

**ANALISA PERILAKU ORBIT SISTEM DINAMIK DISKRIT
MELALUI KARAKTERISASI FUNGSI PEMBANGKIT
SISTEM**

SKRIPSI

Oleh
ARIKA PANAM
0310940006-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISA PERILAKU ORBIT SISTEM DINAMIK DISKRIT
MELALUI KARAKTERISASI FUNGSI PEMBANGKIT
SISTEM**

Oleh
ARIKA PANAM
0310940006-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 04 Februari 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I

Drs. M. Muslikh, MSi
NIP. 131 871 740

Pembimbing II

Dr. Marjono, MPhil
NIP. 131 785 254

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Arika Panam

NIM : 0310940006-94

Jurusan : Matematika

Program Studi : Matematika

Penulis skripsi berjudul :

**ANALISA PERILAKU ORBIT SISTEM DINAMIK DISKRIT
MELALUI KARAKTERISASI FUNGSI PEMBANGKIT
SISTEM**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya saya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka di dalam skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 04 Februari 2008

Yang menyatakan,

Arika Panam

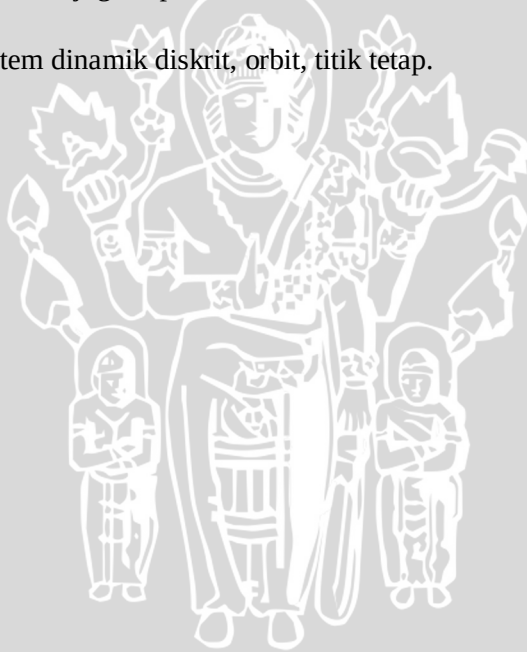
NIM. 0310940006-94

ANALISA PERILAKU ORBIT SISTEM DINAMIK DISKRIT MELALUI KARAKTERISASI FUNGSI PEMBANGKIT SISTEM

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dipelajari perilaku orbit sistem dinamik diskrit $x_{n+1}=f(x_n)$ melalui karakterisasi fungsi pembangkit f yang terdiferensial secara kontinu. Seperti halnya dalam pemeriksaan kestabilan titik tetap yang dapat dicirikan oleh f' di titik tersebut, perilaku orbit sistem juga dapat ditentukan oleh nilai mutlak f' .

Kata kunci: sistem dinamik diskrit, orbit, titik tetap.



ANALYSIS ON THE BEHAVIOUR OF ORBIT OF DISCRETE DYNAMICAL SYSTEM THROUGH THE CHARACTERIZATION OF GENERATOR FUNCTION OF THE SYSTEM

ABSTRACT

This final project discusses behaviour of orbits of a discrete dynamical system $x_{n+1}=f(x_n)$ through characterization of continuously-differentiated generator function f . As well as fixed point stability which is can be characterized by f' on the point, orbits behaviour also can be determined by using the absolute value of f' .

Keyword: discrete dynamical system, orbit, fixed point.

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah, puji syukur ke hadirat Allah SWT atas segala rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul “Analisa Perilaku Orbit Sistem Dinamik Diskrit Melalui Karakterisasi Fungsi Pembangkit Sistem”. Sholawat dan salam semoga tetap tercurahkan kepada Rasulullah Muhammad SAW.

Skripsi ini disusun dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika.

Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Drs. M. Muslikh, M.Si selaku Dosen Pembimbing I yang telah memberikan ilmu, masukan, dan bimbingannya selama penyusunan skripsi ini.
2. Dr. Marjono, M.Phil selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan motivasi, bimbingan, dan ilmu selama penyusunan skripsi.
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika.
4. Drs. M. Aruman Imron, M.Si, Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si, dan Drs. Imam Nurhadi P., MT selaku Dosen penguji yang telah memberikan masukan, saran, dan kritik untuk perbaikan skripsi ini.
5. Serta semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu terima kasih banyak.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran dan kritik yang bersifat membangun dalam upaya peningkatan kualitas skripsi ini.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat menambah wawasan dan memberikan manfaat untuk perkembangan ilmu pengetahuan.

Malang, 04 Februari 2008

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Lembar Pengesahan	ii
Lembar Pernyataan	iii
Abstrak	iv
Abstract	v
Kata Pengantar	vi
Daftar Isi	vii
Daftar Notasi	viii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan	2
1.4 Batasan Masalah	2
1.5 Manfaat	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1 Ruang Metrik	3
2.2 Barisan Titik di Ruang Metrik	4
2.3 Fungsi Real	9
2.4 Turunan Fungsi.....	11
2.5 Sistem Dinamik Diskrit Berdimensi-Satu	14
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	19
BAB IV PENUTUP	
4.1 Kesimpulan	29
4.2 Saran	29
DAFTAR PUSTAKA	31

DAFTAR NOTASI

Notasi

$\forall$

$\in$

$\emptyset$

$\subseteq$

D

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

$N_r(p)$

(X, d)

$\cap$

$\cup$

$\langle x_n \rangle$

$\{.\}$

$\setminus$

$g \circ f$

$|.|$

Keterangan

untuk setiap

elemen dari

himpunan kosong

himpunan bagian

domain

himpunan semua bilangan riil

himpunan semua bilangan asli

persekitaran

ruang metrik

irisan

gabungan

barisan titik

himpunan

selain

fungsi komposisi g atas f

nilai mutlak

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Peristiwa perkembangan modal yang didepositokan di suatu bank dan pertumbuhan jumlah populasi suatu spesies merupakan contoh model sistem dinamik. Model matematika yang demikian dikenal sebagai sistem dinamik diskrit (Martelli, 1999).

Sistem dinamik diskrit adalah relasi berbentuk $x_{n+1} = f(x_n)$, di mana x_{n+1} menyatakan posisi (*state*) x pada saat ke $(n+1)$ dan x_n menyatakan posisi x sebelumnya. Sedangkan f disebut fungsi pembangkit sistem. Fungsi f sering kali memuat parameter kontrol selain variabel x dan biasanya parameter tersebut telah ditentukan. Solusi sistem dinamik diskrit disebut orbit atau trayektori sistem. Pada umumnya solusi sistem dinamik diskrit berbentuk barisan.

Dalam sistem dinamik diskrit terdapat tiga hal yang penting untuk dibahas, yaitu identifikasi posisi variabel (*variabel state*) sistem, identifikasi parameter kontrol, dan identifikasi bentuk fungsi pembangkit melalui proses pemodelan.

Perilaku orbit sistem adalah penyelidikan mengenai posisi variabel x untuk n yang sangat besar ($n \rightarrow \infty$). Perilaku orbit sistem dapat ditentukan oleh pemilihan posisi awal (*initial state*) dengan asumsi parameter tetap. Teknik pemilihan ini dikenal sebagai analisis ruang posisi (*state space analysis*). Di samping itu, perilaku orbit sistem juga dapat ditentukan melalui perubahan parameter yang terjadi apabila fungsi pembangkit sistemnya bergantung pada parameter. Teknik ini dikenal sebagai analisis ruang parameter (*parameter space analysis*).

Dalam skripsi ini penulis tertarik untuk membahas penentuan perilaku orbit sistem melalui cara lain, yaitu melalui analisa fungsi pembangkit sistemnya. Dengan cara ini, penentuan perilaku orbit sistem tidak lagi bergantung pada pemilihan posisi awal atau perubahan parameter yang terdapat dalam fungsi pembangkit sistemnya. Keistimewaan dari cara ini adalah cukup melihat kriteria fungsi pembangkit sistemnya saja. Oleh karena itu dalam skripsi ini dipelajari kriteria fungsi pembangkit sistem untuk menentukan perilaku orbit yang dihasilkan oleh sistem.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan di atas maka masalahnya dapat dirumuskan sebagai berikut : bagaimana kriteria fungsi pembangkit sistem agar perilaku orbit dapat ditentukan.

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi adalah untuk mendapatkan kriteria fungsi pembangkit sistem dalam rangka menentukan perilaku orbit.

1.4 Manfaat

Manfaat hasil pembahasan dalam skripsi ini adalah memberikan suatu cara alternatif untuk menentukan perilaku orbit sistem.

1.5 Batasan Masalah

Dalam skripsi ini pembahasannya dibatasi hanya pada sistem dinamik diskrit berdimensi-satu dari himpunan bilangan real dan fungsi pembangkit yang akan ditinjau hanya untuk fungsi real yang terdiferensial secara kontinu (*continuously differentiable*).

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini dipelajari teori-teori dasar dalam bentuk Definisi dan Teorema yang menjadi dasar pembahasan dalam Bab III yaitu *Ruang Metrik* (2.1), *Barisan di ruang metrik* (2.2), *Fungsi real* (2.3), *Turunan Fungsi* (2.4), dan *Sistem Dinamik Diskrit berdimensi-satu* (2.5). Pustaka yang digunakan di dalam bab ini adalah Soemantri (2000), Martelli (1999), Edwin (1990), Muslikh (2007), dan Wikipedia.org (2007).

2.1 Ruang Metrik

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$ dan $\mathbb{R}$ himpunan bilangan real. Fungsi jarak $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan *metrik*, jika untuk setiap $x, y \in X$ dipenuhi aksioma:

M1. $d(x, y) \geq 0$

M2. $d(x, y) = 0$ jika dan hanya jika $x = y$

M3. $d(x, y) = d(y, x)$

M4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ untuk setiap $x, y, z \in X$.

Himpunan X yang dilengkapi dengan metrik d pada X disebut *ruang metrik* dan dinotasikan sebagai (X, d) . Jika himpunan $X = \mathbb{R}$, maka fungsi jarak yang didefinisikan

$$d(x, y) = |x - y|, \text{ untuk setiap } x, y \in \mathbb{R}$$

merupakan metrik pada $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.2

Diberikan ruang metrik (X, d) dan titik $p \in X$. Himpunan berbentuk

$$N_r(p) = \{ x \in X : d(x, p) < r \},$$

disebut *persekitaran (Neighborhood)* dengan pusat titik p dan jari-jari $r > 0$.

Jika $X = \mathbb{R}$, maka persekitaran titik $p \in \mathbb{R}$ dengan jari-jari $r > 0$ adalah himpunan

$$N_r(p) = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < r\}$$

yang merupakan suatu interval terbuka dalam $\mathbb{R}$.

Definisi 2.1.3

Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $E \subset X$. Titik $p \in X$ dikatakan *titik limit* himpunan E jika untuk setiap $r > 0$ berlaku

$$\{N_r(p) \cap E\} \setminus \{p\} \neq \emptyset.$$

Contoh 2.1.1

Diberikan ruang metrik $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ dan himpunan $E = [0, 1] \cup \{2\}$, $E \subset \mathbb{R}$. Untuk setiap $x \in [0, 1]$ maka x titik limit E karena untuk setiap $r > 0$

$$\{N_r(x) \cap E\} \setminus \{x\} \neq \emptyset.$$

Sedangkan untuk $x = 2$ bukan titik limit E karena terdapat $r = 1/2$ maka

$$\{N_{1/2}(2) \cap E\} \setminus \{2\} = \emptyset.$$

Definisi 2.1.4

Diberikan ruang metrik (X, d) dan himpunan $E \subset X$. Himpunan E dikatakan *terbatas* jika terdapat bilangan $M \geq 0$ sedemikian sehingga untuk suatu titik $p \in X$ dan untuk setiap $x \in E$ berlaku

$$d(p, x) \leq M.$$

2.2 Barisan Titik di dalam Ruang Metrik

Diberikan ruang metrik X dan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ serta fungsi $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ yang didefinisikan sebagai, $f(n) = x_n \in X$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jelajah (*range*) $\langle x_n \rangle$ disebut *barisan titik* atau *barisan* dalam ruang metrik X dengan suku-suku x_n dan $n \in \mathbb{N}$. Barisan x_n dinotasikan dengan $\langle x_n \rangle$. Jika $X = \mathbb{R}$ maka barisan $\langle x_n \rangle$ disebut *barisan bilangan real*.

Definisi 2.2.1

Diberikan ruang metrik (X, d) dan barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X . Barisan $\langle x_n \rangle$ dikatakan *konvergen* jika terdapat $x \in X$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Barisan $\langle x_n \rangle$ yang konvergen ke x , ditulis $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ atau $x_n \rightarrow x$, di mana titik x disebut *limit barisan* dari barisan $\langle x_n \rangle$.

Barisan bilangan real $\langle x_n \rangle$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Teorema 2.2.1

Diberikan ruang metrik (X, d) dan barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X . Jika barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen maka limit barisannya tunggal.

Bukti:

Dimisalkan barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke titik x dan y , akan dibuktikan $x = y$ (tunggal).

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Karena x_n konvergen ke x dan y maka terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ dan $N_2 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_1$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (2.2.1)$$

dan untuk setiap $n \geq N_2$ berlaku

$$d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2.2)$$

Jika bilangan $N = \max \{ N_1, N_2 \}$ maka dari ketaksamaan (2.2.1), (2.2.2) dan sifat ketaksamaan segitiga diperoleh

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

untuk setiap $n \geq N$.

Jadi $d(x, y) < \varepsilon$. Karena $\varepsilon > 0$ sembarang maka $x = y$ (tunggal).

Teorema 2.2.2

Jika barisan $\langle x_n \rangle$ dalam suatu ruang metrik (X, d) konvergen maka barisan $\langle x_n \rangle$ terbatas.

Bukti:

Dimisalkan bahwa $x_n \rightarrow x$. Jika diambil $\varepsilon = 1$ maka terdapat bilangan asli N sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < 1. \quad (2.2.3)$$

Selanjutnya diambil $M = \text{Maks} \{ 1, d(x_1, x), d(x_2, x), \dots, d(x_{N-1}, x) \}$, maka

$$d(x_n, x) \leq M, \quad (2.2.4)$$

untuk $1 \leq n \leq N-1$.

Berdasarkan (2.2.3) dan (2.2.4) maka berlaku $d(x_n, x) \leq M$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Jadi daerah jangkau $\{x_n\}$ merupakan himpunan yang terbatas, sehingga barisan $\langle x_n \rangle$ dinamakan barisan yang terbatas.

Definisi 2.2.2

Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik X selanjutnya dibentuk barisan bilangan asli $\langle n_k \rangle$ dengan $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ maka barisan $\langle x_{n_k} \rangle$ disebut *subbarisan* dari barisan $\langle x_n \rangle$. Jika $\langle x_{n_k} \rangle$ konvergen maka limitnya disebut *limit subbarisan* dari barisan $\langle x_{n_k} \rangle$.

Teorema 2.2.3

Barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x jika dan hanya jika setiap subbarisan dari $\langle x_n \rangle$ juga konvergen ke x .

Bukti:

$\Rightarrow$ Diketahui barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x dan ambil sebarang subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ dari barisan $\langle x_n \rangle$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$.

Karena $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x , maka terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \varepsilon. \quad (2.2.3)$$

Diketahui bahwa dalam barisan bilangan asli $\langle n_k \rangle$ dari indeks-indeks subbarisan di atas berlaku hubungan $n_k \geq k$ untuk setiap $k=1,2,\dots$. Jadi untuk setiap $k \geq N$ berlaku $n_k \geq k \geq N$. Dengan demikian menurut (2.2.3) diperoleh $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ untuk setiap $k \geq N$. Artinya bahwa subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ mempunyai sifat, untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k \geq N$ berlaku

$$d(x_{n_k}, x) < \varepsilon.$$

Ini berarti, subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ konvergen ke x atau $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$.

$\Leftarrow$ Diketahui setiap subbarisan $\langle x_{n_k} \rangle$ dari barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen ke x . Karena barisan $\langle x_n \rangle$ adalah salah satu subbarisan dari dirinya sendiri, maka barisan $\langle x_n \rangle$ tentu konvergen ke x .

Definisi 2.2.3

Barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik (X, d) dikatakan *Barisan Cauchy* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Teorema 2.2.4

Di dalam sembarang ruang metrik (X, d) , setiap barisan yang konvergen merupakan barisan Cauchy.

Bukti:

Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ di dalam X dengan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, maka untuk sembarang $\varepsilon > 0$ yang diberikan terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2.5)$$

Demikian juga untuk setiap $m \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2.6)$$

Dari ketaksamaan (2.2.5), (2.2.6) dan sifat ketaksamaan segitiga maka untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti barisan $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy.

Teorema 2.2.5

Di dalam sembarang ruang metrik (X, d) setiap barisan Cauchy merupakan barisan yang terbatas.

Bukti :

Ambil sebarang barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ di dalam ruang metrik X , maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Jika diambil $\varepsilon = 1$, maka untuk setiap $n, m \geq N$ berlaku

$$d(x_n, x_m) < 1.$$

Dipilih $x_m = p$ tetap, maka untuk setiap $n \geq N$ berlaku

$$d(x_n, p) < 1. \quad (2.2.7)$$

Dimisalkan diambil $M = \text{Maks} \{1, d(x_1, p), d(x_2, p), \dots, d(x_{N-1}, p)\}$, maka

$$d(x_n, p) \leq M, \quad (2.2.8)$$

untuk $1 \leq n \leq N-1$.

Berdasarkan (2.2.7) dan (2.2.8) maka berlaku

$$d(x_n, p) \leq M,$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Terbukti bahwa barisan Cauchy $\langle x_n \rangle$ terbatas.

Definisi 2.2.4

Suatu ruang metrik dikatakan *lengkap (complete)* jika setiap barisan Cauchy di dalam ruang metrik tersebut konvergen.

2.3. Fungsi Real.

Definisi 2.3.1

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan setiap obyek x dalam satu himpunan, yang disebut *daerah asal*, dengan sebuah nilai tunggal $f(x)$ pada himpunan ke dua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut *daerah nilai* (jelajah) fungsi tersebut. Jika himpunan semua nilai fungsi adalah himpunan bilangan real, maka fungsi tersebut dinamakan *fungsi bernilai real* (fungsi real).

Definisi 2.3.2

Dimisalkan f sebuah fungsi dengan daerah asal himpunan A dan daerah nilainya di dalam himpunan B . Fungsi g dengan daerah asal himpunan B dan daerah nilainya di dalam himpunan C . *Komposisi gof* adalah fungsi dari A ke C , yaitu

$g \circ f = \{(a, c) \in A \times C \mid \text{terdapat } b \in B \text{ sedemikian sehingga } b = f(a) \text{ dan } c = g(b)\}.$

Bentuk fungsi $h = g \circ f$ disebut *fungsi komposisi g atas f*. Untuk setiap $x \in A$, fungsi komposisi h ditulis sebagai

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Fungsi komposisi $(f \circ f)$, $(f \circ f \circ f)$, dan $(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)$ berturut-turut ditulis sebagai berikut

$f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$ dan $f^n = f \circ f \circ f \circ \dots \circ f$ (sebanyak n fungsi f).

Definisi 2.3.3

Diberikan ruang metrik (X, d) , himpunan $E \subset X$ dan fungsi real $f : E \rightarrow X$. Titik $x \in E$ disebut *titik tetap (fixed point)* untuk f jika dipenuhi

$$f(x) = x.$$

Definisi 2.3.4

Diberikan ruang metrik (X, d) , himpunan $E \subset X$, p adalah titik limit himpunan E dan fungsi real $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Titik $q \in \mathbb{R}$ dinamakan *limit $f(x)$ untuk x mendekati p* , jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ dengan $0 < d(x, p) < \delta$ berlaku

$|f(x) - q| < \varepsilon,$

ditulis sebagai $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$.

Teorema 2.3.1

Diberikan ruang metrik (X, d) , himpunan $E \subset X$, p adalah titik limit himpunan E dan fungsi real $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, maka pernyataan di bawah ini ekuivalen

- (i) $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$
- (ii) Untuk setiap barisan $\langle p_n \rangle$ di dalam E dengan $p_n \neq p$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ maka untuk barisan $\langle f(p_n) \rangle$ berlaku $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = q$

Bukti :

Dari (i) ke (ii)

Ambil barisan $\langle p_n \rangle$ di dalam E , karena $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = q$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ dengan $0 < d(x, p) < \delta$ berlaku

$$|f(x) - q| < \varepsilon. \quad (2.3.1)$$

Karena $p_n \neq p$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$ maka terdapat $N \in \mathbb{N}$, sehingga untuk setiap $n \geq N$ berlaku $0 < d(p_n, p) < \delta$. Berdasarkan (2.3.1) maka untuk barisan $\langle f(p_n) \rangle$ berlaku

$$|f(p_n) - q| < \varepsilon.$$

Dengan kata lain, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = q$.

Dari (ii) ke (i).

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena (ii) benar, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $p_n = x$ berakibat x konvergen ke p dan berlaku

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n) = q,$$

terbukti dari (ii) ke (i).

Definisi 2.3.5

Diberikan ruang metrik (X, d) , himpunan $E \subset X$, $p \in E$ dan fungsi real $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan *kontinu* di p jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in E$ dengan $d(x, p) < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Jika f kontinu di setiap titik anggota E maka f dikatakan kontinu pada E .

2.4. Turunan fungsi.

Di dalam subbab ini akan dibicarakan turunan fungsi bernilai real yang didefinisikan pada interval-interval dalam $\mathbb{R}$.

Definisi 2.4.1

Diberikan fungsi real f yang didefinisikan pada interval terbuka (a, b) dan titik $c \in (a, b)$. Fungsi f dikatakan *terdiferensial* (*differentiable*) di titik c jika

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

ada dan selanjutnya nilai limit tersebut dinotasikan dengan $f'(c)$ yang disebut *turunan* fungsi f di titik c .

Teorema 2.4.1

Jika fungsi real f terdefinisi pada (a, b) dan terdiferensial di titik $p \in (a, b)$ maka ada fungsi f^* yang kontinu di $p \in (a, b)$ dan memenuhi persamaan

$$f(x) - f(p) = (x - p) f^*(x), \quad (2.4.1)$$

untuk setiap $x \in (a, b)$ dan $f^*(p) = f'(p)$.

Sebaliknya jika ada fungsi f^* yang kontinu di $c \in (a, b)$ dan memenuhi persamaan (2.4.1) maka f terdiferensial di $c \in (a, b)$ dan $f^*(c) = f'(c)$.

Bukti:

Didefinisikan fungsi

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}, \quad (2.4.2)$$

untuk setiap $x \neq p \in (a, b)$ dan $f^*(p) = f'(p)$.

Karena f terdiferensial di $p \in (a, b)$ maka $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$ ada dan

sebutlah $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p)$,

dipilih nilai $f^*(p) = f'(p)$ maka hal ini berakibat

$$\lim_{x \rightarrow p} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f'(p) = f^*(p)$$

Terbukti ada fungsi f^* kontinu di p dan $f^*(p) = f'(p)$.

Sebaliknya, dimisalkan fungsi f^* kontinu di c dan memenuhi persamaan (2.4.1) maka

$$\lim_{x \rightarrow c} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^*(c).$$

Karena $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f^*(c)$ maka

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = f^*(c).$$

Terbukti fungsi f terdiferensial di $c \in (a, b)$ dan $f'(c) = f^*(c)$.

Teorema 2.4.2

Fungsi real f terdefinisi pada interval (a, b) . Jika f terdiferensial di $c \in (a, b)$ maka f kontinu di c .

Bukti :

Fungsi f terdiferensial di titik $c \in (a, b)$, maka

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Akan dibuktikan f kontinu di titik c . Perhatikan bahwa

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{(x - c)}(x - c); x \neq c,$$

maka

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow c} f(c) + \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}(x - c) \\ &= f(c)\end{aligned}$$

Menurut Teorema 2.3.2, maka f kontinu di titik c .

Teorema 2.4.3 (Teorema nilai rata-rata)

Jika fungsi f terdiferensial di setiap titik dalam interval terbuka (a,b) dan f kontinu pada $[a,b]$ maka ada titik $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

Bukti :

Ambil titik $c \in (a,b)$. Karena f terdiferensial pada (a,b) maka $f'(c)$ ada. Diketahui f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ maka f terdefinisi juga di titik a dan di titik b .

Selanjutnya terlebih dahulu akan diperlihatkan bahwa f' kontinu di titik $c \in (a,b)$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \left[\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)\end{aligned}$$

jadi f' kontinu di titik c .

Menurut Teorema 2.4.1 dan dengan mengambil $x = b$ dan $p = a$ maka berlaku

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a).$$

2.5. Sistem Dinamik Diskrit Berdimensi-satu

Di dalam subbab ini akan diuraikan tentang pengertian Sistem Dinamik Diskrit berdimensi-satu dan hal-hal lain yang berkaitan dengan masalah tersebut.

Definisi 2.5.1

Sistem dinamik diskrit adalah relasi berbentuk

$$\bar{x}_{n+1} = f(\bar{x}_n) \quad (2.5.1)$$

fungsi f disebut fungsi pembangkit sistem. Pada umumnya vektor posisi $\bar{x}$ adalah berdimensi- k , yaitu $\bar{x} \in \mathbb{R}^k$. Indeks n seringkali mempresentasikan waktu ke- n .

Sistem (2.5.1) dikatakan *diskrit* jika perubahan langkah ke- n hanya berada dalam bentuk diskrit, yaitu posisi titik $\bar{x}_{n+1}$ dan posisi titik $\bar{x}_n$ dipisahkan oleh misalnya satu jam, satu hari, atau satu tahun dan seterusnya.

Fungsi $f(\bar{x})$ pada sistem (2.5.1) dapat juga memuat banyak parameter $\bar{a}$ sehingga sering ditulis $f(\bar{x}, \bar{a})$.

Contoh 2.5.1

Model logistic

$$x_{n+1} = ax_n (1 - x_n),$$

merupakan sistem dinamik diskrit yang dibangkitkan oleh fungsi berbentuk $f(x,a) = ax(1 - x)$ di mana f tergantung pada variabel x dan parameter a .

Definisi 2.5.2

Sistem dinamik diskrit (2.5.1) dikatakan *berdimensi-satu* jika variabel x berupa skalar. Sehingga dapat ditulis sebagai

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad (2.5.2)$$

di mana dalam hal ini, variabel $x \in \mathbb{R}$. Jika fungsi f juga bergantung pada parameter skalar real a , maka fungsinya ditulis $f(x, a)$.

Dalam skripsi ini hanya dipelajari sistem dinamik diskrit berdimensi-satu sebagaimana bentuk relasi (2.5.2).

Pada relasi (2.5.2) posisi titik x yang ke $(n+1)$ dapat ditentukan jika posisi titik x_n diketahui. Titik x_0 disebut posisi awal yang dapat menentukan titik x lainnya pada domain f . Jika diberikan posisi awal x_0 maka akan diperoleh titik-titik x lainnya sebagai berikut:

$$x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0), x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))) = f^3(x_0), \dots$$

Secara umum posisi titik x yang ke $(n+1)$ dapat dinyatakan sebagai

$$x_{n+1} = f^{n+1}(x_0),$$

di mana $f^{n+1}(x_0)$ adalah komposisi f dengan dirinya sendiri sebanyak $(n+1)$ kali.

Definisi 2.5.3

Barisan titik $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ disebut *orbit* sistem (2.5.2) yang diawali dari titik x_0 , ditulis $O(x_0)$. Selanjutnya titik x_0 disebut posisi awal (*initial state*).

Salah satu hasil terpenting dari sistem dinamik diskrit adalah masalah perilaku orbit sistem (2.5.2). Analisa perilaku orbit sistem dapat dilakukan melalui dua cara yaitu : **Pertama**, menentukan perilaku orbit sistem untuk pemilihan posisi awal x_0 yang berlainan. Dengan kata lain apa yang terjadi pada orbit $O(x_0)$ untuk n yang sangat besar ($n \rightarrow \infty$) bila dipilih posisi awal x_0 yang berlainan. Analisa semacam ini disebut *analisis ruang posisi* (*state space analysis*). Analisa perilaku orbit sistem yang demikian dapat dilakukan dengan menganggap parameter fungsinya konstan. **Ke dua**, menentukan perilaku orbit sistem melalui suatu perubahan parameter. Analisa semacam ini disebut *analisis ruang parameter* (*parameter space analysis*).

Berikut ini akan diberikan contoh pemeriksaan perilaku orbit sistem melalui dua cara yang telah disebutkan di atas pada suatu sistem dinamik diskrit.

Contoh 2.5.2

Dimisalkan fungsi pembangkit sistem (2.5.2) adalah

$$f(x) = ax+2 ; x \in \mathbb{R},$$

di mana fungsi f adalah anggota dari koleksi $\{f(x,a) = ax+2; a \in \mathbb{R}\}$.

Pertama, diasumsikan bahwa parameter $a = \frac{3}{4}$ tetap, maka fungsi f dapat ditulis $f(x) = (\frac{3}{4})x + 2$.

Jika dipilih $x_0 = 8$ maka diperoleh $x_1 = f(8) = (\frac{3}{4})8 + 2 = 8$ sehingga $x_1 = x_0$. Karena $f(8) = 8$ maka 8 adalah titik tetap dari f , namakanlah $x_s = 8$ adalah titik tetap dari f .

Selanjutnya akan diperiksa perilaku orbit sistem

$$x_{n+1} = (\frac{3}{4})x_n + 2. \quad (2.5.3)$$

Dengan menggunakan titik tetap 8 maka orbit sistem (2.5.3) dapat ditulis

$$x_{n+1} = (\frac{3}{4})(x_n - 8) + 8. \quad (2.5.4)$$

Jika diberikan posisi awal x_0 , maka diperoleh

$$x_1 = (\frac{3}{4})(x_0 - 8) + 8, x_2 = (\frac{3}{4})(x_1 - 8) + 8 = (\frac{3}{4})^2(x_0 - 8) + 8, \dots$$

sehingga untuk langkah ke $(n+1)$ diperoleh

$$x_{n+1} = (\frac{3}{4})^{n+1}(x_0 - 8) + 8, \quad (2.5.5)$$

dari (2.5.5) didapat : jika $n \rightarrow \infty$ maka $(\frac{3}{4})^{n+1} \rightarrow 0$ sehingga $x_{n+1} \rightarrow 8$. Dengan kata lain bahwa setiap orbit sistem akan konvergen ke titik tetap $x_s = 8$. Dalam hal ini mungkin tidak ada masalah untuk $x_0 \in \mathbb{R}$ manapun.

Kedua, akan ditinjau perilaku orbit sistem melalui perubahan parameter a .

Dengan menyelesaikan persamaan $x = ax + 2$ didapat titik tetap

$$x_s(a) = \frac{2}{1-a} ; a \neq 1.$$

Jika $a = 1$, maka f tidak mempunyai titik tetap.

Dari orbit sistem (2.5.5) dengan mengganti $\frac{3}{4}$ oleh a dan 8 oleh titik x_s didapat orbit sistem

$$x_{n+1} = a^{n+1} (x_0 - x_s) + x_s. \quad (2.5.6)$$

Jika $|a| < 1$ maka orbit sistem (2.5.6) konvergen ke titik tetap x_s .

Akan tetapi jika $|a| > 1$ maka orbit sistem divergen.

Definisi 2.5.4

Suatu titik x_s dikatakan *titik stasioner* (*stationary state*) dari (2.5.2) jika

$$f(x_s) = x_s. \quad (2.5.7)$$

Karena titik x_s memenuhi persamaan $x_s = f(x_s)$ maka titik x_s disebut juga titik tetap untuk f .

Definisi 2.5.5

Titik stasioner x_s dikatakan *stabil* (*stable*) jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk $|x_0 - x_s| \leq \delta$ maka berlaku $|x_n - x_s| \leq \varepsilon$ untuk setiap $n \geq 1$.

Jika titik x_s tidak memenuhi ketentuan Definisi 2.5.5, maka dikatakan tidak stabil (*unstable*).

Definisi 2.5.6

Orbit sistem $O(x_0)$ dikatakan *stabil* jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap orbit sistem $O(y_0)$ berlaku $|x_0 - y_0| \leq \delta$ dan $|x_n - y_n| \leq \varepsilon$ untuk setiap $n \geq 1$.

Definisi 2.5.7

Diberikan sistem dinamik diskrit (2.5.2) dengan fungsi pembangkit $f: I \rightarrow I$, di mana I interval terbuka

- Suatu titik tetap x_s dari f dikatakan **sink** jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x_0 \in I$ dengan $|x_0 - x_s| \leq \delta$ berlaku $|x_n - x_s| \rightarrow 0$, untuk $n \rightarrow \infty$.
- Suatu titik tetap x_s dari f dikatakan **sources**. Jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x_0 \in I$ dengan $0 < |x_0 - x_s| \leq \delta$ dapat ditentukan bilangan bulat positif n sehingga berlaku $|x_n - x_s| > \delta$.

BAB III

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab hasil dan pembahasan ini akan dibahas perilaku orbit sistem melalui analisa fungsi pembangkit sistemnya. Dalam contoh 2.5.2 baik analisis pada ruang posisi awal maupun pada ruang parameter telah berhasil memperlihatkan perilaku orbit sistem yang dibangkitkan oleh suatu fungsi f . Pada analisis ruang posisi awal, langkah pertama yang dilakukan adalah pemilihan posisi awal x_0 sedemikian sehingga perilaku orbit sistem dapat ditentukan. Sedangkan pada analisis ruang parameter, perilaku orbit sangat ditentukan oleh parameter fungsinya. Pada bab ini akan dibahas perilaku orbit sistem tanpa melalui kedua cara analisis yang telah diuraikan pada bab II akan tetapi akan dianalisa melalui fungsi pembangkit sistemnya. Pada teknik ini analisisnya tidak lagi bergantung pada strategi pemilihan posisi awal atau perubahan parameter yang terdapat pada fungsi pembangkit sistemnya.

Dalam (Martelli, 1999) terdapat beberapa Teorema yang menggambarkan peranan fungsi pembangkit sistem dikaitkan dengan titik tetap. Untuk semua fungsi f yang diketahui di dalam Teorema di bawah ini mempunyai relasi berbentuk:

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (3.5.1)$$

Teorema 3.1 (Martelli, 1999)

Diberikan relasi (3.5.1) di mana fungsi $f: I \rightarrow I$ kontinu pada interval terbuka I dan x_s titik tetap untuk f . Jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga f terdiferensial pada subinterval $(x_s - \delta, x_s + \delta)$ kecuali di titik x_s dan untuk setiap $x \in (x_s - \delta, x_s + \delta)$ berlaku $|f'(x)| < 1$, maka titik tetap x_s **stabil**.

Bukti :

Dimisalkan interval terbuka $J = (x_s - \delta, x_s + \delta) \subset I$. Ambil $x_0 \neq x_s \in J$. Karena f terdiferensial pada J maka juga terdiferensial pada interval (x_0, x_s) atau interval (x_s, x_0) sehingga menurut Teorema Nilai Rata-Rata terdapat $c \in (x_s, x_0)$ dan berlaku

$$f(x_0) - f(x_s) = f'(c) (x_0 - x_s),$$

jika kedua ruas dimutlakan maka

$$|f(x_0) - f(x_s)| = |f'(c)| |x_0 - x_s|.$$

Karena $|f'(c)| < 1$, maka

$$|f(x_0) - f(x_s)| < |x_0 - x_s|. \quad (3.5.2)$$

Berdasarkan (3.5.1) dan (3.5.2) diperoleh

$$|x_1 - x_s| = |f(x_0) - f(x_s)| \leq |x_0 - x_s|.$$

Dan secara umum untuk $n \geq 1$ berlaku

$$|x_{n+1} - x_s| = |f(x_n) - f(x_s)| \leq |x_n - x_s| \leq |x_{n-1} - x_s| \leq \dots \leq |x_1 - x_s| \leq |x_0 - x_s| \leq \epsilon.$$

Asalkan untuk setiap $\epsilon > 0$ dipilih $\delta \leq \epsilon$.

Menurut Definisi 2.5.5, terbukti bahwa titik tetap x_s stabil.

Teorema 3.2 (Martelli, 1999)

Diberikan relasi (3.5.1) di mana fungsi $f : I \rightarrow I$ kontinu pada interval terbuka I dan x_s titik tetap untuk f . jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga f terdiferensial pada subinterval $(x_s - \delta, x_s + \delta)$ dengan f' kontinu di x_s dan $|f'(x_s)| < 1$, maka titik tetap x_s adalah **sink**.

Bukti :

Dimisalkan interval terbuka $J = (x_s - \delta, x_s + \delta) \subset I$.

Karena $|f'(x_s)| < 1$, pilih bilangan $k \in (|f'(x_s)|, 1)$ maka terdapat $r < \delta$ sedemikian sehingga

$$|f'(x)| \leq k < 1,$$

untuk setiap $x \in (x_s - r, x_s + r) \subset J$.

Ambil titik $x_0 \neq x_s \in (x_s - r, x_s + r)$. Karena f terdiferensial pada J maka juga terdiferensial juga pada (x_0, x_s) atau (x_s, x_0) sehingga menurut Teorema Nilai Rata-Rata terdapat $c \in (x_s, x_0)$ dan berdasarkan (3.5.1) berlaku

$$x_1 - x_s = f(x_0) - f(x_s) = f'(c) (x_0 - x_s),$$

karena $|f'(c)| \leq k$ maka berakibat

$$|x_1 - x_s| \leq k |x_0 - x_s|. \quad (3.5.3)$$

Karena $k < 1$ maka ketaksamaan (3.5.3) menjadi

$$|x_1 - x_s| \leq k |x_0 - x_s| < r. \quad (3.5.4)$$

Dari ketaksamaan (3.5.4), menunjukkan bahwa $x_1 \in (x_s - r, x_s + r)$.

Dengan cara yang sama untuk $x_1 \in (x_s - r, x_s + r)$ akan diperoleh $x_2 \in (x_s - r, x_s + r)$ dan memenuhi ketaksamaan

$$|x_2 - x_s| \leq k |x_1 - x_s| \leq k^2 |x_0 - x_s|.$$

Demikian seterusnya sampai langkah ke- n , maka akan diperoleh

$$|x_n - x_s| \leq k^n |x_0 - x_s| \quad (3.5.5)$$

Karena bilangan $k \in [0,1)$, maka untuk $n \rightarrow \infty$ diperoleh $|x_n - x_s| \rightarrow 0$. Menurut Definisi 2.5.7 (i), terbukti bahwa titik tetap x_s adalah sink.

Teorema 3.3 (Martelli, 1999)

Diberikan relasi (3.5.1) di mana fungsi $f: I \rightarrow I$ kontinu pada interval terbuka I dan x_s titik tetap untuk f . Jika terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga f terdiferensial pada sub-interval $(x_s - \delta, x_s + \delta)$ dengan f' kontinu di x_s dan $|f'(x_s)| > 1$ maka titik x_s adalah **sources**.

Bukti:

Dimisalkan interval terbuka $J = (x_s - \delta, x_s + \delta) \subset I$.

Karena $|f'(x_s)| > 1$, pilih bilangan $k \in (1, |f'(x_s)|)$ maka terdapat r dengan $0 < r < \delta$ sedemikian sehingga $|f'(x)| \geq k$ untuk setiap $x \in [x_s - r, x_s + r] \subset J$.

Ambil titik $x_0 \neq x_s \in [x_s - r, x_s + r]$. Karena f terdiferensial pada J maka juga terdiferensial pada interval (x_0, x_s) atau (x_s, x_0) sehingga

menurut Teorema Nilai Rata-Rata terdapat $c \in (x_s, x_0)$ dan menurut (3.5.1) berlaku

$$x_1 - x_s = f(x_0) - f(x_s) = f'(c) (x_0 - x_s),$$

karena $|f'(c)| \geq k$ maka berakibat

$$|x_1 - x_s| \geq k |x_0 - x_s|. \quad (3.5.6)$$

Karena $k \geq 1$ maka ketaksamaan (3.5.6) menjadi

$$|x_1 - x_s| \geq |x_0 - x_s|. \quad (3.5.7)$$

Dari ketaksamaan (3.5.7), menunjukkan bahwa $x_1 \notin [x_s - r, x_s + r]$. Dengan cara yang sama untuk $x_1 \in [x_s - r, x_s + r]$ akan diperoleh x_2 dan memenuhi ketaksamaan

$$|x_2 - x_s| \geq k |x_1 - x_s| \geq k^2 |x_0 - x_s|.$$

Demikian seterusnya untuk $x_1, x_2, \dots, x_j \in [x_s - r, x_s + r]$ didapat

$$|x_j - x_s| \geq k^j |x_0 - x_s|, \quad (3.5.8)$$

untuk $k > 1$.

Dari ketaksamaan (3.5.8) tampak bahwa orbit berorientasi keluar dari interval $[x_s - r, x_s + r]$. Dengan kata lain terdapat bilangan bulat $m \geq 1$ sedemikian sehingga

$$|x_m - x_s| \geq k^m |x_0 - x_s| > r.$$

Menurut Definisi 2.5.7 (ii), terbukti bahwa titik tetap x_s adalah source.

Berdasarkan karakter fungsi-fungsi yang diuraikan dalam Teorema 3.1, 3.2, dan 3.3 akan dipelajari perilaku orbit sistem melalui analisa fungsi yang demikian.

Jika diberikan sistem dinamik diskrit berdimensi-satu (2.5.2) dengan fungsi pembangkit sistemnya adalah $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang terdiferensial secara kontinu pada $\mathbb{R}$, maka berlaku

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}), \quad (3.5.9)$$

karena f terdiferensial secara kontinu pada R , maka menurut Teorema nilai rata-rata ada $c \in (x_n, x_{n-1})$ sedemikian sehingga berlaku

$$f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(c) (x_n - x_{n-1}), \quad (3.5.10)$$

dari (3.5.9) dan (3.5.10) diperoleh

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(c) (x_n - x_{n-1}),$$

jika kedua sisi dimutlakkan diperoleh

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(c)| |x_n - x_{n-1}|. \quad (3.5.11)$$

Dari relasi (3.5.11) akan diperhatikan nilai-nilai untuk $|f'(c)| < 1$ atau $|f'(c)| > 1$ atau $|f'(c)| = 1$. berbagai nilai-nilai tersebut akan memberikan informasi mengenai barisan $\{x_n\}$ yang memenuhi (3.5.11).

Dengan demikian berdasarkan uraian di atas maka dapat disusun suatu pernyataan dalam bentuk Teorema, sebagai berikut:

Teorema 3.4

Diberikan sistem dinamik diskrit $x_{n+1} = f(x_n)$ yang dibangkitkan oleh fungsi $f : R \rightarrow R$ yang terdiferensial secara kontinu pada R dan a titik tetap untuk f .

- (1) jika $|f'(a)| < 1$ maka barisan $\{x_n\}$ konvergen ke a
- (2) Jika $|f'(a)| > 1$ maka barisan $\{x_n\}$ divergen
- (3) Jika $|f'(a)| = 1$ tidak ada kesimpulan

Bukti :

(1). Diketahui $|f'(a)| < 1$ dan karena f terdiferensial secara kontinu maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in (a - \delta, a + \delta) = I_a$, berlaku $|f'(x)| < 1$.

Ambil $x_0 \in I_a$ dengan $x_0 \neq a$ berakibat interval (x_0, a) atau interval (a, x_0) merupakan sub interval dalam I_a .

Karena f terdiferensial secara kontinu pada R maka juga f terdiferensial secara kontinu pada sub interval (x_0, a) . Menurut Teorema nilai rata-rata maka ada $c_1 \in (x_0, a)$ dan berlaku

$$f(x_0) - f(a) = f'(c_1)(x_0 - a),$$

akibatnya

$$|x_1 - a| = |f(x_0) - f(a)| = |f'(c_1)| |x_0 - a| < |x_0 - a| < \delta.$$

Jadi $x_1 \in I_a$, berarti selang (x_1, x_0) atau (x_0, x_1) merupakan subselang dari I_a .

Misalkan $x_2 = f(x_1)$ maka ada $c_2 \in (x_1, x_0) \subset I_a$ sehingga

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &= |f(x_1) - f(x_0)| = |f'(c_2)| |x_1 - x_0| \\ &< |x_1 - x_0| \leq |x_1 - a| + |a - x_0| \leq 2\delta. \end{aligned}$$

Jadi $x_2 \in I_a$ berarti selang (x_2, x_1) atau (x_1, x_2) merupakan subinterval I_a .

Misalkan $x_3 = f(x_2)$, maka ada $c_2 \in (x_2, x_1) \subset I_a$ sehingga

$$|x_3 - x_2| = |f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c_2)| |x_2 - x_1| < |x_2 - x_1| \leq 2\delta$$

Demikian seterusnya, akan didapat $x_n \in I_a$ berarti selang (x_n, x_{n-1}) atau (x_{n-1}, x_n) merupakan subinterval dari I_a dan terdapat $c_n \in (x_n, x_{n-1})$.

Sehingga secara umum didapat

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= |f(x_n) - f(x_{n-1})| = |f'(c_n)| |x_n - x_{n-1}| \\ &< |x_n - x_{n-1}| \leq 2\delta. \end{aligned}$$

Untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih $\delta < \varepsilon/2$ sehingga berlaku

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon. \quad (3.5.12)$$

Ketaksamaan (3.5.12) menunjukkan bahwa barisan $\langle x_n \rangle$ merupakan barisan Cauchy. Karena $x_n \in R$ untuk setiap $n \in N$, maka barisan $\langle x_n \rangle$ konvergen. Dimisalkan $x_n \rightarrow x$, maka

$$x = \lim_n x_{n+1} = \lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n) = f(x).$$

Jadi $x = a$ (titik tetap), dengan demikian terbukti $x_n \rightarrow a$.

(2) f terdiferensial secara kontinu pada $\mathbb{R}$ maka terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga f juga terdiferensial secara kontinu pada $(a-r, a+r) = I_a$. Karena $|f'(a)| > 1$, dipilih bilangan $k \in (1, |f'(a)|)$ maka terdapat $\varepsilon > 0$ ($0 < \varepsilon < r$) sedemikian sehingga $|f'(x)| > k$, untuk setiap $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] = J_a \subset I_a$.

Ambil $x_0 \in J_a$ dengan $x_0 \neq a$, maka terbentuklah subinterval (x_0, a) atau (a, x_0) .

Karena f terdiferensial secara kontinu pada interval I_a , maka f juga terdiferensial secara kontinu pada subinterval (a, x_0) dan menurut Teorema nilai rata-rata terdapat $c_1 \in (a, x_0)$ dan berlaku

$$f(x_0) - f(a) = f'(c_1)(x_0 - a).$$

Akibatnya

$$|x_1 - a| = |f(x_0) - f(a)| = |f'(c_1)| |x_0 - a| \geq k |x_0 - a|.$$

Ambil $x_1 \in J_a$ dengan $x_1 \neq a$, maka terbentuklah interval (x_1, a) atau (a, x_1) . Karena f terdiferensial secara kontinu pada interval I_a , maka f juga terdiferensial secara kontinu pada subinterval (a, x_1) dan menurut teorema nilai rata-rata terdapat $c_2 \in (a, x_1)$ dan berlaku

$$f(x_1) - f(a) = f'(c_2)(x_1 - a).$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} |x_2 - a| &= |f(x_1) - f(a)| = |f'(c_2)| |x_1 - a| \\ &\geq k |x_1 - a| \geq k^2 |x_0 - a|. \end{aligned}$$

Katakanlah titik-titik $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$ yang dapat diambil dalam interval J_a , maka berlaku ketidaksamaan

$$|x_j - a| \geq k^j |x_0 - a|.$$

Karena $k > 1$, maka $|x_j - a| \geq k^j |x_0 - a| > |x_0 - a|$. Dengan kata lain bahwa orientasi orbit akan keluar dari selang J_a , artinya terdapat bilangan bulat $n \geq 1$ sedemikian sehingga berlaku

$$|x_n - a| \geq k^n |x_0 - a| > |x_0 - a|.$$

Jika diambil $|x_0 - a| = \epsilon$, maka

$$|x_n - a| \geq k^n |x_0 - a| > \epsilon.$$

Terbukti x_n divergen.

(3) Karena $|f'(a)| = 1$, dan f terdiferensial secara kontinu pada $\mathbb{R}$ maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in (a - \delta, a + \delta) = I_a$, berlaku $|f'(x)| = 1$.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, ambil $x_n \neq a \in I_a$, maka terdapat $c \in (x_n, a)$ sehingga berlaku

$$|x_n - a| = |f(x_{n-1}) - f(a)| = |f'(c)| |x_{n-1} - a| = |x_{n-1} - a|.$$

Berakibat

$x_n = x_{n-1}$ atau $f(x_{n-1}) = f(x_{n-2}) = x_{n-1}$ kontradiksi dengan formula sistem. Jadi orbit sistem tidak dapat disimpulkan.

Contoh

Diberikan sistem dinamik diskrit $x_{n+1} = f(x_n)$ dengan fungsi pembangkit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai $f(x, p, q) = px + q$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan p, q parameter.

Penyelesaian :

Karena $f'(x) = p$ maka f terdiferensial secara kontinu pada $\mathbb{R}$. Dengan menyelesaikan persamaan $x = px + q$ didapat titik tetap $x = \frac{-q}{p-1}$ untuk f . Untuk $p = 1$, f tidak mempunyai titik tetap.

Phatikan bahwa $f'(x) = p$ maka $|f'(\frac{-q}{p-1})| = |p|$.

Untuk f di atas maka sistem dapat dinyatakan sebagai

$$x_{n+1} = px_n + q = p(x_n + \frac{q}{p-1}) - \frac{q}{p-1}$$

Ambil $x_0 \in \mathbb{R}$, maka diperoleh orbit sistem sebagai berikut

$$x_0, x_1 = p(x_0 + \frac{q}{p-1}) - \frac{q}{p-1},$$

$$x_2 = p(x_1 + \frac{q}{p-1}) - \frac{q}{p-1} = p^2(x_0 + \frac{q}{p-1}) - \frac{q}{p-1}, \dots$$

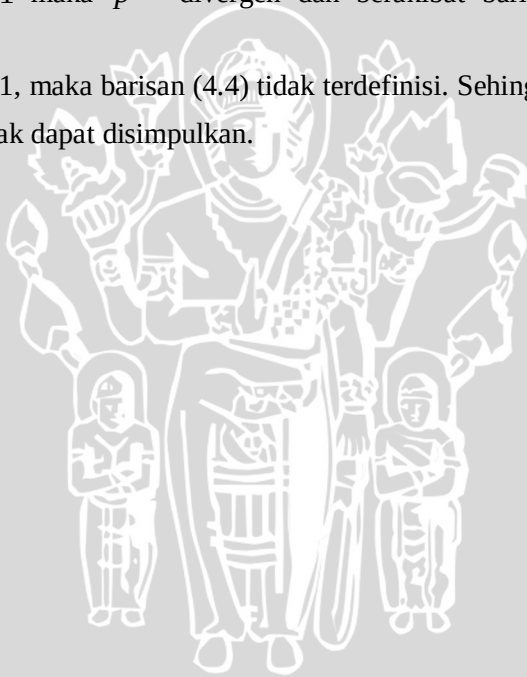
Secara umum orbit sistem berbentuk

$$x_{n+1} = p^{n+1}(x_0 + \frac{q}{p-1}) - \frac{q}{p-1}. \quad (4.4)$$

Jika $\left| f'(\frac{-q}{p-1}) \right| = |p| < 1$ maka p^{n+1} konvergen ke 0 sehingga barisan (4.4) konvergen ke titik tetap $x = \frac{-q}{p-1}$.

Jika $\left| f'(\frac{-q}{p-1}) \right| = |p| > 1$ maka p^{n+1} divergen dan berakibat barisan (4.4) divergen.

Jika $\left| f'(\frac{-q}{p-1}) \right| = |p| = 1$, maka barisan (4.4) tidak terdefinisi. Sehingga perilaku orbit x_{n+1} tidak dapat disimpulkan.



BAB IV

KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dari hasil dan pembahasan maka pada penulisan skripsi ini dapat disimpulkan bahwa perilaku orbit sistem untuk sistem dinamik diskrit berdimensi-satu dapat ditentukan melalui kriteria fungsi pembangkit sistemnya. Untuk fungsi pembangkit sistem yang terdiferensial secara kontinu pada $\mathbb{R}$, maka perilaku orbit sistem dapat ditentukan oleh nilai-nilai turunan pertama fungsi di titik tetap p sebagai berikut:

- i. jika $|f'(p)| < 1$ maka orbit sistem x_n konvergen ke p
- ii. jika $|f'(p)| > 1$ maka orbit sistem x_n divergen
- iii. jika $|f'(p)| = 1$ tidak ada kesimpulan.

4.2 Saran

Salah satu hal yang cukup penting untuk dikembangkan sebagai lanjutan penulisan skripsi ini adalah mempelajari nilai-nilai turunan fungsi pembangkit selain di titik tetap. Apakah dengan demikian perilaku orbit sistem masih dapat ditentukan. Hal ini akan sangat menarik untuk dipelajari lebih lanjut, karena tidak semua fungsi mempunyai titik tetap.

DAFTAR PUSTAKA

- Edwin J. Purcell, Dale Varberg. 1990. *Kalkulus dan Geometri Analitis*, Jilid I (Terjemahan, Bana K). Penerbit Erlangga. Jakarta.
- Martelli, M. 1999. *Discrete Dynamical Systems and Chaos*. Jhon Wiley & Sons, Inc. Canada.
- Muslikh, M. 2007. *Karakterisasi Fungsi Pembangkit Sistem Dinamik untuk mendapatkan Orbit Sistem yang Konvergen*. Laporan Penelitian DPP/SPP, Universitas Brawijaya. Malang.
- Soemantri, R. 2000. *Analisis Real I*. Pusat Penerbitan Universitas Terbuka. Jakarta.
- [http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_System_\(Definition\).html](http://en.wikipedia.org/wiki/Dynamical_System_(Definition).html).,
Tanggal akses: 17 februari 2007.

