $F: X \to P_o(X)$ adalah *set-valued*. Domain *set-valued* F adalah himpunan $D(F) = \{x \in X : F(x) \in P_o(X)\}$ dan jangkauan (*range*) *set-valued* F adalah himpunan

$$R(F) = \bigcup_{x \in D(F)} F(x).$$

di mana $F(x) = A \in P_o(X)$ atau $F(x) = A \subset X$ (Minty, 1961, Borges, 1976, Rockafellar, 1968, Phelps, 1993, dan Kun, 1997).

Contoh 2.7.2 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $D(F) = [-1,1] \subset \mathbb{R}$. Fungsi $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh

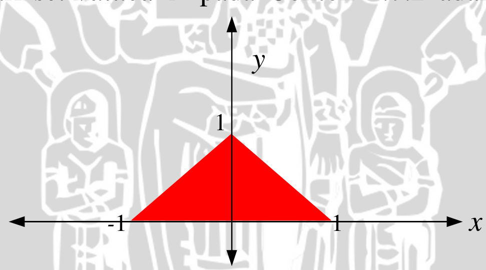
$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, x = -1 \text{ dan } x = 1 \\ [0, 1 - |x|], -1 < x < 1 \end{cases}$$

adalah fungsi *set-valued*.

Definisi 2.7.3 (Borges, 1976 dan Phelps, 1993). Misalkan $F: D(F) \to P_o(X)$ fungsi *set-valued*. Grafik *set-valued* F adalah himpunan

$$Gr(F) = \{(x, y) \in X \times X : y \in F(x)\}.$$

Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.2 adalah sebagai berikut.



Grafik 2.7.1 Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.2

Definisi 2.7.4 (Borges, 1976 dan Park, 1991). Misalkan $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ adalah *set-valued* dan $B \subset X$. Invers atas (*upper inverse*) F pada B adalah himpunan

$$F^+(B) = \{x \in X: F(x) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Invers bawah (*lower inverse*) F pada B adalah himpunan

$$F^-(B) = \{x \in X: B \subset F(x)\}.$$

Definisi 2.7.5 *Set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ disebut tertutup dalam X, jika untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ tertutup.

Lemma 2.7.6 *Set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ disebut tertutup dalam X, jika dan hanya jika $Gr(F)$ tertutup dalam $X \times X$.

Bukti: $(\Longrightarrow)$ Misalkan $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F(x)$ sedemikian sehingga y_n konvergen ke y. Karena *set-valued* F tertutup dalam X maka $y \in F(x)$. Ambil sembarang barisan $\{(x, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Gr(F)$ sedemikian sehingga (x, y_n) konvergen ke (x, y). Karena $y \in F(x)$ dan (x, y_n) konvergen ke (x, y) maka $(x, y) \in Gr(F)$. Terbukti bahwa grafik $Gr(F)$ tertutup.

$(\Longleftarrow)$ Misalkan $\{(x, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Gr(F)$ sedemikian sehingga (x, y_n) konvergen ke (x, y). Karena himpunan $Gr(F)$ tertutup, maka $(x, y) \in Gr(F)$. Dengan demikian $y \in F(x)$. Terbukti bahwa *set-valued* F tertutup. □

Misalkan X adalah ruang Hilbert real dengan *inner-product* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ dan $D(F) \subset X$. Didefinisikan *set-valued* yang monoton sebagai berikut.

Definisi 2.7.7 (Rockafellar, 1968, Kartsatos, 1997 dan Borwein, 2005). *Set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ disebut monoton jika untuk setiap $x, y \in D(F)$ dan setiap $u \in F(x), v \in F(y)$ berlaku

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0.$$

Contoh 2.7.8 Misalkan $X = \mathbb{R}$ dan $D(F) = \mathbb{R}$. *Inner produt* pada $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\langle x, y\rangle = xy$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $F: \mathbb{R} \to P_o(\mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh

$$F(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0 \\ \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], & x = 0, \\ \{1\}, & x > 0 \end{cases}$$

adalah *set-valued* yang monoton.

Bukti: Ambil sembarang $x \in (-\infty, 0)$, $y \in (0, \infty)$ dan sembarang $u \in F(x)$, $v \in F(y)$. Akan ditunjukkan $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi, $F(x) = \{-1\}$ dan $F(y) = \{1\}$, sehingga $u = -1 \in F(x)$ dan $v = 1 \in F(y)$. Dengan demikian

$$\langle u - v, x - y\rangle = \langle -1 - 1, x - y\rangle = \langle -2, x - y\rangle.$$

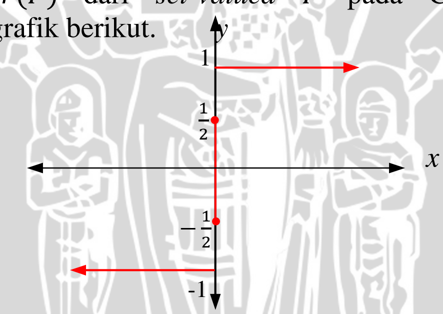
Karena $x < y$ maka $\langle -2, x - y\rangle > 0$.

Misalkan $x = 0$ dan $y \in (0, \infty)$. Akan ditunjukkan $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi, $F(x) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dan $F(y) = \{1\}$. Ambil sembarang $u \in F(x) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dan $v = 1 \in F(y)$. Karena $u < v$ dan $x < y$ maka $\langle u - v, x - y\rangle > 0$.

Misalkan $x = 0$ dan $y \in (-\infty, 0)$. Berdasarkan definisi, $F(x) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dan $F(y) = \{-1\}$. Ambil sembarang $u \in F(x) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ dan $v = 1 \in F(y)$. Karena $v < u$ dan $y < x$ maka $\langle u - v, x - y\rangle > 0$.

Misalkan x, y pada $(-\infty, 0)$ atau $(0, \infty)$. Karena *set-valued* F bernilai konstan pada $(-\infty, 0)$ atau $(0, \infty)$ maka $\langle u - v, x - y\rangle = 0$. Terbukti bahwa *set-valued* F monoton. □

Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.8 ditunjukkan oleh grafik berikut.



Grafik 2.7.2 Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.8

Contoh 2.7.9 Misalkan $X = \mathbb{R}$, $D(F) = [-1,1]$ dan *inner produt* pada $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\langle x, y\rangle = xy$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ yang didefinisikan oleh

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & x = -1 \text{ dan } x = 1 \\ [-1 + |x|, 1 - |x|], & -1 < x < 1 \end{cases}$$

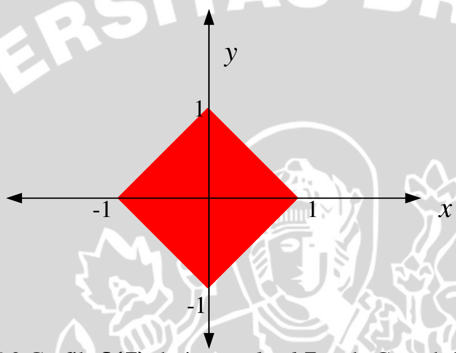
adalah *set-valued* yang tidak monoton.

Bukti: Membuktikan bahwa *set-valued* F tidak monoton cukup dibuktikan terdapat $x, y \in D(F)$ dan $u \in F(x), v \in F(y)$ sedemikian sehingga $\langle u - v, x - y\rangle < 0$. Pilih $x = -\frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{2}$. Sehingga $F\left(-\frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Pilih $u = \frac{1}{2} \in F\left(-\frac{1}{2}\right)$ dan $v = -\frac{1}{2} \in F\left(\frac{1}{2}\right)$ sehingga

$$\langle u - v, x - y\rangle = \left\langle \tfrac{1}{2} - \left(-\tfrac{1}{2}\right), -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right\rangle = \langle -1,1\rangle = -1 < 0.$$

Terbukti bahwa *set-valued* F tidak monoton. □

Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.9 adalah sebagai berikut.



Grafik 2.7.3 Grafik $G(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.9.

Jika $D(F) \subset \mathbb{R}$ dan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ monoton maka F adalah fungsi yang monoton naik, karena untuk setiap $x, y \in D(F)$ sedemikian sehingga $x \le y$, dan setiap $u \in F(x)$, $v \in F(y)$ berlaku $u \le v$. Selanjutnya, *set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ adalah fungsi yang monoton turun, jika untuk setiap untuk setiap $x, y \in D(F)$ sedemikian sehingga $x \le y$, dan setiap $u \in F(x)$, $v \in F(y)$ berlaku $u \ge v$. Dengan kata lain, *set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ monoton turun jika untuk setiap $x, y \in D(F)$ dan setiap $u \in F(x)$, $v \in F(y)$ berlaku

$$\langle u - v, x - y\rangle \le 0$$

(John, 1997).

Misalkan fungsi *single-valued* $F: D(F) \to \mathbb{R}$ konveks (konkav), yaitu untuk setiap $x, y \in D(F)$ dan setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq (\geq)\, \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

(Popa, 2003) adalah fungsi yang tidak monoton. Karena terdapat $x, y \in D(F)$ dan terdapat $u \in F(x)$, $v \in F(y)$ sedemikian sehingga $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$ tidak dipenuhi. Selanjutnya, *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ disebut konveks jika untuk setiap $x, y \in D(F)$ dan setiap $0 \leq \lambda \leq 1$ berlaku

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \supseteq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$$

(Popa, 2003) adalah *set-valued* yang tidak monoton.

Definisi 2.7.10 (Kartsatos, 1997 dan Borwein, 2005). Misalkan $F: X \to P_o(X)$ fungsi *set-valued*. Grafik $Gr(F)$ monoton jika *set-valued* F monoton.

Definisi 2.7.11 Misalkan $D \subset X$ dan $F, G: D \to P_o(X)$ fungsi *set-valued*. *Set-valued* F disebut relatif sama dengan *set-valued* G (*set-valued* G relatif sama dengan *set-valued* F) pada D, jika

$$Gr(F) \subset Gr(G) \text{ atau } Gr(F) \supset Gr(G).$$

Definisi 2.7.12 (Phelps, 1993 dan Borwein, 2005). *Set-valued* F yang monoton disebut monoton maksimal (*maximal monotone*), jika F adalah *set-valued* yang maksimal pada keluarga *set-valued* yang monoton.

Misalkan $\mathcal{F} = \{G: G$ *set-valued* yang monoton dan relatif sama pada $D\}$. *Set-valued* F disebut monoton maksimal, jika untuk setiap $G \in \mathcal{F}$, $Gr(G) \subset Gr(F)$.

Definisi 2.7.13 (Kartsatos, 1997, Phelps, 1993 dan Borwein, 2005). Misalkan $F: D(F) \to P_o(X)$ adalah *set-valued*. Grafik $Gr(F)$ disebut monoton maksimal jika

$$Gr(F) = \bigcup_{G \in \mathcal{F}} Gr(G).$$

Berdasarkan Definisi 2.7.10, grafik $Gr(F)$ monoton maksimal jika *set-valued* F monoton maksimal.

Contoh 2.7.14 Misalkan *inner produt* pada $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\langle x, y\rangle = xy$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ dengan $D(F) = [-1,1]$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$F(x) = \begin{cases} [1, \infty), & x = 1 \\ \{x^3\}, -1 < x < 1 \\ (-\infty, -1], x = -1 \end{cases}$$

adalah *set-valued* yang monoton maksimal.

Bukti: Langkah pertama akan ditunjukkan *set-valued* F monoton. Ambil sembarang $y \in (-1,1)$, $x = 1$ dan sembarang $u \in F(x)$, $v \in F(y)$. Akan ditunjukkan $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi, $F(x) = [1, \infty)$ dan $F(y) = \{y^3\}$, maka $u \in F(x) = [1, \infty)$ dan $v \in F(y) = \{y^3\}$. Karena $v < u$ dan $y < x$ maka $\langle u - v, x - y\rangle > 0$.

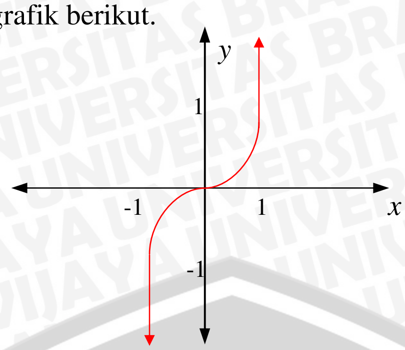
Misalkan $x = 1$ dan $y = -1$. Akan ditunjukkan $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Berdasarkan definisi, $F(x) = [1, \infty)$ dan $F(y) = (-\infty, -1]$. Ambil sembarang $u \in F(x) = [1, \infty)$ dan $v \in F(y) = (-\infty, -1]$. Karena $v < u$ dan $y < x$ maka $\langle u - v, x - y\rangle > 0$.

Misalkan $x = -1$ dan $y \in (-1,1)$. Berdasarkan definisi, $F(x) = [1, \infty)$ dan $F(y) = \{y^3\}$. Ambil sembarang $u \in F(x) = (-\infty, -1]$ dan $v \in F(y) = \{y^3\}$. Karena $u < v$ dan $x < y$ maka $\langle u - v, x - y\rangle > 0$.

Jika $x = y = 1$ atau $x = y = -1$ maka $\langle u - v, x - y\rangle = 0$. Misalkan $x, y \in (-1,1)$. Jika $x < y$ maka $u < v$. Sehingga $\langle u - v, x - y\rangle > 0$. Terbukti bahwa *set-valued* F monoton.

Langkah selanjutnya akan ditunjukkan *set-valued* F monoton maksimal. Misalkan $\mathcal{F} = \{G: G$ *set-valued* yang monoton dan relatif sama pada interval $[-1,1]\}$. Tentukan sembarang $G \in \mathcal{F}$ dengan $D(G) \subset [-1,1]$. Akan ditunjukkan $Gr(G) \subset Gr(F)$. Karena *set-valued* F monoton, grafik $Gr(F)$ tertutup dan $R(F) = \mathbb{R}$, maka untuk setiap $G \in \mathcal{F}$ berlaku $Gr(G) \subset Gr(F)$. Karena *set-valued* G sembarang, maka untuk setiap *set-valued* $G \in \mathcal{F}$ berlaku $Gr(G) \subset Gr(F)$. Terbukti bahwa *set-valued* F monoton maksimal. □

Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.14 ditunjukkan oleh grafik berikut.



Grafik 2.7.4 Grafik $Gr(F)$ dari *set-valued* F pada Contoh 2.7.14

Contoh 2.7.15 Misalkan *inner produt* pada $\mathbb{R}$ didefinisikan oleh $\langle x, y\rangle = xy$, untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. *Set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ dengan $D(F) = [0,1]$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$F(x) = \begin{cases} [1, \infty), & x = 1 \\ \left[\dfrac{1}{i+1}, \dfrac{1}{i}\right], x = \dfrac{1}{i+1}, \forall i \in \mathbb{N} \\ \left\{\dfrac{1}{i}\right\}, \dfrac{1}{i+1} < x < \dfrac{1}{i}, \forall i \in \mathbb{N} \\ (-\infty, 0], & x = 0 \end{cases}$$

adalah *set-valued* yang monoton maksimal.

Bukti: Langkah pertama akan ditunjukkan *set-valued* F monoton. Ambil sembarang $i, j \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{i+1} < x < \frac{1}{i}$ dan $\frac{1}{j+1} < y < \frac{1}{j}$ serta sembarang $u \in F(x)$ dan $v \in F(y)$. Akan ditunjukkan $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Jika $i = j$, maka $F(x) = F(y) = \left\{\frac{1}{i}\right\}$. Sehingga $u = v \in F(x) = \left\{\frac{1}{i}\right\}$. Akibatnya, $\langle u - v, x - y\rangle = 0$. Jika $i \neq j$ dan $x > y$ maka $u > v$.Akibatnya, $\langle u - v, x - y\rangle > 0$.

Misalkan untuk sembarang $i, j \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{i+1} < x < \frac{1}{i}$ dan $y = \frac{1}{j+1}$. Jika $i = j$, maka untuk $u \in F(x) = \left\{\frac{1}{i}\right\}$ dan $v \in F(y) = \left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]$ berlaku $v \leq u$. Karena $y < x$ dan $v \leq u$ maka $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$. Jika $i \neq j$ dan $x > y$ maka $u > v$. Akibatnya,

$\langle u - v, x - y \rangle > 0$. Jika $i \neq j$ dan $y > x$ maka $v > u$. Akibatnya, $\langle u - v, x - y \rangle > 0$.

Dengan teknik pembuktian yang serupa dapat ditunjukkan untuk kasus-kasus yang lainnya. Selanjutnya, dengan teknik pembuktian tersebut dapat ditunjukkan bahwa kriteria kemonotonan pada *set-valued* F terpenuhi. Sehingga untuk setiap $x, y \in [0,1]$ serta sembarang $u \in F(x)$ dan $v \in F(y)$ berlaku $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$.

Langkah selanjutnya akan ditunjukkan *set-valued* F monoton maksimal. Misalkan $\mathcal{F} = \{G : G$ *set-valued* yang monoton dan relatif sama pada interval $[0,1]\}$. Tentukan sembarang $G \in \mathcal{F}$ dengan $D(G) \subset [0,1]$. Akan ditunjukkan $Gr(G) \subset Gr(F)$. Karena *set-valued* F monoton, grafik $Gr(F)$ tertutup dan $R(F) = \mathbb{R}$, maka untuk setiap $G \in \mathcal{F}$ berlaku $Gr(G) \subset Gr(F)$. Karena *set-valued* G sembarang, maka untuk setiap *set-valued* $G \in \mathcal{F}$ berlaku $Gr(G) \subset Gr(F)$. Terbukti bahwa *set-valued* F monoton maksimal.

Contoh 2.7.16 *Set-valued* F pada Contoh 2.7.8 tidak monoton maksimal.

Bukti: *Set-valued* F pada Contoh 2.7.8 telah dibuktikan monoton. Selanjutnya akan dibuktikan tidak maksimal. Pilih *set-valued* $G : (-\infty, 0] \to P_o(\mathbb{R})$ yang monoton dan relatif sama dengan *set-valued* F pada $\mathbb{R}$ yaitu

$$G(x) = \begin{cases} \{-1\}, & x < 0 \\ \left[-1, \frac{1}{2}\right], & x = 0 \end{cases}.$$

Akan ditunjukkan $Gr(G) \not\subset Gr(F)$. Karena untuk setiap $u \in [-1, \frac{1}{2}]$, $\{(0, u)\} \subset Gr(G)$ dan $\{(0, u)\} \not\subset Gr(F)$ maka $Gr(G) \not\subset Gr(F)$. Terbukti bahwa *set-valued* F tidak monoton maksimal. □

BAB III
PEMBAHASAN

Set valued yang dibahas pada bab ini adalah *set-valued* yang monoton maksimal dari X ke $P_o(X)$, di mana X adalah ruang Hilbert real yang dilengkapi dengan *inner product* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Set-valued* selalu dinotasikan dengan $F: D(F) \to P_o(X)$, di mana $D(F) \subset X$. $B_r(x)$ adalah bola terbuka dengan pusat x dan jari-jari r.

Pembahasan selanjutnya lebih spesifik pada karakteristik *set-valued* yang monoton maksimal di ruang Hilbert real. Adapun karakteristik tersebut dinyatakan oleh Lemma, Teorema dan Akibat berikut.

Definisi 3.1 Misalkan $f: X \to X$ fungsi *single-valued*. f disebut kontinu pada $x_0 \in X$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ dengan $\|x - x_0\| < \delta$ berlaku $\|f(x_0) - f(x)\| < \varepsilon$.

Lemma 3.2 Jika himpunan $C \subseteq X$ kompak dan konveks serta himpunan $M \subseteq X \times C$ monoton, maka terdapat $u \in C$ dan $x \in X$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x,u)\} \cup M$ monoton.

Bukti: Andaikan kesimpulan dari Lemma tersebut salah, yaitu tidak ada $u \in C$ dan $x \in X$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x,u)\} \cup M$ monoton. Andaikan untuk setiap $(y,v) \in M$ dan setiap $x \in X$, didefinisikan himpunan

$$U(y,v) = \{u \in C : \langle u - v, x - y\rangle < 0\}. \tag{3.1}$$

Akan ditunjukkan kontradiksi dengan pernyataan. Karena himpunan C terbatas dan untuk setiap $(y,v) \in M$, himpunan $U(y,v)$ memenuhi (3.1), maka himpunan $U(y,v)$ terbatas dan terbuka subset C. Berdasarkan (3.1) diperoleh

$$C = \cup\{U(y,v) : (y,v) \in M\}. \tag{3.2}$$

Dengan demikian, koleksi $\{U\,(y,v) : (y,v) \in M\}$ adalah selimut terbuka untuk C. Karena himpunan C kompak, maka terdapat $(y_1,v_1), (y_2,v_2), \cdots, (y_m,v_m)$ dalam M sedemikian sehingga

$$C = \cup_{i=1}^{m}\{U(y_i,v_i)\}.$$

Dengan kata lain, himpunan $\{U(y_i,v_i) : (y_i,v_i) \in M\}$ adalah subselimut berhingga untuk C. Misalkan $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ adalah partisi untuk C sedemikian sehingga berkorespondensi satu-satu dengan subselimut berhingga untuk C. Sehingga himpunan $\{\varphi_i : i = 1,2,\cdots,n\}$ adalah selimut terbuka untuk C. Misalkan $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ adalah fungsi-fungsi real yang kontinu pada $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ sedemikian sehingga untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, dan setiap $u \in \varphi_i$, $0 \leq \beta_i(u) \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(u) = 1$ dan

$$\{u \in C : \beta_i(u) > 0\} \subset U(y_i, v_i).$$

Misalkan $K = co(\{v_i\}) \subset C$, untuk $i = 1,2,\cdots,n$. Karena himpunan K memuat semua titik limitnya maka himpunan K tertutup. Karena himpunan C kompak dan K adalah himpunan tertutup subset C, maka menurut Teorema 2.5.9, himpunan K kompak. Sehingga himpunan K kompak dan konveks. Karena himpunan K konveks maka dapat didefinisikan fungsi kontinu $p: K \to K$ sedemikian sehingga untuk setiap $u \in K$,

$$p(u) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(u)\, v_i. \qquad (3.3)$$

Selanjutnya, digunakan teorema eksistensi titik tetap pada K, yaitu terdapat $w \in K$ sedemikian sehingga $p(w) = w$. Teorema tersebut akan dibuktikan terlebih dahulu. Pilih $w \in K$ sedemikian sehingga $\beta_1(w) = 1$, untuk $i = 1$ dan $\beta_i(w) = 0$, untuk $i \neq 1$. Jika $v_1 = w$, dan untuk setiap $i = 2,3,\cdots,n$, tentukan sembarang $v_i \in K$. Maka dari persamaan (3.3) diperoleh $p(w) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(w)\, v_i = w$.

Jika $p(w) = w$, maka

$$\langle p(w) - w, \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i(w)(y_i - z)\rangle = 0.$$

Dari persamaan (3.3) dan $p(w) = w$ diperoleh

$$\begin{aligned}&\langle \sum_{i\in\mathbb{N}} \beta_i(w)(v_i - w), \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j(w)\big(y_j - z\big)\rangle \\ &= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \beta_i(w)\, \beta_j(w) \langle v_i - w, y_j - z\rangle = 0. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Selanjutnya, *inner product* pada persamaan (3.4) akan diselesaikan terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}&\langle v_i - w, y_j - z\rangle + \langle v_j - w, y_i - z\rangle \\ &= \langle v_i - w, y_i - z\rangle + \langle v_i - v_j, y_j - y_i\rangle + \langle v_j - w, y_j - z\rangle.\end{aligned}$$

Karena himpunan M monoton, maka untuk setiap $i, j = 1,2,\cdots,n$, $\langle v_i - v_j, y_i - y_j\rangle \geq 0$. Sehingga $\langle v_i - v_j, y_j - y_i\rangle \leq 0$.

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}&\langle v_i - w, y_j - z\rangle + \langle v_j - w, y_i - z\rangle \\ &\leq \langle v_i - w, y_i - z\rangle + \langle v_j - w, y_j - z\rangle. \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Untuk penyederhanaan penulisan didefinisikan

$$\alpha_{i,j} = \langle v_i - w, y_j - z\rangle.$$

Sehingga pertidaksamaan (3.5) menjadi

$$\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i} = \alpha_{i,i} + \langle v_i - v_i, y_j - y_j\rangle + \alpha_{j,j} \leq \alpha_{i,i} + \alpha_{j,j}.$$

Karena untuk setiap $i, j = 1,2, \cdots, n$,
$$\beta_i(w)\beta_j(w) = \beta_j(w)\beta_i(w)$$
maka
$$\beta_i(w)\beta_j(w)\alpha_{i,j} + \beta_i(w)\beta_j(w)\alpha_{j,i} = \beta_i(w)\beta_j(w)\left(\frac{\alpha_{i,j}+\alpha_{j,i}}{2}\right) + \beta_i(w)\beta_j(w)\left(\frac{\alpha_{i,j}+\alpha_{j,i}}{2}\right).$$
Sehingga persamaan (3.4) menjadi
$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_i(w)\beta_j(w)\alpha_{i,j} = \sum_{i,j=1}^{n} \beta_i(w)\beta_j(w)\left(\frac{\alpha_{i,j}+\alpha_{j,i}}{2}\right) = 0$$
dan
$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_i(w)\beta_j(w)\left(\frac{\alpha_{i,i}+\alpha_{j,j}}{2}\right) \geq 0. \tag{3.6}$$
Karena untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$, $\beta_i(w) > 0$ dan $\beta_j(w) > 0$ maka $\beta_i(w)\beta_j(w) > 0$. Sehingga
$$w \in U(y_i, v_i) \cap U(y_j, v_j).$$
Dari persamaan (3.1) diperoleh $\alpha_{i,i} < 0$ dan $\alpha_{j,j} < 0$, sehingga
$$\sum_{i,j=1}^{n} \beta_i(w)\, \beta_j(w)\left(\frac{\alpha_{i,i}+\alpha_{j,j}}{2}\right) \leq 0. \tag{3.7}$$
Dari pertidaksamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh bahwa untuk setiap $i, j = 1,2, \cdots, n$, $\beta_i(w)\beta_j(w) = 0$. Hal tersebut kontradiksi dengan kekonvekan pada C. Sehingga tidak mungkin untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$, $\beta_i(w) = 0$. Haruslah $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(w) = 1$. Dengan demikian, pernyataan (3.1) harus diingkari, sehingga himpunan $\{(x, u)\} \cup M$ monoton. □

Lemma 3.3 Diberikan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ dan himpunan $B \subset X$ sedemikian sehingga $R(F) \cap B \neq \emptyset$. Misalkan $F^-(B) = \{x \in X: B \subset F(x)\}$ dan $F^+(B) = \{x \in X: B \cap F(x) \neq \emptyset\}$. Jika *set-valued* F monoton maka *set-valued* F^+ dan F^- monoton.

Bukti: Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton. Karena *set-valued* F monoton maka untuk setiap $x, y \in D(F)$ dan setiap $u \in F(x), v \in F(y)$ berlaku
$$\langle u - v, x - y\rangle \geq 0.$$
Diberikan $B \subset X$ sedemikian sehingga $R(F) \cap B \neq \emptyset$. Karena untuk setiap $x, y \in D(F)$ sedemikian sehingga $F(x) \subset B$ dan $F(y) \subset B$, serta untuk setiap $u \in F(x)$ dan setiap $v \in F(y)$ berlaku $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$, maka *set-valued* F^- monoton pada B. Karena untuk setiap $x, y \in D(F)$ sedemikian sehingga $F(x) \cap B \neq \emptyset$ dan

$F(y) \cap B \neq \emptyset$, serta untuk setiap $u \in F(x) \cap B$ dan setiap $v \in F(y) \cap B$ berlaku $\langle u - v, x - y \rangle \geq 0$, maka *set-valued* F^+ monoton pada $R(F) \cap B$. □

Definisi 3.4 *Set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ disebut terbatas lokal (*locally bounded*) di $x \in D(F)$, jika terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga himpunan $F\big(B_r(x)\big)$ terbatas.

Lemma 3.5 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton dan himpunan $B \subset X$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(F)$, $F(y) \cap B \neq \emptyset$. Maka untuk setiap $x \in X$, terdapat $u \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(F)$ dan setiap $v \in F(y) \cap B$ berlaku

$$\langle y - x, v - u \rangle \geq 0.$$

Bukti: Misalkan himpunan $B \subset X$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(F)$, $F(y) \cap B \neq \emptyset$. Selanjutnya didefinisikan fungsi invers atas (*upper inverse*) F pada B, yaitu himpunan

$$F^+(B) = \{y \in X: F(y) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Menurut Lemma 3.3, F^+ adalah *set-valued* yang monoton dari $R(F) \cap B$ ke $P_o\big(D(F)\big)$ dengan $D(F^+) \subset B$. Karena *set-valued* F^+ monoton maka menurut Definisi 2.7.10, grafik $Gr(F^+)$ adalah himpunan monoton subset $X \times B$. Karena himpunan B terbatas maka himpunan $\overline{co(B)}$ kompak dan konveks, sehingga $B \subset \overline{co(B)}$. Jika B adalah sembarang himpunan terbatas subset X sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(F)$, $F(y) \cap B \neq \emptyset$, maka berdasarkan Lemma 3.2, terdapat $u \in \overline{co(B)}$ dan $x \in X$ sedemikian sehingga himpunan $\{(x, u)\} \cup Gr(F^+)$ monoton. Karena himpunan $\{(x, u)\} \cup Gr(F^+)$ monoton maka teknik pembuktian di atas dapat dikonstruksi himpunan monoton $\{(x_i, u_i)\} \cup Gr(F^+)$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Akibatnya, untuk setiap $x \in X$, terdapat $u \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in D(F)$ dan setiap $v \in F(y) \cap B$ berlaku

$$\langle y - x, v - u \rangle \geq 0.$$ □

Akibat 3.6 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton dan himpunan $B \subset X$ terbatas. Maka untuk setiap $x \in X$, terdapat $u \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $y \in F^+(B)$ dan setiap $v \in F(y) \cap B$ berlaku

$$\langle y - x, v - u \rangle \geq 0.$$

Bukti: Misalkan himpunan $B \subset X$ terbatas. Jika $R(F) \cap B = \emptyset$, maka $F^{+}(B) = \emptyset$. Karena himpunan $F^{+}(B) = \emptyset$, maka kesimpulan Akibat 3.6 terpenuhi. Selanjutnya, jika $R(F) \cap B \neq \emptyset$ maka menurut Lemma 3.3, F^{+} adalah *set-valued* yang monoton pada $R(F) \cap B$. Di samping itu, untuk setiap $y \in F^{+}(B)$, $F(y) \cap B \neq \emptyset$. Berdasarkan Lemma 3.5, kesimpulan Akibat 3.6 terpenuhi. □

Teorema 3.7 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in D(F)$ dan setiap $u \in F(x)$ berlaku

$$\langle y - x, v - u \rangle \geq 0,$$

maka $v \in F(y)$.

Bukti: Misalkan $\mathcal{F} = \{G: G \text{ } \textit{set-valued} \text{ yang monoton dan relatif sama pada } D(F)\}$. Tentukan sembarang $x, y \in D(F)$ dan sembarang $u \in F(x)$ sedemikian sehingga $\langle y - x, v - u \rangle \geq 0$. Akan ditunjukkan $v \in F(y)$. Misalkan $\mathcal{F}_y = \{G: G \in \mathcal{F} \text{ terdefinisi pada } y\}$. Karena untuk setiap *set-valued* $G \in \mathcal{F}_y$ monoton maka untuk setiap $v \in G(y)$ berlaku

$$\langle y - x, v - u \rangle \geq 0.$$

Karena *set-valued* F monoton maksimal maka $G(y) \subset F(y)$. Karena $v \in G(y)$ dan $G(y) \subset F(y)$ maka $v \in F(y)$. □

Lemma 3.8 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal, maka untuk setiap himpunan B yang tertutup dan terbatas subset X, himpunan

$$F^{+}(B) = \{x \in X: B \cap F(x) \neq \emptyset\}$$

tertutup dalam X.

Bukti: Misalkan himpunan $B \subset X$ terbatas dan tertutup (kompak) sedemikian sehingga $R(F) \cap B \neq \emptyset$ dan $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ adalah sembarang barisan dalam $F^{+}(B)$ sedemikian sehingga barisan y_n konvergen ke y. Akan ditunjukkan $y \in F^{+}(B)$. Karena barisan y_n konvergen ke y, maka untuk setiap $r > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $\|y_n - y\| < r$. Jika untuk setiap $r > 0$, $y_n \in B_r(y) \cap F^{+}(B)$ maka $F(B_r(y) \backslash \{y\}) \cap B \neq \emptyset$. Karena himpunan $B \subset X$ tertutup dan terbatas (kompak), maka berdasarkan Akibat 2.5.11, himpunan $\overline{F(B_r(y) \backslash \{y\})} \cap B$ kompak. Misalkan $\mathfrak{C}_y$

adalah koleksi semua himpunan $\overline{F(B_r(y)\backslash\{y\})} \cap B$ dengan $r > 0$, yaitu himpunan

$$\mathfrak{C}_y = \{\overline{F(B_r(y)\backslash\{y\})} \cap B \subset X : \forall r > 0\}.$$

Karena untuk setiap $r > 0$, $F(B_r(y)\backslash\{y\}) \cap B \neq \emptyset$. Maka irisan himpunan-himpunan kompak elemen subkoleksi berhingga subset $\mathfrak{C}_y$ adalah himpunan yang tidak kosong. Selanjutnya, irisan himpunan-himpunan kompak elemen koleksi $\mathfrak{C}_y$ adalah himpunan yang tidak kosong. Sehingga terdapat beberapa $v \in B$ sedemikian sehingga v termuat dalam $\overline{F(B_r(y)\backslash\{y\})}$, untuk setiap $r > 0$. Selanjutnya akan ditunjukkan $v \in F(y)$.

Misalkan $z \in D(F)$ dan $w \in F(z)$. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $r_1, r_2 > 0$ sedemikian sehingga

$$|\langle x - y, w\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in B_{r_1}(y), \tag{3.8}$$

$$|\langle z - y, u - v\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall u \in B_{r_2}(v). \tag{3.9}$$

Karena himpunan B terbatas, maka

$$|\langle x - y, u\rangle| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in B_{r_1}(y), \forall u \in B. \tag{3.10}$$

Misalkan $u \in F\big(B_{r_1}(y)\backslash\{y\}\big) \cap B_{r_2}(v) \cap B$, sedemikian sehingga dengan pemilihan $v \in X$, $F\big(B_{r_1}(y)\backslash\{y\}\big) \cap B_{r_1}(v) \cap B \neq \emptyset$. Karena *set-valued* F monoton, maka untuk $x \in B_{r_1}(y)$ sedemikian sehingga $u \in F(x)$ berlaku

$$\langle z - x, w - u\rangle \geq 0. \tag{3.11}$$

Dengan pertidaksamaan (3.8), (3.9), (3.10) dan (3.11) diperoleh

$$\begin{aligned}\langle z - y, w - v\rangle &= \langle z - x, w - u\rangle + \langle x - y, w\rangle \\ &\quad + \langle z - y, u - v\rangle - \langle x - y, u\rangle \\ &\geq 0 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} = -\varepsilon.\end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ sembarang maka untuk setiap $z \in D(F)$ dan setiap $w \in F(z)$,

$$\langle z - y, w - v\rangle \geq 0.$$

Karena *set-valued* F monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.7, $v \in F(y)$. Karena $F(y) \neq \emptyset$ maka $y \in F^+(B)$. Dengan demikian, himpunan $F^+(B)$ tertutup dalam X. $\square$

Lemma 3.9 Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal dan himpunan $D(F)$ konveks. Jika $int\big(D(F)\big) \neq \emptyset$ dan $x \notin int\big(D(F)\big)$, maka himpunan $F(x)$ memuat paling sedikit satu separuh garis.

Bukti: Karena $int(D(F)) \neq \emptyset$, maka $D(F)$ memuat titik interior. Karena $x \notin int(D(F))$ maka x adalah titik batas $D(F)$. Berdasarkan Teorema 2.6.5, terdapat *supporting hyperplane* pada $D(F)$ di x, yaitu terdapat $v \neq 0 \in X$ sedemikian sehingga untuk setiap $z \in D(F)$, berlaku $\langle z, v\rangle \leq \langle x, v\rangle$ atau

$$\langle x - z, v\rangle \geq 0. \tag{3.12}$$

Misalkan $u \in F(x)$. Dengan menggunakan kemomotonan pada F dan pertidaksamaan (3.12), maka untuk setiap $\lambda \geq 0$, $u + \lambda v \in X$ berlaku

$$\begin{aligned}\langle z - x, w - (u + \lambda v)\rangle &= \langle z - x, w - u\rangle + \langle z - x, -\lambda v\rangle \\ &= \langle z - x, w - u\rangle - \lambda\langle z - x, v\rangle \\ &= \langle z - x, w - u\rangle + \lambda\langle x - z, v\rangle \geq 0,\end{aligned} \tag{3.13}$$

untuk setiap $z \in D(F)$ dan setiap $w \in F(z)$. Karena *set-valued* F monoton maksimal dan memenuhi (3.13), maka menurut Teorema 3.7, $u + \lambda v \in F(x)$. Akibatnya, himpunan $F(x)$ memuat separuh garis, yaitu himpunan

$$\{u + \lambda v : \lambda \geq 0\}.$$ □

Teorema 3.10 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal, himpunan $S \subset D(F)$ dan himpunan $A \subset X$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$, $F(x) \cap A \neq \emptyset$ serta salah satu dari kondisi berikut terpenuhi:

(i) $int(S) \neq \emptyset$,
(ii) $int(co(S)) \neq \emptyset$ dan $\sup_{x \in S} \sup_{u \in A} |\langle x, u\rangle| < \infty$.

Maka

(i) himpunan $int(D(F))$ tidak kosong, terbuka dan konveks,
(ii) himpunan $\overline{D(F)}$ tidak kosong, tertutup dan konveks dan
(iii) *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int\ D(F)$ dan tidak terbatas lokal di batas $D(F)$.

Bukti: Pilih himpunan $S \subset D(F)$ dan himpunan terbatas $A \subset X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$, $F(x) \cap A \neq \emptyset$ dan kondisi (i) terpenuhi. Jika $int(S) \neq \emptyset$ maka $int(co(S)) \neq \emptyset$. Jika himpunan A dan S terbatas maka

$$\sup_{x \in S} \sup_{u \in A} |\langle x, u\rangle| < \infty.$$

Sehingga kondisi (ii) terpenuhi. Pembuktian selanjutnya diasumsikan kondisi (ii) terpenuhi.

Karena $int(co(S)) \neq \emptyset$ maka himpunan

$$int(D(F)) \neq \emptyset \text{ dan } int\left(co(D(F))\right) \neq \emptyset.$$

Menurut Lemma 2.5.3, himpunan $int(D(F))$ terbuka. Selanjutnya akan ditunjukkan himpunan $int(D(F))$ konveks. Menunjukkan $int(D(F))$ adalah himpunan konveks cukup ditunjukkan bahwa $int(D(F)) = int\left(co(D(F))\right)$, yaitu

$$int(D(F)) \subset int\left(co(D(F))\right) \text{ dan } int(D(F)) \supset int\left(co(D(F))\right).$$

Pertama akan ditunjukkan bahwa $int(D(F)) \subset int\left(co(D(F))\right)$. Tentukan sembarang $x \in int(D(F))$. Akan ditunjukkan $x \in int\left(co(D(F))\right)$. Karena himpunan $co(D(F))$ adalah himpunan konveks terkecil yang memuat $D(F)$ maka $x \in int\left(co(D(F))\right)$. Karena x adalah sembarang elemen dalam $int(D(F))$, maka setiap elemen dalam $int(D(F))$ merupakan elemen dari $int\left(co(D(F))\right)$. Akibatnya

$$int(D(F)) \subset int\left(co(D(F))\right).$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $int(D(F)) \supset int\left(co(D(F))\right)$. Dalam hal ini, akan ditunjukkan juga bahwa *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int(D(F))$. Tentukan sembarang $\hat{x} \in int\left(co(D(F))\right)$. Akan ditunjukkan *set-valued* F terbatas lokal di $\hat{x}$ dan $\hat{x} \in int(D(F))$, tetapi *set-valued* F tidak terbatas di batas $D(F)$.

Jika kondisi (ii) terpenuhi, yaitu $int(co(S)) \neq \emptyset$, maka himpunan $int(co(S))$ memuat suatu elemen. Tentukan sembarang

$$\hat{x} \in int(co(S)). \tag{3.14}$$

Akan ditunjukkan *set-valued* F terbatas lokal di $\hat{x}$ dan $\hat{x} \in int(D(F))$. Misalkan B adalah himpunan terbatas subset X sedemikian sehingga untuk setiap $z \in D(F)$, $F(z) \cap B \neq \emptyset$ dan untuk setiap B didefinisikan himpunan

$$F_B(x) = \{u \in X : \langle z - x, w - u \rangle \geq 0, \forall z \in D(F), \forall w \in F(z) \cap B\}. \tag{3.15}$$

Selanjutnya, dengan Lemma 3.5 dan kemonotonan pada F, diperoleh bahwa untuk setiap $x \in D(F)$ berlaku

$$F(x) \subset F_B(x) \neq \emptyset. \tag{3.16}$$

Dari persamaan (3.15) diperoleh $F_B(x)$ adalah himpunan tertutup dalam X.

Untuk menunjukkan *set-valued* F terbatas lokal di $\hat{x}$, didefinisikan fungsi $F_B: x \to F_B(x)$, di mana $B = A$. Dari (3.14), $\hat{x}$ adalah titik interior dari $co(S)$, sehingga dapat dipilih $r > 0$ sedemikian sehingga

$$\hat{x} + 2B_r(0) \subset co(S), \tag{3.17}$$

di mana $\hat{x} + 2B_r(0) = \{\hat{x} + 2a: a \in 2B_r(0)\}$. Dan untuk setiap pemilihan $r > 0$, $B_r(0)$ adalah himpunan konveks. Sehingga $\hat{x} + 2B_r(0)$ adalah himpunan konveks. Misalkan

$$\mu = \sup_{x \in S} \sup_{w \in A} |\langle x, w \rangle| < \infty, \tag{3.18}$$

dan untuk setiap $w \in A$, didefinisikan

$$\mathfrak{U} = \{x \in X: |\langle x, w \rangle| \leq \mu\}.$$

$\mathfrak{U}$ adalah himpunan tertutup, konveks dan memuat S. Sehingga himpunan $\mathfrak{U}$ memuat $co(S)$. Selanjutnya, dari (3.18) diperoleh bahwa untuk setiap $x \in co(S)$, dan setiap $w \in A$ berlaku

$$|\langle x, w \rangle| \leq \mu. \tag{3.19}$$

Pilih $x \in \hat{x} + B_r(0)$ dan $u \in F_A(x)$. Dari (3.17) dan (3.19) diperoleh bahwa untuk setiap $z \in S$ dan setiap $w \in F(z) \cap A$ berlaku

$$\langle z - x, u \rangle \leq \langle z - x, w \rangle \leq |\langle z, w \rangle| + |\langle x, w \rangle| \leq 2\mu.$$

Selanjutnya

$$S \subset \{z \in X: \langle z - x, u \rangle \leq 2\mu\}. \tag{3.20}$$

Sehingga dari (3.17) dan (3.20) diperoleh

$$\hat{x} + B_r(0) \subset \hat{x} + 2B_r(0) \subset co(S) \subset \{z \in X: \langle z - x, u \rangle \leq 2\mu\}.$$

Oleh karena itu, untuk setiap $a \in B_r(0)$ berlaku $\langle a, u \rangle \leq 2\mu$. Dengan demikian, terdapat $s > 0$ sedemikian sehingga

$$u \in (2\mu + 1)B_s(0),$$

di mana $B_s(0)$ adalah himpunan terbatas subset X. Sehingga $(2\mu + 1)B_s(0)$ adalah himpunan terbatas subset X. Karena $x \in \hat{x} + B_r(0)$ dan $u \in F_A(x)$, maka dari (3.16) diperoleh

$$\begin{aligned} F\big(\hat{x} + B_r(0)\big) &= \cup\big\{F(x): x \in \big(\hat{x} + B_r(0)\big)\big\} \\ &\subset \cup\big\{F_A(x): x \in \big(\hat{x} + B_r(0)\big)\big\} \\ &\subset (2\mu + 1)B_s(0). \end{aligned}$$

Karena himpunan $(2\mu + 1)B_s(0)$ terbatas, maka himpunan $F(\hat{x} + B_r(0)) = F(B_r(\hat{x}))$ terbatas. Sehingga *set-valued* F terbatas lokal di $\hat{x}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\hat{x} \in int(D(F))$. Misalkan $\mathcal{F}_B$ adalah koleksi semua himpunan $F_B(\hat{x})$, di mana B adalah himpunan terbatas subset X yang memuat A. Untuk setiap himpunan B, himpunan $F_B(\hat{x})$ tidak kosong dan tertutup. Sehingga irisan (interseksi) himpunan-himpunan dalam subkoleksi berhingga $\mathcal{F}_B$ adalah himpunan yang tidak kosong. Selanjutnya akan ditunjukkan irisan semua himpunan dalam koleksi $\mathcal{F}_B$ adalah himpunan yang tidak kosong. Karena B adalah himpunan terbatas subset X yang memuat A, maka untuk setiap himpunan B, himpunan $F_B(\hat{x})$ kompak (terbatas dan tertutup) dan termuat dalam $F_A(\hat{x})$. Sehingga interseksi semua himpunan dalam koleksi $\mathcal{F}_B$ tidak kosong.

Misalkan $\hat{u}$ adalah sembarang elemen dari interseksi semua himpunan dalam koleksi $\mathcal{F}_B$. Dari (3.15) diperoleh bahwa untuk setiap $z \in X$ dan setiap $w \in F(z)$ berlaku

$$\langle z - \hat{x}, w - \hat{u} \rangle \geq 0.$$

Karena *set-valued* F monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.7, $\hat{u} \in F(\hat{x})$. Karena $F(\hat{x}) \neq \emptyset$ dan $\hat{u} \in F(\hat{x})$ maka $\hat{x} \in D(F)$. Karena $\hat{x}$ adalah sembarang elemen dalam $int(co(S))$, maka $int(co(S)) \subset D(F)$. Karena $\hat{x}$ adalah titik interior $co(S)$, maka $int(co(S)) \subset int(D(F))$.

Dengan memanfaatkan pembuktian di atas, ditentukan sembarang $\hat{x} \in int\left(co(D(F))\right)$. Akan ditunjukkan *set-valued* F terbatas lokal di $\hat{x}$ dan $\hat{x} \in int(D(F))$. Jika $\hat{x} \in int(co(S)) \subset int\left(co(D(F))\right)$, maka menurut (3.14) telah dibuktikan. Selanjutnya, jika $\hat{x} \in int\left(co(D(F))\right)$, untuk $\hat{x} \notin int(co(S))$, akan dikonstuksi himpunan $S^* \subset D(F)$ dan himpunan terbatas $A^* \subset X$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S^*$ berlaku $F(x) \cap A^* \neq \emptyset$ dan kondisi (ii) terpenuhi. Sehingga dapat ditentukan sembarang

$$\hat{x} \in int(co(S^*)). \tag{3.21}$$

Dari bukti sebelumnya, himpunan $D(F)$ memuat $int(co(S))$, yaitu himpunan tidak kosong, terbuka dan konveks serta *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int(co(S))$.

Dari dari hal tersebut dapat ditarik suatu perumuman, yaitu terdapat himpunan yang tidak kosong, terbuka dan konveks $W \subset D(F)$ sedemikian sehingga himpunan $F(W)$ terbatas.

Misalkan $\mathbb{F}$ adalah koleksi semua subset berhingga dari $D(F)$. Didefinisikan himpunan

$$\mathbb{E} = \bigcup_{T \in \mathbb{F}} int\big(co(W \cup T)\big).$$

Maka himpunan $\mathbb{E}$ tidak kosong, terbuka dan konveks serta himpunan $\overline{\mathbb{E}}$ memuat $D(F)$. Sehingga

$$int\Big(co\big(D(F)\big)\Big) \subset int(\overline{\mathbb{E}}) = \mathbb{E}.$$

Dengan demikian $\hat{x} \in \mathbb{E}$. Selanjutnya terdapat elemen-elemen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dalam $D(F)$ sedemikian sehingga

$$\hat{x} \in int\big(co(W \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})\big). \qquad (3.22)$$

Jika untuk $i = 1,2,\cdots,n$, dipilih sembarang $u_i \in F(x_i)$ sedemikian sehingga

$$A^* = F(W) \cup \{u_1, u_2, \cdots, u_n\},$$

maka himpunan A^* terbatas. Karena himpunan W konveks dan memenuhi (3.22) maka terdapat $x_o \in W$ sedemikian sehingga untuk setiap $r > 0$,

$$\hat{x} \in int\big(co(B_r(x_o) \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_n\})\big).$$

Diberikan bola terbuka $B_r(x_o)$ sedemikian $B_r(x_o)$ termuat dalam himpunan W sedemikian sehingga

$$S^* = B_r(x_o) \cup \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset D(F).$$

Maka (3.21) terpenuhi dan untuk setiap $x \in S^*$, $F(x) \cap A^* \neq \emptyset$. Karena $S^* \subset D(F)$ dan A^* adalah himpunan terbatas subset X sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S^*$, $F(x) \cap A^* \neq \emptyset$ serta $int\ \big(co(S^*)\big) \neq \emptyset$, maka dengan teknik pembuktian sebelumnya *set-valued* F terbatas lokal di $\hat{x}$ dan $\hat{x} \in int\big(D(F)\big)$. Karena $\hat{x}$ adalah sembarang elemen dalam $int\Big(co\big(D(F)\big)\Big)$ dan $\hat{x}$ juga elemen dalam $int\big(D(F)\big)$ maka

$$int\big(D(F)\big) \supset int\Big(co\big(D(F)\big)\Big).$$

Dengan demikian, himpunan $int\big(D(F)\big)$ konveks dan *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int\big(D(F)\big)$. Selanjutnya, karena himpunan $int\big(D(F)\big)$ konveks, maka himpunan

$$\overline{D(F)} = \overline{int\big(D(F)\big)} = \overline{int\Big(co\big(D(F)\big)\Big)}$$

adalah himpunan tidak kosong, tertutup dan konveks.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa *set-valued* F tidak terbatas lokal di batas $D(F)$. Misalkan y titik pada batas $D(F)$. Andaikan *set-valued* F terbatas lokal di y, yaitu terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga himpunan $F(B_r(y))$ terbatas. Selanjutnya akan ditunjukkan kontradiksi dengan pernyataan. Jika $B = \overline{F(B_r(y))}$, maka himpunan B kompak (terbatas dan tertutup). Berdasarkan Lemma 3.8, himpunan $F^+(B)$ tertutup. Sehingga

$$D(F) \cap B_r(y) \subset F^+(B) \subset D(F)$$

dan $y \in D(F)$. Karena y adalah titik batas $D(F)$ maka $y \notin int(D(F))$. Berdasarkan pembuktian sebelumnya,

$$int(D(F)) = int\left(co(D(F))\right) \neq \emptyset.$$

Karena himpunan $int(D(F))$ dan $\overline{D(F)}$ konveks, maka himpunan $D(F)$ konveks. Berdasarkan Lemma 3.9, himpunan $F(y)$ memuat paling sedikit satu separuh garis. Akibatnya, himpunan $F(y)$ tidak terbatas. Di lain sisi, karena $F(y) \subset F(B_r(y))$ dan himpunan $F(B_r(y))$ terbatas, maka haruslah himpunan $F(y)$ terbatas. Sehingga y bukan titik batas $D(F)$. Karena $y \in D(F)$ dan bukan titik batas maka $y \in int(D(F))$. Hal tersebut kontradiksi dengan y adalah titik batas $D(F)$. Dengan demikian, pengandaian harus diingkari. □

Akibat 3.11 Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal. Jika terdapat $x \in int(D(F))$ sedemikian sehingga *set-valued* F terbatas lokal di x, maka kesimpulan Teorema 3.10 terpenuhi.

Bukti: Misalkan $x \in int(D(F))$. Pilih $r > 0$ sedemikian sehingga $B_r(x) \subset D(F)$ dan himpunan $F(B_r(x))$ terbatas subset X. Jika $S = B_r(x)$ dan $A = F(B_r(x))$ maka kesimpulan Teorema 3.10 terpenuhi. □

Akibat 3.12 Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton (tidak harus maksimal) dan himpunan $C \subset D(F)$ terbuka. Jika *set-valued* F terbatas lokal di beberapa titik dalam C, maka *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam C.

Bukti: Misalkan *set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ monoton dan himpunan $B \subset X$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $x \in D(F)$, $F(x) \cap B \neq \emptyset$. Berdasarkan Lemma 3.2, dapat dikonstruksi fungsi *set-valued* $\hat{F}$ dari *set-valued* F sedemikian sehingga $Gr(\hat{F}) \supset Gr(F)$. Dengan demikian, grafik $Gr(\hat{F})$ dapat dikonstruksi menjadi grafik yang monoton maksimal, yaitu

$$Gr(\hat{F}) = \{(x,u) \in X \times X: \langle z - x, w - u \rangle \geq 0, \forall G(F)\}.$$

Jika grafik $G(\hat{F})$ monoton maksimal, maka *set-valued* $\hat{F}$ monoton maksimal. Misalkan U adalah himpunan yang tidak kosong dan terbuka subset dari C sedemikian sehingga himpunan $F(U)$ terbatas. Jika *set-valued* $\hat{F}$ monoton maksimal, $S = U$ dan $A = F(U)$. Maka syarat cukup Teorema 3.10 dipenuhi. Dengan demikian, *set-valued* $\hat{F}$ terbatas lokal di setiap titik dalam $int\left(D(\hat{F})\right)$. Karena $C \subset int\left(D(\hat{F})\right)$, maka *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam C. □

Teorema 3.13 Jika *set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ monoton maksimal dan himpunan

$$int\left(co\big(D(F)\big)\right) \neq \emptyset.$$

Maka kesimpulan Teorema 3.10 terpenuhi.

Bukti: Misalkan $C = int\left(co\big(D(F)\big)\right) \neq \emptyset$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan

$$S_n = \{x \in D(F): \|x\| \leq n \text{ dan } u \in F(x) \text{ sehingga } \|u\| \leq n\}.$$

Jika

$$D(F) = \cup_{n=1}^{\infty} S_n,$$

maka

$$C \subset \cup_{n=1}^{\infty} co(S_n). \tag{3.23}$$

Karena himpunan C memenuhi (3.23), maka himpunan C tidak kosong, terbuka dan konveks subset X. Sehingga untuk beberapa $n \in \mathbb{N}$,

$$int\big(co(S_n)\big) \neq \emptyset.$$

Jika $S = S_n$ dan $A = \{u \in X: \|u\| \leq n\}$, untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $int\big(co(S_n)\big) \neq \emptyset$, maka syarat cukup Teorema 3.10 terpenuhi. Sehingga kesimpulan Teorema 3.3 terpenuhi. □

Akibat 3.14 Misalkan syarat cukup untuk Teorema 3.13 terpenuhi, maka himpunan $int(D(F))$ dan $\overline{D(F)}$ konveks. Jika $D(F)$ *dense* dalam X, maka $D(F) = X$.

Bukti: Berdasarkan Teorema 3.13, himpunan $int(D(F))$ dan $\overline{D(F)}$ konveks. Selanjutnya, himpunan

$$int\left(\overline{D(F)}\right) = int(D(F)),$$

Karena himpunan $D(F)$ *dense* dalam X, maka $\overline{D(F)} = X$. Sehingga

$$int(D(F)) = int(X) = X \subset D(F).$$

Di lain sisi, untuk setiap $D(F)$, $D(F) \subset X$. Karena $X \subset D(F)$ dan $D(F) \subset X$ maka $D(F) = X$. □

Akibat 3.15 Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal dan himpunan $D(F)$ konveks. Jika $x \in D(F)$ dan *set-valued* F terbatas lokal di x, maka $x \in int(D(F))$.

Bukti: Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal dan himpunan $D(F)$ konveks. Karena himpunan $D(F)$ konveks dan $int(D(F)) \subset D(F) = int\left(co(D(F))\right)$, maka himpunan $int(D(F))$ konveks. Jika $x \in D(F)$ dan *set-valued* F terbatas lokal di x, maka terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga himpunan $F(B_r(x))$ terbatas. Pilih himpunan terbuka $W \subset B_r(x)$, maka himpunan $F(W)$ terbatas. Karena $W \neq \emptyset$ dan $W \subset int(D(F))$, maka $int(D(F)) \neq \emptyset$. Sehingga syarat cukup Teorema 3.13 terpenuhi. Menurut Teorema 3.13, *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int(D(F))$ dan tidak terbatas lokal di batas $D(F)$. Di samping itu, menurut bukti Teorema 3.10, $x \in int(D(F))$. Akibatnya, jika *set-valued* F terbatas lokal di $x \in D(F)$, maka $x \in int(D(F))$. □

Akibat 3.16 Misalkan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal dan himpunan

$$int\left(co(D(F))\right) \neq \emptyset.$$

$x \in int(D(F))$ jika dan hanya jika $x \in D(F)$ dan terdapat $L < \infty$ sedemikian sehingga untuk setiap $u \in F(x)$, $\|u\| \leq L$.

Bukti: ($\Rightarrow$) Jika $x \in int(D(F))$, maka $x \in D(F)$. Berdasarkan Teorema 3.13, untuk setiap $x \in int(D(F))$, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga himpunan $F(B_r(x))$ terbatas. Karena $F(x) \subset F(B_r(x))$ dan himpunan $F(B_r(x))$ terbatas, maka himpunan $F(x)$ terbatas. Sehingga terdapat $L < \infty$ sedemikian sehingga untuk setiap $u \in F(x)$, $\|u\| \leq L$.

($\Rightarrow$) Misalkan $x \in D(F)$ dan terdapat $L < \infty$ sedemikian sehingga untuk setiap $u \in F(x)$, $\|u\| \leq L$. Dengan demikian, *set-valued* F terbatas lokal di x. Berdasarkan Teorema 3.13 dan Akibat 3.15, $x \in int(D(F))$. □

Teorema 3.17 Jika *set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ monoton maksimal, maka untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ tertutup dan konveks. Dengan kata lain *set-valued* F tertutup dalam X, sehingga grafik $Gr(F)$ tertutup dalam $X \times X$.

Bukti: Tentukan sembarang $x \in D(F)$. Misalkan $\mathcal{F} = \{G: G$ *set-valued* yang monoton dan relatif sama pada $D(F)\}$ dan $\mathcal{F}_x = \{G: G \in \mathcal{F}$ terdefinisi pada $x\}$. Misalkan barisan $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset F(x)$ sedemikian sehingga u_n konvergen ke u. Akan ditunjukkan $u \in F(x)$. Karena koleksi $\mathcal{F}_x$ memuat semua *set-valued* yang monoton dan terdefinisi pada x, maka terdapat $G \in \mathcal{F}_x$ sedemikian sehingga $u \in G(x)$. Karena *set-valued* F monoton maksimal, maka $G(x) \subset F(x)$. Karena $u \in G(x)$ dan $G(x) \subset F(x)$, maka $u \in F(x)$. Menurut Lemma 2.5.5, himpunan $F(x)$ tertutup.

Karena untuk setiap $x \in D(F)$, *set-valued* $F(x)$ tertutup maka menurut Definisi 2.7.5 *set-valued* F tertutup dalam X. Karena *set-valued* F tertutup dalam X, maka menurut Lemma 2.7.6 grafik $Gr(F)$ tertutup dalam $X \times X$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ konveks. Tentukan sembarang $x \in D(F)$ dan sembarang $u, v \in F(x)$. Misalkan $0 \leq \lambda \leq 1$. Akan ditunjukkan $\lambda u + (1-\lambda)v \in F(x)$. Tentukan sembarang $y \in D(F)$ dan sembarang $w \in F(y)$. Jika $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$, maka $v \in F(x)$ atau $u \in F(x)$. Selanjutnya akan ditunjukkan untuk $\lambda \neq 0$ atau $\lambda \neq 1$. Karena s*et-valued* F monoton maka

$$\langle x - y, u - w\rangle \geq 0 \text{ dan } \langle x - y, v - w\rangle \geq 0.$$

Karena $\lambda \geq 0$ dan $0 < \lambda < 1$, maka

$$\lambda\langle x - y, u - w\rangle \geq 0 \text{ dan } (1-\lambda)\langle x - y, v - w\rangle \geq 0$$

atau

$$\langle x - y, \lambda u - \lambda w\rangle \geq 0 \text{ dan } \langle x - y, (1-\lambda)v - (1-\lambda)w\rangle \geq 0.$$

Sehingga

$$\langle x - y, \lambda u - \lambda w\rangle + \langle x - y, (1-\lambda)v - (1-\lambda)w\rangle \geq 0.$$

Berdasarkan sifat dari *inner product* diperoleh

$$\langle x - y, \lambda u - \lambda w + (1-\lambda)v - (1-\lambda)w\rangle \geq 0.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\langle x - y, \lambda u + (1-\lambda)v - w\rangle \geq 0.$$

Karena *set-valued* F monoton maksimal, maka menurut Teorema 3.7, $\lambda u + (1-\lambda)v \in F(x)$. □

Teorema 3.18 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal dan $int\left(co\big(D(F)\big)\right) \neq \emptyset$, maka untuk setiap $x \in int\big(D(F)\big)$, himpunan $F(x)$ kompak. Jika x titik batas $D(F)$, maka himpunan $F(x)$ tidak kompak.

Bukti: Menurut Teorema 3.10 dan 3.13, untuk setiap $x \in int\big(D(F)\big)$, terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga himpunan $F\big(B_r(x)\big)$ terbatas. Karena $x \in B_r(x)$ dan $F(x) \subset F\big(B_r(x)\big)$, maka himpunan $F(x)$ terbatas. Selanjutnya dengan Teorema 3.17, untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ tertutup. Akibatnya, untuk setiap $x \in int\big(D(F)\big)$, himpunan $F(x)$ tertutup. Karena himpunan $F(x)$ tertutup dan terbatas, maka menurut Teorema 2.5.10, himpunan $F(x)$ kompak. Misalkan x titik batas $D(F)$. Menurut Lemma 3.9, himpunan $F(x)$ memuat paling sedikit satu separuh garis, sehingga menurut Teorema 3.10, himpunan $F(x)$ tidak terbatas. Karena himpunan $F(x)$ tertutup tetapi tidak terbatas maka himpunan $F(x)$ tidak kompak. □

Berdasarkan Teorema-teorema di atas, jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal, himpunan $S \subset D(F)$ konveks sedemikian sehingga $int(S) \neq \emptyset$, dan himpunan $A \subset X$ terbatas sedemikian sehingga untuk setiap $x \in S$, $F(x) \cap A \neq \emptyset$, maka

1. *set valued* F monoton,
2. himpunan $int\big(D(F)\big)$ dan $\overline{D(F)}$ konveks,
3. *set valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int\big(D(F)\big)$ tetapi tidak terbatas lokal di batas $D(F)$,
4. untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ tetutup dan konveks. Dengan kata lain, *set-valued* F tertutup dalam X, sehingga grafik $Gr(F)$ tertutup dalam $X \times X$,
5. untuk setiap $x \in int\big(D(F)\big)$, himpunan $F(x)$ kompak. Tetapi himpunan $F(x)$ tidak kompak di batas $D(F)$.

Akibat 3.19 Jika *set-valued* $F: D(F) \to P_o(X)$ monoton maksimal maka karakteristik *set-valued* F adalah kelima kriteria di atas.

Bukti: Karena setiap *set valued* yang monoton maksimal adalah *set-valued* yang monoton, maka kriteria yang pertama terpenuhi. Misalkan himpunan $int\Big(co\big(D(F)\big)\Big) = \emptyset$. Berdasarkan Teorema 3.13, $int\Big(co\big(D(F)\big)\Big) = int\big(D(F)\big)$. Sehingga himpunan $int\big(D(F)\big) = \emptyset$. Karena *set-valued* F terdefinisi pada $D(F)$ maka terdapat $x \in D(F)$ sedemikian sehingga $F(x) \neq \emptyset$. Karena $int\big(D(F)\big) = \emptyset$, maka x adalah titik pada batas $D(F)$. Dengan demikian, $F(x) \neq \emptyset$, untuk x titik pada batas $D(F)$ dan $F(x) = \emptyset$, untuk yang lainnya. Karena *set-valued* F monoton maksimal dan x adalah titik pada batas $D(F)$, maka himpunan $F(x)$ tidak terbatas lokal. Sehingga kriteria kedua, ketiga, keempat dan kelima terpenuhi.

Misalkan himpunan $int\Big(co\big(D(F)\big)\Big) \neq \emptyset$. Berdasarkan Teorema 3.13, kriteria pertama sampai dengan kriteria kelima terpenuhi. Selanjutnya, jika ditinjau dari Teorema 3.10, setiap *set-valued* yang monoton maksimal memuat himpunan konveks subset $D(F)$ dan himpunan terbatas subset X sedemikian sehingga syarat cukup Teorema 3.10 terpenuhi. □

Contoh 3.20 Diberikan *set-valued* $F: D(F) \to P_o(\mathbb{R})$ dengan $D(F) = [-1,1]$ sebagai berikut

$$F(x) = \begin{cases} [1,\infty), & x = 1 \\ x^3, -1 < x < 1 \\ (-\infty,-1], & x = -1 \end{cases}.$$

Berdasarkan Contoh 2.7.14, *set-valued* F monoton maksimal.

Selanjutnya, *set-valued* F akan diselidiki karakteristiknya dengan menggunakan teorema-teorema di atas. Karena himpunan $int\left(co\big(D(F)\big)\right) \neq \emptyset$, maka menurut Teorema 3.10 dan 3.13, himpunan

$$int\big(D(F)\big) = int\left(co\big(D(F)\big)\right) = int\,\{[-1,1]\} = (-1,1)$$

tidak kosong, terbuka dan konveks serta himpunan $\overline{D(F)} = \overline{int\big(D(F)\big)} = \overline{int\left(co\big(D(F)\big)\right)} = [-1,1]$ tidak kosong, tertutup dan konveks. Di samping itu, *set-valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $(-1,1)$ dan tidak terbatas lokal di $x = -1$ dan $x = 1$. Menurut Teorema 3.17, untuk setiap $x \in [-1,1]$, himpunan $F(x)$ tertutup dan konveks, sehingga *set-valued* F dan grafik $G(F)$ tertutup. Berdasarkan Teorema 3.18, untuk setiap $x \in (-1,1)$, himpunan $F(x)$ kompak, tetapi untuk $x = 1$ dan $x = -1$, himpunan $F(x)$ tertutup, tetapi tidak terbatas, sehingga $F(x)$ tidak kompak.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Misalkan X adalah ruang Hilbert real. Jika *set-valued* $F: D(F) \rightarrow P_o(X)$ monoton maksimal, maka karakteristik *set-valued* tersebut adalah sebagai berikut:

1. *set-valued* F monoton,
2. himpunan $int\big(D(F)\big)$ dan $\overline{D(F)}$ konveks,
3. *set valued* F terbatas lokal di setiap titik dalam $int\big(D(F)\big)$, tetapi tidak terbatas lokal di batas $D(F)$,
4. untuk setiap $x \in D(F)$, himpunan $F(x)$ tetutup dan konveks. Dengan kata lain *set-valued* F tertutup dalam X sehingga grafik $Gr(F)$ tertutup $X \times X$,
5. untuk setiap $x \in int\big(D(F)\big)$, himpunan $F(x)$ kompak. Tetapi himpunan $F(x)$ tidak kompak di batas $D(F)$.

4.2 Saran

Berdasarkan beberapa uraian di atas, disarankan untuk diadakan analisis lanjutan tentang karakteristik fungsi *set-valued* yang monoton maksimal di ruang dual.

DAFTAR PUSTAKA

Anonim[1]. 2008. Convex Sets. http://www.eng.ucy.ac.cy/toumpis/courses/ECE635/convex_sets.pdf. Diakses pada tanggal 23 Oktober 2008

Anonim[2]. 2008. Basic Definitions and Theorems of Topology. http://www.barigozzi.eu/teaching/prereq1_topology.pdf. Diakses pada tanggal 29 Oktober 2008

Anonim[3]. 2008. Basic Functional Analysis. Texas Tech University. http://texas.math.ttu.edu/~gilliam/classes_fall00/5310_Ch2_fall00.pdf. Diakses pada tanggal 3 Desember 2008

Apreutesei, N. C. 2003. *Finite Difference Schemes with Monotone Operators*. Hindawi Publishing Corporation. Departement of Mathematics, Technical University "Gh. Asachi" of Iasi. Romania

Beldiman, M. 2007. *Weighted Variational Inequalities with Set-valued Mappings*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., vol. 52, no. 3: 315–327

Borwein, J. M., Aubin, J. P. dan Frankowska, H. 1992. *Book Review*: *Set-valued Analysis*. System & Control, Foundation & Applications, Birkhauser, Boston, American Mathematical Society, vol. 26, no. 1:157-160

Borwein, J. M. 2005. *Maximal Monotonicity Via Analysis*. Faculty of Computer Science, Dalhousie University. Canada

Borges, C. J. R. 1967. *A Study of Multivalued Functions*. Pacific Jurnal Of Mathematics, vol. 23, no. 3: 451-461

Brezis, H. dan Browder, F. E. 1976. *Singular Hammerstein Equation and Maximal Monotone Operators*. American Mathematical Society, vol.82, no.4: 623-625

Browder, F. E. 1967. *Existence and Perturbation Theorems for Nonlinear Maximal Monotone Operators in Banach Space*. California Institute of Technology and University of Chicago

Burachik, R. S. dan Svaiter, B. F. 2002. *Maximal Monotonicity, Conjugation and The Duality Product*. American Mathematical Society, vol. 00, no. 0: 1-5

Crouzeix, J. P., Anaya, E. O. dan Sandoval, W. S. 2006. *A Construction of Maximal Monotone Extension of a Monotone Maps*. LIMOS, University of Blaise Pascal. France

Done, G. 2008. Topological Space. Departement Mathematics of King's Collage, London. http://www.mth.kcl.ac.uk/~iwilde/notes/fa1/fa1.pdf. Diakses pada tanggal 29 Desember 2008

Freund, R. M. 2004. Analysis of Convex Sets and Functions. Massachusetts Institute of Technology. http://ocw.mit.edu/NR/rdonlyres/Sloan-School-of-Management/15-084JSpring2004/60731B42-1133-4269-9502-1067267CE68/0/lec16_convex_sets.pdf. Diakses pada tanggal 23 November 2008

Gossez, J. P. 1970. *A Note on Multivalued Monotone Operator*. Michigan Math. J.:347-350

Hassouni, A. dan Jaddar, A. 2003. *On Generalized Monotone Multivalued with Aplications to Optimality Conditions in Generalized Convex Programming*. Jurnal of Inequality in Pure and Applied mathematics, vol. 4, issue 4, article 67

Heil, C. 2006. Functional Analysis Lecture Note. http://www.math.gatech.edu/~heil/6338/spring07. Diakses pada tanggal 23 November 2008

John, R. 1997. *Variational Inequalities and Pseudomonotone Functions: Some Characterizations*. Discussion Paper No. A-530, SFB 303, Universitat Bonn. University of Bonn

Joy, K. I. 2000. Vector Space. Computer Science Department, University of California, Davis. http://www.idav.ucdavis.edu/education/CAGDNotes/Vector-Spaces.pdf. Diakses pada tanggal 13 Oktober 2008

Kajotoni, M. M. 2007. Operator on Hilbert Space. African Institute for Mathematical Science (AIMS), South Africa. http://www.aims.ac.za/resources/archive/2006/meg.pdf. Diakses pada tanggal 23 Desember 2008

Kaplan, A. dan Tichatschke, R. 1996. *Proximal Methods for Variational Inequalities with Set-valued Monotone Operators.* University of Trier

Kartsatos, A. G. 1997. *An Invariance of Domain Result Multivalued Maximal Monotone Operators Whose Domains do not Necessarily Contain Any Open Sets*. American Mathematical Society, vol. 125, no. 5: 1469-1478

Kun, S. 1997. *Maximal Monotone Operators in the One Dimensional Case*. J. Korean Math, vol. 34, no. 2: 371-381

Lohne, A. 2007. *A Characterization of Maximal Monotone Operators*. Institut fur Mathematics. Germany

Luc, D. T. dan Schaible, S. 1995. *Generalized Monotone Nonsmooth Maps*. Jurnal of Convex Analysis, vol.3, no.2: 195-205

Minty, G. J. 1961. *On the Maximal Domain of a "Monotone" Function*. The University of Michigan. Michigan

Nachbar, J. 2007. Compactness. http://artsci.wustl.edu/~e4111jn/Compactness3.pdf. Diakses pada tanggal 23 Desember 2008

Nachbar, J. 2008. Convex Sets, Separation and Support. http://artsci.wustl.edu/~e511jn/Convexity.pdf. Diakses pada tanggal 23 Desember 2008

Park, S. 1995. *Generalized Leray-Shauder Principles for Compact Admissible Multifunction*. Jurnal of the Juliusz Center, vol. 3, no. 0: 271-277

Phelps, R. R. 1993. *Lecture on Maximal Monotone Operators*. arXiv: 9302209v1: 1-30

Popa, D. 2003. *A Representation of p-convex Set-valued Maps with Values in* $\mathbb{R}$. Studia Univ. "Babeş–Bolyai", Mathematica, vol. xlviii, no. 4

Rockafellar, R. T. 1968. *Convexity Properties of Nonlinear Maximal Monotone Operators*. University of Washington. Seattle, Washington: 74-77

Rockafellar, R. T. 1968. *Local Boundedness of Nonlinear Monotone Operators*. University of Washington. Seattle, Washington: 397-407

Schutt, C. 2006. Convex Geometry. http://analysis.math.uni-kiel.de/schuett/ConvexGeometry.pdf. Diakses pada tanggal 29 Desember 2008

Venkatasubramanian, S. 2007. Lecture 1: Convex Hull I. Computational Geometry, CP SC 5962/7962. http://www.cs.utah.edu/~suresh/5962/lectures/1.pdf. Diakses pada tanggal 17 Desember 2008

Weyer, J. 1976. *On Domain of Maximal Monotone Operators.* American Mathematical Society. Vol. 82, No. 3: 491-493