

**METODE *DOUBLE LINEAR REGRESSION* (DLR)
PADA ANALISIS PERMUKAAN RESPON ORDE KEDUA**

SKRIPSI

oleh :

**WAHYU FYKA WAHANANI
0310950052-95**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**



**METODE DOUBLE LINEAR REGRESSION (DLR)
PADA ANALISIS PERMUKAAN RESPON ORDE KEDUA**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

oleh :

**WAHYU FYKA WAHANANI
0310950052-95**



**PROGRAM STUDI STATISTIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
METODE *DOUBLE LINEAR REGRESSION* (DLR)
PADA ANALISIS PERMUKAAN RESPON ORDE KEDUA

oleh :
WAHYU FYKA WAHANANI
0310950052-95

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 12 Maret 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Statistika

Pembimbing I

Prof. Dr. Ir. Loekito Adi S., M.Agr
NIP. 130 518 961

Pembimbing II

Ir. Soepraptini, MSc
NIP. 130 518 968

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Wahyu Fyka Wahanani
NIM : 0310950052-95
Program Studi : Statistika
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul :
**METODE *DOUBLE LINEAR REGRESSION* (DLR) PADA
ANALISIS PERMUKAAN RESPON ORDE KEDUA**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
 2. Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.
- Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 12 Maret 2008
Yang menyatakan,

Wahyu Fyka Wahanani
NIM. 0310950052-95

**METODE DOUBLE LINEAR REGRESSION (DLR)
PADA ANALISIS PERMUKAAN RESPON ORDE KEDUA**

ABSTRAK

Metode permukaan respon merupakan suatu teknik statistika yang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis suatu kasus di mana respon dipengaruhi beberapa faktor dan bertujuan untuk menentukan titik optimal respon. Tujuan dari penelitian ini adalah menentukan karakteristik permukaan respon menggunakan model kanonik-B dan metode DLR sekaligus menentukan nilai maksimum/minimum kadar HC kendaraan bermotor pada model permukaan respon orde kedua berdasarkan Metode Kuadrat Terkecil Biasa (MKTB) dan metode DLR yang dipengaruhi oleh 4 faktor: X_1 (benzena), X_2 (aromatik), X_3 (E-20) dan X_4 (RVP). Selanjutnya, dilakukan perbandingan antara MKTB dan metode DLR untuk menentukan metode yang lebih baik berdasarkan Kuadrat Tengah Galat (KTG) masing-masing metode. Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder. Dari hasil analisis didapatkan bahwa karakteristik permukaan respon dalam kasus kadar HC pada kendaraan bermotor yang dipengaruhi oleh faktor-faktor tersebut adalah minimum. MKTB merupakan metode yang lebih baik karena mempunyai KTG yang jauh lebih kecil dibandingkan metode DLR untuk menentukan nilai minimum dengan kadar HC sebesar 127.67% dari volume bensin yang terbakar, sedangkan faktor-faktor yang mempengaruhi nilai minimum respon: benzena=0.74% volume, aromatik=19.74% volume, E-20=34.31% volume dan RVP=5.22 psi.

DOUBLE LINEAR REGRESSION (DLR) METHOD IN SECOND ORDER RESPONSE SURFACE ANALYSIS

ABSTRACT

Response surface method is a statistical technique used for the modeling and problem analysis in which a response of interest is influenced by several variables and the objective is to find the optimum point of this response. The objective of this study is to determine the characteristic of response surface using B-canonical model and DLR method and determine the maximum/minimum value of HC's rate of motor vehicles in second order response surface model based on *Ordinary Least Square* (OLS) and DLR method which is influenced by 4 factors: X_1 (benzena), X_2 (aromatic), X_3 (E-20) and X_4 (RVP). Then, comparison of OLS and DLR method done to determine a better method based on *Mean Square Error* (MSE) each method. The data which is used in this study is secondary data. The analysis result of characteristic of response surface in case of HC's rate of motor vehicles which is influenced by those factors is minimum. OLS method is better than DLR to determine the minimum value because OLS has MSE that is very smaller than DLR's with HC's rate is 127.67% of gasoline volume that burnt, and the factors that influenced the minimum value of response: benzena=0.74% volume, aromatic=19.74% volume, E-20=34.31% volume and RVP=5.22 psi.



KATA PENGANTAR

Assalamu'alaikum Wr. Wb.

Alhamdulillah puji syukur kehadiran Allah SWT, Robb semesta alam, yang telah melimpahkan Rahmat dan Hidayah-Nya sehingga penulisan skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Skripsi yang berjudul **Metode *Double Linear Regression* (DLR) pada Analisis Permukaan Respon Orde Kedua** ini merupakan salah satu prasyarat kelulusan di Program Studi Statistika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penulis menyadari selama penyusunan skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, bimbingan, dorongan dan motivasi dari berbagai pihak. Oleh sebab itu, dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan terima kasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. Loekito Adi Soehono, M.Agr selaku Pembimbing I yang telah membantu dan mengarahkan selama penyusunan skripsi ini.
2. Ibu Ir. Soepraptini, MSc selaku Pembimbing II yang telah mengarahkan penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Ir. Ni Wayan Surya W, MS, Ibu Ir. Heni Kusdarwati, MS dan Ibu Eni Sumarminingsih, SSi, MM selaku dosen penguji yang telah memberikan masukan pada skripsi ini.
4. Bapak Dr. Agus Suryanto, MSc selaku Ketua Jurusan Matematika.
5. Ibu, Ayah dan Adikku tercinta yang telah dengan tulus ikhlas memberikan kasih sayang dan doanya.
6. Teman-teman Statistika Brawijaya atas kebersamaannya selama ini dan Karyawan dan Staf Pengajaran Matematika.
7. My beloved sister in KR 33, terima kasih untuk semuanya serta semua pihak yang telah membantu penyusunan skripsi ini.

Kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi kesempurnaan penelitian ini. Penulis berharap semoga penelitian ini dapat bermanfaat.

Wassalamu'alaikum Wr.Wb

Malang, Maret 2008

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK/ABSTRACT	iv
KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vi
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR TABEL	ix
DAFTAR LAMPIRAN	x
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Perumusan Masalah	3
1.3 Batasan Masalah	3
1.4 Tujuan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Metode Permukaan Respon	5
2.2 Metode Kuadrat Terkecil Biasa (MKTB)	6
2.3 Rancangan Permukaan Respon Orde Pertama ...	7
2.4 Rancangan Permukaan Respon Orde Kedua	9
2.5 Uji Ketepatan Model (<i>Lack Of Fit-Test</i>)	11
2.6 Analisis Permukaan Respon Orde Kedua	13
2.6.1 Lokasi Titik Stasioner	13
2.7 Analisis Kanonik	14
2.7.1 Model Kanonik-B	14
2.7.2 Model Kanonik-A	15
2.8 Karakteristik Permukaan Respon	16
2.9 Metode <i>Double Linear Regression</i> (DLR)	18
2.10 Senyawa Hidrokarbon (HC) pada Gas Buang Kendaraan Bermotor	19
BAB III BAHAN DAN METODE	
3.1 Sumber Data	21
3.2 Metode Analisis	21

BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN

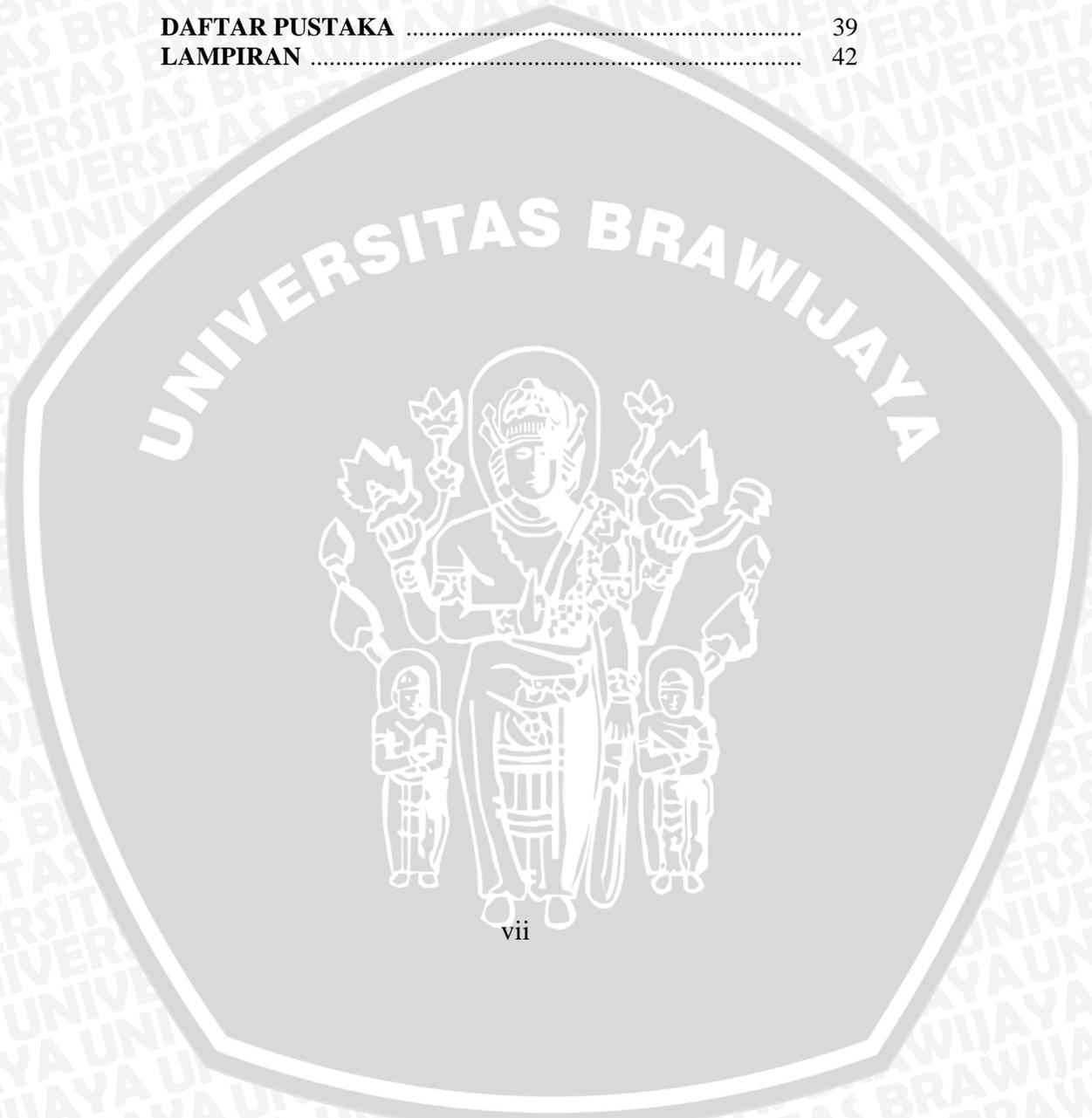
4.1	Analisis Model Orde Pertama	27
4.2	Analisis Model Polinomial Orde Kedua	29
4.3	Metode DLR (<i>Double Linear Regression</i>)	32
4.4	Pembahasan	36

BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

5.1	Kesimpulan	38
5.2	Saran	38

DAFTAR PUSTAKA	39
-----------------------------	----

LAMPIRAN	42
-----------------------	----



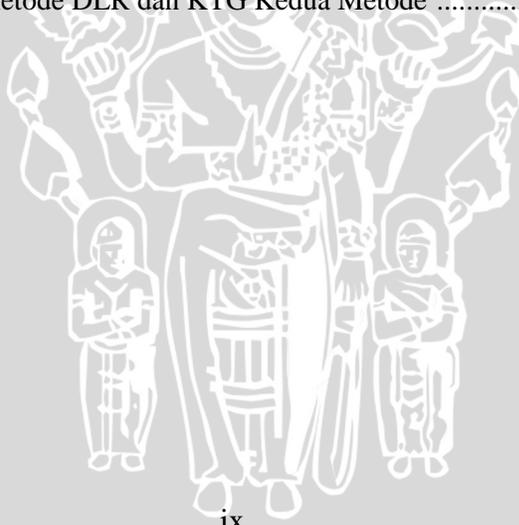
DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Karakteristik Sistem Permukaan Respon Orde Kedua	17
Gambar 3.1 Diagram alir analisis permukaan respon orde kedua	24
Gambar 3.2 Diagram alir metode DLR pada analisis permukaan respon orde kedua	25
Gambar 3.3 Diagram alir penentuan titik maksimum/minimum respon pada analisis permukaan respon orde kedua	26



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Rancangan Percobaan Orde Pertama	8
Tabel 2.2 Komponen-Komponen CCRD	11
Tabel 2.3 Analisis Ragam Pengujian <i>Lack of Fit</i>	12
Tabel 4.1 Hubungan Antara Nilai Kode dan Nilai Pengamatan yang Sebenarnya Pada Hasil Pengamatan HC	27
Tabel 4.2 Pengujian Koefisien Regresi Secara Simultan	28
Tabel 4.3 Pengujian Koefisien Regresi Secara Parsial	28
Tabel 4.4 Pengujian Koefisien Regresi Secara Simultan	29
Tabel 4.5 Pengujian Koefisien Regresi Secara Parsial	29
Tabel 4.6 Pengujian Koefisien Regresi Secara Simultan Model Orde Kedua Tanpa Interaksi Faktor	31
Tabel 4.7 Pengujian Koefisien Regresi Secara Parsial Model Orde Kedua Tanpa Interaksi Faktor	31
Tabel 4.8 Pendugaan Nilai Eigen, Salah Baku dan Selang Kepercayaan 100(1- α)% bagi λ_i dengan Metode DLR	34
Tabel 4.9 Model Polinomial Orde Kedua dan Karakteristik Permukaan Respon pada MKTB dan DLR	35
Tabel 4.10 Nilai Minimum Respon dengan MKTB dan Metode DLR dan KTG Kedua Metode	35



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Nilai pengamatan HC yang sebenarnya	42
Lampiran 2. Nilai kode rancangan orde pertama pada hasil pengamatan HC	43
Lampiran 3. Nilai kode rancangan percobaan orde kedua pada hasil pengamatan HC	44
Lampiran 4. Pendugaan parameter model orde pertama pada hasil pengamatan HC	45
Lampiran 5. Pendugaan parameter model polinomial orde kedua pada hasil pengamatan HC	46
Lampiran 6. Pendugaan parameter model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor pada hasil pengamatan HC	47
Lampiran 7. Rotasi faktor	48
Lampiran 8. Pendugaan parameter model polinomial orde kedua setelah rotasi	49
Lampiran 9. Kuadrat Tengah Galat (KTG) pada metode DLR	50
Lampiran 10a. Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 di mana X_3 dan X_4 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode0) dan rendah (nilai kode -1)	51
Lampiran 10b. Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 di mana X_2 dan X_4 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode0) dan rendah (nilai kode -1)	58
Lampiran 10c. Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 di mana X_2 dan X_3 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode0) dan rendah (nilai kode -1)	65
Lampiran 10d. Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 di mana X_1 dan X_4 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode0) dan rendah (nilai kode -1)	72
Lampiran 10e. Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 di mana X_1 dan X_3 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode0) dan	

	rendah (nilai kode -1)	79
Lampiran 10f.	Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 di mana X_1 dan X_2 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1)	86



BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam sebuah penelitian, sering dijumpai adanya perlakuan yang merupakan tingkatan atau level dari suatu peubah bebas (faktor) yang kemudian disebut perlakuan kuantitatif sehingga diperoleh peubah tidak bebas (respon) yang merupakan tanggapan dari perlakuan yang diberikan. Perlakuan-perlakuan tersebut ditujukan untuk menentukan tingkatan atau level yang akan memberikan respon optimum. Respon-respon tersebut dicari untuk mengetahui apakah respon tersebut bersifat linear, artinya dari perlakuan terendah ke tertinggi masih memberikan kenaikan atau penurunan secara proporsional atautkah respon bersifat kuadratik yang artinya dalam kisaran perlakuan yang diberikan sudah dicapai respon yang optimum dan mungkin saja respon tersebut mempunyai derajat yang lebih tinggi dari kuadratik.

Respon dapat dikaitkan dengan persamaan polinomial. Oleh karena itu, perlakuan diuraikan ke dalam tingkat-tingkat respon: linear, kuadratik, kubik atau tingkat respon yang lebih tinggi lagi beserta komponen-komponen pembandingannya. Bentuk hubungan antara perlakuan dengan respon inilah yang mendasari terbentuknya kurva respon. Kurva respon hanya memiliki satu respon (Y) dan satu faktor (X), sedangkan apabila memiliki faktor lebih dari satu (X_i) maka bentuk respon akan berupa sebuah permukaan yang selanjutnya disebut permukaan respon.

Metode permukaan respon pertama kali diperkenalkan oleh Box dan Wilson (1951), yaitu suatu teknik statistika yang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis suatu permasalahan di mana sebuah respon dipengaruhi oleh beberapa faktor dan bertujuan untuk menentukan titik optimal respon (Montgomery, 2005).

Plot kontur permukaan respon dapat membantu dalam hal interpretasi geometrik permukaan respon jika pada model polinomial orde kedua terdapat 3 faktor atau kurang. Dengan plot kontur, peneliti dapat menentukan apakah permukaan respon memiliki titik maksimum, minimum atau titik pelana di sekitar daerah penelitian. Tetapi apabila terdapat lebih dari 3 faktor yang terlibat, plot kontur sulit dibuat dan metode lain dibutuhkan untuk mengatasi permasalahan ini. Box dan Wilson (1951) dalam Bisgaard dan

Ankenman (1998) menjelaskan bahwa apabila lebih dari 3 faktor, karakteristik permukaan respon dapat dijelaskan dengan analisis kanonik-B di mana tanda dan besarnya nilai eigen pada parameter orde kedua diperhitungkan. Nilai eigen bernilai positif mengindikasikan bahwa titik stasioner adalah minimum dan bernilai negatif mengindikasikan titik stasioner maksimum. Sedangkan nilai eigen yang mempunyai tanda campuran menunjukkan bahwa titik stasioner adalah titik pelana (*saddle point*).

Cara lain untuk menentukan karakteristik permukaan respon adalah dengan metode *Double Linear Regression* (DLR), yaitu suatu metode pendugaan salah baku dan selang kepercayaan bagi nilai eigen untuk menentukan kondisi maksimum, minimum atau titik pelana di sekitar kondisi stasioner. Metode DLR melibatkan regresi linier dua kali berturut-turut di mana masing-masing regresi membentuk model polinomial orde kedua. Kesederhanaan secara perhitungan membuat metode DLR semakin mudah dijelaskan dan digunakan (Bisgaard dan Ankenman, 1998).

Pada analisis permukaan respon, nilai optimum respon perlu ditentukan. Untuk mencari nilai optimum respon, diperlukan fungsi biaya dan jika tidak terdapat fungsi biaya, nilai respon yang perlu ditentukan adalah nilai respon maksimum/minimum. Metode yang sering digunakan untuk mendapatkan nilai respon maksimum/minimum adalah Metode Kuadrat Terkecil Biasa (MKTB) yaitu suatu teknik pendugaan parameter untuk mendapatkan model yang menjelaskan hubungan antara X_i dan Y . Turunan pertama dari model yang didapat terhadap X_i dan sama dengan nol akan menghasilkan faktor-faktor yang memaksimalkan atau meminimumkan respon. Selain itu, metode DLR yang menggunakan model kanonik-A juga dapat digunakan untuk menentukan nilai maksimum/minimum respon.

Pemerintah dengan program langit biru berupaya dan bertujuan untuk mengendalikan dan mencegah pencemaran udara serta mewujudkan perilaku sadar lingkungan baik dari sumber tidak bergerak (industri) maupun sumber bergerak yaitu kendaraan bermotor. Oleh karena itu, secara berkala emisi gas buang kendaraan wajib diperiksa. Ikatan hidrokarbon (HC) pada bahan bakar hanya akan bereaksi dengan oksigen pada saat proses pembakaran sempurna dan menghasilkan air (H_2O) serta karbondioksida (CO_2) sedangkan nitrogen akan keluar sebagai N_2 . Proses pembakaran tidak

sempurna akan semakin banyak menghasilkan HC yang merupakan salah satu emisi gas buang beracun (Anonymous, 2006).

Data yang digunakan pada penelitian ini adalah data sekunder dari penelitian Bashori (2000) di mana respon yang diteliti adalah kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor dan faktor-faktor yang berpengaruh yaitu benzena, aromatik, E-20 dan RVP.

Dengan dasar inilah akan dicoba untuk mempelajari, menerapkan dan memperkenalkan penentuan karakteristik permukaan respon dengan model kanonik-B dan selang kepercayaan bagi nilai eigen menggunakan metode DLR. Selain itu, ditentukan pendugaan nilai maksimum/minimum respon dengan MKTB dan metode DLR yang kemudian akan dibandingkan berdasarkan Kuadrat Tengah Galat (KTG) masing-masing metode untuk menentukan metode yang lebih baik.

1.2 Perumusan Masalah

Permasalahan yang muncul adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana karakteristik permukaan respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor pada model permukaan respon orde kedua yang dipengaruhi oleh 4 faktor berdasarkan MKTB, metode DLR dan plot kontur ?
2. Pada kondisi berapa, faktor-faktor dapat memaksimalkan/meminimumkan kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor dengan MKTB dan metode DLR ?
3. Metode mana yang lebih baik antara MKTB atau metode DLR sebagai metode untuk mendapatkan nilai maksimum/minimum respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor berdasarkan KTG ?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini dibatasi pada:

1. Orde yang digunakan pada analisis permukaan respon adalah orde pertama dan kedua dengan empat faktor dan satu peubah respon.
2. Karakteristik permukaan respon yang dipelajari meliputi permukaan respon maksimum, minimum, dan titik pelana (*saddle point*).
3. Pada kasus ini tidak menggunakan fungsi biaya sehingga nilai optimum respon tidak dapat ditentukan.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan perumusan masalah di atas, maka tujuan penulisan ini adalah:

1. Mempelajari MKTB, metode DLR dan plot kontur untuk menentukan karakteristik permukaan respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor pada model permukaan respon orde kedua yang dipengaruhi oleh 4 faktor dan penerapannya.
2. Menentukan nilai maksimum/minimum kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor yang dipengaruhi oleh 4 faktor dengan MKTB dan metode DLR.
3. Membandingkan antara MKTB dan metode DLR berdasarkan KTG masing-masing metode.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat penulisan skripsi adalah:

1. Menambah ilmu pengetahuan mahasiswa, tentang salah satu metode analisis permukaan respon yaitu metode DLR.
2. Menginformasikan bahwa metode DLR merupakan suatu metode alternatif untuk menentukan karakteristik permukaan respon menggunakan selang kepercayaan bagi nilai eigen untuk model permukaan respon orde kedua.



BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Metode Permukaan Respon

Metode permukaan respon adalah suatu teknik statistika yang digunakan untuk memodelkan dan menganalisis suatu kasus di mana respon dipengaruhi beberapa faktor dan bertujuan untuk mengoptimalkan respon. Peubah yang dinotasikan dengan X_1, X_2, \dots, X_k yang dalam analisis permukaan respon disebut sebagai faktor diasumsikan sebagai peubah kontinyu dan ditetapkan oleh peneliti. Sedangkan respon yang dinotasikan dengan Y merupakan peubah yang diasumsikan sebagai peubah acak (Montgomery, 2005).

Myers dan Montgomery (2005) menjelaskan bahwa secara umum, fungsi permukaan respon dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{Y}_i = f(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}) + \varepsilon_i ; i = 1, 2, \dots, n \tag{2.1}$$

di mana:

- \hat{Y}_i = respon ke- i , $i = 1, 2, \dots, n$
- $X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{ki}$ = k faktor pada pengamatan ke- i , $i = 1, 2, \dots, n$
- k = banyaknya faktor dalam model
- n = banyaknya pengamatan
- ε_i = kesalahan pendugaan (error) ke- i yang diasumsikan IIDN $(0, \sigma^2)$.

Menurut Gaspersz (1992), bentuk hubungan yang sesungguhnya antara respon dan faktor-faktor yang terlibat tidak diketahui. Dalam kasus semacam ini, maka langkah pertama dari metode permukaan respon adalah mencari atau menentukan suatu pendekatan yang cocok untuk menggambarkan hubungan fungsional yang tepat antara respon dan faktor-faktor yang dispesifikasikan. Biasanya, pada tahap awal dirumuskan model regresi polinomial dengan orde yang rendah, yaitu orde pertama yang tidak lain merupakan model regresi linier. Sehingga model penduga respon orde pertama adalah:

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k \tag{2.2}$$

Model polinomial dengan derajat yang lebih tinggi dapat dirumuskan jika terdapat lengkungan (*curvature*) dalam sistem, seperti misalnya model penduga respon polinomial orde kedua adalah sebagai berikut:

$$\hat{Y} = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j>1}^k \beta_{ij} X_i X_j \quad (2.3)$$

di mana:

Y_i = respon

β_0 = intersep pada model

β_i = koefisien regresi faktor ke- i

β_{ii} = koefisien regresi interaksi faktor ke- i dan faktor ke- i

β_{ij} = koefisien regresi interaksi faktor ke- i dan faktor ke- j

X_i = faktor ke- i , $i = 1, 2, \dots, k$

X_j = faktor ke- j , $j = 1, 2, \dots, k$

k = banyaknya faktor dalam model

ε_i = kesalahan pendugaan (error) yang diasumsikan IIDN $(0, \sigma^2)$

Untuk menduga parameter model, metode pendugaan yang digunakan adalah Metode Kuadrat Terkecil Biasa (MKTB).

2.2 Metode Kuadrat Terkecil Biasa (MKTB)

Menurut Draper dan Smith (1992), Metode Kuadrat Terkecil Biasa (MKTB) merupakan teknik pengepasan garis lurus “terbaik” pada data tertentu untuk menghubungkan peubah X dan Y . MKTB banyak digunakan dalam analisis regresi linier untuk mendapatkan penduga bagi parameter.

Dari persamaan (2.2) dan (2.3) diperoleh galat:

$$\varepsilon = Y - X\beta \quad (2.4)$$

dan jumlah kuadrat:

$$\begin{aligned} \varepsilon' \varepsilon &= (Y - X\beta)'(Y - X\beta) \\ &= Y'Y - \beta' X' Y - Y' X \beta + \beta' X' X \beta \\ &= Y'Y - 2\beta' X' Y + \beta' X' X \beta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Karena sifat putaran matriks yaitu $(X\beta)' = \beta' X'$ maka bila skalar $\beta' X' Y$ diputar akan menghasilkan skalar $Y' X \beta$ yang bernilai sama. Untuk mendapatkan β yang menyebabkan $\varepsilon' \varepsilon$ minimum maka persamaan (2.5) diturunkan terhadap β dan disamadengankan nol yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial\boldsymbol{\beta}} &= 0 \\ \frac{\partial(\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}} &= 0 \\ -2\mathbf{X}'\mathbf{Y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= 0 \\ 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= 2\mathbf{X}'\mathbf{Y} \\ \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= \mathbf{X}'\mathbf{Y} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Persamaan (2.6) disebut persamaan normal dan jika setiap ruas persamaan ini dikalikan $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ akan dihasilkan:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (2.7)$$

Karena $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = \mathbf{I}$, di mana \mathbf{I} adalah matriks identitas maka diperoleh koefisien regresi contoh:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \quad (2.8)$$

2.3 Rancangan Permukaan Respon Orde Pertama

Penentuan model terbaik dalam analisis permukaan respon didahului oleh pemilihan rancangan percobaan yang akan digunakan. Untuk dapat membangun model orde pertama pada persamaan (2.2) diperlukan sejumlah data percobaan yang bisa dibangkitkan menggunakan rancangan permukaan respon. Rancangan permukaan respon orde pertama yang sering digunakan adalah faktorial 2^k . Rancangan faktorial 2^k dikenal sebagai rancangan orde pertama yang bersifat diagonal di mana sifat keortogonalan itu ditunjukkan dalam matrik $(\mathbf{X}'\mathbf{X})$ yang memiliki elemen-elemen nol di luar diagonal utama. Dengan adanya sifat keortogonalan akan memudahkan proses komputasi dalam menduga parameter model persamaan (2.2) (Bashori, 2000).

Menurut Gaspersz (1992), rancangan faktorial 2^k digunakan untuk percobaan yang terdiri dari k faktor di mana masing-masing faktor diberi kode yang bersifat baku yaitu -1 dan +1, sehingga setiap faktor terdiri atas dua level.

Menurut Montgomery (2005), pengujian ketepatan model (*lack of fit*) orde pertama tidak dapat dilakukan jika tidak ada pengamatan yang berulang. Data pengamatan yang berulang diperlukan agar galat murni (*pure error*) dapat dihitung. Dengan demikian pengujian

ketepatan model (*lack of fit*) dapat dilakukan. Pada metode permukaan respon jika menginginkan adanya pengamatan yang berulang, maka percobaan dapat diulang pada titik pusat ($X_i = 0$). Dengan demikian, data pengamatan pada perlakuan dapat ditambah. Banyaknya ulangan dapat ditetapkan oleh peneliti berdasarkan berbagai pertimbangan yang ada. Bentuk rancangan faktorial 2^k dengan penambahan beberapa titik pengamatan pada pusat ($X_i = 0, i = 1, 2, \dots, k$) sering disebut sebagai rancangan faktorial 2^k dengan perluasan pada titik pusat. Penambahan titik pusat pada rancangan faktorial 2^k tidak mempengaruhi besaran koefisien regresi (β_i , untuk $i = 1, 2, \dots, k$), tetapi hanya mempengaruhi besaran konstanta β_0 dimana konstanta β_0 akan bernilai sama dengan rata-rata respon dari seluruh pengamatan, karena pada dasarnya konstanta β_0 dihitung sebagai berikut:

$$\beta_0 = \frac{\sum Y_i}{n}; i = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

di mana:

β_0 = intersep

$\sum Y_i$ = jumlah respon

n = ukuran contoh

Penambahan titik pusat pada rancangan faktorial 2^k akan meningkatkan ukuran contoh (*sample size*). Demikian pula, penambahan titik pusat pada rancangan faktorial 2^k tidak akan mempengaruhi sifat-sifat keortogonalan dari rancangan tersebut (Gaspersz, 1992).

Menurut Bashori (2000), rancangan percobaan orde pertama untuk 4 faktor dengan jumlah percobaan sebanyak 20 yang berasal dari percobaan faktorial 2^4 ditambah 4 perulangan di titik pusat. dapat dijelaskan pada Tabel 2.1 berikut :

Tabel 2.1 Rancangan Percobaan Orde Pertama

run	X_1	X_2	X_3	X_4
1	-1	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	1
3	-1	-1	1	-1
4	-1	-1	1	1
5	-1	1	-1	-1
6	-1	1	-1	1
7	-1	1	1	-1
8	1	1	1	1
9	1	-1	-1	-1
10	1	-1	-1	1
11	1	-1	1	-1
12	1	-1	1	1
13	1	1	-1	-1
14	1	1	-1	1
15	1	1	1	-1
16	1	1	1	1
17	0	0	0	0
18	0	0	0	0
19	0	0	0	0
20	0	0	0	0

2.4 Rancangan Permukaan Respon Orde Kedua

Menurut Gaspersz (1992), suatu rancangan percobaan untuk membangun model polinomial orde kedua harus memiliki paling sedikit tiga level dari setiap faktor yang dicobakan agar parameter model dapat diduga. Rancangan percobaan itu dipilih berdasarkan pertimbangan, antara lain:

0. Ketelitian relatif dalam menduga koefisien parameter model.
0. Banyaknya pengamatan yang dibutuhkan.

Gaspersz (1992) juga menyatakan bahwa rancangan percobaan yang digunakan untuk membangun model orde kedua adalah rancangan faktorial 3^k , yaitu suatu percobaan faktorial yang masing-masing faktor terdiri dari tiga level. Untuk faktor yang dicobakan berukuran kecil, misalnya $k=2$ atau $k=3$, maka rancangan percobaan faktorial 3^k adalah 3^2 atau 3^3 cukup baik untuk digunakan. Namun apabila ukuran faktor yang dicobakan adalah besar, misalnya $k=4$ maka penggunaan rancangan faktorial 3^k akan membutuhkan data

pengamatan sebanyak 81 sehingga mengakibatkan penggunaan rancangan faktorial 3^k menjadi tidak efisien. Sebagai misal, apabila $k=2$ maka penggunaan rancangan faktorial $3^k=3^2$ akan membutuhkan paling sedikit 9 buah data pengamatan dalam menduga model polinomial orde kedua. Jika setiap kombinasi perlakuan diulang sebanyak 2 kali, maka membutuhkan $9 \times 2 = 18$ buah data pengamatan. Demikian pula jika $k=3$, maka penggunaan rancangan faktorial $3^k=3^3$ akan membutuhkan paling sedikit 27 buah data pengamatan dalam menduga model orde kedua. Begitu pula jika $k=4$, berarti membutuhkan paling sedikit $3^k=3^4=81$ buah data pengamatan dalam menduga model orde kedua. Keadaan ini akan meningkat secara cepat apabila k berukuran besar. Berdasarkan kenyataan ini, maka para peneliti lebih suka menggunakan rancangan permukaan respon orde kedua yang tergolong ke dalam kelompok “rancangan dapat-putar” (*rotatable design*). Penggunaan rancangan percobaan dari kelompok “rancangan dapat-putar” dalam membangun model orde kedua akan menghemat bahan percobaan karena banyaknya data pengamatan yang diperlukan dalam membangun model orde kedua jauh lebih sedikit. Salah satu bentuk rancangan permukaan respon orde kedua yang telah diterapkan secara luas adalah “rancangan komposit pusat” (*Central Composite Design*). Rancangan komposit pusat adalah rancangan faktorial orde pertama (2^k) yang diperluas melalui penambahan titik-titik pengamatan pada pusat agar memungkinkan pendugaan parameter permukaan respon orde kedua. Dengan demikian, rancangan komposit pusat dapat dipandang sebagai suatu rancangan faktorial sebagian (*fractional factorial*) yang diperluas dengan matrik tambahan berikut :

$$\begin{matrix}
 X_1 & X_2 & X_3 & \cdots & X_k \\
 \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 -\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & -\alpha & \cdots & 0 \\
 0 & 0 & \alpha & \cdots & 0 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha \\
 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

Nilai-nilai α dalam matrik tambahan terhadap rancangan faktorial 2^k dipilih oleh peneliti. Berbagai pertimbangan dapat digunakan dalam memilih nilai α , namun pada umumnya peneliti menetapkan nilai α berdasarkan formula berikut:

$$\alpha = \begin{cases} 2^{k/4}, & \text{untuk ulangan penuh} \\ 2^{(k-1)/4}, & \text{untuk setengah ulangan} \end{cases} \quad (2.10)$$

Secara umum, rancangan komposit pusat dapat didefinisikan sebagai suatu rancangan percobaan faktorial 2^k atau faktorial sebagian (biasanya diberi kode +1 dan -1) ditambah dengan $2k$ titik-titik sumbu $(\pm \alpha, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, \pm \alpha, 0, \dots, 0)$, $(0, 0, \pm \alpha, \dots, 0)$, ..., $(0, 0, 0, \dots, \pm \alpha)$ serta n_0 titik pusat $(0, 0, \dots, 0)$. Dalam hal ini, α ditentukan berdasarkan persamaan (2.10) sedangkan n_0 adalah konstanta tertentu. Sifat rancangan komposit pusat yang dapat-putar (*Central Composite Rotatable Design/CCRD*) selain dikendalikan melalui penetapan nilai α berdasarkan persamaan (2.10) juga dikendalikan melalui pemilihan banyaknya titik pusat (n_0). Pemilihan n_0 yang tepat akan membuat rancangan komposit pusat bersifat ortogonal atau dapat pula dibuat sehingga menjadikan suatu rancangan yang memiliki ketelitian seragam (*uniform precision design*).

Rancangan dapat putar (*rotatable design*) untuk berbagai k faktor dapat dibangun berdasarkan 3 komponen. Komponen-komponen tersebut dapat dijelaskan pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Komponen-Komponen CCRD :

Jumlah faktor k	Jumlah titik			Total N	Nilai α
	2^k faktorial/faktorial sebagian	Sumbu	Pusat (n_0)		
3	8	6	6	20	1.682
4	16	8	7	31	2.000
5	16	10	6	32	2.000
6	32	12	9	53	2.378

(Cochran dan Cox, 1957)

1.5 Uji Ketepatan Model (*Lack Of Fit-Test*)

Menurut Mason, *et al.* (2003), jumlah kuadrat galat dapat dibagi menjadi 2 komponen yaitu galat murni dan galat *lack of fit*:

$$JKG = JKG_M + JKG_{LOF} \quad (2.11)$$

di mana :

- JKG = jumlah kuadrat galat
- JKG_M = jumlah kuadrat galat murni
- JKG_{LOF} = jumlah kuadrat galat *lack of fit*

Jumlah kuadrat galat murni (JKG) dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$JKG_M = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 \right) \quad (2.12)$$

di mana:

- y_{ij} = respon pada baris ke- i kolom ke- j
- $\bar{y}_{i\cdot}$ = rata-rata respon pada baris ke- i
- m = kombinasi-kombinasi faktor dengan pengamatan berulang
- n_i = ulangan ke- i
- i = 1, 2, ..., m
- j = 1, 2, ..., n_i

Tabel 2.3 Analisis Ragam Pengujian *Lack of Fit*

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	Statistik-F
Regresi	p	JK_R	KT_R	$F = \frac{KT_R}{KT_G}$
Galat <i>Lack of fit</i>	$n - p - 1$ f_{LOF}	JK_G JKG_{LOF}	KT_G KTG_{LOF}	
Galat Murni	f_M	JKG_M	KTG_M	$F = \frac{KTG_{LOF}}{KTG_M}$
Total	$n - 1$	JKT		

di mana :

p = banyaknya parameter

n = banyaknya pengamatan

$$f_M = \sum_{i=1}^m (n_i - 1) = q - m ; \quad q = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

$$f_{LOF} = n - p - 1 - f_M$$

$$JK_R = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$JK_G = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$JKT = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$JKG_{LOF} = JKG - JKG_M$$

Dengan menggunakan hipotesis :

H_0 : Model sesuai
lawan

H_1 : Model tidak sesuai

Dengan statistik uji :

$$F_{hitung} = \frac{KTG_{LOF}}{KTG_M}$$

Lack of fit (kesenjangan model antara model yang diduga dengan model yang sebenarnya) ada apabila menolak H_0 yaitu $F_{hitung} >$

$$F_{(\alpha; f_{LOF}, f_M)}$$

2.6 Analisis Permukaan Respon Orde Kedua

2.6.1 Lokasi Titik Stasioner

Menurut Montgomery (2005), misalnya ingin ditemukan level-level dari X_1, X_2, \dots, X_k yang mengoptimalkan respon, maka titik-titik

$$X_1, X_2, \dots, X_k \text{ merupakan turunan parsial } \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_1} = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_2} = \dots = \frac{\partial \hat{Y}}{\partial X_k} = 0.$$

Titik $X_{1,s}, X_{2,s}, \dots, X_{k,s}$ disebut titik stasioner. Kutner, *et al.* (2005) mendefinisikan titik stasioner (X_s) sebagai suatu titik terjadinya kondisi maksimum, minimum, atau titik pelana pada permukaan respon orde kedua.

Menurut Montgomery (2005), matrik notasi model orde kedua adalah berikut:

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + X'b + X'BX \tag{2.13}$$

dimana $X_{(k \times 1)} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_k \end{bmatrix}$ $b_{(k \times 1)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$ dan

$$B_{(k \times k)} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12}/2 & \dots & \hat{\beta}_{1k}/2 \\ & \hat{\beta}_{22} & & \hat{\beta}_{2k}/2 \\ & & \ddots & \\ sym & & & \hat{\beta}_{kk} \end{bmatrix}$$

dengan :

b = vektor koefisien regresi orde pertama

B = matrik simetri di mana diagonal elemen-elemen utama adalah koefisien orde kedua murni ($\hat{\beta}_{ii}$) dan yang selain diagonal utama adalah setengah dari koefisien orde kedua campuran ($\hat{\beta}_{ij}, i \neq j$).

Turunan dari \hat{Y} terhadap X yang disamadengankan 0 adalah:

$$\frac{\partial \hat{Y}}{\partial X} = b + 2BX = 0 \tag{2.14}$$

sehingga titik stasionernya X_s :

$$X_s = -\frac{1}{2}B^{-1}b \quad (2.15)$$

dan respon yang diduga dari titik stasioner adalah:

$$\hat{Y}_s = \hat{\beta}_0 + \frac{1}{2}X_s'b \quad (2.16)$$

2.7 Persamaan Kanonik

Persamaan kanonik sangat penting sebagai fungsi respon orde kedua. Persamaan kanonik fungsi respon orde kedua merotasi basis vektor ke sistem koordinat baru dan digunakan untuk mengetahui informasi tentang sifat titik stasioner dan bentuk permukaan respon (Petersen, 1985). Dengan kata lain, koordinat baru berhubungan dengan koordinat utama permukaan respon orde kedua (Bisgaard dan Ankenman, 1998).

Analisis kanonik dapat digunakan untuk menentukan bentuk permukaan respon, apakah berupa bukit (respon maksimum), lembah (respon minimum), permukaan pelana atau permukaan datar. Selain itu, analisis kanonik juga dapat digunakan untuk menentukan kombinasi faktor yang mempunyai nilai optimum dan mencari faktor-faktor yang paling berpengaruh terhadap respon yang diduga (Anonymous, 1999).

2.7.1 Model Kanonik-B

Sifat titik stasioner ditentukan dari tanda nilai eigen matrik B . Misalnya, matrik D yang berukuran $k \times k$ adalah matrik dimana semua kolomnya adalah vektor eigen yang dinormalkan yang berhubungan dengan nilai eigen dari B . Maka $D'BD = A$, dimana A adalah matrik diagonal yang berisi nilai eigen B sebagai elemen-elemen diagonal utama. Translasi model pada persamaan (2.13) ke titik stasioner dan berotasi pada poros yang berhubungan dengan poros utama pada sistem kontur adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Z_i &= X_i - X_s, \\ W &= D'Z \end{aligned} \quad (2.17)$$

Translasi yang diberikan adalah:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= b_0 + (Z + X_s)'b + (Z + X_s)'B(Z + X_s) \\ &= [b_0 + X_s'b + X_s'BX_s] + Z'b + Z'BZ + 2X_s'BZ \\ &= \hat{Y}_s + X'BZ \end{aligned}$$

karena $2X_s'BZ = -Z'b$ dari persamaan (2.15). Rotasi yang diberikan:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \hat{Y}_s + W'D'BDW \\ &= \hat{Y}_s + W'AW \end{aligned} \tag{2.18}$$

Poros W adalah poros utama pada sistem kontur. Sehingga persamaan (2.18) dapat ditulis:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \hat{Y}_s + \sum_{i=1}^k \lambda_i W_i^2 \\ \hat{Y} &= \hat{Y}_s + \lambda_1 W_1^2 + \lambda_2 W_2^2 + \dots + \lambda_k W_k^2 \end{aligned} \tag{2.19}$$

di mana :

- \hat{Y}_s = penduga respon pada titik stasioner
 - $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ = konstanta yang merupakan nilai eigen dari matrik B yang diperoleh dari $|B - \lambda I| = 0$
 - W_1, W_2, \dots, W_k = peubah bebas baru hasil rotasi
- sehingga persamaan (2.19) adalah persamaan kanonik-B (Myers dan Montgomery, 2002).

2.7.2 Model Kanonik-A

Myers dan Montgomery (2002) menyatakan bahwa bentuk kanonik-A merupakan bentuk kanonik alternatif pada model polinomial orde kedua yang sangat berguna dalam penentuan karakteristik permukaan respon.

Secara umum, model kanonik-A adalah sebagai berikut:

$$\hat{y} = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^k \hat{a}_i u_i + \sum_{i=1}^k \hat{\lambda}_i u_i^2 \tag{2.20}$$

Keterangan:

- \hat{y} = penduga respon pada model kanonik-A
- \hat{a}_0 = intersep model kanonik-A
- $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k$ = koefisien orde pertama, di mana:

$$a_{(k \times 1)} = D'_{(k \times k)} b_{(k \times 1)}$$

u_1, u_2, \dots, u_k = peubah kanonik yang diperoleh dari perotasian :

$$u = D'_{(k \times k)} x$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ = koefisien orde kedua kuadratik yang merupakan akar ciri dari matrik **B**

D = matrik berukuran $k \times k$ dimana kolomnya berisi vektor eigen hasil normalisasi yang diperoleh dari nilai eigen matrik **B**.

Prinsip dasar bentuk kanonik-A adalah setelah sumbu-sumbu dirotasi pada bentuk kanonik-B, selanjutnya tidak dilakukan translasi ke titik stasioner.

2.8 Karakteristik Permukaan Respon

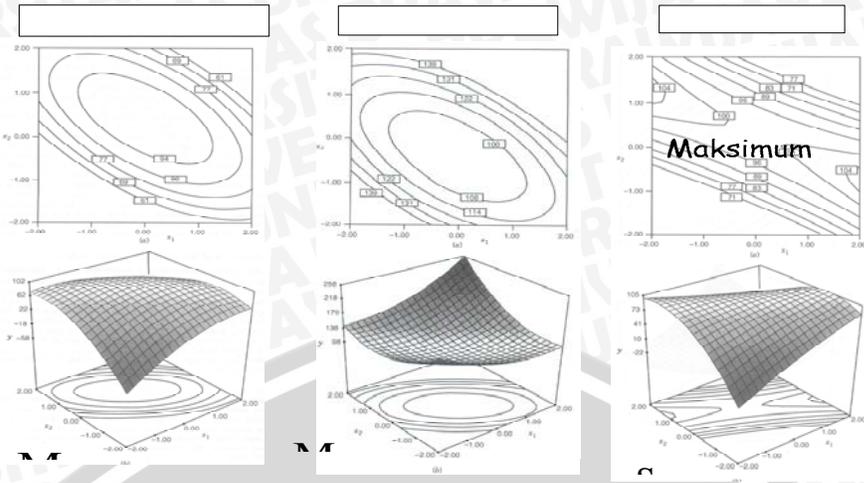
Setelah ditemukan titik stasioner, maka perlu mengkarakteristikan permukaan respon di sekitar titik stasioner. Dengan pengkarakteristikan tersebut dapat diketahui apakah titik stasioner maksimum, minimum, atau titik pelana.

Hal yang paling pokok untuk menganalisa permukaan respon adalah memeriksa plot kontur dari model. Pembuatan dan interpretasi plot kontur relatif mudah jika hanya terdapat 3 faktor atau kurang. Akan tetapi, jika ada lebih dari 3 faktor maka perlu digunakan analisis kanonik (Montgomery, 2005).

Menurut Petersen (1985), sifat permukaan respon dapat ditentukan dari titik stasioner. Selain itu juga ditentukan oleh tanda dan besarnya λ_i .

$$X_s = \begin{cases} \text{minimum, } \lambda_i \text{ bertanda positif} \\ \text{maksimum, } \lambda_i \text{ bertanda negatif} \\ \text{pelana, } \lambda_i \text{ bertanda campuran} \end{cases} \quad (2.21)$$

Vivacqua (2006) menjelaskan bahwa karakteristik sistem permukaan respon orde kedua yang terdiri atas plot kontur dan permukaan respon dapat dijelaskan pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1 Karakteristik Sistem Permukaan Respon Orde Kedua

2.9 Metode *Double Linear Regression* (DLR)

Metode *Double Linear Regression* (DLR) adalah suatu metode yang digunakan untuk menduga selang kepercayaan bagi nilai eigen untuk kepentingan interpretasi permukaan respon orde kedua. Dinamakan *Double Linear Regression* karena metode ini menggunakan analisis regresi linier dua kali berturut-turut di mana masing-masing menduga parameter model orde kedua penuh. Regresi linier pertama digunakan untuk mendapatkan model orde kedua yang diikuti oleh penentuan sumbu kanonik, sedangkan regresi linier kedua digunakan untuk mendapatkan model orde kedua berdasarkan koordinat-koordinat yang telah dirotasi dari sumbu kanonik (Bisgaard dan Ankenman, 1998).

Metode DLR digunakan jika dalam matrik koefisien terdapat lebih dari 3 faktor yang terlibat sehingga plot sulit untuk dibuat. Nilai eigen dapat digunakan untuk menentukan kondisi di mana respon tersebut berada pada titik stasioner maksimum, minimum atau titik pelana. Box (1954) menyatakan bahwa analisis karakteristik permukaan respon menggunakan persamaan kanonik-B di mana nilai eigen dikatakan sangat kecil atau mendekati nol dapat langsung direduksi dari persamaan kanonik. Tetapi apabila menggunakan analisis selang kepercayaan, hal itu tidak dapat dilakukan begitu saja

karena nilai eigen mempunyai interval termasuk nol (Bisgaard dan Ankenman, 1998).

Metode DLR didasarkan pada perhitungan regresi yang sederhana. Metode DLR untuk menentukan salah baku nilai eigen \mathbf{B} menggunakan pendugaan parameter dari pendugaan model orde kedua penuh pada persamaan (2.13), kemudian menghitung \mathbf{D} yang merupakan vektor eigen matrik \mathbf{B} . Selanjutnya, analisis kanonik peubah X diganti dengan peubah kanonik Z . Langkah terakhir berdasarkan analisis kanonik menggunakan regresi linier sederhana sekali lagi untuk menaksir model polinomial orde kedua menggunakan koordinat rotasi baru Z sebagai basis.

$$E(Y) = \beta_0^* + \mathbf{Z}' \boldsymbol{\beta}^* + \mathbf{Z}' \mathbf{B}^* \mathbf{Z} \quad (2.22)$$

Seperti ditunjukkan Bisgaard dan Ankenman (1998), bahwa \mathbf{B}^* mempunyai pembulatan elemen diagonal sehingga sama dengan nilai eigen \mathbf{B} dari regresi linier sederhana pertama. *Standard error* diagonal ke- i β_{ii}^* , memberikan pendekatan *standard error* untuk λ_i (nilai eigen matrik \mathbf{B} ke- i). Pendugaan salah baku nilai eigen dihitung dengan regresi linier sederhana. Nilai selang kepercayaan bagi λ_i adalah (Bisgaard dan Ankenman, 1998):

$$\hat{\lambda}_i \pm t_{(1-\alpha/2, n-p)} \cdot s.e(\hat{\beta}_{ii}) \quad (2.23)$$

$$s.e(\hat{\beta}_{ii}) = (\mathbf{e}_i' \mathbf{S}_\lambda \mathbf{e}_i)^{1/2}$$

$$\mathbf{S}_\lambda = s^2 (\mathbf{Z}' \mathbf{Z})^{-1}$$

\mathbf{e}_i = vektor galat ke- i yang berukuran $k \times 1$ yang diperoleh dengan mengakarkuadratkan elemen diagonal dari \mathbf{S}_λ
 $i = 1, 2, \dots, k$

Metode DLR sebagaimana yang telah dijelaskan menggunakan bentuk kanonik-A yang hanya melibatkan rotasi pada sumbu-sumbu koordinat. Sedangkan bentuk kanonik-B melibatkan rotasi pada sumbu-sumbu dan perubahan asal koordinat sistem ke titik stasioner.

Metode DLR menghasilkan salah baku yang sama seperti yang dihasilkan pada metode sebelumnya, sehingga keuntungan metode DLR adalah kemudahan dalam perhitungan dan sebagai alat bantu dalam interpretasi geometrik. Metode DLR hanya mengandalkan pada operasi matrik standart dan regresi linier serta dapat dilakukan hampir pada semua paket regresi (Bisgaard dan Ankenman, 1998).

2.10 Senyawa Hidrokarbon (HC) pada Gas Buang Kendaraan Bermotor

Bensin adalah senyawa hidrokarbon, sehingga setiap HC yang didapat dari gas buang kendaraan menunjukkan adanya bensin yang tidak terbakar dan terbuang bersama sisa pembakaran. Suatu senyawa hidrokarbon yang terbakar sempurna (bereaksi dengan oksigen) akan menghasilkan reaksi pembakaran yaitu karbondioksida (CO_2) dan air (H_2O). Walaupun rasio perbandingan antara udara dan bensin ($\text{AFR}=\text{Air-to-Fuel-Ratio}$) sudah tepat dan didukung oleh desain ruang bakar mesin saat ini yang sudah mendekati ideal, tetapi tetap saja sebagian dari bensin seolah-olah tetap dapat bersembunyi dari api saat terjadi proses pembakaran dan menyebabkan emisi HC pada ujung knalpot cukup tinggi. Emisi HC yang cukup tinggi menunjukkan adanya kelebihan bensin yang tidak terbakar yang disebabkan kegagalan sistem pengapian atau pembakaran yang tidak sempurna (Tjitra, 2005).

HC merupakan salah satu emisi gas buang beracun sebagai hasil pembakaran tak sempurna pada kendaraan bermotor. HC harus dibuat seminimal mungkin karena HC mempunyai kerugian yang sangat besar bagi lingkungan. Untuk memperkecil HC, maka benzena (X_1), aromatik (X_2) dan E-20 (X_3) yang merupakan komponen penyusun bensin dan RVP atau *Reid Vapour Pressure* (X_4) harus dibuat seminimal mungkin (Anonymous, 2001).

Benzena merupakan salah satu komposisi penyusun bensin yang digunakan sebagai pelarut organik untuk mensintesis senyawa-senyawa kimia pada bensin. Aromatik juga merupakan salah satu komposisi kimia penyusun bensin yang berguna untuk memberikan aroma pada bensin. Sedangkan E-20 merupakan komposisi kimia penyusun bensin dengan campuran etanol 20%. Maksud penambahan etanol adalah untuk mengurangi emisi gas HC dan sedikit meningkatkan nilai oktan. RVP (*Reid Vapour Pressure*) adalah tekanan uap yang diukur dalam tabung tekanan udara pada suhu 100°F . Makin tinggi RVP maka tingkat penguapan juga akan makin tinggi. Fraksi bensin yang mudah menguap tersebut dapat merusak dan melemahkan fungsi paru-paru serta bagian-bagian lain dari sistem pernapasan (Sudarmadi, 2000).

BAB III METODE PENELITIAN

3.1 Sumber Data

Data sekunder yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari penelitian Bashori (2000) di mana Bashori melakukan penelitian menggunakan multirespon yaitu kadar CO (% volume) sebagai Y_1 dan HC (% volume) sebagai Y_2 pada gas buang kendaraan bermotor dengan metode *Generalized Distance* untuk mengetahui nilai optimum kadar CO dan HC secara bersama-sama. Adapun faktor-faktor yang mempengaruhi kadar CO dan HC antara lain:

X_1 = Benzena (% volume);

X_2 = Aromatik (% volume);

X_3 = E-20 (% volume);

X_4 = RVP (psi = *pound square inch*).

Penelitian ini hanya mengambil 1 respon saja yaitu kadar HC (% volume) pada gas buang kendaraan bermotor (Y) dengan tujuan untuk mengetahui seberapa besar ukuran faktor-faktor yang berpengaruh pada Y sehingga Y dapat dibuat semaksimum/minimum mungkin. Faktor-faktor yang mempengaruhi kadar HC sama dengan faktor-faktor yang mempengaruhi kadar CO dan HC pada penelitian Bashori (2000).

Data selengkapnya dapat dilihat pada Lampiran 1.

3.2 Metode Analisis

Metode analisis yang diterapkan pada data adalah:

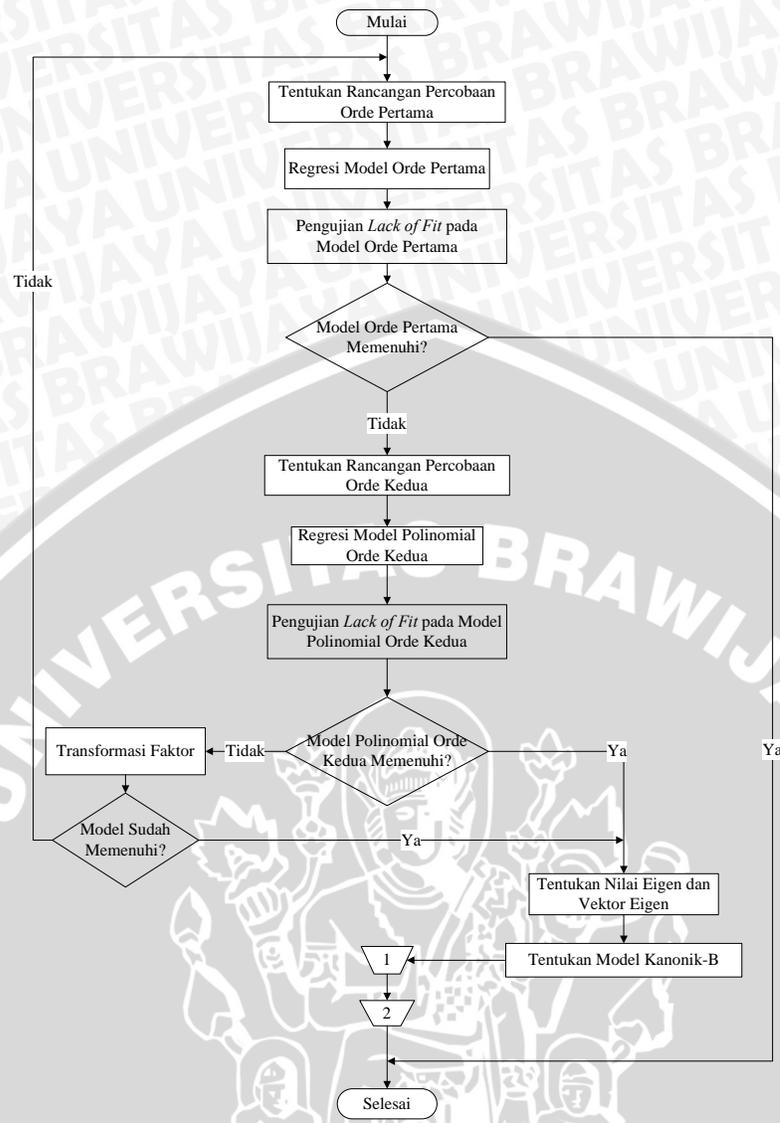
0. Menentukan rancangan percobaan orde pertama.
Rancangan percobaan orde pertama terdiri atas percobaan faktorial 2^4 ditambah 4 pengulangan di titik pusat seperti pada Tabel 2.1. Percobaan di titik pusat diambil secara acak dari pengulangan titik pusat pada nilai pengamatan HC yang sebenarnya pada Lampiran 1.
0. Melakukan regresi pada rancangan percobaan orde pertama untuk mendapatkan model orde pertama.
0. Melakukan pengujian *lack of fit* untuk mengetahui apakah model orde pertama memenuhi atau tidak. Jika model orde pertama tidak memenuhi maka analisis dapat dilanjutkan dengan menentukan rancangan percobaan orde kedua. Sebaliknya, jika model orde pertama memenuhi maka proses selesai.

0. Menentukan rancangan percobaan orde kedua.
Rancangan percobaan orde kedua terdiri atas percobaan faktorial 2^4 ditambah 8 titik sumbu dengan nilai $a = 2.0$ dan ditambah 7 pengulangan di titik pusat.
0. Melakukan regresi pada rancangan percobaan orde kedua untuk mendapatkan model polinomial orde kedua.
0. Melakukan pengujian *lack of fit* model polinomial orde kedua. Jika model polinomial orde kedua memenuhi maka analisis dapat dilanjutkan dengan menentukan nilai eigen dan vektor eigen. Sebaliknya, jika model polinomial orde kedua tidak memenuhi maka dilakukan transformasi faktor. Transformasi faktor bisa berupa bentuk logaritmik, akar kuadrat, atau pangkat tiga.
0. Pengujian *lack of fit* dilakukan lagi pada model polinomial orde kedua setelah transformasi. Jika model polinomial orde kedua setelah transformasi memenuhi maka analisis dapat dilanjutkan dengan menentukan nilai eigen dan vektor eigen. Sebaliknya, jika model polinomial orde kedua setelah transformasi tidak memenuhi maka analisis kembali pada proses penentuan rancangan percobaan orde pertama.
0. Menentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matrik B .
0. Menentukan model kanonik-B dengan persamaan (2.19).
0. Melakukan analisis DLR dengan langkah-langkah berikut :
 0. Merotasi faktor untuk mencari titik rancangan pada sistem koordinat baru dengan perotasian : $Z_D = X_D \hat{D}$.
 0. Melakukan regresi model polinomial orde kedua hasil rotasi.
 3. Melakukan pengujian *lack of fit* model polinomial orde kedua hasil rotasi.
 4. Menghitung S_λ menggunakan persamaan (2.18) dan menentukan e_i dengan mengkuadratkan diagonal utama S_λ
 4. Menentukan selang kepercayaan bagi nilai eigen dengan persamaan (2.17).
Jika nilai eigen dalam selang kepercayaan bertanda positif maka karakteristik permukaan respon adalah minimum; jika nilai eigen dalam selang kepercayaan bertanda negatif maka karakteristik permukaan respon adalah maksimum; dan jika nilai eigen dalam selang

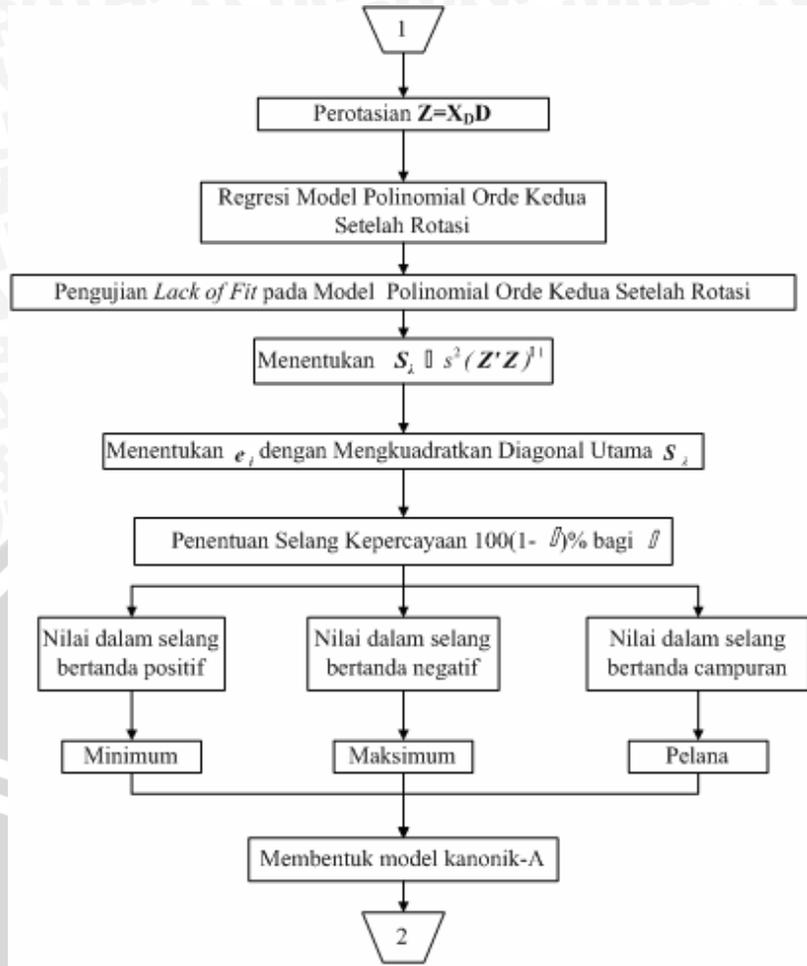
- kepercayaan bertanda campuran maka karakteristik permukaan respon adalah titik pelana.
6. Menentukan model kanonik-A dengan persamaan (2.20).
 0. Menentukan titik maksimum/minimum pada respon dengan MKTB dan metode DLR. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut :
 0. Pada MKTB, menurunkan persamaan polinomial orde kedua dan disamadengankan nol untuk memperoleh kondisi faktor-faktor yang memaksimum/minimumkan respon. Sedangkan dengan metode DLR, membentuk persamaan kanonik-A dan disamadengankan nol.
 0. Menentukan KTG pada MKTB dan metode DLR.
 0. KTG terkecil di antara MKTB dan metode DLR digunakan sebagai indikator metode terbaik untuk menentukan kondisi faktor-faktor yang memaksimumkan/meminimumkan respon.

Diagram alir prosedur analisis disajikan pada Gambar 3.1, Gambar 3.2 dan Gambar 3.3.





Gambar 3.1 Diagram alir analisis permukaan respon orde kedua



Gambar 3.2 Diagram alir metode DLR pada analisis permukaan respon orde kedua



Gambar 3.3 Diagram alir penentuan titik maksimum/minimum respon pada analisis permukaan respon orde kedua



**BAB IV
HASIL DAN PEMBAHASAN**

Prosedur pertama yang harus dilakukan pada analisis permukaan respon setelah mengetahui respon, faktor, dan level dari faktor adalah membentuk rancangan percobaan orde pertama dan kedua seperti pada Lampiran 2 dan 3, di mana hasil pengamatan HC yang sebenarnya dapat dilihat pada Lampiran 1. Pada penelitian ini, analisis dilakukan berdasarkan nilai kode. Hubungan antara nilai kode pada rancangan percobaan orde pertama dan kedua dengan hasil pengamatan HC yang sebenarnya tercantum pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Hubungan Antara Nilai Kode dan Nilai Pengamatan yang Sebenarnya pada Hasil Pengamatan HC

Faktor	Nilai kode					Hubungan nilai kode dan nilai faktor sebenarnya
	-2	-1	0	1	2	
X_1 (% volume)	0.4	0.6	0.8	1	1.2	$\frac{X_{1i} - \bar{X}_1}{d_1} = \frac{X_{1i} - 0.8}{0.2}$
X_2 (% volume)	16	18	20	22	24	$\frac{X_{2i} - \bar{X}_2}{d_2} = \frac{X_{2i} - 20}{2}$
X_3 (% volume)	25	30	35	40	45	$\frac{X_{3i} - \bar{X}_3}{d_3} = \frac{X_{3i} - 35}{5}$
X_4 (psi)	3.5	4.5	5.5	6.5	7.5	$\frac{X_{4i} - \bar{X}_4}{d_4} = \frac{X_{4i} - 5.5}{1}$

Keterangan:

- X_{1i} = level ke- i dari faktor pertama, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- X_{2i} = level ke- i dari faktor ke dua, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- X_{3i} = level ke- i dari faktor ke tiga, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- X_{4i} = level ke- i dari faktor ke empat, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
- \bar{X}_i = rata-rata level pada faktor ke- i , $i = 1, 2, 3, 4$.
- d_i = jarak 2 level yang berurutan pada faktor ke- i , $i = 1, 2, 3, 4$.

3.0 Analisis Model Orde Pertama

Setelah mengetahui hubungan antara nilai kode dan nilai pengamatan yang sebenarnya pada hasil pengamatan HC kemudian merumuskan model regresi polinomial dengan orde yang rendah

yaitu orde pertama yang tidak lain merupakan model regresi linier. Model orde pertama yang terbentuk adalah sebagai berikut:

$$\hat{Y} = 160 + 3.62 X_1 + 1.75 X_2 + 0.13 X_3 + 7.00 X_4$$

Model orde pertama yang terbentuk selanjutnya dilakukan pengujian koefisien regresi secara simultan (Tabel 4.2) dan pengujian koefisien regresi secara parsial (Tabel 4.3).

Pengujian koefisien regresi secara simultan dan parsial selengkapnya dijelaskan pada Lampiran 4.

Tabel 4.2 Pengujian Koefisien Regresi Secara Simultan

Sumber Keragaman	db	JK	KT	Nilai-p
Regresi	4	1043.50	260.90	0.53
Galat	15	4791.50	319.40	
<i>Lack of fit</i>	12	4746.70	395.60	0.01
Galat murni	3	44.70	14.90	
Total	19	5835.0		

Tabel 4.3 Pengujian Koefisien Regresi Secara Parsial

Faktor	Koefisien Regresi	Galat Baku (Standard Error)	Nilai-p
X_1	3.62	4.47	0.43
X_2	1.75	4.47	0.70
X_3	0.13	4.47	0.98
X_4	7.00	4.47	0.14

Berdasarkan hasil pengujian koefisien regresi secara simultan (Tabel 4.2) menunjukkan bahwa nilai-p pada pengujian persamaan regresi adalah 0.534. Artinya bahwa secara keseluruhan koefisien regresi bersifat tidak nyata pada taraf $\alpha = 5\%$. Hal ini diperkuat dengan pengujian koefisien regresi secara parsial (Tabel 4.3) yang menunjukkan bahwa tidak satupun koefisien regresi bersifat nyata pada taraf $\alpha = 5\%$, yang berarti bahwa faktor X_1 (benzena), X_2 (aromatik), X_3 (E-20), dan X_4 (RVP) berpengaruh tidak nyata terhadap respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor.

Pengujian ketidaktepatan model dilakukan untuk mengetahui apakah model orde pertama memenuhi atau tidak, dengan hipotesis:

H_0 : Model orde pertama sesuai
lawan

H_1 : Model orde pertama tidak sesuai

Berdasarkan perhitungan analisis ragam untuk pengujian ketidaktepatan model orde pertama (Tabel 4.2) memperlihatkan bahwa uji ketidaktepatan model bersifat nyata pada taraf $\alpha = 5\%$ dengan nilai-p sebesar 0.01 yang menunjukkan bahwa model orde pertama merupakan model yang tidak tepat untuk menerangkan pengaruh faktor-faktor X_1 , X_2 , X_3 dan X_4 terhadap respon Y . Hal ini juga diperkuat dengan R^2 yang kecil pada model orde pertama yaitu 17.9%. Dengan demikian, perlu dilakukan pendugaan model polinomial dengan derajat yang lebih tinggi yaitu model polinomial orde kedua (Gaspersz, 1992).

3.0 Analisis Model Polinomial Orde Kedua

Pada pengujian ketidaktepatan model orde pertama menunjukkan bahwa model orde pertama tidak sesuai. Oleh karena itu, perlu dilakukan pendugaan model polinomial orde kedua. Model orde kedua yang terbentuk adalah:

$$\hat{Y} = 129 + 3.83 X_1 + 2.08 X_2 + 1.00 X_3 + 5.75 X_4 + 8.02 X_1^2 + 12.52 X_2^2 + 11.52 X_3^2 + 10.77 X_4^2 - 2.63 X_1 X_2 + 0.50 X_1 X_3 - 1.38 X_1 X_4 - 5.38 X_2 X_3 + 0.25 X_2 X_4 - 4.38 X_3 X_4$$

Pengujian koefisien regresi secara simultan (Tabel 4.4) dan pengujian koefisien regresi secara parsial (Tabel 4.5) dilakukan setelah model polinomial orde kedua didapatkan.

Tabel 4.4 Pengujian Koefisien Regresi Secara Simultan

Sumber Keragaman	db	JK	KT	Nilai-p
Regresi	14	12494.2	892.4	0.00
Linear	4	1274.3	318.6	0.12
Kuadratik	4	10305.9	2576.5	0.00
Interaksi	6	914.0	152.3	0.44
Galat	16	2343.7	146.5	
Lack of fit	10	1680.0	168.0	0.32
Galat murni	6	663.7	110.6	
Total	30	14837.9		

Tabel 4.5 Pengujian Koefisien Regresi Secara Parsial

Faktor	Koefisien Regresi	Galat Baku (Standard Error)	Nilai-p
X_1	3.83	2.47	0.14
X_2	2.08	2.47	0.41

X_3	1.00	2.47	0.69
X_4	5.75	2.47	0.03
X_1^2	8.02	2.26	0.003
X_2^2	12.52	2.26	0.00
X_3^2	11.52	2.26	0.00
X_4^2	10.77	2.26	0.00
X_1X_2	-2.63	3.03	0.39
X_1X_3	0.50	3.03	0.87
X_1X_4	-1.38	3.03	0.66
X_2X_3	-5.38	3.03	0.09
X_2X_4	-0.25	3.03	0.94
X_3X_4	-4.38	3.03	0.17

Pengujian koefisien regresi secara simultan dan parsial selengkapnya terlampir pada Lampiran 5.

Nilai-p pada pengujian persamaan regresi secara simultan (Tabel 4.5) adalah sebesar 0.00, yang berarti bahwa paling tidak terdapat satu pasang faktor yang berbeda pada taraf $\alpha = 5\%$. Pengujian persamaan regresi secara parsial (Tabel 4.5) menunjukkan bahwa secara linier hanya terdapat satu faktor yang mempunyai koefisien regresi bersifat nyata pada taraf $\alpha = 5\%$ yaitu X_4 , sedangkan secara kuadratik, semua faktor mempunyai koefisien regresi bersifat nyata pada taraf $\alpha = 5\%$. Dan tidak ada satupun dari interaksi faktor yang mempunyai koefisien regresi bersifat nyata pada taraf $\alpha = 5\%$ sehingga interaksi faktor harus dihilangkan dari model polinomial orde kedua dan perlu dilakukan pendugaan model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor. Ini berarti bahwa X_4 (RVP), X_1^2 (benzena secara kuadratik), X_2^2 (aromatik secara kuadratik), X_3^2 (E-20 secara kuadratik), X_4^2 (RVP secara kuadratik) berpengaruh nyata terhadap Y (kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor) pada taraf $\alpha = 5\%$.

Pengujian koefisien regresi secara simultan dan parsial untuk menduga model orde kedua tanpa interaksi faktor terdapat pada Tabel (4.6) dan Tabel (4.7). Pengujian koefisien regresi secara simultan dan parsial selengkapnya terlampir pada Lampiran 6.

Tabel 4.6 Pengujian Koefisien Regresi Secara Simultan Model Orde Kedua Tanpa Interaksi Faktor

Sumber Keragaman	db	JK	KT	Nilai-p
Regresi	8	11580.2	1447.53	0.00
Linear	4	1274.3	318.58	0.11
Kuadratik	4	10305.9	2576.47	0.00
Galat	22	3257.7	148.08	
<i>Lack of fit</i>	16	2594.0	162.13	0.33
Galat murni	6	663.7	110.62	
Total	30	14837.9		

Tabel 4.7 Pengujian Koefisien Regresi Secara Parsial Model Orde Kedua Tanpa Interaksi Faktor

Faktor	Koefisien Regresi	Galat Baku (Standard error)	Nilai-p
X_1	3.83	2.48	0.14
X_2	2.08	2.48	0.41
X_3	1.00	2.48	0.69
X_4	5.75	2.48	0.03
X_1^2	8.02	2.28	0.002
X_2^2	12.52	2.28	0.00
X_3^2	11.52	2.28	0.00
X_4^2	10.77	2.28	0.00

Dari pengujian koefisien regresi secara simultan pada Tabel (4.6), nilai-p adalah 0.000 yang artinya paling tidak terdapat satu pasang faktor yang berbeda pada taraf $\alpha = 5\%$. Dengan pengujian koefisien regresi secara parsial (Tabel 4.7) ditunjukkan bahwa secara linier hanya ada satu faktor yang signifikan yaitu X_4 dan semua faktor secara kuadratik adalah signifikan. Karena faktor-faktor secara kuadratik menunjukkan pengaruh yang nyata terhadap respon, maka faktor X_1 , X_2 dan X_3 tetap diikutkan dalam model meskipun secara linier tidak signifikan, sehingga model polinomial orde kedua tanpa melibatkan interaksi faktor adalah:

$$\hat{Y} = 129 + 3.83 X_1 + 2.08 X_2 + 1.00 X_3 + 5.75 X_4 + 8.02 X_1^2 + 12.5 X_2^2 + 11.5 X_3^2 + 10.8 X_4^2$$

Pengujian *lack of fit* pada model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor dilakukan dengan hipotesis:

H_0 : Model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor sesuai lawan

H_1 : Model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor tidak sesuai
 Pengujian ketidaktepatan model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor (Tabel 4.6) memperlihatkan bahwa uji ketidaktepatan model bersifat tidak nyata pada taraf $\alpha = 5\%$ dengan nilai-p sebesar 0.33 yang menunjukkan bahwa model orde kedua tanpa interaksi faktor merupakan model polinomial orde kedua yang tepat untuk menerangkan pengaruh faktor-faktor yang berpengaruh terhadap respon Y . Hal ini juga diperkuat dengan R^2 yang cukup besar pada model orde kedua tanpa interaksi faktor yaitu 78.0% yang berarti bahwa proporsi/persentase variasi total dalam Y yang dijelaskan oleh X adalah sebesar 0.78 (Gaspersz, 1992).

3.0 Metode DLR (Double Linear Regression)

Setelah terbentuk model polinomial orde kedua penuh yang melibatkan faktor-faktor secara linier, kuadratik dan interaksi faktor, langkah pertama yang harus dilakukan pada metode *Double Linear Regression* adalah menentukan nilai eigen (λ_i) dan vektor eigen (d_i) untuk $i = 1, 2, 3, 4$ dari matrik koefisien B .

Dari model polinomial orde kedua penuh, vektor koefisien regresi dan matrik koefisien orde kedua adalah:

$$b = \begin{bmatrix} 5.75 \\ 1.00 \\ 2.08 \\ 3.83 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10.78 & -2.19 & -0.13 & -0.69 \\ -2.19 & 11.52 & -2.69 & 0.25 \\ -0.13 & -2.69 & 12.52 & -1.31 \\ -0.69 & 0.25 & -1.31 & 8.02 \end{bmatrix}$$

Dari matrik koefisien orde kedua kemudian diperoleh nilai eigen ($\hat{\lambda}_i$) dan vektor eigen (\hat{d}_i) berikut:

$$\hat{\lambda}_1 = 15.41 \quad \hat{\lambda}_2 = 11.60 \quad \hat{\lambda}_3 = 8.70 \quad \hat{\lambda}_4 = 7.13$$

$$\hat{d}_1 = \begin{bmatrix} 0.31 \\ -0.65 \\ 0.67 \\ -0.17 \end{bmatrix} \quad \hat{d}_2 = \begin{bmatrix} 0.75 \\ -0.27 \\ -0.60 \\ 0.06 \end{bmatrix} \quad \hat{d}_3 = \begin{bmatrix} 0.43 \\ 0.60 \\ 0.22 \\ -0.64 \end{bmatrix} \quad \hat{d}_4 = \begin{bmatrix} -0.38 \\ -0.38 \\ -0.38 \\ -0.75 \end{bmatrix}$$

Sehingga dapat dibuat matrik nilai eigen dan vektor eigen:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 15.41 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11.60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8.70 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7.13 \end{bmatrix} \quad \hat{D} = \begin{bmatrix} 0.31 & 0.75 & 0.43 & -0.38 \\ -0.65 & -0.27 & 0.60 & -0.38 \\ 0.67 & -0.60 & 0.22 & -0.38 \\ -0.17 & 0.06 & -0.64 & -0.75 \end{bmatrix}$$

Setelah ditentukan nilai eigen dan vektor eigen, selanjutnya dilakukan perotasian faktor untuk mendapatkan titik rancangan dalam sistem koordinat baru sehingga diperoleh matrik rancangan baru (Z_D) pada Lampiran 7. Berdasarkan matrik rancangan baru, selanjutnya dilakukan lagi pendugaan parameter model polinomial orde kedua. Model polinomial orde kedua setelah rotasi adalah:

$$\hat{Y} = 129 + 1.90 Z_1 + 3.03 Z_2 + 1.10 Z_3 - 6.26 Z_4 + 15.4 Z_1^2 + 11.6 Z_2^2 + 8.70 Z_3^2 + 7.13 Z_4^2$$

Model polinomial orde kedua setelah rotasi pada Lampiran 8 menunjukkan bahwa nilai koefisien peubah interaksi sama dengan nol sehingga dalam model polinomial orde kedua setelah rotasi tidak terdapat peubah interaksi. Nilai koefisien untuk peubah kuadratik ($\hat{\beta}_{ii}$) menunjukkan nilai yang sama dengan nilai eigen ($\hat{\lambda}_i$), sehingga salah baku ($\hat{\beta}_{ii}$) atau s. e ($\hat{\beta}_{ii}$) digunakan sebagai penduga s. e ($\hat{\lambda}_i$). Matrik varian-kovarian (S_λ) yang dihitung menggunakan persamaan (2.18) adalah:

$$S_\lambda = \begin{bmatrix} 5.12 & 0.00013 & 0.00017 & 0.00006 \\ 0.00013 & 5.12 & 0.00049 & 0.00002 \\ 0.00017 & 0.00049 & 5.12 & 0.00047 \\ 0.00006 & 0.00002 & 0.00047 & 5.12 \end{bmatrix}$$

$$\text{dengan } e_i = \begin{bmatrix} 2.26 \\ 2.26 \\ 2.26 \\ 2.26 \end{bmatrix}$$

Setelah S_λ dan e_i didapatkan, selanjutnya menentukan selang kepercayaan bagi λ_i berdasarkan persamaan (2.17), sehingga didapatkan selang kepercayaan bagi λ_i seperti disajikan pada tabel berikut:

Tabel 4.8 Pendugaan Nilai Eigen, Salah Baku, dan Selang Kepercayaan 100(1- α)% bagi λ_i dengan Metode DLR

Nilai Eigen	Parameter regresi DLR	Pendugaan nilai eigen	Standard error	Selang Kepercayaan 95% bagi λ_i
λ_1	β_{11}^*	15.41	2.26	-6.30; 37.13
λ_2	β_{22}^*	11.60	2.26	-10.11; 33.32
λ_3	β_{33}^*	8.70	2.26	-13.01; 30.42
λ_4	β_{44}^*	7.13	2.26	-14.58; 28.85

Berdasarkan pendugaan nilai eigen dan salah baku pada Tabel 4.8, maka dapat ditentukan selang kepercayaan 95% bagi λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) berdasarkan persamaan (2.17). Selang kepercayaan 95% bagi λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) mempunyai tanda campuran, sehingga dapat disimpulkan bahwa karakteristik permukaan respon orde kedua pada kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor yang dipengaruhi oleh X_1 (benzena), X_2 (aromatik), X_3 (E-20) dan X_4 (RVP) adalah titik pelana (*saddle point*) (Bisgaard dan Ankenman, 1998).

Karakteristik permukaan respon berdasarkan MKTB dapat diketahui dari model kanonik-B. Berdasarkan perhitungan titik stasioner dan penduga respon pada titik stasioner pada persamaan 2.19, maka model kanonik-B adalah:

$$\hat{Y} = 126.91 + 15.41 W_1^2 + 11.60 W_2^2 + 8.70 W_3^2 + 7.13 W_4^2$$

Berdasarkan model kanonik-B tersebut, konstanta yang merupakan nilai eigen dari matrik **B** semuanya bertanda positif. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa karakteristik permukaan respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor dengan model kanonik-B adalah minimum.

Setelah didapatkan karakteristik permukaan respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor kemudian menentukan nilai optimum respon. Nilai optimum respon diperoleh dari model polinomial orde kedua di mana model orde kedua MKTB adalah model polinomial orde kedua tanpa melibatkan interaksi faktor dan model orde kedua metode DLR adalah model kanonik-A yang diperoleh berdasarkan persamaan (2.20) yang tercantum pada Tabel 4.9.

Tabel 4.9 Model Polinomial Orde Kedua dan Karakteristik Permukaan Respon pada MKTB dan DLR

	Model Polinomial Orde Kedua	Karakteristik Permukaan Respon
MKTB	$\hat{Y} = 129 + 3.83 X_1 + 2.08 X_2 + 1.00 X_3 + 5.75 X_4 + 8.02 X_1^2 + 12.5 X_2^2 + 11.5 X_3^2 + 10.8 X_4^2$	Minimum
DLR	$\hat{Y} = 129 + 4.3851X_1 + 3.2946X_2 - 1.4986X_3 + 4.5573X_4 + 5.2315X_1^2 + 18.7637X_2^2 - 7.2065X_3^2 + 8.2052X_4^2$	Titik pelana

Plot kontur dan permukaan respon dilakukan pada faktor X_1 , X_2 , X_3 dan X_4 yang disajikan pada Lampiran 10a-10f. Permukaan respon berbentuk lembah, hal ini berarti bahwa karakteristik permukaan respon adalah minimum. Berdasarkan plot kontur, nilai respon yang paling minimum adalah pada Lampiran 10c (bagian e) yaitu 127.76% dari volume bensin yang terbakar dengan $X_1=0.74\%$ volume, $X_2=20\%$ volume, $X_3=35\%$ volume dan $X_4=5.20$ psi.

Untuk mendapatkan nilai minimum, polinomial orde kedua (Tabel 4.9) diturunkan terhadap X_1 , X_2 , X_3 dan X_4 dan disamadengankan nol, sehingga diperoleh nilai faktor-faktor yang meminimumkan respon yang merupakan nilai-nilai kode yang tercantum pada Tabel 4.10. Nilai-nilai kode tersebut perlu diubah ke dalam nilai-nilai amatan yang sebenarnya dengan proses interpolasi.

Penentuan metode yang lebih baik diperoleh berdasarkan Kuadrat Tengah Galat (KTG) dari masing-masing metode. Pada MKTB, KTG diperoleh dari ANOVA pada Lampiran 6. Sedangkan pada metode DLR, KTG diperoleh dengan cara mengkuadratkan galat yaitu selisih nilai respon pada data amatan dengan nilai duga respon. Kemudian, Jumlah Kuadrat Galat (JKG) pada DLR dibagi dengan derajat bebas galat seperti tercantum pada Lampiran 9.

Tabel 4.10 Nilai Minimum Respon dengan MKTB dan Metode DLR dan KTG Kedua Metode

Metode	Nilai berdasarkan	Nilai-nilai yang meminimumkan respon				\hat{Y}	KTG
		X_1	X_2	X_3	X_4		
MKTB	Kode	-0.24	-0.08	-0.04	-0.27	127.67	148.08
	Sebenarnya	0.74	19.74	34.31	5.22		
DLR	Kode	-0.42	-0.09	-0.10	-0.28	127.38	1060.78
	Sebenarnya	0.72	19.82	34.48	5.22		

3.0 Pembahasan

Berdasarkan hasil analisis pada Tabel 4.9, karakteristik permukaan respon pada MKTB menggunakan model kanonik-B adalah minimum, sedangkan pada metode DLR, karakteristik permukaan respon dapat dijelaskan dengan menggunakan selang kepercayaan bagi λ_i . Dalam kasus ini, selang kepercayaan bertanda positif lebih lebar dibandingkan selang bertanda negatif sehingga karakteristik permukaan respon minimum lebih mendominasi (Bisgaard dan Ankenman, 1998). Oleh karena itu, level-level dari masing-masing faktor seharusnya semakin diperlebar sehingga mendapatkan selang kepercayaan bagi λ_i yang mempunyai karakteristik permukaan respon minimum. Karena karakteristik permukaan respon minimum pada proses pembakaran bensin maka hasil pembakaran yang dihasilkan semakin optimal. Dengan kata lain, akan terjadi pembakaran sempurna sehingga emisi gas buang HC yang berbahaya dari bahan bakar bensin dapat diminimumkan.

MKTB dan metode DLR untuk mendapatkan nilai minimum respon dapat dibandingkan jika model orde kedua pada MKTB adalah model orde kedua yang interaksi faktornya tidak signifikan. Hal ini disebabkan metode DLR menggunakan model kanonik-A yang hanya melibatkan faktor-faktor secara linier dan kuadratik serta tidak mempertimbangkan interaksi faktor. Metode DLR mempunyai KTG yang lebih besar dari pada MKTB karena metode DLR menggunakan model kanonik-A yang tidak mempertimbangkan interaksi faktor sehingga interaksi faktor masuk dalam galat model dan mengakibatkan KTG model kanonik-A semakin besar.

Nilai minimum pada faktor-faktor yang berpengaruh pada kadar HC gas buang kendaraan bermotor (berdasarkan nilai kode dan nilai pengamatan sebenarnya) pada analisis berdasarkan MKTB dan metode DLR hampir sama. Pada MKTB, nilai minimum respon kadar HC gas buang kendaraan bermotor adalah sebesar 127.67% dari volume bensin yang terbakar. Sedangkan respon minimum kadar HC gas buang kendaraan bermotor yang diperoleh menggunakan metode DLR adalah sebesar 127.38% dari volume bensin yang terbakar. Untuk menentukan metode yang lebih baik dalam menentukan nilai minimum respon digunakan KTG dari kedua metode. KTG MKTB jauh lebih kecil dibandingkan metode DLR.

Berdasarkan model yang diperoleh dengan MKTB dan metode DLR, model pada MKTB lebih layak digunakan yang menjelaskan

bahwa semua faktor baik secara linier dan kuadratik bernilai positif atau dengan kata lain bahwa apabila kadar benzena, aromatik, E-20 dan RVP pada bensin semakin meningkat, maka semakin banyak kadar HC yang dikeluarkan pada gas buang kendaraan bermotor. Pada metode DLR, X_3 dan X_3^2 berbanding terbalik dengan respon yang diduga. Hal ini tidak sesuai karena apabila kadar E-20 pada bensin semakin menurun, maka seharusnya kadar HC yang dikeluarkan pada gas buang kendaraan bermotor juga akan semakin sedikit.



BAB V KESIMPULAN DAN SARAN

4.0 Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

0. Karakteristik permukaan respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor yang dipengaruhi oleh X_1 (benzena), X_2 (aromatik), X_3 (E-20) dan X_4 (RVP) adalah minimum.
0. Nilai minimum dengan MKTB pada respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor adalah sebesar 127.67% dari volume bensin yang terbakar. Nilai ini dicapai pada kondisi benzen=0.74% volume, aromatik=19.74% volume, E-20 sebesar 34.31% volume dan RVP=5.22 psi. Sedangkan dengan metode DLR yang menggunakan persamaan kanonik-A, nilai minimum respon kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor adalah 127.38% dari volume bensin yang terbakar dengan kondisi benzen=0.72% volume, aromatik=19.82% volume, E-20=34.48% volume, RVP=5.2223 psi.
0. MKTB merupakan metode yang lebih baik dibandingkan metode DLR untuk menentukan nilai minimum kadar HC pada gas buang kendaraan bermotor yang dipengaruhi oleh X_1 (benzena), X_2 (aromatik), X_3 (E-20) dan X_4 (RVP).

4.0 Saran

Untuk selanjutnya, dapat dilakukan pengujian nilai maksimum/minimum respon dengan MKTB dan metode DLR pada data permukaan respon orde kedua yang mempunyai lebih dari 4 faktor untuk mengetahui apakah MKTB masih merupakan metode yang lebih baik dibandingkan metode DLR.

DAFTAR PUSTAKA

- Ankenman, B. E. 1999. *Identifying Rising Ridge Behavior in Quadratic Response Surfaces*.
<http://citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/16448/http:zSzzSzusers.iems.nwu.edu/zS~beazSzarticleszSRRidge.PDF/ankenman99identifying.pdf>. Tanggal akses : 19 September 2007.
- Anonymous. 1999. *Introduction to Response Surface Experiments*.
http://www.caspuir.it/risorse/softappl/doc/sas_docs/stat/chap56/sect14.htm. Tanggal akses : 31 Januari 2008.
- Anonymous. 2001. *Portofolio Bahan Bakar Cair*.
<http://www.chemeng.ui.ac.id/~wulan/Materi/port/BAHAN%20CAIR.PDF>. Tanggal akses : 28 Desember 2007.
- Anonymous. 2006. *Analisa Emisi Gas Buang*.
<http://cepot.wordpress.com/2006/11/04/analisa-emisi-gas-buang/>. Tanggal akses : 18 Januari 2008.
- Bashori, A. 2000. *Analisis Optimasi Hasil Pembakaran Bensin pada Proses Pembakaran Bensin dengan Metode Generalized Distance di PPT Migas Cepu*. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Teknologi Sepuluh November. Surabaya. (Tidak dipublikasikan).
- Bisgaard, S. dan B. E. Ankenman. 1998. *Standard Errors for The Eigenvalues in Second Order Response Surface Models*.
<http://citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/16448/http:zSzzSzusers.iems.nwu.edu/zS~beazSzarticleszSEigen.pdf/bisgaard96standard.pdf>. Tanggal akses : 12 September 2007.
- Box, G. E. P. dan N. R. Draper. 1987. *Empirical Model Building And Response Surface*. John Wiley. New York.
- Box, G. E. P., W. G. Hunter, dan J. S. Hunter. 1978. *Statistics For Experimenter*. John Wiley. Now York.

- Cochran, W. G. dan G. M. Cox. 1957. *Experimental Design*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- Draper, N. R. dan H. Smith. 1992. *Applied Regression Analysis, Second Edition*. John Wiley. New York.
- Gaspersz, V. 1992. *Teknik Analisis Dalam Penelitian Percobaan, Second Edition*. Tarsito. Bandung.
- Khuri, A. I. dan J. A. Cornell. 1996. *Response Surface Design And Analysis, Second Edition*. Marcel Dekker, Inc. New York.
- Kutner, M.H., C. J. Nachtsheim, J. Neter dan W. Li. 2005. *Applied Linear Statistical Models*. Fifth Edition. McGraw-Hill. New York.
- Mason, R. L., R. F. Gunst dan J. L. Hess. 2003. *Statistical Design and Analysis of Experiments With Applications to Engineering and Science, Second Edition*. John Wiley and Sons, Inc. New Jersey.
- Montgomery, D.C. 2005. *Design and Analysis of Experiments, Sixth Edition*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- Moore, C. 2003. *Mutu Udara Kota*.
<http://jakarta.usembassy.gov/ptp/udarakt1.html>.
Tanggal akses: 28 Desember 2007.
- Myers, R. H. dan D. C. Montgomery. 2002. *Response Surface Methodology, Process and Product Optimization Using Designed Experiments, Second Edition*. John Wiley and Sons, Inc. New York.
- Petersen, R. G. 1985. *Design and Analysis of Experiments*. Marcel Dekker. Inc. New York.
- Sastrosupadi, A. 2003. *Penggunaan Regresi, Korelasi, Koefisien Lintas, dan Analisis Lintas Untuk Penelitian Bidang Pertanian*. Bayumedia Publishing. Malang.

Sudarmadi, J. P. 2000. *Angka Oktan dan Pencemaran Udara*.
http://www.kpbb.org/makalah_ind/Angka%20Oktan%20dan%20Pencemaran%20Udara.pdf. Tanggal akses : 28 Desember 2007.

Tjitra, A. 2005. *Menganalisa Sendiri Hasil Test Emisi Gas Buang*
<http://www.saft7.com/wp-print.php?p=102>. Tanggal akses : 18 Januari 2008.

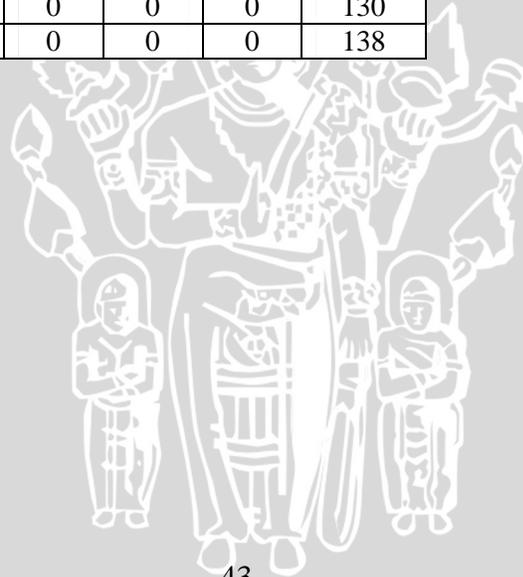


Lampiran 1. Nilai pengamatan HC yang sebenarnya

n	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
1	0.6	18	30	4.5	142
2	1	18	30	4.5	159
3	0.6	22	30	4.5	155
4	1	22	30	4.5	164
5	0.6	18	40	4.5	154
6	1	18	40	4.5	175
7	0.6	22	40	4.5	167
8	1	22	40	4.5	160
9	0.6	18	30	6.5	171
10	1	18	30	6.5	165
11	0.6	22	30	6.5	185
12	1	22	30	6.5	190
13	0.6	18	40	6.5	167
14	1	18	40	6.5	185
15	0.6	22	40	6.5	162
16	1	22	40	6.5	163
17	0.4	20	35	5.5	162
18	1.2	20	35	5.5	179
19	0.8	16	35	5.5	183
20	0.8	24	35	5.5	194
21	0.8	20	25	5.5	179
22	0.8	20	45	5.5	190
23	0.8	20	35	3.5	175
24	0.8	20	35	7.5	188
25	0.8	20	35	5.5	136
26	0.8	20	35	5.5	131
27	0.8	20	35	5.5	109
28	0.8	20	35	5.5	136
29	0.8	20	35	5.5	120
30	0.8	20	35	5.5	130
31	0.8	20	35	5.5	138

Lampiran 2. Nilai kode rancangan orde pertama pada hasil pengamatan HC

n	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
1	-1	-1	-1	-1	142
2	1	-1	-1	-1	159
3	-1	1	-1	-1	155
4	1	1	-1	-1	164
5	-1	-1	1	-1	154
6	1	-1	1	-1	175
7	-1	1	1	-1	167
8	1	1	1	-1	160
9	-1	-1	-1	1	171
10	1	-1	-1	1	165
11	-1	1	-1	1	185
12	1	1	-1	1	190
13	-1	-1	1	1	167
14	1	-1	1	1	185
15	-1	1	1	1	162
16	1	1	1	1	163
17	0	0	0	0	136
18	0	0	0	0	131
19	0	0	0	0	130
20	0	0	0	0	138



Lampiran 3. Nilai kode rancangan percobaan orde kedua pada hasil pengamatan HC

n	X_1	X_2	X_3	X_4	Y
1	-1	-1	-1	-1	142
2	1	-1	-1	-1	159
3	-1	1	-1	-1	155
4	1	1	-1	-1	164
5	-1	-1	1	-1	154
6	1	-1	1	-1	175
7	-1	1	1	-1	167
8	1	1	1	-1	160
9	-1	-1	-1	1	171
10	1	-1	-1	1	165
11	-1	1	-1	1	185
12	1	1	-1	1	190
13	-1	-1	1	1	167
14	1	-1	1	1	185
15	-1	1	1	1	162
16	1	1	1	1	163
17	-2	0	0	0	162
18	2	0	0	0	179
19	0	-2	0	0	183
20	0	2	0	0	194
21	0	0	-2	0	179
22	0	0	2	0	190
23	0	0	0	-2	175
24	0	0	0	2	188
25	0	0	0	0	136
26	0	0	0	0	131
27	0	0	0	0	109
28	0	0	0	0	136
29	0	0	0	0	120
30	0	0	0	0	130
31	0	0	0	0	138

Lampiran 4. Pendugaan parameter model orde pertama pada hasil pengamatan HC

Response Surface Regression: Y versus X₁, X₂, X₃, X₄

The regression equation is

$$Y = 160 + 3.62 X_1 + 1.75 X_2 + 0.13 X_3 + 7.00 X_4$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	159.950	3.996	40.02	0.000
X ₁	3.625	4.468	0.81	0.430
X ₂	1.750	4.468	0.39	0.701
X ₃	0.125	4.468	0.03	0.978
X ₄	7.000	4.468	1.57	0.138

S = 17.87 R-Sq = 17.9% R-Sq(adj) = 0.0%

Analysis of Variance

Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	4	1043.5	260.9	0.82	0.534
Residual Error	15	4791.5	319.4		
Lack of Fit	12	4746.7	395.6	26.52	0.010
Pure Error	3	44.7	14.9		
Total	19	5835.0			



Lampiran 5. Pendugaan parameter model polinomial orde kedua pada hasil pengamatan HC

Response Surface Regression: Y versus X₁, X₂, X₃, X₄

The regression equation is

$$Y = 128.571 + 3.833 X_1 + 2.083 X_2 + 1.000 X_3 + 5.750 X_4 + 8.024 X_1^2 X_1 + 12.524 X_2^2 X_2 + 11.524 X_3^2 X_3 + 10.774 X_4^2 X_4 - 2.625 X_1^2 X_2 + 0.500 X_1^2 X_3 - 1.375 X_1^2 X_4 - 5.375 X_2^2 X_3 - 0.250 X_2^2 X_4 - 4.375 X_3^2 X_4$$

Estimated Regression Coefficients for HC

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	128.571	4.574	28.106	0.000
X ₁	3.833	2.471	1.552	0.140
X ₂	2.083	2.471	0.843	0.412
X ₃	1.000	2.471	0.405	0.691
X ₄	5.750	2.471	2.327	0.033
X ₁ * X ₁	8.024	2.263	3.545	0.003
X ₂ * X ₂	12.524	2.263	5.533	0.000
X ₃ * X ₃	11.524	2.263	5.092	0.000
X ₁ * X ₄	10.774	2.263	4.760	0.000
X ₁ * X ₂	-2.625	3.026	-0.868	0.398
X ₁ * X ₃	0.500	3.026	0.165	0.871
X ₁ * X ₄	-1.375	3.026	-0.454	0.656
X ₂ * X ₃	-5.375	3.026	-1.776	0.095
X ₂ * X ₄	-0.250	3.026	-0.083	0.935
X ₃ * X ₄	-4.375	3.026	-1.446	0.168

S = 12.10 R-Sq = 84.2% R-Sq(adj) = 70.4%

Analysis of Variance for HC

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Regression	14	12494.2	12494.2	892.4	6.09	0.000
Linear	4	1274.3	1274.3	318.6	2.17	0.118
Square	4	10305.9	10305.9	2576.5	17.59	0.000
Interaction	6	914.0	914.0	152.3	1.04	0.436
Residual Error	16	2343.7	2343.7	146.5		
Lack-of-Fit	10	1680.0	1680.0	168.0	1.52	0.315
Pure Error	6	663.7	663.7	110.6		
Total	30	14837.9				

Lampiran 6. Pendugaan parameter model polinomial orde kedua tanpa interaksi faktor pada hasil pengamatan HC

Response Surface Regression: Y versus X1, X2, X3, X4

The regression equation is

$$Y = 128.571 + 3.833 X_1 + 2.083 X_2 + 1.000 X_3 + 5.750 X_4 + 8.024 X_1^2 + 12.524 X_2^2 + 11.524 X_3^2 + 10.774 X_4^2$$

Estimated Regression Coefficients for Y

Term	Coef	SE Coef	T	P
Constant	128.571	4.599	27.954	0.000
X1	3.833	2.484	1.543	0.137
X2	2.083	2.484	0.839	0.411
X3	1.000	2.484	0.403	0.691
X4	5.750	2.484	2.315	0.030
X1*X1	8.024	2.276	3.526	0.002
X2*X2	12.524	2.276	5.504	0.000
X3*X3	11.524	2.276	5.064	0.000
X4*X4	10.774	2.276	4.735	0.000

S = 12.17 R-Sq = 78.0% R-Sq(adj) = 70.1%

Analysis of Variance for Y

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Regression	8	11580.2	11580.2	1447.53	9.78	0.000
Linear	4	1274.3	1274.3	318.58	2.15	0.108
Square	4	10305.9	10305.9	2576.47	17.40	0.000
Residual Error	22	3257.7	3257.7	148.08		
Lack-of-Fit	16	2594.0	2594.0	162.13	1.47	0.334
Pure Error	6	663.7	663.7	110.62		
Total	30	14837.9				

Lampiran 7. Rotasi faktor

Z_1	Z_2	Z_3	Z_4
-0.1629	0.0587	0.6114	-1.8964
-0.5035	0.1717	1.8864	-0.398
1.1767	-1.1397	0.1788	-1.1334
0.8361	-1.0267	1.4538	0.365
-1.4647	-0.4777	-0.5862	-1.1326
-1.8053	-0.3647	0.6888	0.3658
-0.1251	-1.6761	-1.0188	-0.3696
-0.4657	-1.5631	0.2562	1.1288
0.4657	1.5631	-0.2562	-1.1288
0.1251	1.6761	1.0188	0.3696
1.8053	0.3647	-0.6888	-0.3658
1.4647	0.4777	0.5862	1.1326
-0.8361	1.0267	-1.4538	-0.365
-1.1767	1.1397	-0.1788	1.1334
0.5035	-0.1717	-1.8864	0.398
0.1629	-0.0587	-0.6114	1.8964
0.3406	-0.113	-1.275	-1.4984
-0.3406	0.113	1.275	1.4984
-1.3396	1.1984	0.4326	-0.763
1.3396	-1.1984	-0.4326	0.763
1.3018	0.5364	1.1976	-0.7638
-1.3018	-0.5364	-1.1976	0.7638
-0.6286	-1.5044	0.8676	-0.7676
0.6286	1.5044	-0.8676	0.7676
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Lampiran 8. Pendugaan parameter model polinomial orde kedua setelah rotasi

Regression Analysis: Orde Kedua Hasil Transformasi

The regression equation is

$$HC = 129 + 1.90 Z1 + 3.03 Z2 - 1.10 Z3 + 6.26 Z4 + 15.4 Z11 + 11.6 Z22 + 8.70 Z33 + 7.13 Z44 - 0.00 Z12 + 0.00 Z13 - 0.00 Z14 + 0.00 Z23 + 0.00 Z24 + 0.00 Z34$$

Predictor	Coef	SE Coef	T	P
Constant	128.571	4.574	28.11	0.000
Z1	1.899	2.470	0.77	0.453
Z2	3.025	2.471	1.22	0.238
Z3	-1.099	2.471	-0.44	0.662
Z4	6.255	2.471	2.53	0.022
Z11	15.409	2.263	6.81	0.000
Z22	11.602	2.263	5.13	0.000
Z33	8.703	2.263	3.84	0.001
Z44	7.131	2.263	3.15	0.006
Z12	-0.001	3.026	-0.00	1.000
Z13	0.001	3.026	0.00	1.000
Z14	-0.000	3.026	-0.00	1.000
Z23	0.002	3.026	0.00	1.000
Z24	0.000	3.026	0.00	1.000
Z34	0.001	3.026	0.00	1.000

S = 12.1030 R-Sq = 84.2% R-Sq(adj) = 70.4%

Analysis of Variance

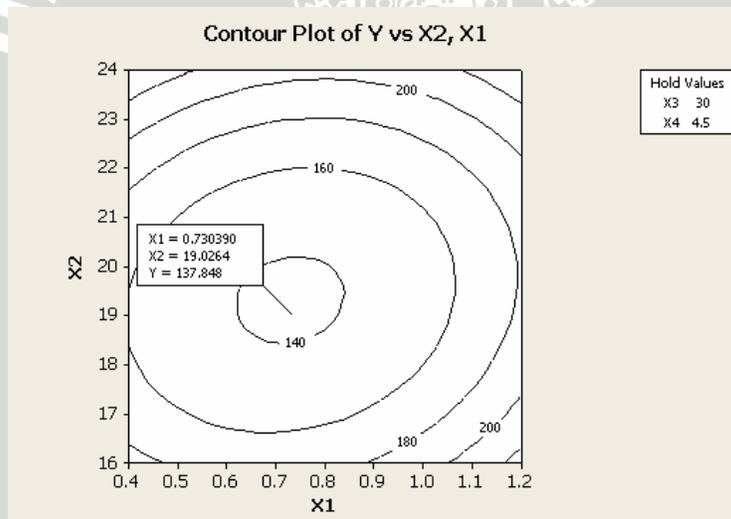
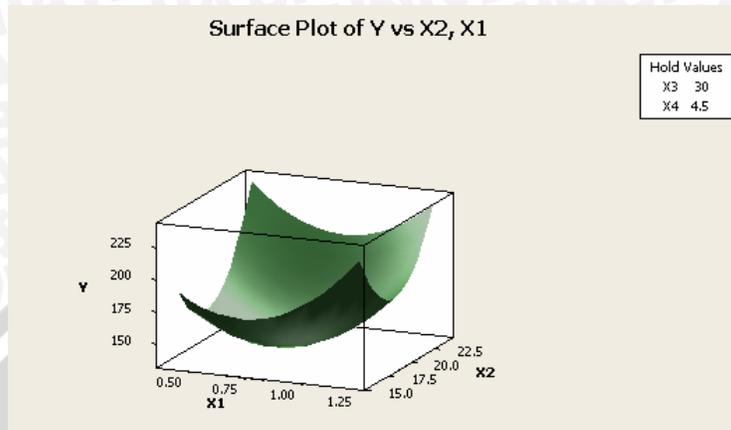
Source	DF	SS	MS	F	P
Regression	14	12494.2	892.4	6.09	0.000
Residual Error	16	2343.7	146.5		
Lack of Fit	10	1680.0	168.0	1.52	0.315
Pure Error	6	663.7	110.6		
Total	30	14837.9			

Lampiran 9. Kuadrat Tengah Galat (KTG) pada metode DLR

Y	\hat{Y}	Galat = $Y - \hat{Y}$	(Galat) ²
142	143.2555	-1.2555	1.57628
159	152.0257	6.9743	48.64086
155	149.8447	5.1553	26.57712
164	158.6149	5.3851	28.9993
154	140.2583	13.7417	188.8343
175	149.0285	25.9715	674.5188
167	146.8475	20.1525	406.1233
160	155.6177	4.3823	19.20455
171	152.3701	18.6299	347.0732
165	161.1403	3.8597	14.89728
185	158.9593	26.0407	678.1181
190	167.7295	22.2705	495.9752
167	149.3729	17.6271	310.7147
185	158.1431	26.8569	721.2931
162	155.9621	6.0379	36.45624
163	164.7323	-1.7323	3.000863
175	141.1558	33.8442	1145.43
188	158.6962	29.3038	858.7127
179	197.4656	-18.4656	340.9784
190	210.644	-20.644	426.1747
183	103.1712	79.8288	6372.637
194	97.1768	96.8232	9374.732
162	152.7062	9.2938	86.37472
179	170.9354	8.0646	65.03777
136	129	7	49
131	129	2	4
109	129	-20	400
136	129	7	49
120	129	-9	81
130	129	1	1
138	129	9	81
JKG			23337.08
db			22
KTG			1060.776

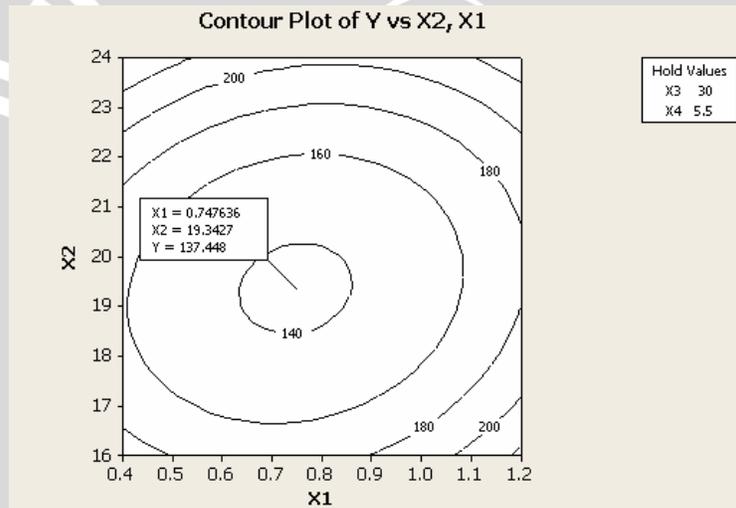
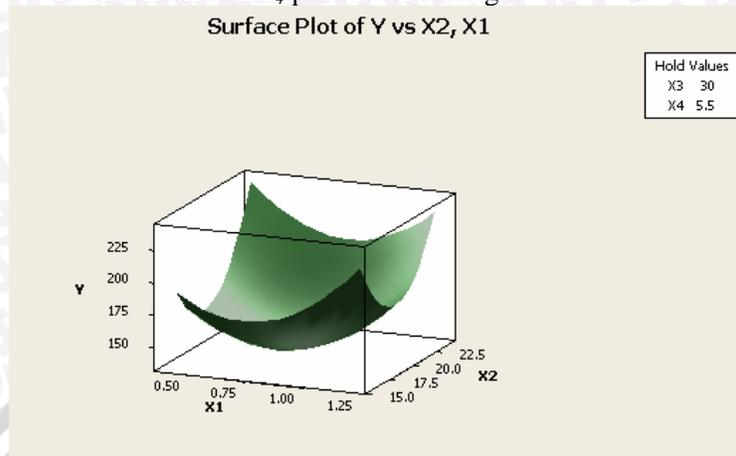
Lampiran 10a. Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 di mana X_3 dan X_4 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1).

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 ; X_3 dan X_4 pada level rendah.



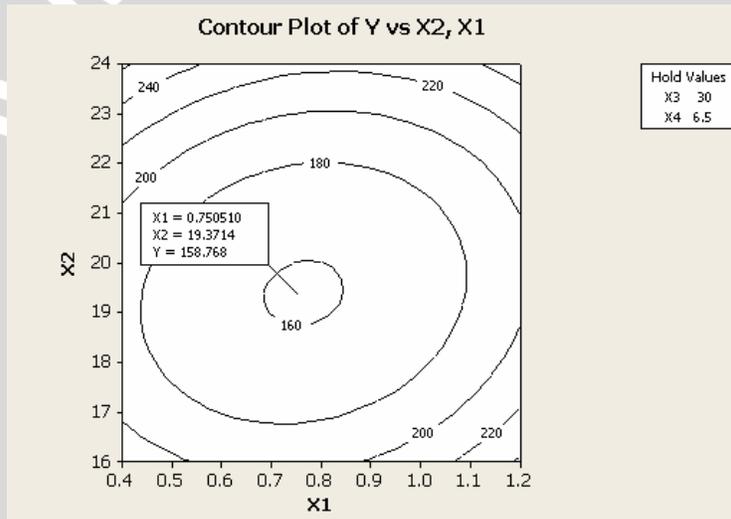
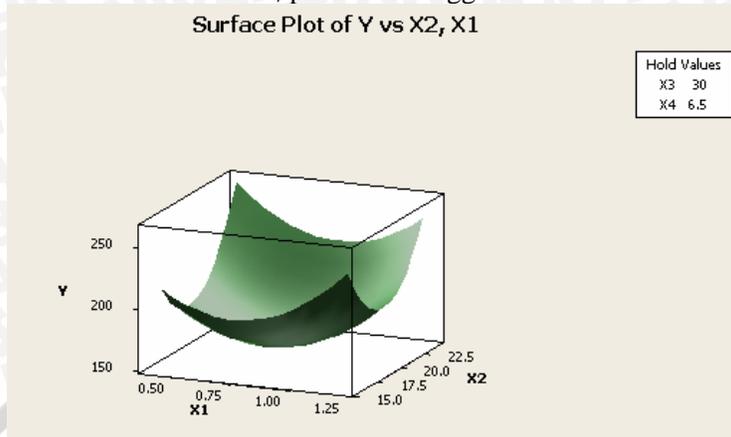
Lampiran 10a (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 , X_3 pada level rendah dan X_4 pada level sedang.



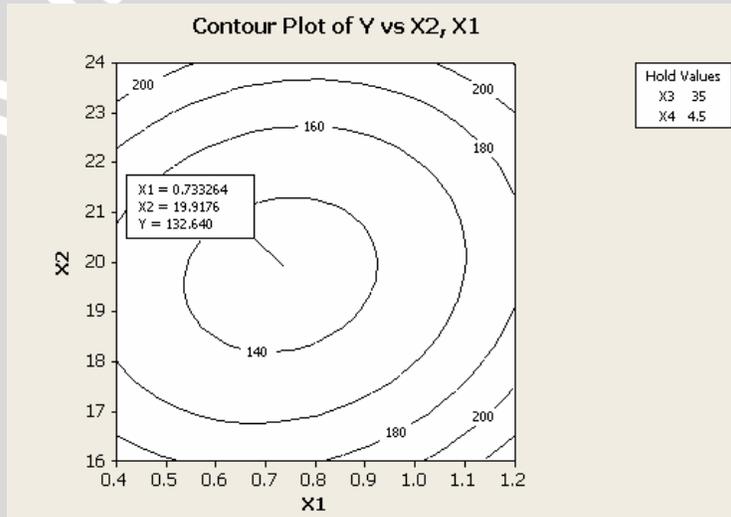
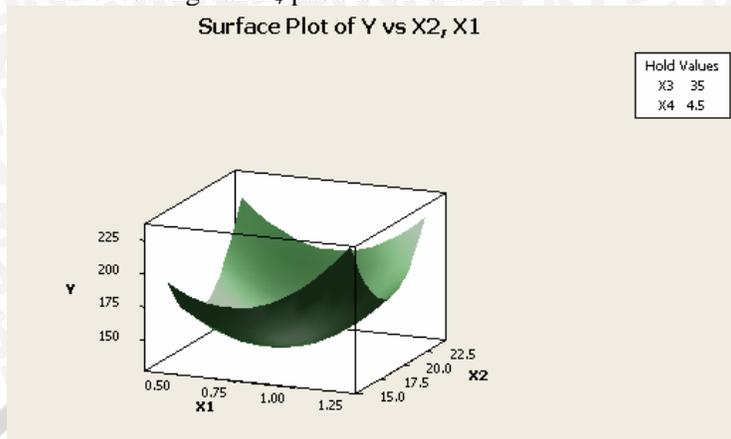
Lampiran 10a (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 , X_3 pada level rendah dan X_1 pada level tinggi.



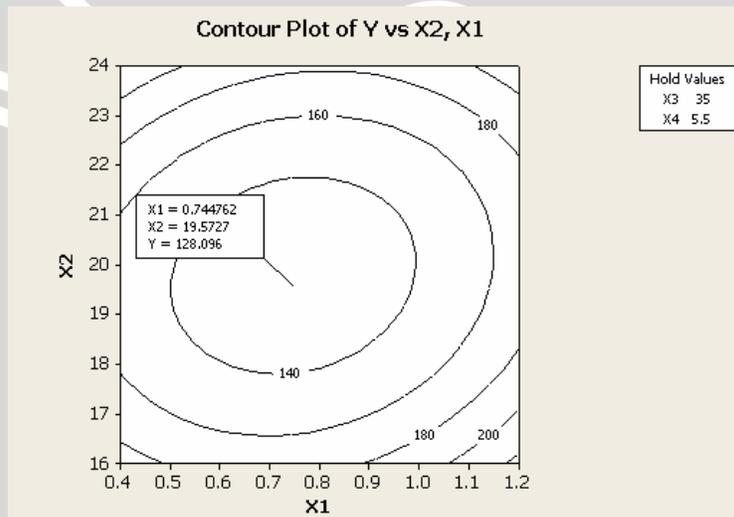
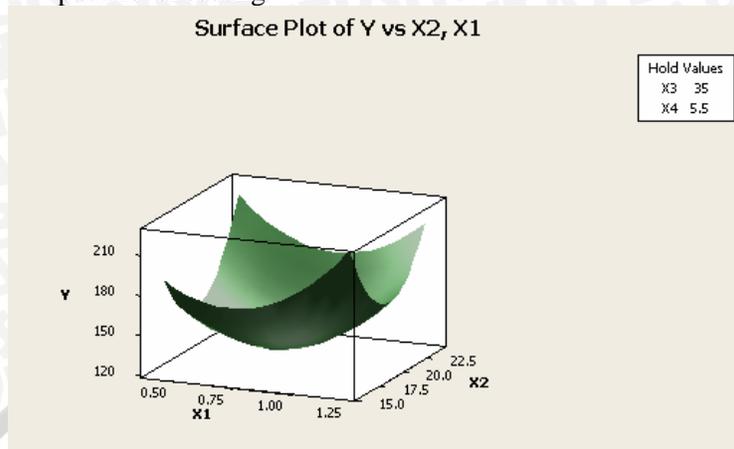
Lampiran 10a (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 , X_3 pada level sedang dan X_4 pada level rendah.



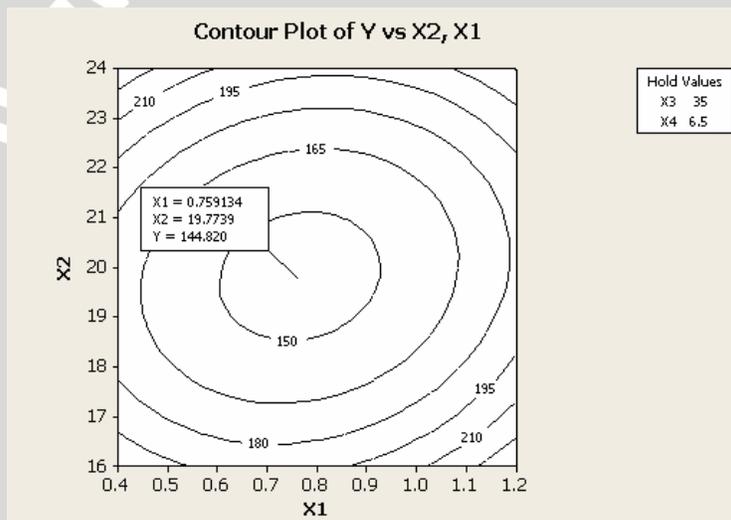
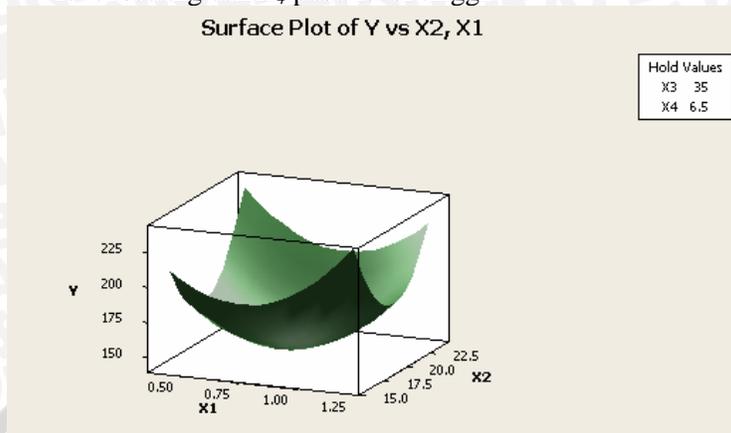
Lampiran 10a (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 ; X_3 dan X_4 pada level sedang.



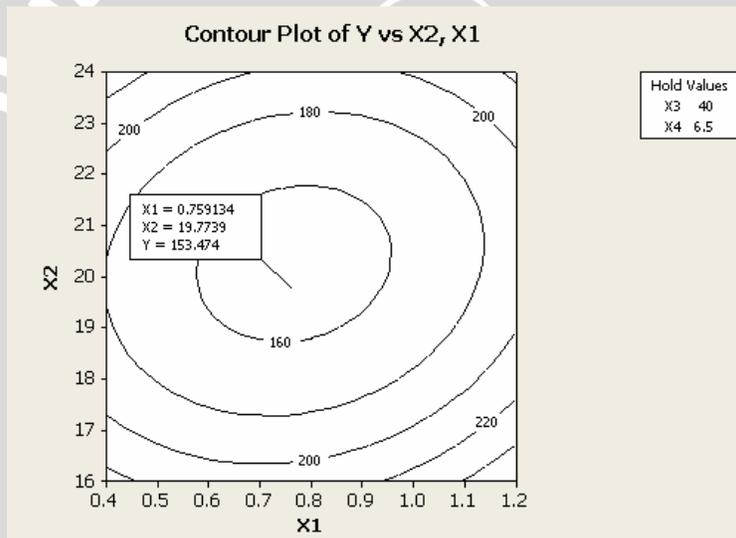
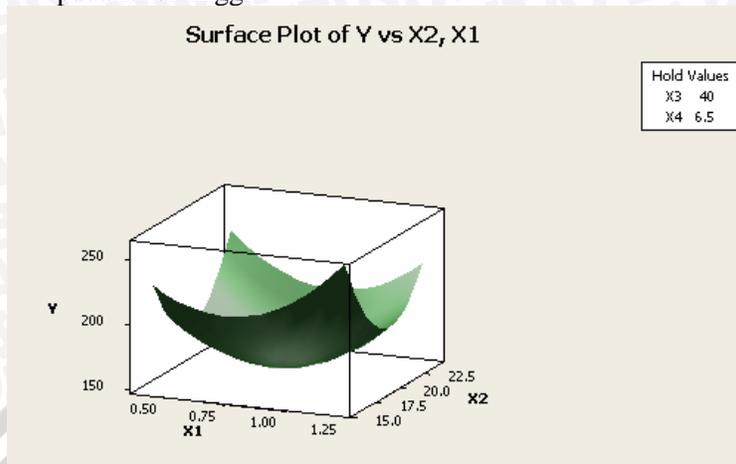
Lampiran 10a (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 , X_3 pada level sedang dan X_4 pada level tinggi.



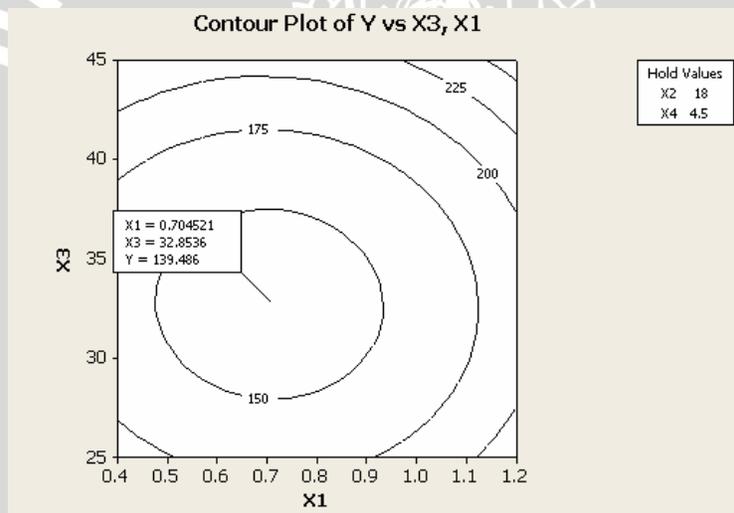
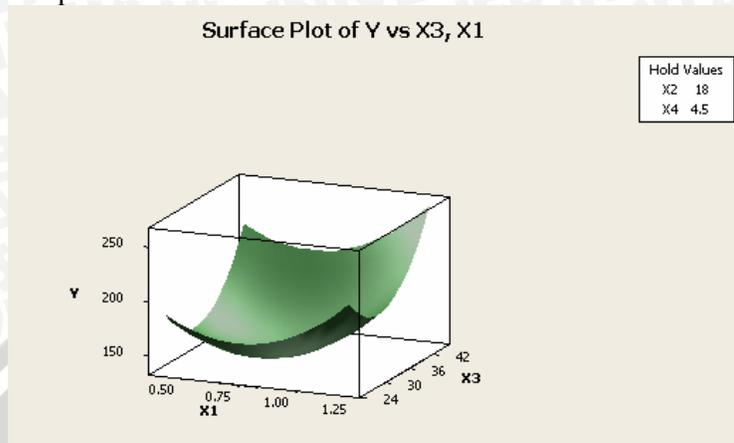
Lampiran 10a (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_2 ; X_3 dan X_4 pada level tinggi.



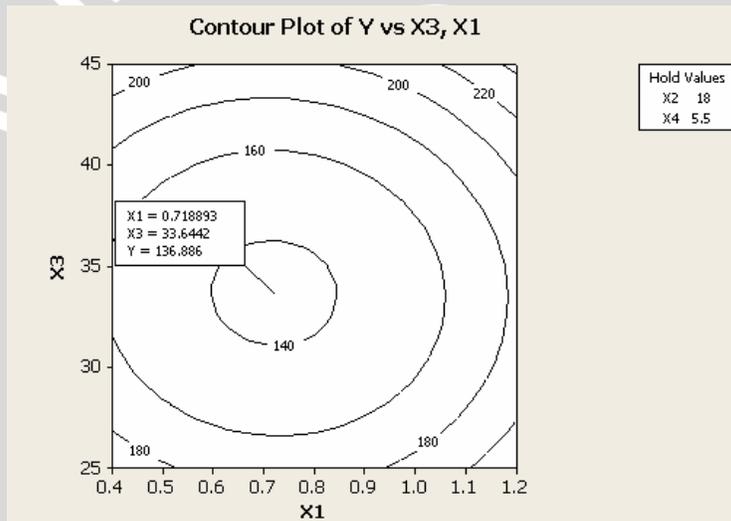
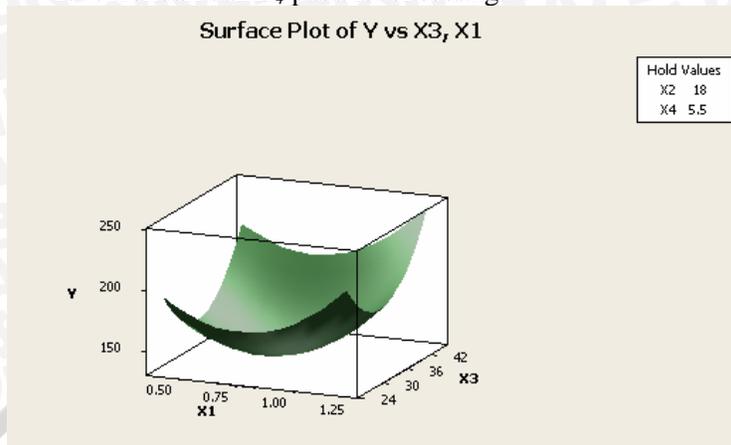
Lampiran 10b. Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 di mana X_2 dan X_4 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1).

• Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 ; X_2 dan X_4 pada level rendah.



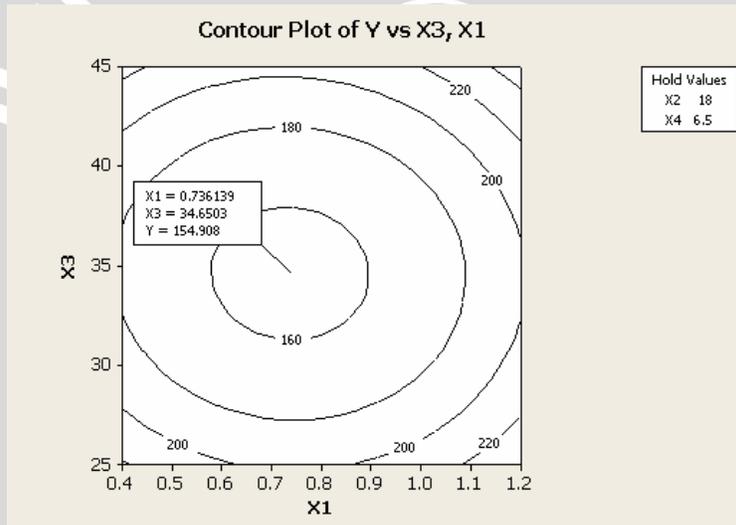
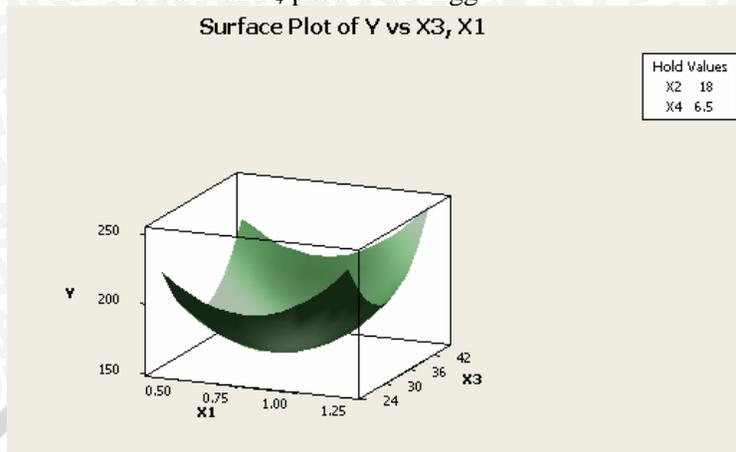
Lampiran 10b. (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 , X_2 pada level rendah dan X_1 pada level sedang.



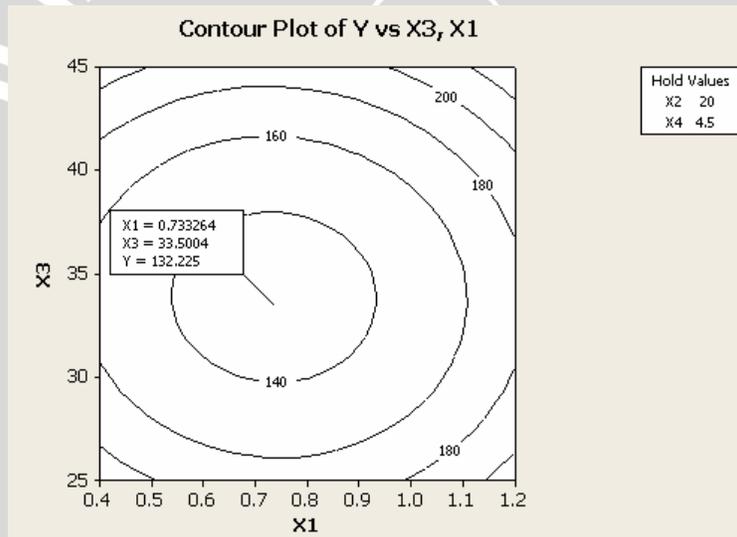
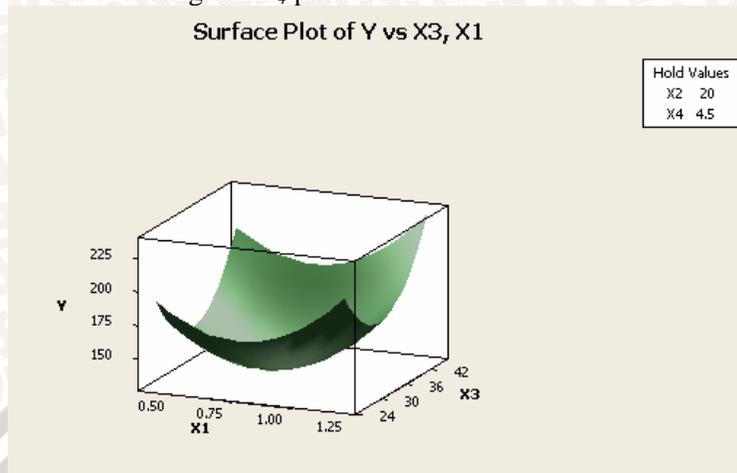
Lampiran 10b (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 , X_2 pada level rendah dan X_1 pada level tinggi.



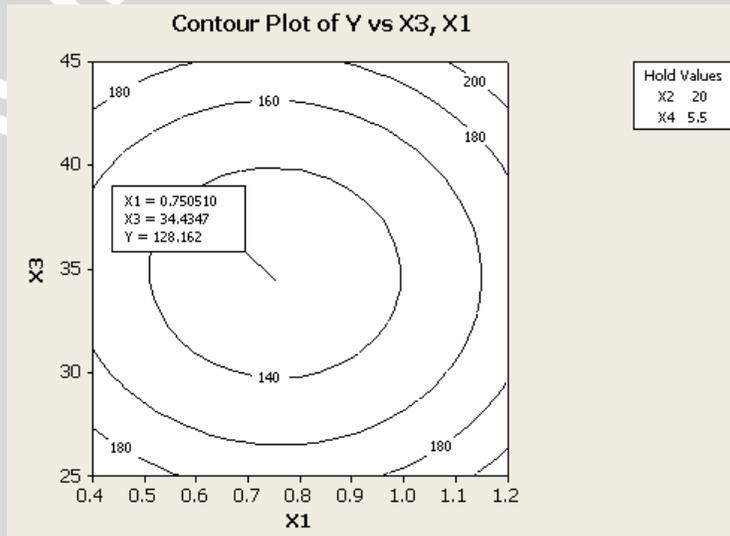
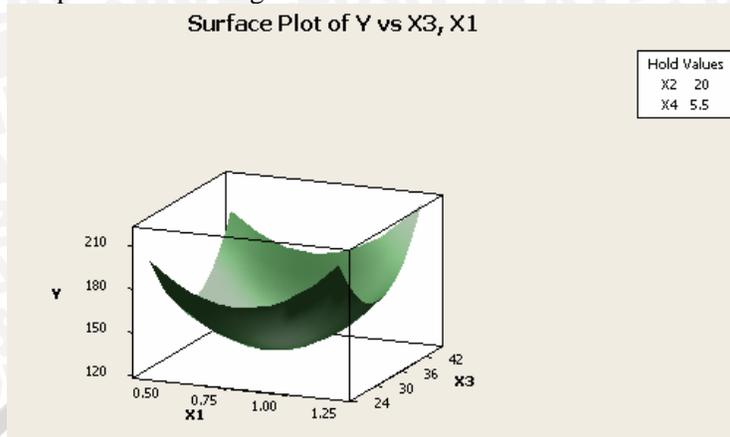
Lampiran 10b (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 , X_2 pada level sedang dan X_4 pada level rendah.



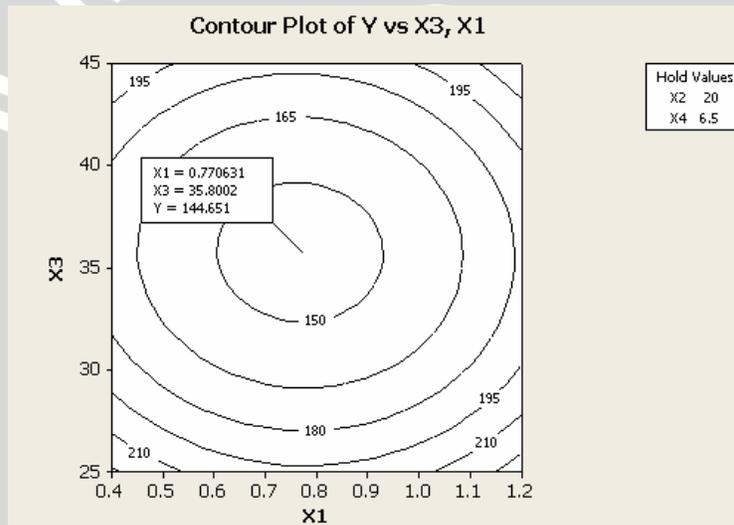
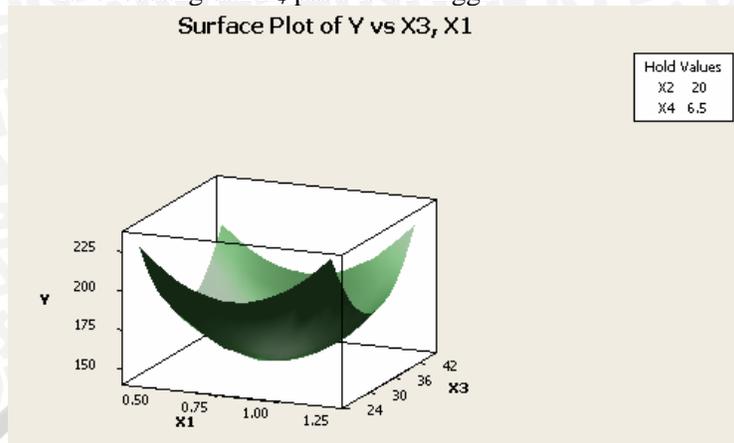
Lampiran 10b (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 , X_2 dan X_4 pada level sedang.



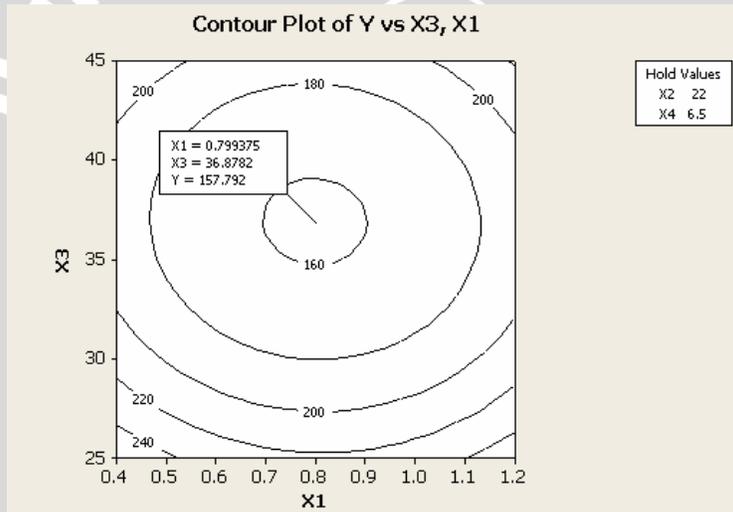
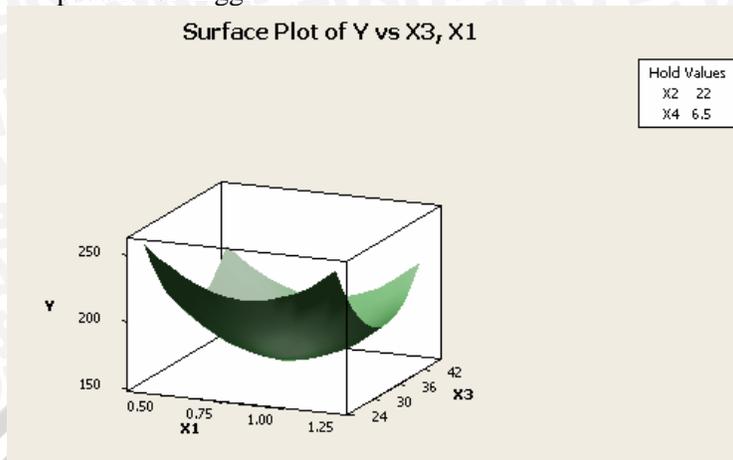
Lampiran 10b (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 , X_2 pada level sedang dan X_4 pada level tinggi.



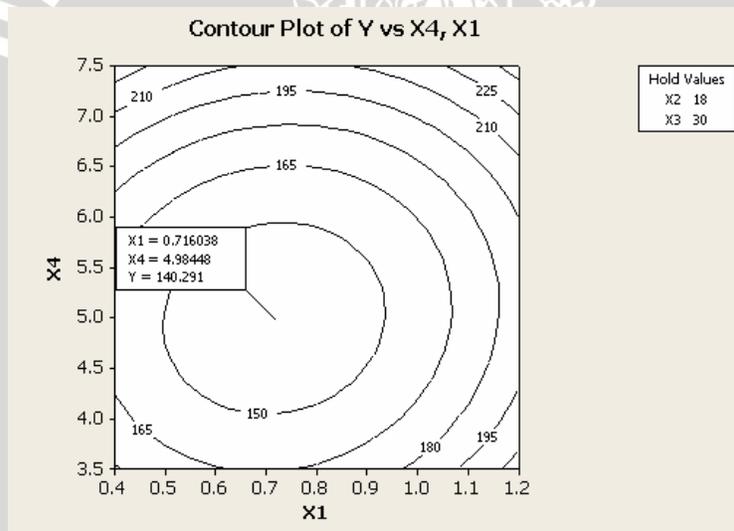
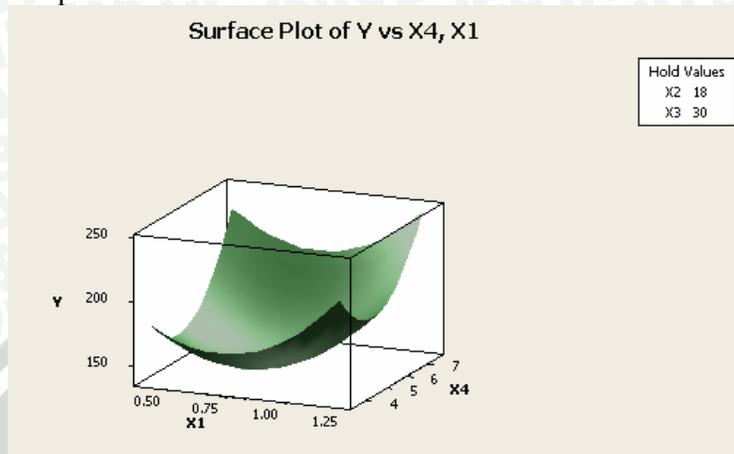
Lampiran 10b (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_3 ; X_2 dan X_4 pada level tinggi.



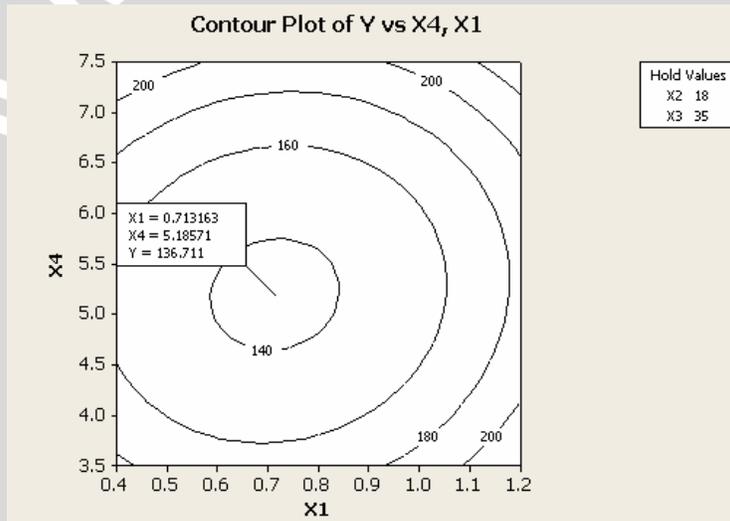
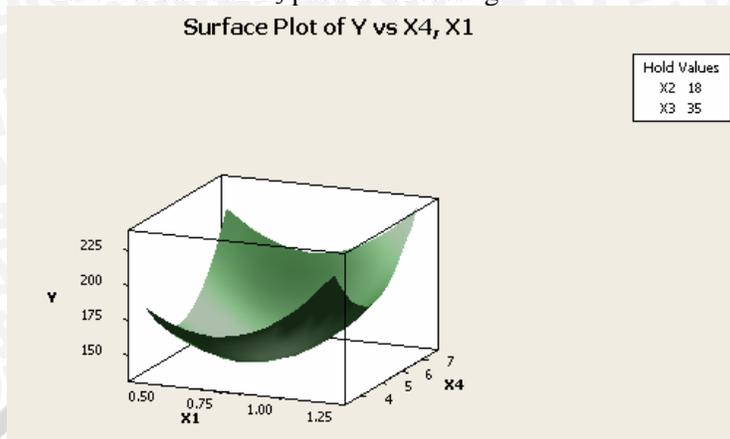
Lampiran 10c. Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 di mana X_2 dan X_3 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1).

• Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 ; X_2 dan X_3 pada level rendah.



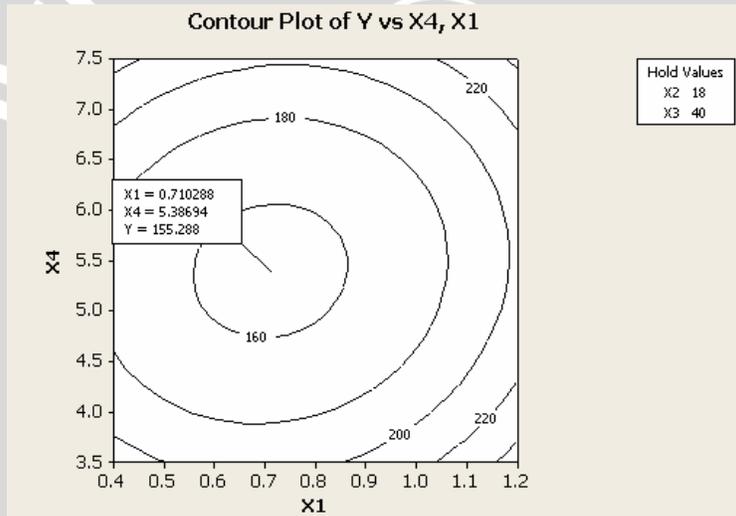
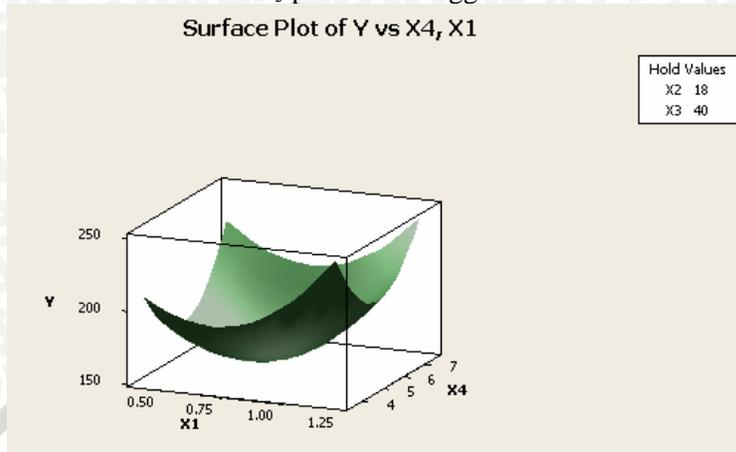
Lampiran 10c (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 , X_2 pada level rendah dan X_3 pada level sedang.



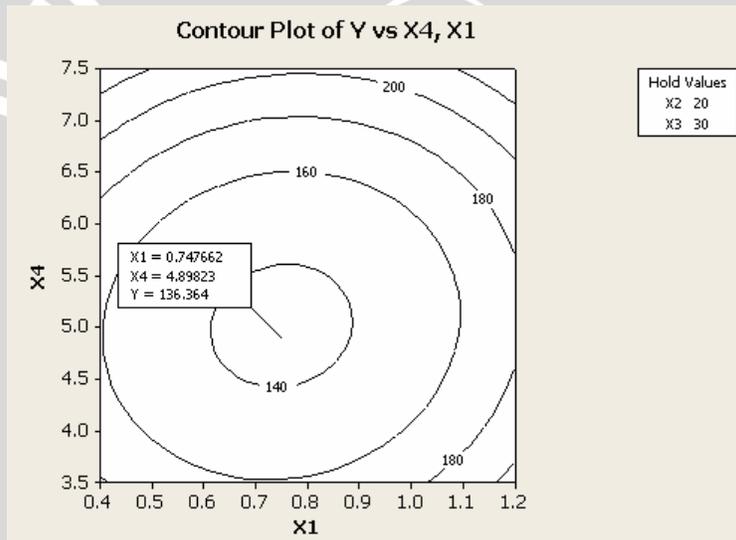
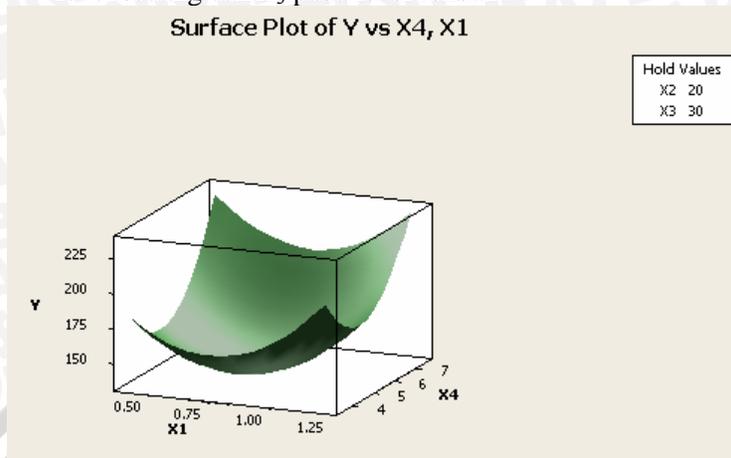
Lampiran 10c (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 ; X_2 pada level rendah dan X_3 pada level tinggi.



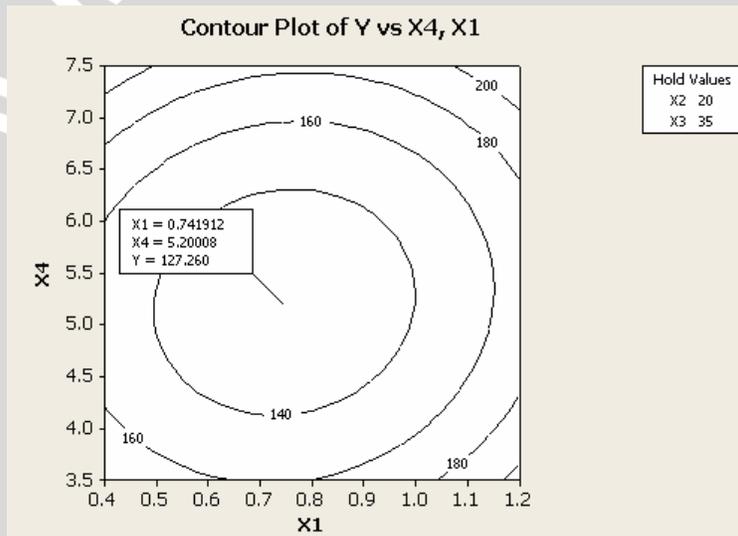
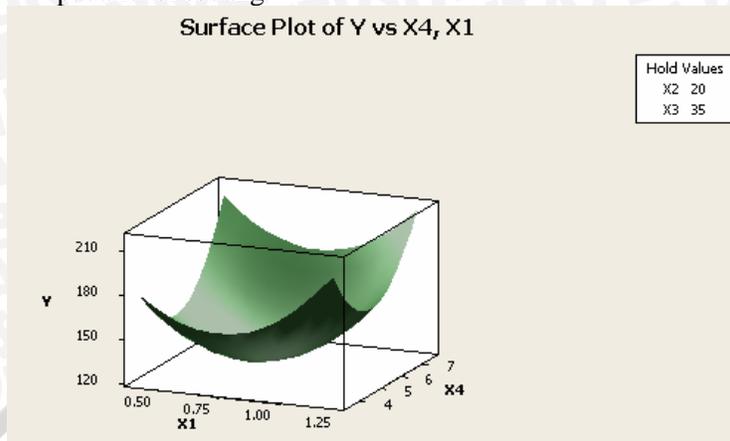
Lampiran 10c (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 , X_2 pada level sedang dan X_3 pada level rendah.



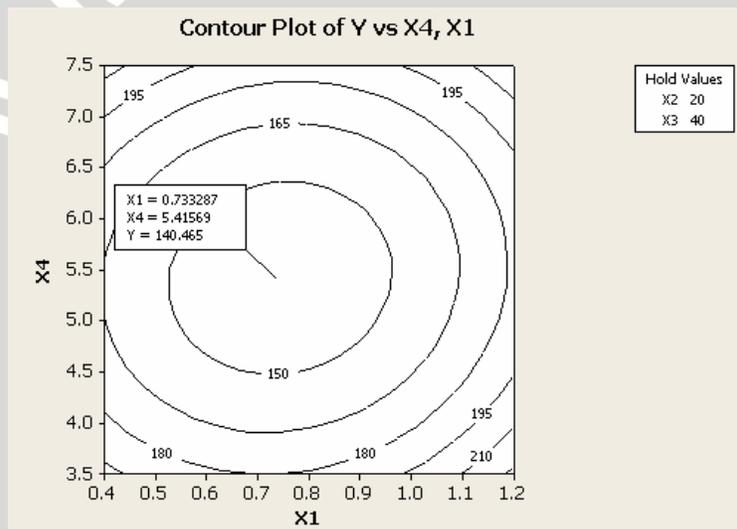
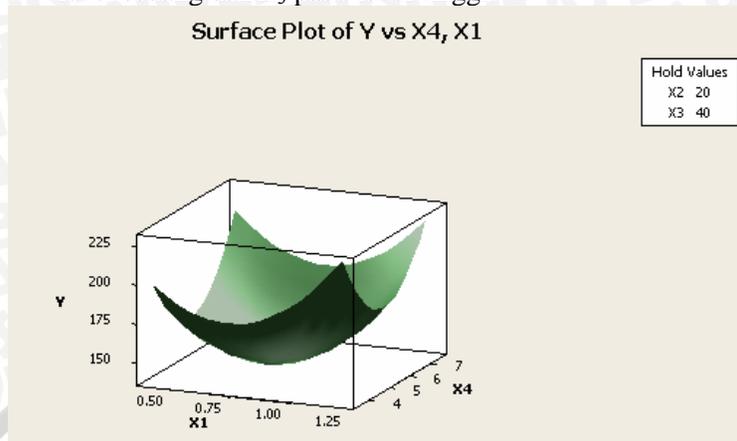
Lampiran 10c (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 ; X_2 dan X_3 pada level sedang.



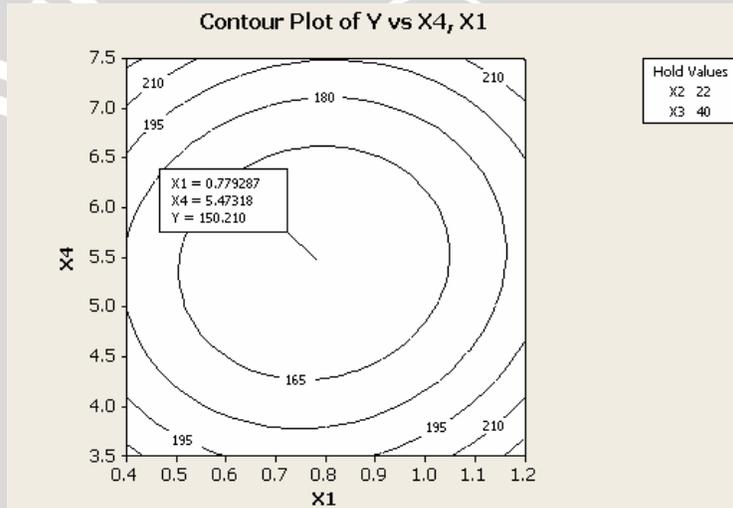
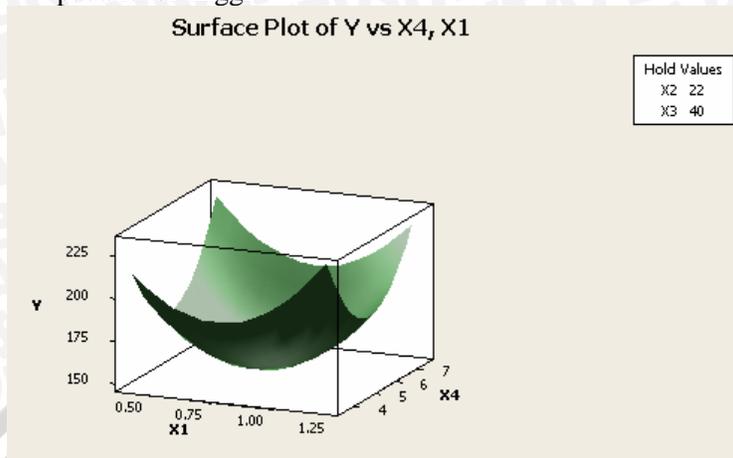
Lampiran 10c (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 , X_2 pada level sedang dan X_3 pada level tinggi.



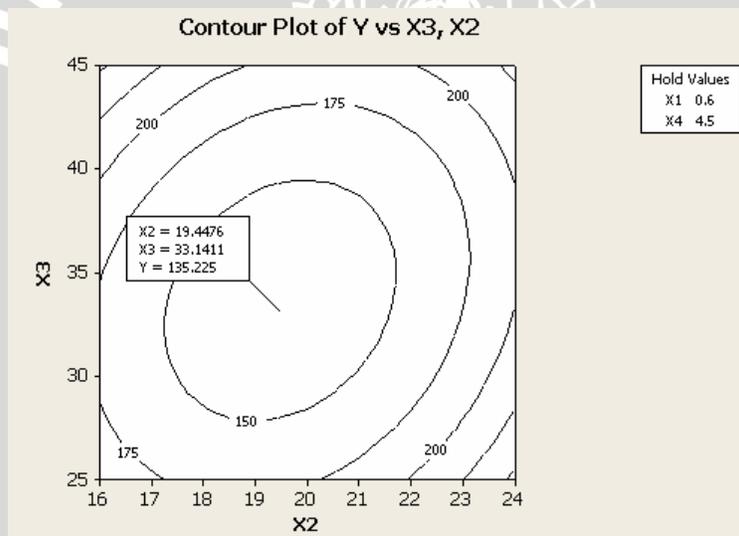
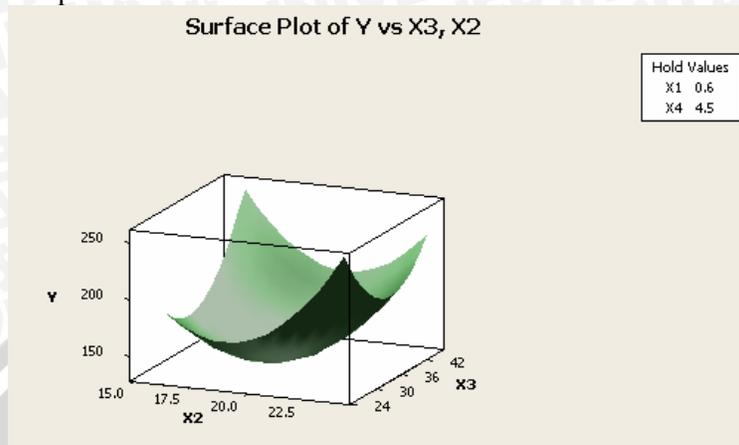
Lampiran 10c (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_1 dan X_4 ; X_2 dan X_3 pada level tinggi.



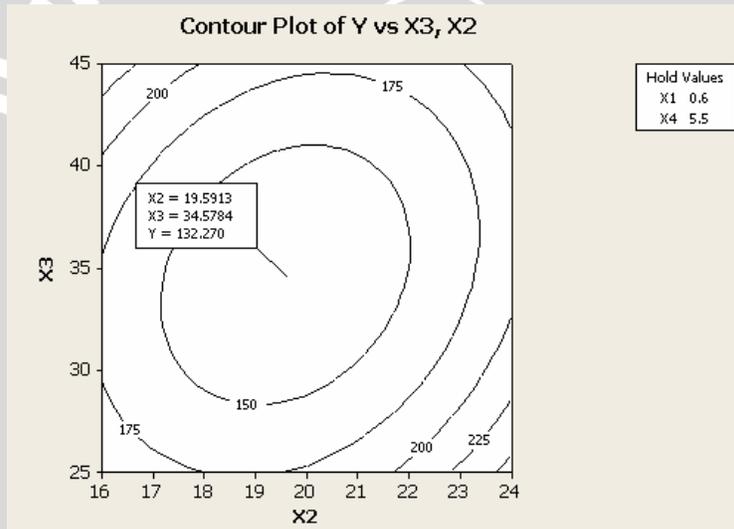
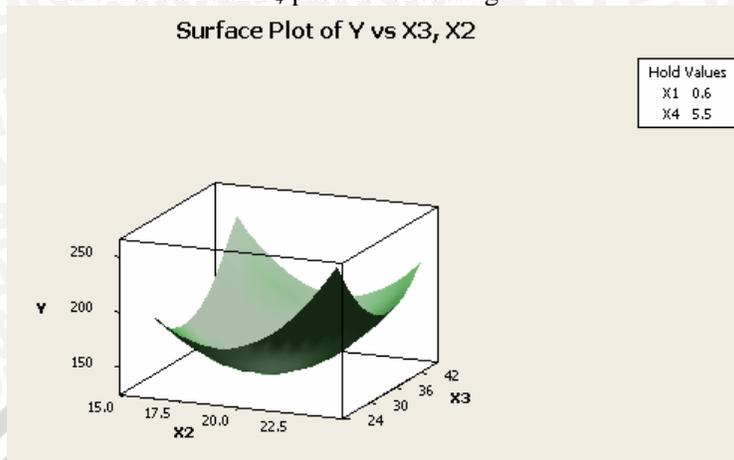
Lampiran 10d. Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 di mana X_1 dan X_4 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1).

. Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 ; X_1 dan X_4 pada level rendah.



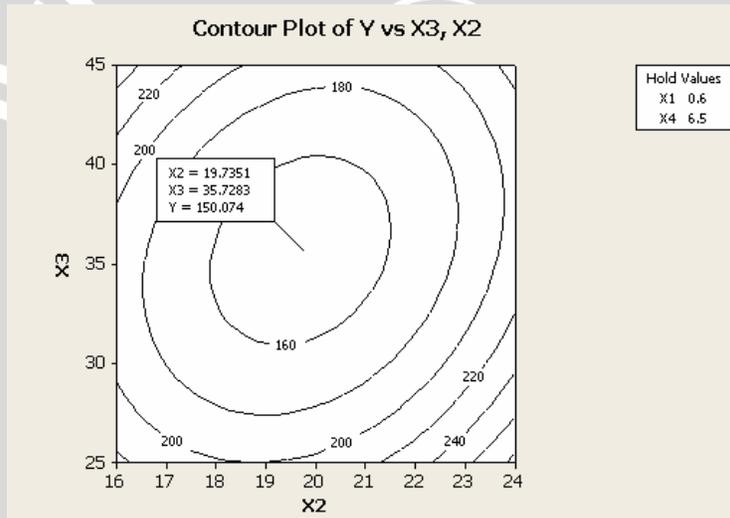
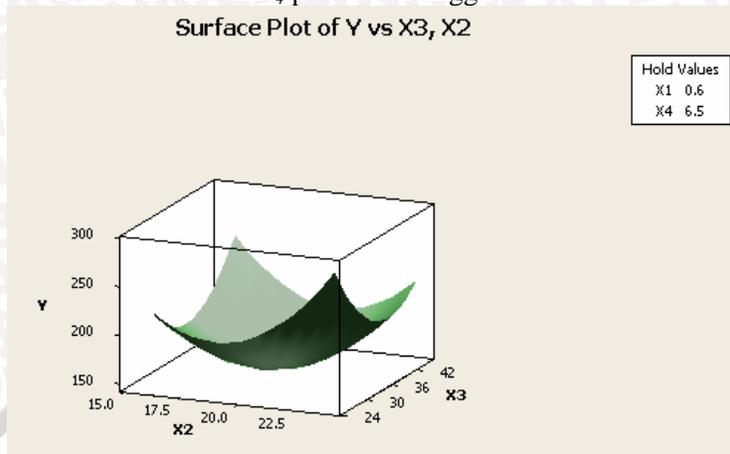
Lampiran 10d (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 , X_1 pada level rendah dan X_1 pada level sedang.



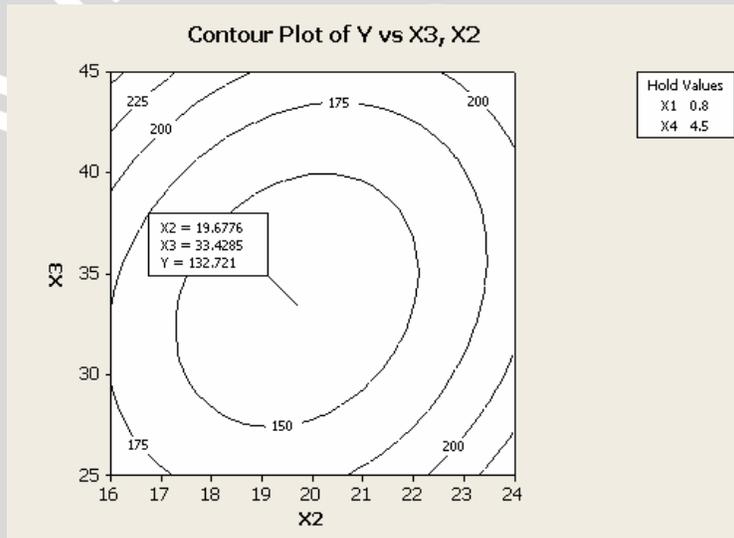
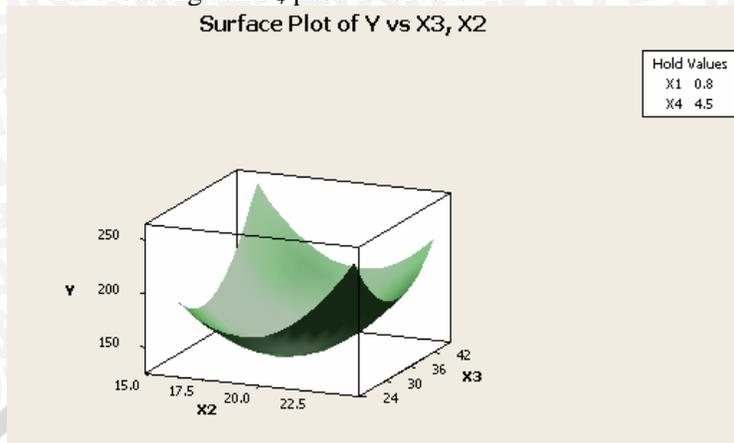
Lampiran 10d (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 , X_1 pada level rendah dan X_4 pada level tinggi.



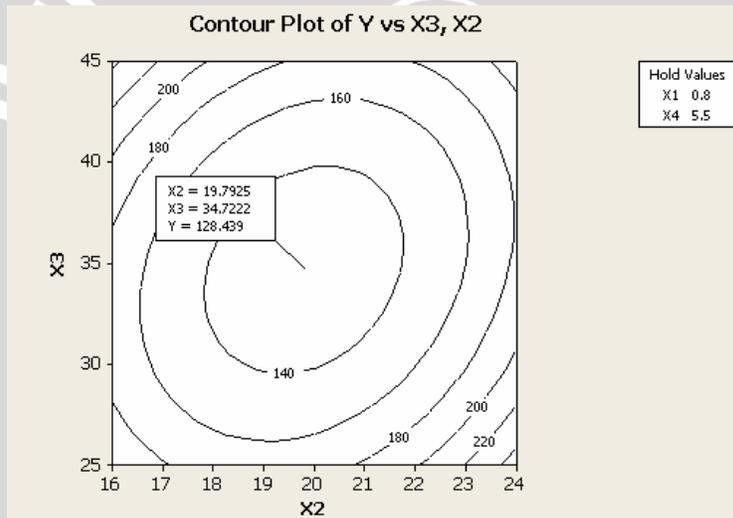
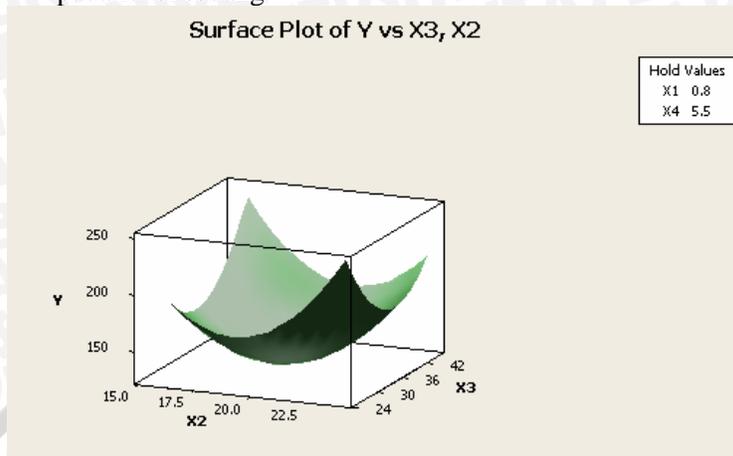
Lampiran 10d (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 , X_1 pada level sedang dan X_4 pada level rendah.



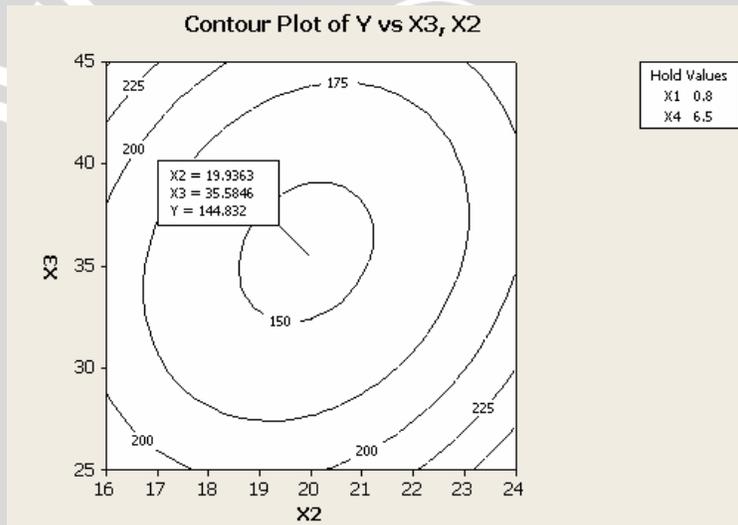
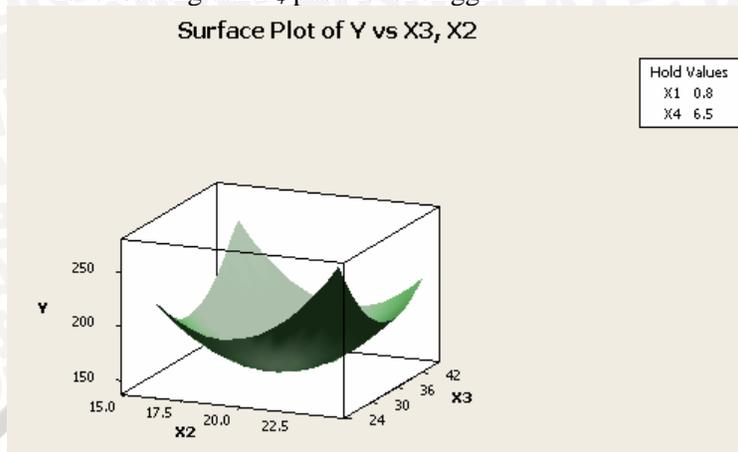
Lampiran 10d (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 ; X_1 dan X_4 pada level sedang.



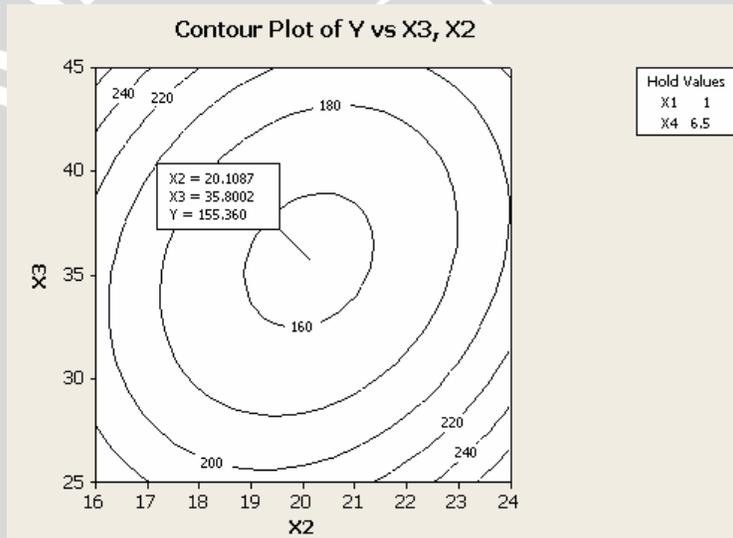
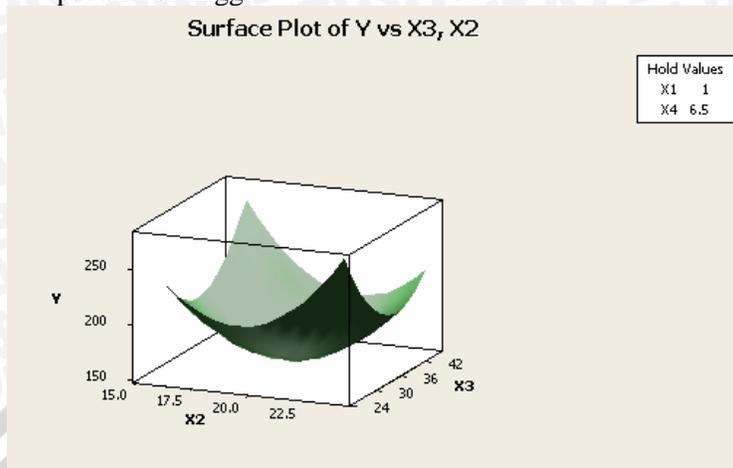
Lampiran 10d (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 , X_1 pada level sedang dan X_4 pada level tinggi.



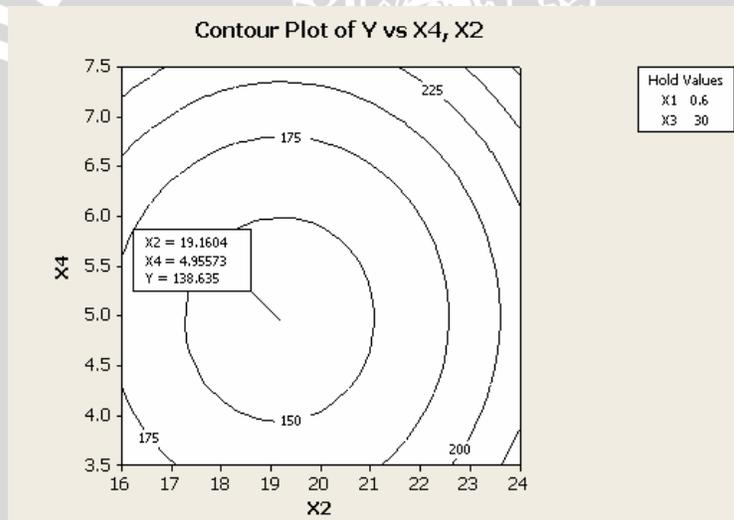
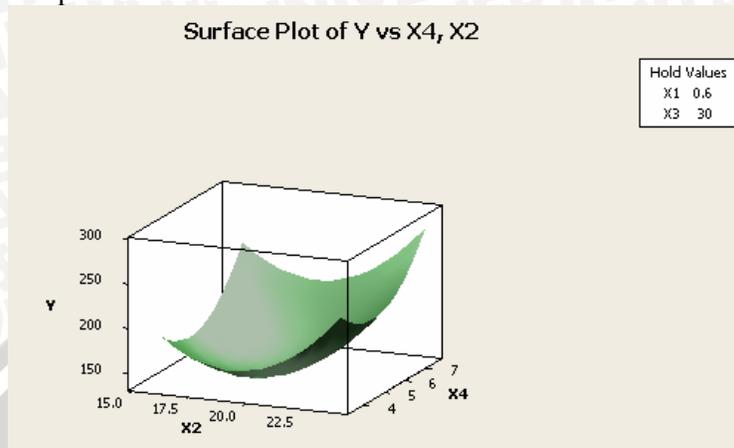
Lampiran 10d (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_3 ; X_1 dan X_4 pada level tinggi.



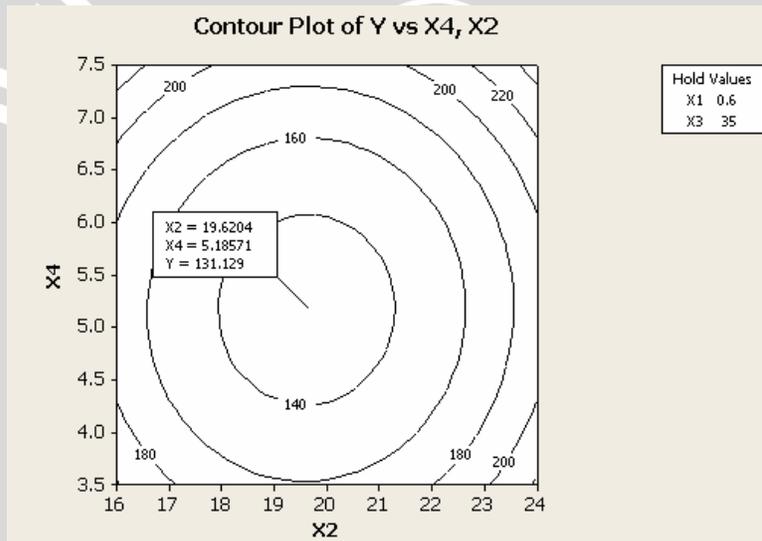
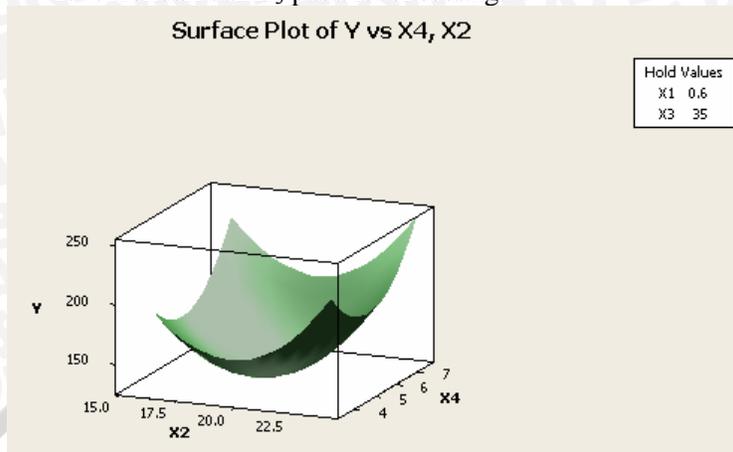
Lampiran 10e. Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 di mana X_1 dan X_3 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1).

. Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 ; X_1 dan X_3 pada level rendah.



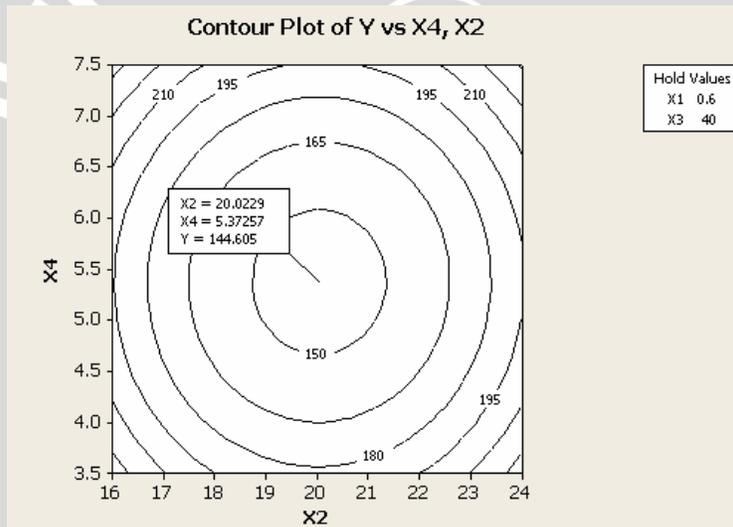
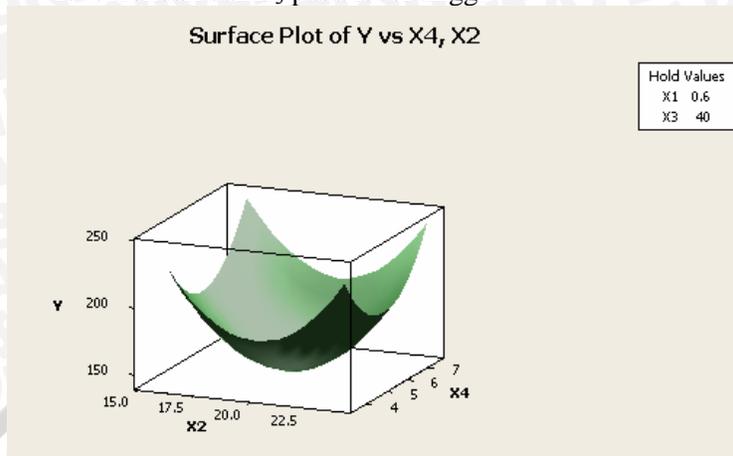
Lampiran 10e (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 , X_1 pada level rendah dan X_3 pada level sedang.



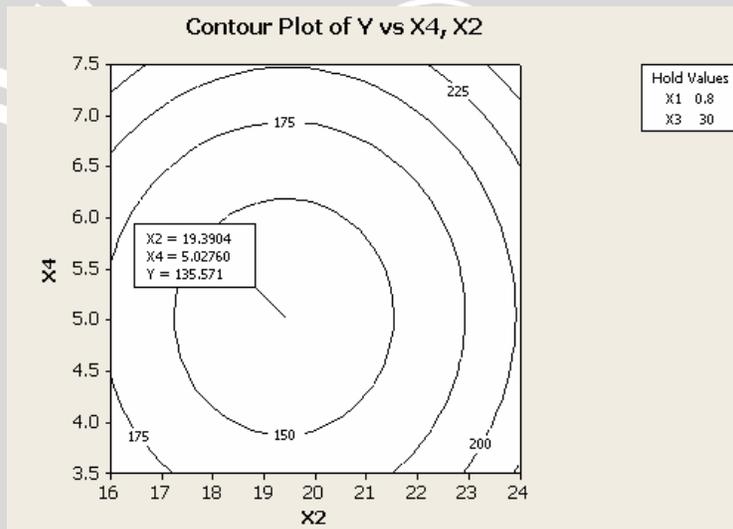
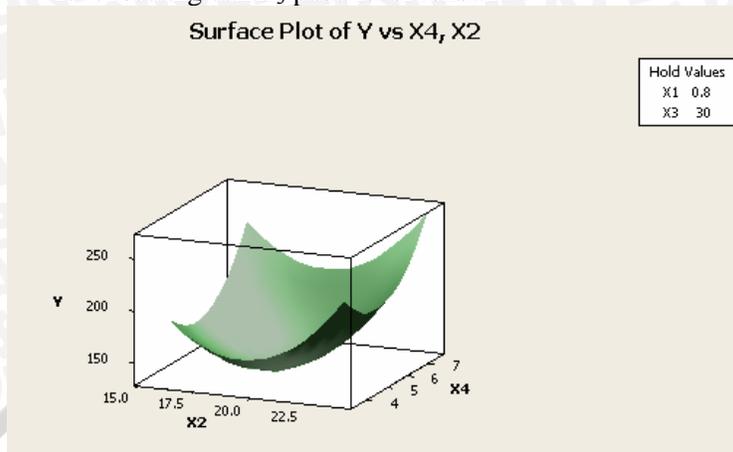
Lampiran 10e (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 , X_1 pada level rendah dan X_3 pada level tinggi.



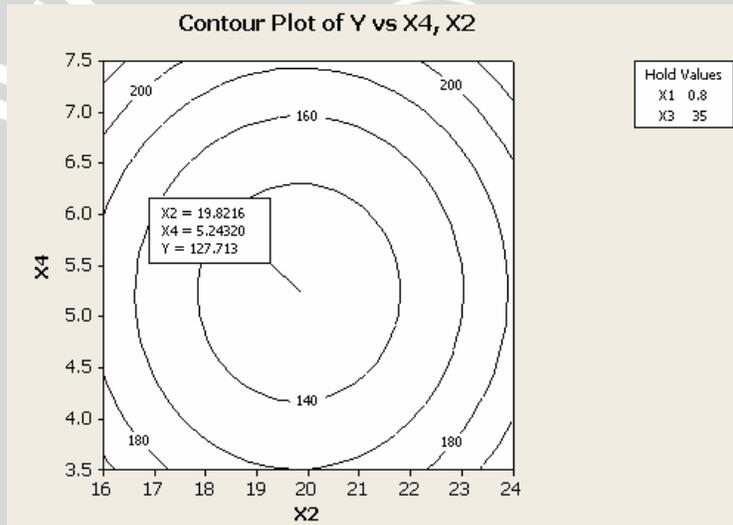
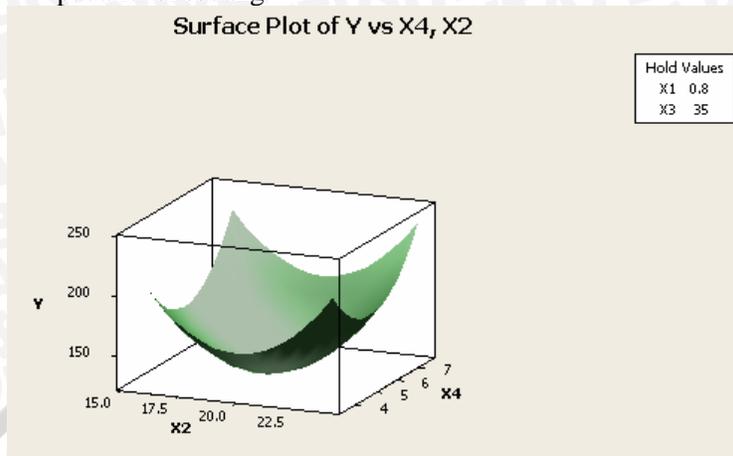
Lampiran 10e (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 , X_1 pada level sedang dan X_3 pada level rendah.



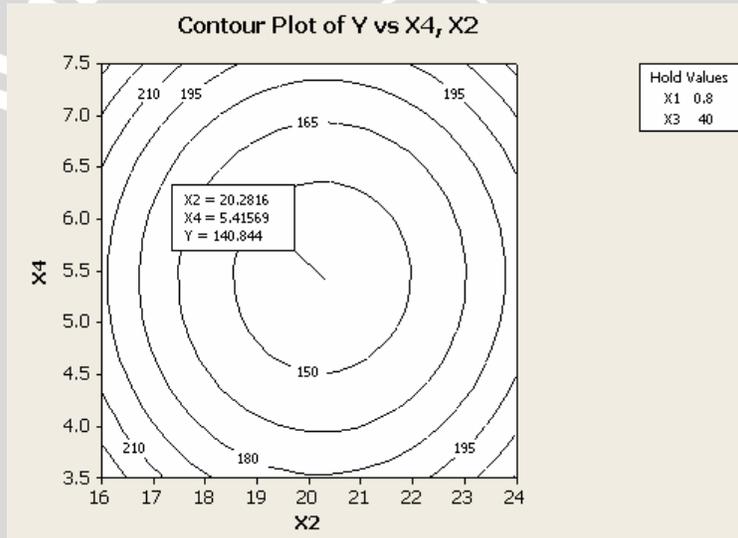
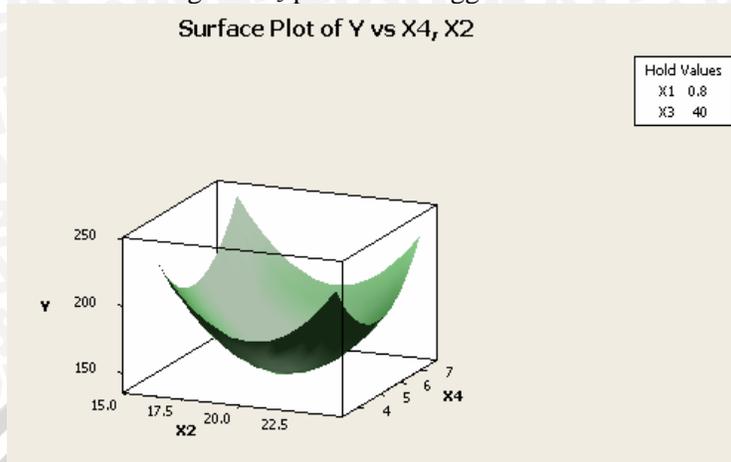
Lampiran 10e (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 ; X_1 dan X_3 pada level sedang.



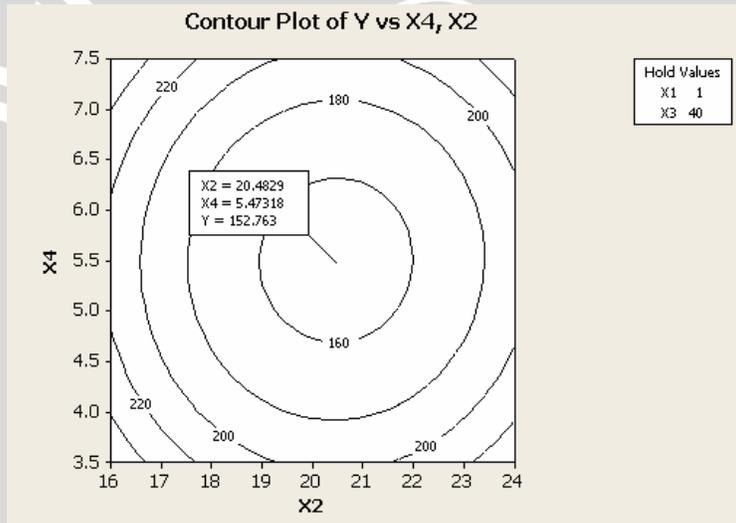
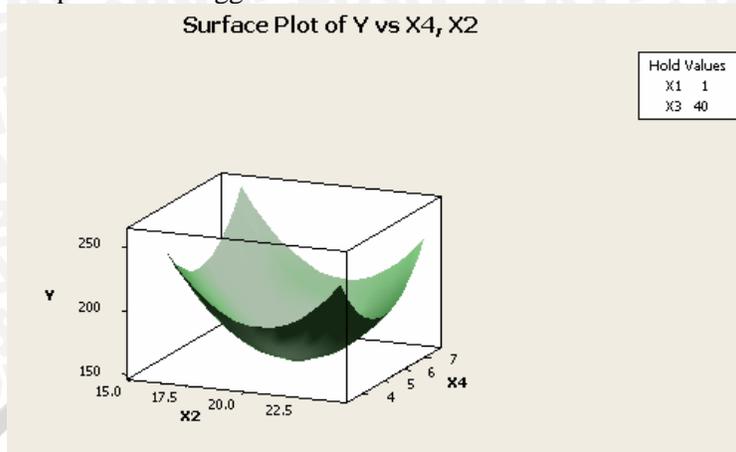
Lampiran 10e (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 , X_1 pada level sedang dan X_3 pada level tinggi.



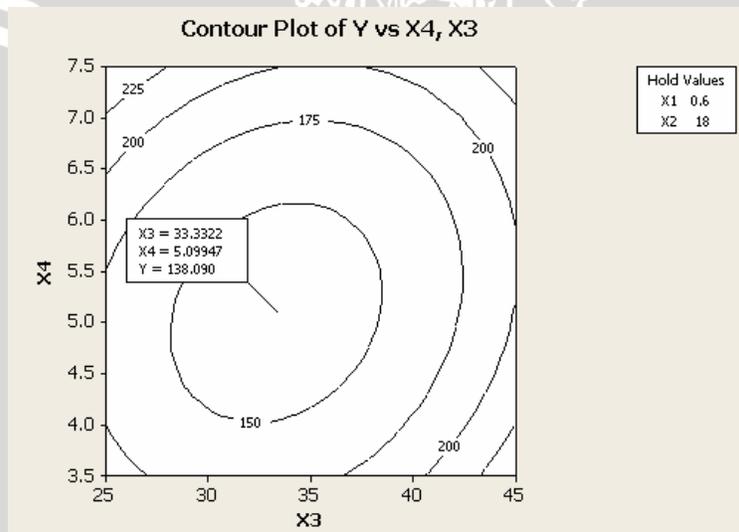
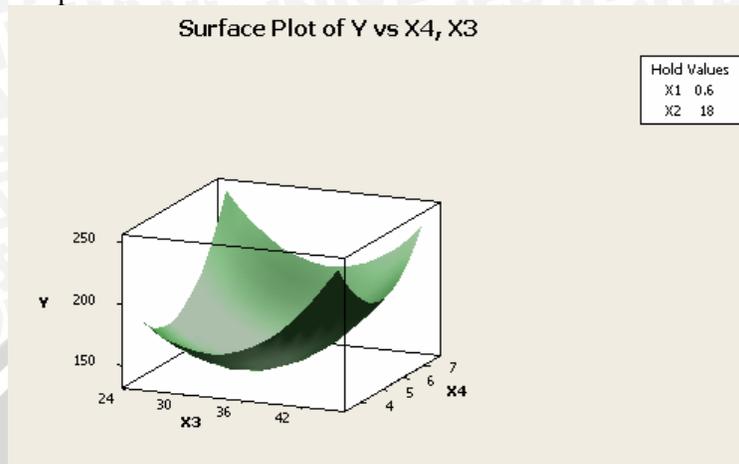
Lampiran 10e (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_2 dan X_4 ; X_1 dan X_3 pada level tinggi.



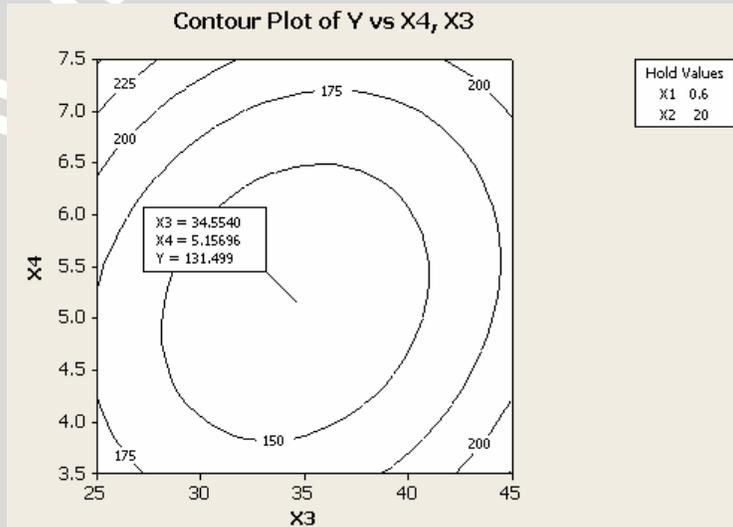
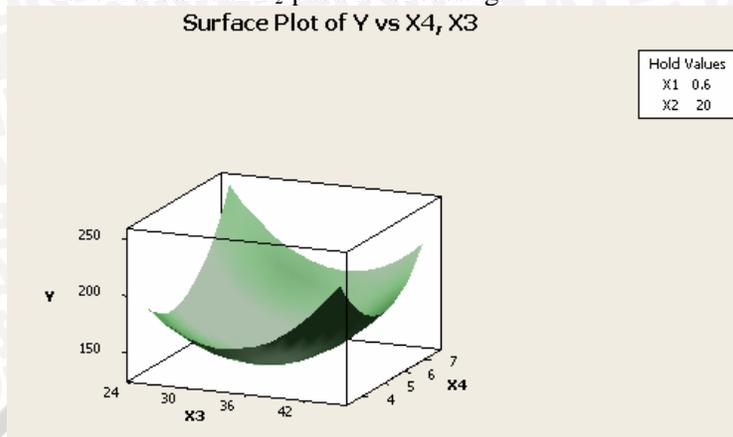
Lampiran 10f. Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 di mana X_1 dan X_2 pada level tinggi (nilai kode 1), sedang (nilai kode 0) dan rendah (nilai kode -1).

• Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 ; X_1 dan X_2 pada level rendah.



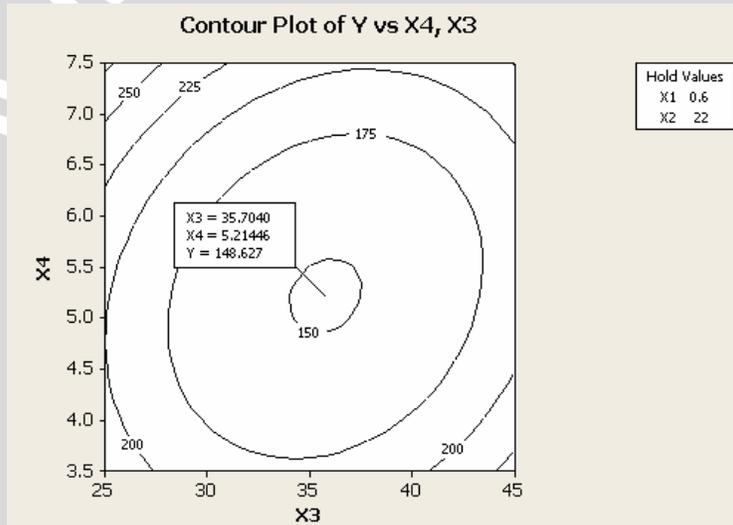
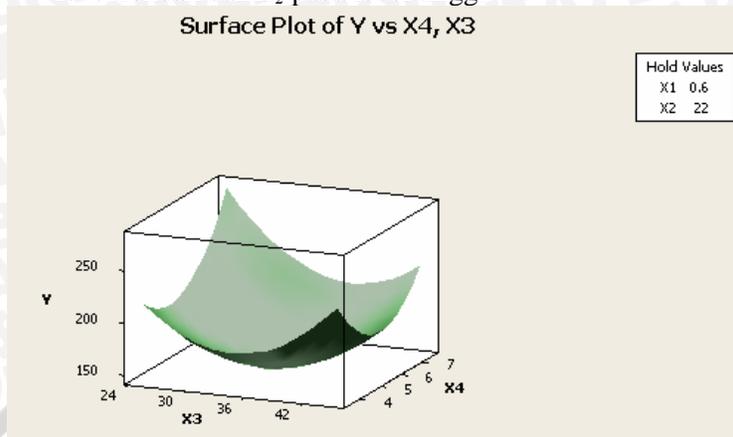
Lampiran 10f (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 , X_1 pada level rendah dan X_2 pada level sedang.



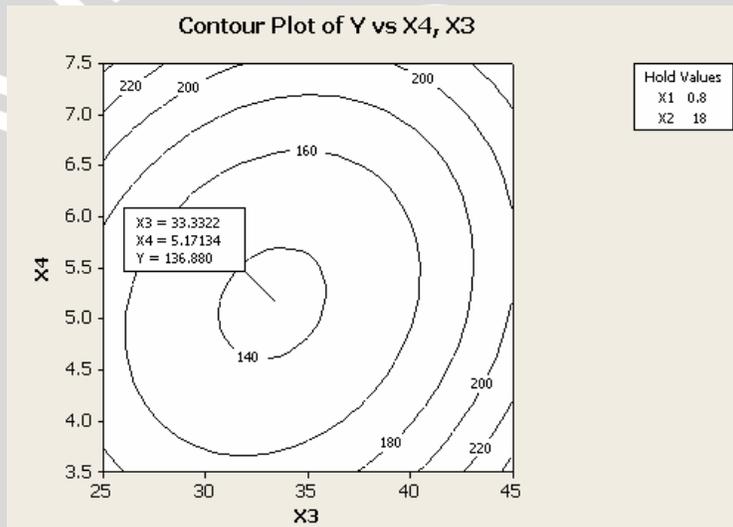
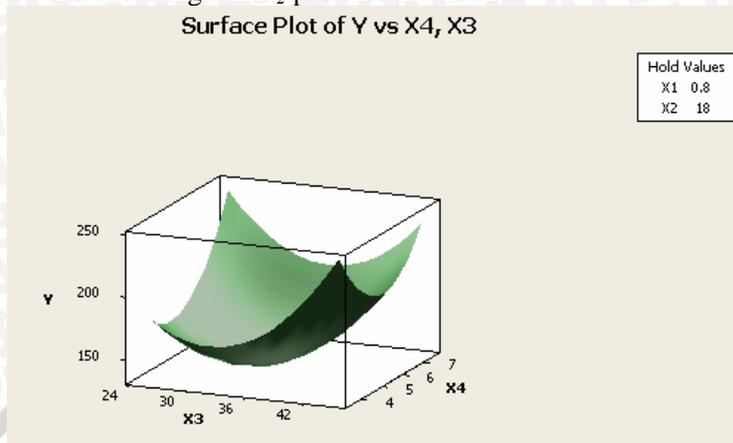
Lampiran 10f (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 , X_1 pada level rendah dan X_2 pada level tinggi.



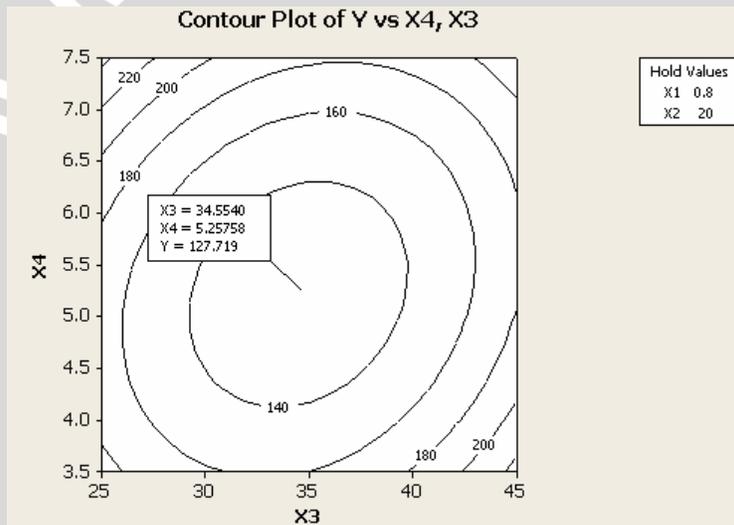
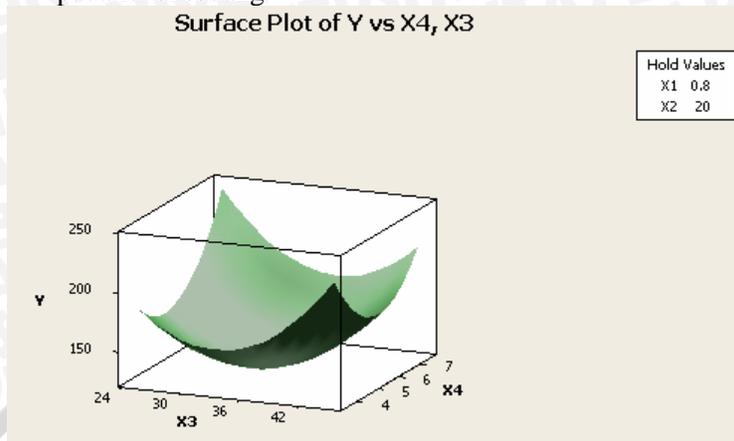
Lampiran 10f (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 , X_1 pada level sedang dan X_2 pada level rendah.



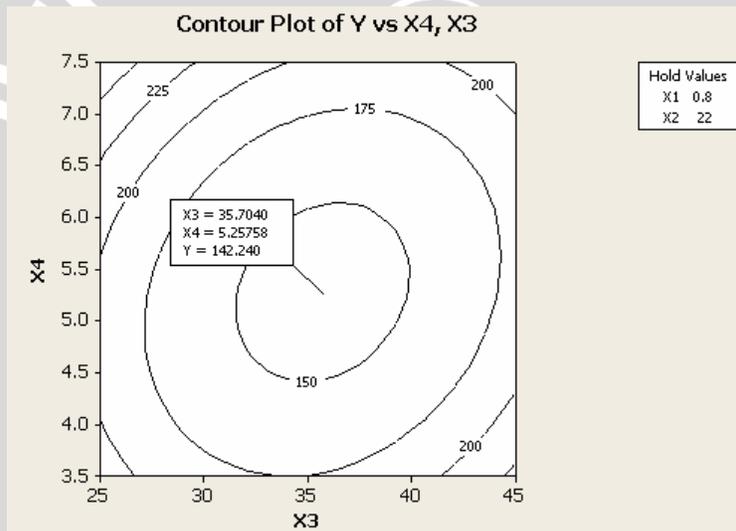
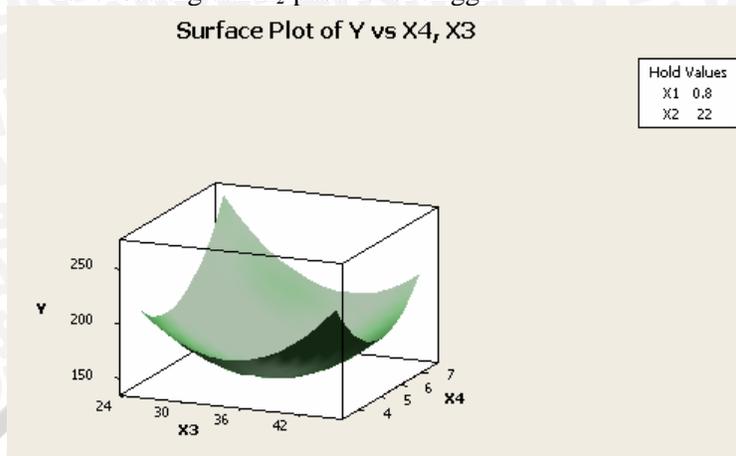
Lampiran 10f (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 ; X_1 dan X_2 pada level sedang.



Lampiran 10f (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 , X_1 pada level sedang dan X_2 pada level tinggi.



Lampiran 10f (Lanjutan)

- Permukaan respon dan plot kontur antara X_3 dan X_4 ; X_1 dan X_2 pada level tinggi.

