

**PELABELAN GRACEFUL HASIL PERGANDAAN DAN
GABUNGAN PERGANDAAN DARI GRAF K_r DAN P_n**

SKRIPSI

Oleh :

SITI AISYAH

0310940052-94



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

**PELABELAN GRACEFUL HASIL PERGANDAAN DAN
GABUNGAN PERGANDAAN DARI GRAF K_r DAN P_n**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

SITI AISYAH
0310940052-94



**JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**PELABELAN *GRACEFUL* HASIL PERGANDAAN DAN
GABUNGAN PERGANDAAN DARI GRAF K_r DAN P_n**

oleh :

SITI AISYAH
0310940052-94

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 28 Januari 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang ilmu matematika**

Pembimbing I

Pembimbing II

Drs. Marsudi, M.S
NIP. 131 759 585

Prof.Dr. Agus Widodo, M. Kes
NIP. 131 281 894

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

Dr. Agus Suryanto, Msc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Siti Aisyah
NIM : 0310940052-94
Jurusan : Matematika
Penulisan skripsi berjudul :

**PELABELAN GRACEFUL HASIL PERGANDAAN DAN
GABUNGAN PERGANDAAN DARI GRAF K_r DAN P_n**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, Januari 2008
Yang menyatakan,

(SITI AISYAH)
NIM. 0310940052-94

PELABELAN *GRACEFUL* HASIL PERGANDAAN DAN GABUNGAN PERGANDAAN DARI GRAF K_r DAN P_n

ABSTRAK

Pelabelan *graceful* pada graf $G=(V(G),E(G))$ sederhana adalah fungsi satu-satu (*injektif*) dari himpunan titik $V(G)$ ke himpunan bilangan bulat $\{0,1,2,3,\dots,n\}$, dimana n adalah jumlah garis pada graf G , sedemikian hingga garisnya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik tersebut. Sebuah graf G disebut graf *graceful* jika setiap titik dan garis pada graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*. Skripsi ini bertujuan menyelidiki apakah hasil pergandaan dan gabungan pergandaan dari Graf Lengkap (K_r) dan Graf Lintasan (P_n) merupakan pelabelan *graceful* untuk semua n dan $r=1,2$.

Graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$, $K_2 \times P_n$ dan graf hasil gabungan pergandaan $m(K_2 \times P_n)$ adalah graf *graceful*, karena graf-graf tersebut dapat dilabeli menurut aturan pelabelan *graceful*, sedangkan untuk graf-graf hasil gabungan pergandaan $m(K_1 \times P_n)$ bukan termasuk graf *graceful*.

Kata Kunci: pelabelan *graceful*, graf *graceful*, Graf Lengkap, Graf Lintasan, dan Graf *Ladder*.

GRACEFUL LABELING CROSS PRODUCT AND UNION CROSS PRODUCT OF GRAPH K_r AND P_n

ABSTRACT

A *graceful* labeling of a simple graph $G=(V(G),E(G))$ is an injection function from the vertices of G to the set $\{0,1,2,3,\dots,n\}$, where n is the number of edges of G , such that the label $|f(x)-f(y)|$ for each edge xy is distinct. A graph G is a *graceful* graph if each vertex and edge graph of G can be labeled according to *graceful* labeling. This final project investigates the way of giving of cross product label and union from complete graph (K_r) and path graph (P_n) as according to label of *graceful* for all n and for $r=1,2$.

Graphs $K_1 \times P_n$, $K_2 \times P_n$ and $m(K_2 \times P_n)$ are *graceful* graph, because these graphs can be labeled according to *graceful* labeling, while graph $m(K_1 \times P_n)$ non-*graceful* graph.

Key words: *graceful* labeling, *graceful* graph, complete graph, path graph, and ladder graph.

KATA PENGANTAR

Segala puji syukur bagi Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada kekasih Allah yang paling utama yaitu nabi Muhammad SAW.

Dalam penyusunan tugas akhir dengan judul “ PELABELAN *GRACEFUL* HASIL PERGANDAAN DAN GABUNGAN PERGANDAAN DARI GRAF K_r DAN P_n .” banyak pihak yang telah membantu. Oleh karena itu penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Drs. Marsudi, MS. selaku dosen pembimbing I atas bimbingan, kesabaran dan koreksi skripsi di dalam penulisan skripsi ini.
2. Prof. Dr. Agus Widodo, M.Kes. selaku dosen pembimbing II atas bimbingan, motivasi dan koreksi di dalam penulisan skripsi ini.
3. Dr. Marjono, M.Phil., Syaiful Anam, S.Si, MT. dan Drs. Imam Nurhadi P., MT. selaku dosen penguji atas koreksi, kritik dan saran yang sangat berguna di dalam penulisan skripsi ini.
4. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku ketua jurusan matematika Universitas Brawijaya atas dukungan dan motivasi di dalam penulisan skripsi ini.
5. Dr. Wuryansari M.K.,M.Si. selaku ketua program studi Matematika Universitas Brawijaya atas kesabaran yang luar biasa yang diberikan kepada penulis selama masa perkuliahan.
6. Dosen pengajar dan seluruh staf tata usaha jurusan matematika atas kesabaran dan bimbingan selama masa perkuliahan dan keikhlasan dalam memberikan ilmu yang bermanfaat.
7. Ibu, Mas , Mbak, Adik atas dukungan dan motivasinya selama masa perkuliahan.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, segala macam kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan selanjutnya. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis dan semua pihak.

Malang, Januari 2008
Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI	ii
LEMBAR PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	viii
DAFTAR SIMBOL	ix
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL	xii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Tujuan	2
1.4. Batasan Masalah	2
1.5. Manfaat	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1. Pengertian Graf	3
2.2. Istilah-istilah pada Graf	4
2.3. Jenis-jenis Graf	7
2.4. Operasi pada Graf	10
2.5. Fungsi	13
2.6. Pelabelan pada Graf	14
2.7. Pelabelan <i>Graceful</i>	15
BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	19
3.1. Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf $K_1 \times P_n$	19
3.2. Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf $K_2 \times P_n$	26
3.3. Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf Gabungan $K_1 \times P_n$	40
3.4. Pelabelan <i>Graceful</i> pada Graf Gabungan $K_2 \times P_n$	41
BAB IV PENUTUP	53
4.1. Kesimpulan	53
4.2. Saran	53
DAFTAR PUSTAKA	55

DAFTAR SIMBOL

Simbol

$\overline{\quad}$
 $\lfloor \quad \rfloor$
 $-$
 $|$
 $|$

(v_i)

(e_i)

$\in$

(v'_i)

(e^*_i)

(e'_i)

Keterangan

Bilangan pembulatan keatas

Bilangan pembulatan kebawah

Tanda Mutlak

Titik ke- i

Garis ke- i

Anggota himpunan

Titik ke- i baris ke-2

Garis Tegak ke- i

Garis ke- i baris ke-2



DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1	Graf dengan 5 titik dan 4 sisi	3
Gambar 2.2	Graf Sederhana	4
Gambar 2.3	Graf Ganda	4
Gambar 2.4	u adjacent dengan v , dan u incident dengan e_1	5
Gambar 2.5	Graf dengan $\deg(v_i) = 3$, $\deg(v_5) = 2$	5
Gambar 2.6	Graf walk, path dan bukan path	7
Gambar 2.7	Graf Terhubung dan tidak terhubung	7
Gambar 2.8	Graf Lengkap dan bukan Lengkap	8
Gambar 2.9	Graf Lintasan P_3 dan P_4	8
Gambar 2.10	Graf Reguler	9
Gambar 2.11	Graf Bipartisi dan Bipartisi Lengkap ($K_{3,3}$)	9
Gambar 2.12	Graf yang memuat $G_1 \cup G_2$	10
Gambar 2.13	Graf yang memuat $G_1 \times G_2$	11
Gambar 2.14	Graf yang memuat $G_1 + G_2$	11
Gambar 2.15	Graf Komposisi	12
Gambar 2.16	Graf Tangga L_4	13
Gambar 2.17	Fungsi dan bukan fungsi	13
Gambar 2.18	Fungsi Injektif	14
Gambar 2.19	Graf Berbobot	14
Gambar 2.20	Pelabelan Titik	15
Gambar 2.21	Pelabelan Garis	15
Gambar 2.22	Pelabelan graceful pada Graf K_2, K_3 dan K_4 ...	16
Gambar 2.23	Graf K_5 yang tidak bisa di labeli menurut pelabelan graceful	17
Gambar 2.24	Gabungan dari Graf $K_1 \times P_n$ mempunyai banyak titik dan tidak cukup garis	17
Gambar 2.25	Graf Sikel C_5 mempunyai keseimbangan yang salah	18
Gambar 3.1	Penotasian Graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$	19
Gambar 3.2	Graf $K_1 \times P_3$	24

Gambar 3.3	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf $K_1 \times P_3$ menggunakan Pelabelan Cara 1</u>	25
Gambar 3.4	<u>Graf $K_1 \times P_5$</u>	25
Gambar 3.5	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf $K_1 \times P_5$ menggunakan Pelabelan Cara 2</u>	26
Gambar 3.6	<u>Penotasian Graf Tangga (L_n)</u>	27
Gambar 3.7	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf L_4 menggunakan Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 1</u>	36
Gambar 3.8	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf L_4 menggunakan Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 2</u>	37
Gambar 3.9	<u>Graf L_3</u>	38
Gambar 3.10	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf L_3 menggunakan Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 1</u>	38
Gambar 3.11	<u>Graf L_5</u>	39
Gambar 3.12	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf L_5 menggunakan Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 2</u>	39
Gambar 3.13	<u>Penotasian graf gabungan m buah Graf $K_1 \times P_1$..</u>	40
Gambar 3.14	<u>Penotasian graf gabungan m buah Graf Tangga $m(L_n) mL_n$</u>	42
Gambar 3.15	<u>Pelabelan <i>graceful</i> pada Graf mL_4 menggunakan Proposisi 3.3 Pelabelan Cara 1</u>	47

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Operasi Biner pada Graf	12
-----------	-------------------------------	----

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang penting dan banyak manfaatnya untuk memecahkan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari. Belakangan ini teori graf semakin banyak dikembangkan oleh para ahli matematika dan dipelajari oleh ahli di bidang lain seperti: Ekonomi, Sosial, Fisika, Biologi, Kimia, Teknik dan Komputer. Dengan menggunakan rumusan atau model dari teori graf yang tepat, suatu permasalahan dapat dilihat dan diamati lebih jelas sehingga memudahkan kita untuk menganalisanya, salah satunya adalah jaringan interkoneksi.

Pelabelan graf dalam teori graf adalah pemberian nilai pada titik, garis, atau titik dan garis. Pelabelan graf sudah banyak dikaji mulai tahun 60-an. Seperti *valuasi- β* yang diperkenalkan oleh Rosa pada tahun 1967.

Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$. Pelabelan *graceful* pada graf G merupakan pemberian nilai pada titik-titiknya dengan bilangan bulat positif $\{0, 1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian hingga garisnya mendapat label harga mutlak dari selisih pelabelan kedua titik yang *incident* pada garis tersebut. Sebuah graf G disebut graf *graceful* jika setiap titik dan garis pada graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*. Dalam hal ini, beberapa pelabelan *graceful* untuk kelas-kelas graf tertentu telah ditunjukkan seperti pada Graf Lintasan (P_n), Graf Pohon (T_n) dengan $n \leq 16$, Graf Sikel (C_n) dengan $n \equiv 0 \pmod{4}$ atau $n \equiv 3 \pmod{4}$, Graf Tangga (L_n), dan Graf Lengkap (K_r) dengan $r \leq 2$. Sedangkan untuk graf hasil ganda dan gabungan dari graf-graf yang termasuk *graceful* belum diketahui. Oleh karena itu penulis ingin mengkaji graf-graf yang termasuk

dalam graf *graceful* dan memberi label sesuai dengan pelabelan *graceful* pada graf hasil pergandaan dan hasil gabungan pergandaan pada Graf K_r dan P_n untuk semua n dan $r = 1, 2$.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut:

1. Apakah graf hasil pergandaan dari K_r dan P_n adalah graf *graceful*?
2. Apakah graf hasil gabungan pergandaan dari K_r dan P_n adalah graf *graceful*?

1.3. Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah

1. Menyelidiki apakah hasil pergandaan dari K_r dan P_n merupakan graf *graceful*
2. Menyelidiki apakah hasil gabungan pergandaan dari K_r dan P_n merupakan graf *graceful*

1.4. Batasan Masalah

Adapun batasan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah graf yang akan dikaji adalah graf berhingga, tidak berarah, Graf Lengkap (K_r) untuk $r = 1, 2$ dan Graf Lintasan (P_n) dengan n titik untuk semua n .

1.5. Manfaat

Manfaat dari pelabelan *graceful* adalah mengetahui cara pemberian label hasil pergandaan dua graf dengan metode pelabelan *graceful*

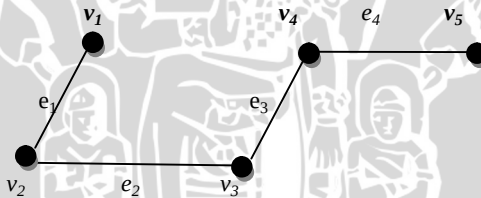
BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Pengertian Graf (Graph)

Definisi :

Graf G terdiri dari himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (*vertex*) dan himpunan dari elemen-elemen yang disebut garis (*edge*). Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ yang dinotasikan dalam bentuk $G = \{V(G), E(G)\}$ dengan $V(G)$ adalah himpunan titik yang tidak kosong yang jumlahnya berhingga, dan $E(G)$ adalah himpunan garis yang dapat merupakan himpunan kosong (Chartrand dan Oellermann, 1996).

Contoh 2.1:



Gambar 2.1
Graf dengan 5 titik dan 4 sisi

Definisi 2.1.2

Garis ganda (*multi edge*) adalah dua garis atau lebih yang menghubungkan pasangan titik yang sama (Marsudi, 2006).

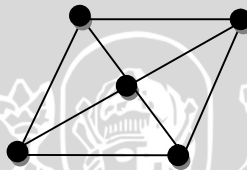
Definisi 2.1.3

Loop adalah suatu garis yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri (Marsudi, 2006).

Definisi 2.1.4

Graf Sederhana (*simple graf*) adalah suatu graf yang tidak memiliki loop dan garis ganda (Johnsonbaugh, 1984).

Contoh 2.2:

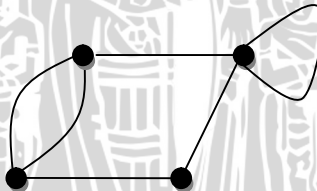


Gambar 2.2 Graf Sederhana

Definisi 2.1.5

Graf Ganda (*multi graf*) adalah graf yang memiliki suatu garis ganda yang menghubungkan dua titik yang sama (Johnsonbaugh, 1984).

Contoh 2.3:



Gambar 2.3 Graf Ganda

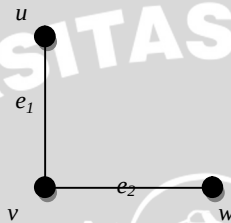
2.2 Istilah-istilah Pada Graf

Definisi 2.2.1

Jika $e = uv$ adalah garis dari graf G , maka dikatakan bahwa u dan v adalah berelasi (*adjacent*) di G , dan garis e tersebut di

katakan terhubung (*incident*) dengan u dan dengan v (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.4:



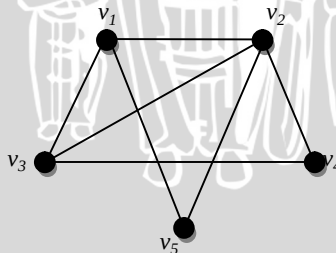
Gambar 2.4

u adjacent dengan v , dan u incident dengan e_1

Definisi 2.2.2

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada sebuah graf G adalah jumlah garis yang *incident* dengan v , dengan kata lain jumlah garis yang memuat v sebagai titik ujung, yang dinotasikan dengan $\deg(v)$ (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.5:



Gambar 2.5 Graf dengan $\deg(v_1) = 3$, $\deg(v_5) = 2$.

Definisi 2.2.3

Derajat total graf G adalah jumlah derajat semua titik dalam graf G .

Teorema 2.1

Derajat total suatu graf selalu genap (Siang, 2002)

Bukti :

Misalkan G adalah suatu graf. Jika $E(G) = 0$ maka derajat total = 0, sehingga teorema terbukti. Sedangkan untuk G mempunyai n buah titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ ($n > 0$) dan k buah garis $e_1, e_2, \dots, e_k$ ($k > 0$).

Ambil sembarang garis e_i . Misalkan garis e_i menghubungkan v_i dengan v_j . Maka e_i memberikan kontribusi masing-masing 1 ke penghitungan derajat v_i dan v_j (hal ini juga benar jika $v_i = v_j$ karena derajat suatu loop dihitung dua kali), sehingga e_i memberi kontribusi 2 ke penghitungan derajat total. Karena e_i dipilih sembarang, berarti semua garis dalam G memberi kontribusi 2 dalam penghitungan derajat total. Dengan kata lain, derajat total $G = 2 \times$ jumlah garis dalam G . Karena jumlah garis dalam G merupakan bilangan bulat, berarti derajat total G merupakan bilangan genap.

Definisi 2.2.4

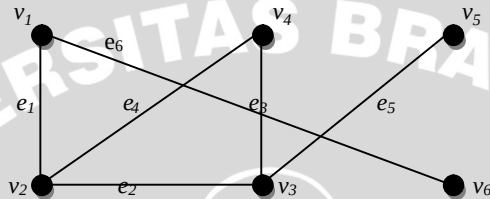
Misalkan G adalah suatu graf. Misalkan pula u dan v adalah dua titik dalam G . Suatu *walk* dari u dan v adalah barisan titik-titik yang *adjacent* dan garis secara berselang-seling, diawali dari titik u dan diakhiri pada titik v (Siang, 2002).

Walk dengan panjang n dari u ke v dituliskan sebagai berikut : $u_0 e_1 u_1 e_2 \dots u_{n-1} e_n u_n$ dengan $u_0 = u$; $u_n = v$; u_{i-1} dan u_i adalah titik-titik ujung garis e_i .

Definisi 2.2.5

Path dengan panjang n dari v ke w adalah *walk* dari v ke w yang semua garisnya berbeda. *Path* dari v ke w dituliskan sebagai $v = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots v_{n-1} e_n v_n = w$ (Siang, 2002).

Contoh 2.6 :



Gambar 2.6

- $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2, e_1, v_1, e_6, v_6)$ *walk* dari v_1 ke v_6 .
- $(v_2, e_4, v_4, e_3, v_3, e_5, v_5)$ *path* dan $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, v_6, v_1)$ bukan *path* dan bukan *walk*

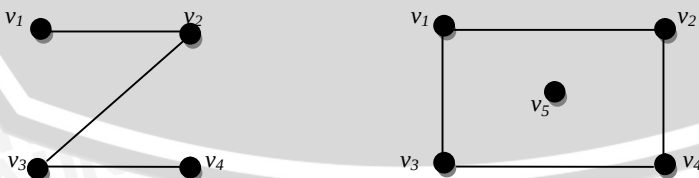
2.3 Jenis-jenis Graf

Berikut ini akan dijelaskan beberapa jenis graf yaitu:

2.3.1 Graf Terhubung (*Connected Graph*)

Sebuah graf G adalah terhubung jika setiap pasang dari titik di G adalah terhubung oleh suatu *path*. Jika sepasang titik tersebut tidak terhubung oleh *path* manapun maka graf tersebut disebut tidak terhubung (*disconnected*) (Dierker dan Voxman, 1986).

Contoh 2.7:



(a)

(b)

Gambar 2.7

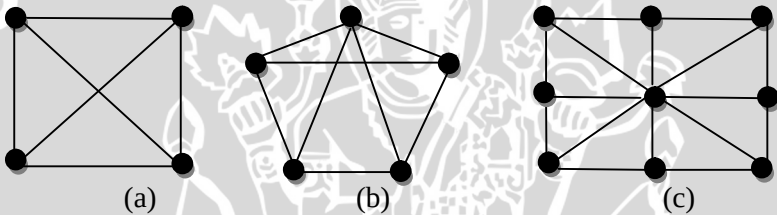
Gambar 2.7 (a) Terhubung karena terdapat sebuah *path* antara sembarang dua titik

Gambar 2.7 (b) Tidak terhubung karena tidak terdapat satu *path* pun dari v_5 ke sembarang titik yang lain pada graf.

Graf Lengkap

Suatu graf G disebut lengkap jika graf tersebut adalah Graf Sederhana dan tiap-tiap dua titiknya mempunyai garis yang menghubungkan dua titik tersebut, graf lengkap dengan r titik dinotasikan dengan K_r (Lipschutz dan Schiller, 1995).

Contoh 2.8:



Gambar 2.8

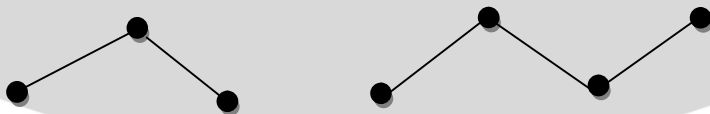
Gambar 2.8 (a) merupakan Graf Lengkap (K_4)

Gambar 2.8 (b) dan (c) bukan merupakan Graf Lengkap

2.3.2 Graf Lintasan

Graf Lintasan adalah graf yang terdiri dari satu lintasan. Graf Lintasan yang terdiri dari n titik dinotasikan dengan P_n .

Contoh 2.9:

Gambar 2.9 Graf Lintasan P_3 dan P_4

2.3.3 Graf Teratur

Suatu graf G adalah Graf Teratur derajat r (r -regular), jika setiap titik dari G mempunyai derajat r . Graf Teratur dengan r titik dinotasikan dengan R_r (Chartrand dan Oellermann, 1996).

Contoh 2.10:

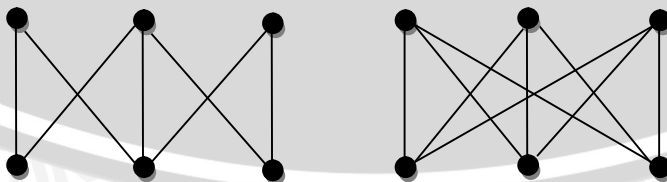


Gambar 2.10 Graf Reguler

2.3.5 Graf Bipartisi dan Bipartisi Lengkap

Sebuah graf G dikatakan bipartisi jika himpunan titiknya V dapat dipartisi ke dalam dua himpunan bagian saling asing M dan N , sedemikian sehingga setiap garis dari G menghubungkan sebuah titik dari M ke sebuah titik dari N . Sementara itu graf bipartisi lengkap adalah setiap titik dari M dihubungkan ke setiap titik dari N dan dinyatakan dengan $K_{m,n}$. Dimana m adalah jumlah titik di M dan n adalah jumlah titik di N , dan untuk standarisasi diasumsikan $m \leq n$ (Lipschutz dan Lipson, 2000).

Contoh 2.11:



(a)

(b)

Gambar 2.11

(a) Graf Bipartisi dan (b) Bipartisi Lengkap ($K_{3,3}$).

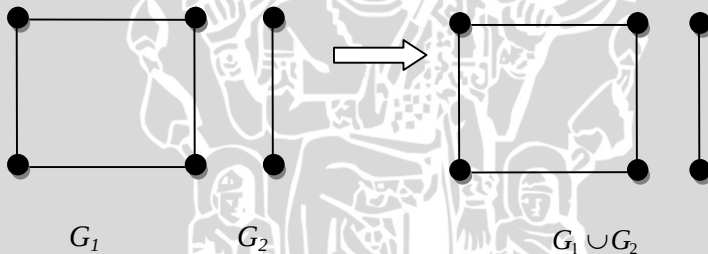
2.4 Operasi Pada Graf

2.4.1 Gabungan Graf

Definisi :

Gabungan dari dua graf sederhana $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dinotasikan $G = G_1 \cup G_2$ adalah graf dengan $V = V_1 \cup V_2$ dan $E = E_1 \cup E_2$ (Rosen, 2005).

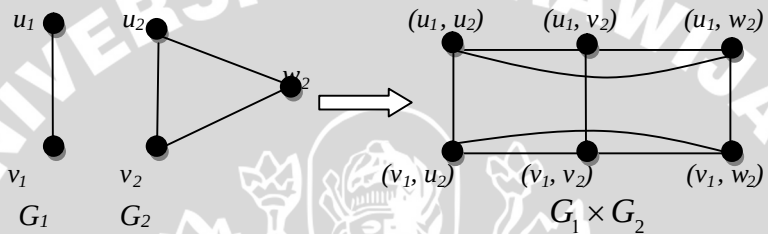
Contoh 2.12:

Gambar 2.12 Graf yang memuat $G_1 \cup G_2$

2.4.2 Hasil Ganda Dua Graf

Misal $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf terhubung dengan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ untuk setiap hasil kali G_1 dan G_2 , $G = G_1 \times G_2 = (V, E)$ adalah graf dengan $V = V_1 \times V_2$ dan dua titik $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V = V_1 \times V_2$ adjacent jika ($u_1 = v_1$ dan u_2 adjacent v_2) atau ($u_2 = v_2$ dan u_1 adjacent v_1) (Marsudi, 2006).

Contoh 2.13:

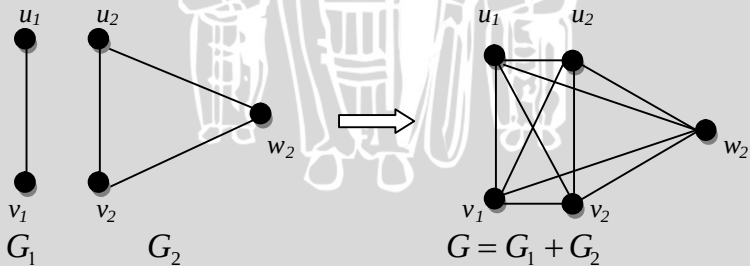


Gambar 2.13 Graf yang memuat $G_1 \times G_2$

2.4.3 Join

$G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ join dari G_1 dan G_2 . $G = G_1 + G_2$ adalah graf $G_1 \cup G_2$ dan semua garis yang menghubungkan titik-titik di v_1 dan v_2 (Marsudi, 2006).

Contoh 2.14:

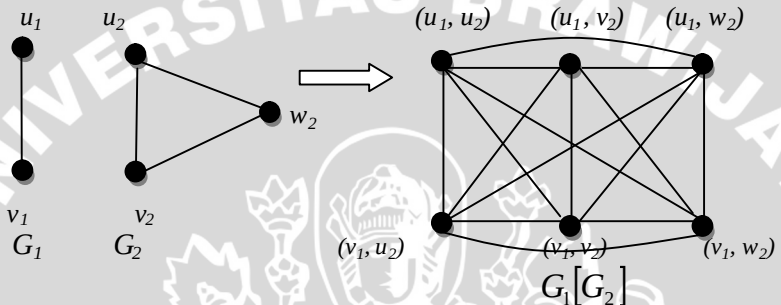


Gambar 2.14 Graf yang memuat $G_1 + G_2$

2.4.4 Komposisi

$G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ dengan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ komposisi dari G_1 dan G_2 . $G = G_1[G_2] = (V, E)$ adalah graf dengan $V = V_1 \times V_2$ dan dua titik $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V = V_1 \times V_2$ adjacent jika $(u_1 \text{ adjacent } v_1)$ atau $(u_1 = v_1 \text{ dan } u_2 \text{ adjacent } v_2)$ (Marsudi, 2006).

Contoh 2.15



Gambar 2.15 Graf Komposisi

Jika graf G_1 dan G_2 adalah (p_1, q_1) dan (p_2, q_2) berturut-turut, maka untuk tiap operasi diatas jumlah dari titik dan garis pada graf hasil operasi tersebut dapat dihitung, yang ditunjukkan pada Tabel 2.1

Tabel 2.1 Operasi Biner Pada Graf

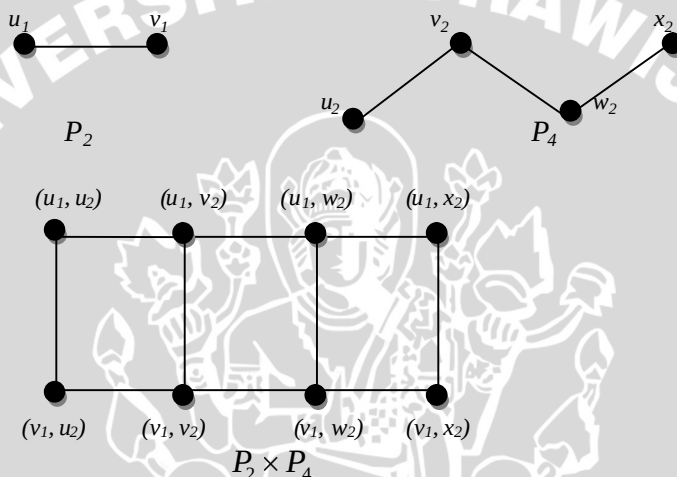
Operasi	Jumlah Titik	Jumlah Garis
Gabungan ($G_1 \cup G_2$)	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2$
Join ($G_1 + G_2$)	$p_1 + p_2$	$q_1 + q_2 + p_1 p_2$
Hasil Kali ($G_1 \times G_2$)	$p_1 \times p_2$	$p_1 q_2 + p_2 q_1$
Komposisi	$p_1 \times p_2$	$p_1 q_2 + p_2^2 q_1$

(Harary, 1994)

2.4.5 Graf Tangga (Ladder)

Graf tangga (*ladder*) adalah graf yang dibangun dari hasil kali ganda Graf Lintasan P_2 dan P_n , yaitu $P_2 \times P_n$. Untuk pembahasan selanjutnya Graf Tangga $P_2 \times P_n$ akan dinotasikan dengan L_n .

Contoh 2.16:

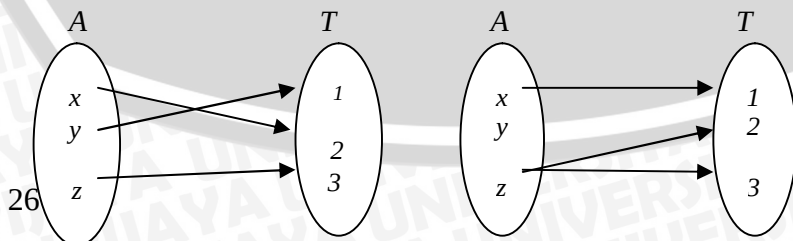


Gambar 2.16 Graf Tangga L_4

2.5 Fungsi

Fungsi dari himpunan A ke himpunan T adalah suatu hubungan atau relasi yang memasangkan setiap anggota A dengan satu buah anggota T . Himpunan A disebut domain dan himpunan T disebut kodomain. Fungsi biasanya ditulis dalam bentuk : $f = A \rightarrow T$, atau $A \xrightarrow{f} T$ (Durbin, 1992).

Contoh 2.17:



(a)

(b)

Gambar 2.17

(a) Fungsi $A \xrightarrow{f} T$ dan (b) bukan fungsi

2.5.1 Fungsi Injektif

Definisi :

Suatu fungsi $f : A \rightarrow T$ atau fungsi $f : A \rightarrow T$ disebut injektif jika semua unsur-unsurnya berbeda, maka bayangan dari fungsi f tersebut berbeda. Dengan kata lain suatu fungsi f adalah *injektif* jika

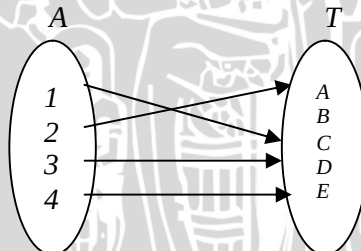
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad x_1, x_2 \in A$$

atau fungsi $f : A \rightarrow T$ *injektif* jika

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad x_1, x_2 \in A$$

(Whitelaw, 1995)

Contoh 2.18:

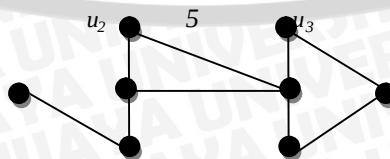


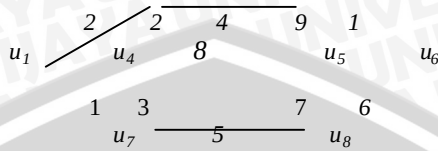
Gambar 2.18 Fungsi Injektif

2.6 Pelabelan Pada Graf (Graph Labeling)

Graf Berbobot (*weighted graph*) adalah graf yang mempunyai nilai atau bobot pada setiap garisnya. Dan bobot dalam graf dinotasikan dengan $W(e)$ (Fletcher, et all 1991).

Contoh 2.18:





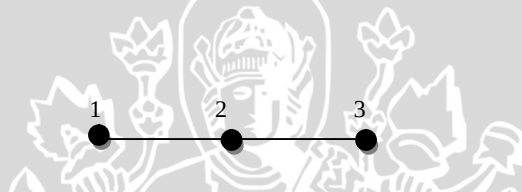
Gambar 2.19 Graf Berbobot

Ada beberapa jenis pelabelan pada graf, yang secara umum dikelompokkan sebagai berikut:

2.6.1 Pelabelan Titik (*Verteks Labeling*)

Pelabelan titik dari graf G adalah suatu fungsi $V(G) \rightarrow W$ dimana W adalah himpunan label untuk titik-titik (Munro, 1992).

Contoh 2.20:

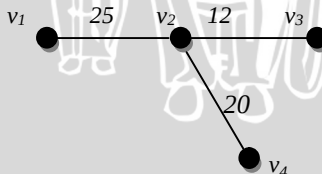


Gambar 2.20 Pelabelan Titik

2.6.2 Pelabelan Garis (*Edge Labeling*)

Pelabelan garis dari graf G adalah fungsi $E(G) \rightarrow W$ dimana W adalah himpunan label untuk garis-garisnya, pada umumnya angka-angka tersebut mewakili suatu jarak atau arus (Munro, 1992).

Contoh 2.21:



Gambar 2.21 Pelabelan Garis

2.7 Pelabelan *Graceful* (*graceful labeling*)

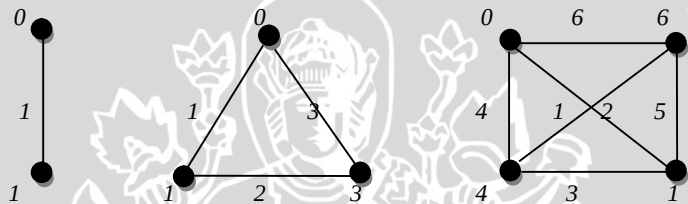
Misal G graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan garis $E(G)$.

Pelabelan *Graceful* λ adalah fungsi satu-satu $\lambda : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2, 3, \dots, |E(G)|\}$ sedemikian hingga

$\lambda(e) = \lambda(uv) = |\lambda(u) - \lambda(v)|$ berbeda semua setiap $u, v \in V(G)$.

Sebuah graf G disebut graf *graceful* jika setiap titik dan garis di graf G dapat diberi label menurut aturan pelabelan *graceful*.

Menurut Golomb (dalam Redl, T.A., 2003), Graf Lengkap (K_r) adalah *graceful* untuk $r \leq 4$ seperti yang diberikan pada Gambar 2.22 :



Gambar 2.22

Pelabelan *graceful* pada Graf K_2 , K_3 dan K_4

Sedangkan untuk Graf Lengkap (K_r) dengan $r \geq 5$ tidak *graceful*, seperti yang ditunjukkan pada Teorema 2.2:

Teorema 2.2:

Graf Lengkap (K_r) adalah tidak graceful untuk $r \geq 5$.

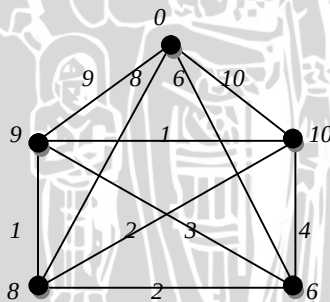
Bukti :

Misal Graf Lengkap (K_r) mempunyai r titik dan q garis. Titik-titik dari Graf K_r diberi label $\{0, 1, 2, 3, \dots, q\}$. Label 0 dan q dibutuhkan untuk memberi label titik-titiknya sehingga didapat garis yang berlabel q . Sekarang didapat titik yang berlabel 0 dan q . Selanjutnya dibutuhkan garis yang berlabel $q - 1$. Untuk itu satu titik

dari Graf K_r harus diberi label 1 atau $q-1$, misal pilih 1 untuk melabeli titik tersebut, sehingga diperoleh garis-garis yang mendapat label q , $q-1$ dan 1 dan titik-titik yang terlabeli adalah 0, 1 dan q . Untuk mendapatkan garis yang terlabeli $q-2$, harus mempunyai titik-titik yang terlabeli 0, $q-2$ atau 1, $q-1$ atau 2, q . Misal dipilih nilai $q-1$ atau 2 maka akan ada dua garis yang mendapat label sama, sehingga diperoleh nilai $q-2$ dan diperoleh garis-garis yang mendapat label q , $q-1$, $q-2$, $q-3$, 2 dan 1, dan titik-titik yang terlabeli adalah 0, 1, $q-2$ dan q . Untuk mendapatkan garis yang terlabeli $q-4$ maka harus mempunyai titik-titik dengan label 0, $q-4$ atau 2, $q-2$ atau 3, $q-1$ atau 4, q . Setiap dipilih pasangan label titik ini, didapat minimal dua garis dengan label sama. Sehingga Graf K_r dengan $r = 5$ tidak *graceful*.

Hal ini membuktikan bahwa Graf K_r dengan $r \geq 5$ tidak *graceful*, sebab dengan bertambahnya satu titik maka akan ada penambahan beberapa garis dengan label yang sama.

Sebagai Contoh, Gambar 2.23 menunjukkan Graf K_5 yang tidak bisa diberi label menurut aturan pelabelan *graceful* karena ada beberapa garis yang mendapat label sama, yaitu tiga garis mendapat label 1, dua garis mendapat label 2, dua garis mendapat label 3 dan dua garis mendapat label 4.

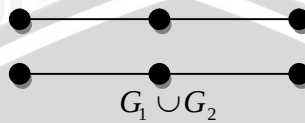


Gambar 2.23 Graf K_5 yang tidak bisa dilabeli menurut aturan pelabelan *graceful*

Menurut Rosa (dlm Redl, T.A., 2003) ada tiga hal yang menyebabkan sebuah graf G tidak bisa dilabeli menurut aturan pelabelan *graceful*, yaitu:

1. G mempunyai banyak titik dan tidak cukup garis

Contoh 2.24:

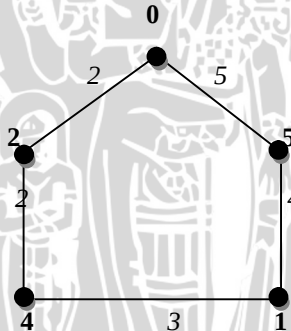


Gambar 2.24 Gabungan dari Graf P_3 mempunyai banyak titik dan tidak cukup garis

2. G mempunyai terlalu banyak garis. Artinya apabila graf terlalu banyak garis dan kurang titik maka apabila dilabeli menurut aturan pelabelan *graceful*, terdapat beberapa garis yang mempunyai label yang sama. Contoh pada Graf K_5 Gambar 2.23
3. G mempunyai keseimbangan yang salah
Pelabelan *graceful* harus mempunyai keseimbangan yang sama, pelabelan seimbang adalah jika terdapat titik uv adjacent maka berlaku:

$$f(u) \leq c < f(v) \text{ atau } f(v) \leq c < f(u)$$

Contoh 2.25



Gambar 2.25 Graf Sikel C_5 mempunyai keseimbangan yang salah

Karena pada Gambar 2.25 terdapat $0 < 2 \leq 2$, tidak memenuhi $f(u) \leq c < f(v)$ maka Gambar 2.25 mempunyai keseimbangan yang salah.

BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

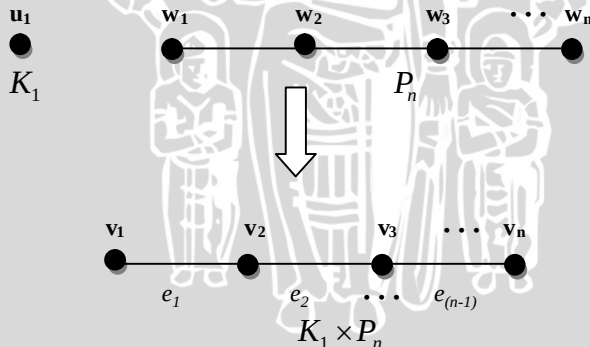
3.1 Pelabelan *Graceful* pada Graf $K_1 \times P_n$

Graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$ mempunyai n titik, yang berupa Graf Lintasan (P_n). Himpunan titik dari Graf $K_1 \times P_n$ adalah :

$v(K_1 \times P_n) = \{v_i\}$ dimana v_i adalah titik ke- i untuk $i=1,2,3,\dots,n$.

Himpunan garis dari Graf $K_1 \times P_n$ adalah $E(K_1 \times P_n) = \{e_i\}$ dengan $e_i = v_i v_{(i+1)}$ untuk $i=1,2,3,\dots,n-1$.

Gambar 3.1 menunjukkan penotasian titik dan garis dari graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$.



Gambar 3.1 Penotasian graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$

Proposisi 3.1

Graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$ adalah graf graceful untuk setiap n .

Bukti:

Pelabelan diberikan dengan **Pelabelan Cara 1** dan **Cara 2** berikut ini:

Pelabelan Cara 1: Beri label $\lambda(v_i)$ untuk titik-titik dari Graf

$K_1 \times P_n$ dengan

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2} & \text{untuk } i=1,3,5,\dots,2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1 \\ (n-1)-\left(\frac{i-2}{2}\right) & \text{untuk } i=2,4,6,\dots,2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa **Pelabelan Cara 1** memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*). Suatu fungsi disebut *injektif* bila memenuhi

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Rightarrow v_i = v_j \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$$

Ambil sebarang $v_i, v_j \in V(K_1 \times P_n)$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$

Akan dibuktikan bahwa $v_i = v_j$.

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2} & \text{untuk } i=1,3,5,\dots,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1 \\ (n-1)-\left(\frac{i-2}{2}\right) & \text{untuk } i=2,4,6,\dots,2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \end{cases}$$

dan

$$\lambda(v_j) = \begin{cases} \frac{j-1}{2} & \text{untuk } j=1,3,5,\dots,\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1 \\ (n-1)-\left(\frac{j-2}{2}\right) & \text{untuk } j=2,4,6,\dots,2\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \end{cases}$$

1) Untuk i, j ganjil

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow \frac{i-1}{2} = \frac{j-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

2) Untuk i, j genap

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow (n-1) - \left(\frac{i-2}{2}\right) = (n-1) - \left(\frac{j-2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{i-2}{2} = \frac{j-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow i-2 = j-2$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

Sehingga terbukti bahwa **Pelabelan Cara 1** memenuhi fungsi satu-satu.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh, selanjutnya pelabelan garis - garisnya $\lambda(e)$ untuk setiap $e \in E(K_1 \times P_n)$ diberikan sebagai berikut:

$$\lambda(e_i) = \lambda(v_i v_{i+1}) = n-i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \lambda(e_i) = \lambda(v_i v_{i+1}) &= |\lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i)| \\ &= \left| (n-1) - \left(\frac{(i+1)-2}{2}\right) - \left(\frac{i-1}{2}\right) \right| \\ &= \left| (n-1) - \left(\frac{i-1}{2}\right) - \left(\frac{i-1}{2}\right) \right| \\ &= |(n-1) - (i-1)| \\ &= |n-i| = n-i \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) \Leftrightarrow n-i \neq n-j$$

$$\Leftrightarrow -i \neq -j$$

$$\Leftrightarrow i \neq j$$

Sehingga terbukti bahwa pelabelan setiap garisnya berbeda.

Pelabelan Cara 2 : Titiknya diberi label $\lambda(v_i)$ dengan:

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} (i-1) + \left(\frac{1-i}{2}\right) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \\ (n-i) + \left(\frac{i}{2}\right) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa **Pelabelan Cara 2** memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*). Suatu fungsi disebut *injektif* bila memenuhi

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Rightarrow v_i = v_j \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$$

Ambil sebarang $v_i, v_j \in V(K_1 \times P_n)$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$

Akan dibuktikan bahwa $v_i = v_j$.

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} (i-1) + \left(\frac{1-i}{2}\right) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \\ (n-i) + \left(\frac{i}{2}\right) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

dan

$$\lambda(v_j) = \begin{cases} (j-1) + \left(\frac{1-j}{2}\right) & \text{untuk } j = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \\ (n-j) + \left(\frac{j}{2}\right) & \text{untuk } j = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \end{cases}$$

1) Untuk i, j ganjil

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow (i-1) + \left(\frac{1-i}{2}\right) = (j-1) + \left(\frac{1-j}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow i + \frac{1-i}{2} = j + \frac{1-j}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2i+1-i}{2} = \frac{2j+1-j}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i}{2} = \frac{j}{2}$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

2) Untuk i, j genap

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow (n-i) + \left(\frac{i}{2}\right) = (n-j) + \left(\frac{j}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -i + \left(\frac{i}{2}\right) = -j + \left(\frac{j}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2i+i}{2} = \frac{-2j+j}{2}$$

$$\Leftrightarrow -i = -j$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

Sehingga terbukti bahwa **Pelabelan Cara 2** memenuhi fungsi satu-satu.

Pelabelan garisnya diberi label $\lambda(e)$ berbeda semua untuk setiap $e \in E(K_1 \times P_n)$ menurut aturan sebagai berikut:

$$\lambda(e_i) = \lambda(v_i v_{(i+1)}) = n - i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Bukti :

$$\begin{aligned}
 \lambda(e_i) &= \lambda(v_i v_{i+1}) = |\lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i)| \\
 &= \left| (n - (i+1)) + \left(\frac{i+1}{2} \right) - (i-1) - \left(\frac{1-i}{2} \right) \right| \\
 &= |n - i - 1 + 1| \\
 &= |n - i| = n - i
 \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) \Leftrightarrow n - i \neq n - j$$

$$\Leftrightarrow -i \neq -j$$

$$\Leftrightarrow i \neq j$$

Sehingga terbukti bahwa pelabelan setiap garisnya berbeda.

Karena dari **Pelabelan Cara 1** dan **Cara 2** diperoleh bahwa pelabelan titik-titiknya memenuhi fungsi satu-satu dan pelabelan garis – garisnya berbeda semua untuk setiap $e \in E(K_1 \times P_n)$ maka pelabelan λ diatas adalah pelabelan *graceful*.

Contoh 3.3:

Labeli

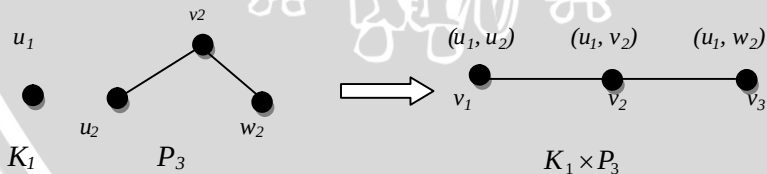
a. Graf $K_1 \times P_3$

b. Graf $K_1 \times P_5$

menurut pelabelan *graceful* !

Jawab:

a. Graf $K_1 \times P_3$



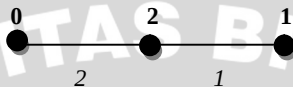
Gambar 3.2 Graf $K_1 \times P_3$

Maka cara melabelinya adalah:

$$v_1 = \frac{1-1}{2} = 0$$

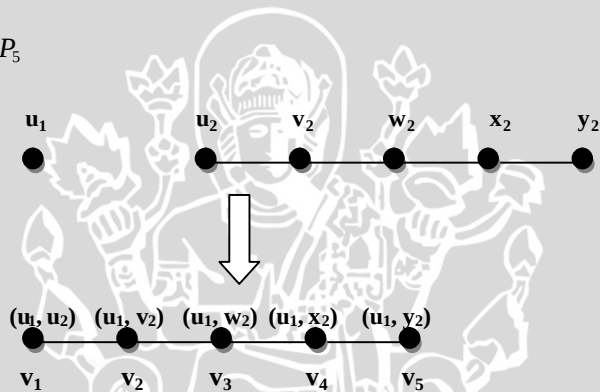
$$v_2 = (3-1) - \left(\frac{2-2}{2}\right) = 2$$

$$v_3 = \frac{3-1}{2} = 1$$



Gambar 3.3 Pelabelan *graceful* pada Graf $K_1 \times P_3$
Pelabelan Cara 1

b. Graf $K_1 \times P_5$



Gambar 3.4 Graf $K_1 \times P_5$

Maka cara melabelinya adalah:

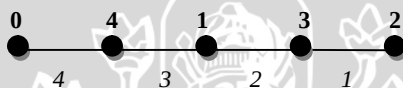
$$v_1 = (1-1) + \left(\frac{1-1}{2}\right) = 0$$

$$v_2 = (5-2) + \left(\frac{2}{2}\right) = 3+1 = 4$$

$$v_3 = (3-1) + \left(\frac{1-3}{2}\right) = 2-1 = 1$$

$$v_4 = (5-4) + \left(\frac{4}{2}\right) = 1+2 = 3$$

$$v_5 = (5-1) + \left(\frac{1-5}{2}\right) = 4-2 = 2$$



Gambar 3.5 Pelabelan *graceful* pada Graf $K_1 \times P_5$
pelabelan Cara 2

3.2 Pelabelan *Graceful* pada Graf $K_2 \times P_n$

Graf hasil ganda $K_2 \times P_n = P_2 \times P_n$ yang merupakan Graf Tangga. Graf Tangga (L_n) adalah graf hasil pergandaan $P_2 \times P_n$.

Misal Graf Tangga (L_n) mempunyai himpunan titik

$V(L_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ dan himpunan garis

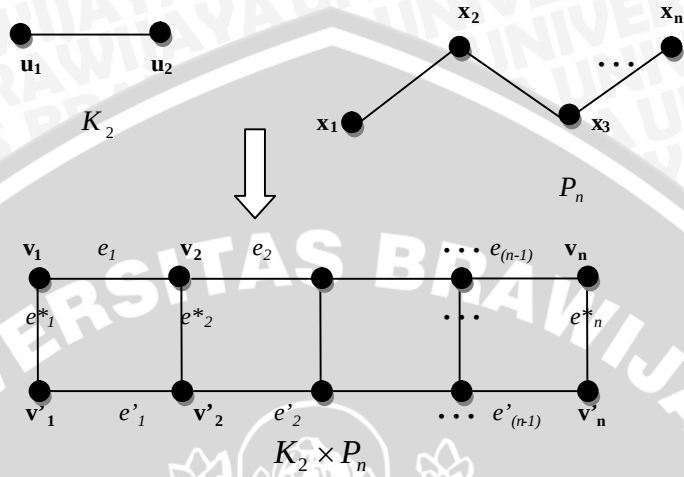
$E(L_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, e'_1, e'_2, \dots, e'_{n-1}, e^*_1, e^*_2, \dots, e^*_n\}$ dengan

sisi $e_i = v_i v_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$,

sisi $e'_i = v'_i v'_{i+1}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ dan

sisi $e^*_i = v_i v'_i$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Sebagai ilustrasi penotasian titik dan garis dari Graf Tangga (L_n) , dapat dilihat pada Gambar 3.6



Gambar 3.6 Penotasian Graf Tangga (L_n)

Proposisi 3.2

Graf Tangga (L_n) adalah graf graceful untuk setiap n .

Bukti :

Diberikan oleh **pelabelan Cara 1** dan **Cara 2** berikut ini.

Pelabelan Cara 1 : Beri label $\lambda(v_i)$ untuk titik-titik dari Graf L_n dengan :

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} i-1 & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, \\ 3n - 2i & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

dan

$$\lambda(v'_i) = \begin{cases} 3n - 2i & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ i - 1 & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa **Pelabelan Cara 1** **Proposisi 3.2** memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*). Suatu fungsi disebut *injektif* bila memenuhi

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Rightarrow v_i = v_j \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$$

Ambil sebarang $v_i, v_j \in V(K_1 \times P_n)$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$

Akan dibuktikan bahwa $v_i = v_j$.

1) Untuk i, j ganjil

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow i - 1 = j - 1$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

dan

$$\lambda(v'_i) = \lambda(v'_j) \Leftrightarrow 3n - 2i = 3n - 2j$$

$$\Leftrightarrow -2i = -2j$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

2) Untuk i, j genap

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow 3n - 2i = 3n - 2j$$

$$\Leftrightarrow -2i = -2j$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

dan

$$\lambda(v'_i) = \lambda(v'_j) \Leftrightarrow i-1 = j-1$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

Sehingga terbukti bahwa **Pelabelan Cara 1** memenuhi fungsi satu-satu.

Dari pelabelan titik-titiknya akan diperoleh pelabelan garis-garisnya $\lambda(e)$ untuk setiap $e \in E(K_1 \times P_n)$ sebagai berikut:

$$\lambda(e_i) = \lambda(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 3(n-i)-1 & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ 3(n-i) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

Bukti: untuk i ganjil

$$\begin{aligned} \lambda(e_i) &= \lambda(v_i v_{i+1}) = |\lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i)| \\ &= |3n - 2(i+1) - (i-1)| \\ &= |3n - 3i - 1| \\ &= |3(n-i) - 1| = 3(n-i) - 1 \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) &\Leftrightarrow 3(n-i) - 1 \neq 3(n-j) - 1 \\ &\Leftrightarrow 3(n-i) \neq 3(n-j) \\ &\Leftrightarrow (n-i) \neq (n-j) \\ &\Leftrightarrow -i \neq -j \\ &\Leftrightarrow i \neq j \end{aligned}$$

Untuk i genap :

$$\begin{aligned}
 \lambda(e_i) &= \lambda(v_{i+1}) = |\lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i)| \\
 &= |3n - 2i - ((i+1) - 1)| \\
 &= |3n - 3i| \\
 &= |3(n - i)| = 3(n - i)
 \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
 \lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) &\Leftrightarrow 3(n - i) \neq 3(n - j) \\
 &\Leftrightarrow (n - i) \neq (n - j) \\
 &\Leftrightarrow -i \neq -j \\
 &\Leftrightarrow i \neq j
 \end{aligned}$$

$$\lambda(e'_i) = \lambda(v'_i v'_{i+1}) = \begin{cases} 3(n - i) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ 3(n - i) - 1 & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

Bukti: untuk i ganjil:

$$\begin{aligned}
 \lambda(e'_i) &= \lambda(v'_i v'_{i+1}) = |\lambda(v'_{i+1}) - \lambda(v'_i)| \\
 &= |((i+1) - 1) - (3n - 2i)| \\
 &= |3i - 3n| \\
 &= |3(i - n)| \\
 &= | - 3(n - i) | = 3(n - i)
 \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j) &\Leftrightarrow 3(n-i) \neq 3(n-j) \\
&\Leftrightarrow (n-i) \neq (n-j) \\
&\Leftrightarrow -i \neq -j \\
&\Leftrightarrow i \neq j
\end{aligned}$$

untuk i genap:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_i) &= \lambda(v'_i v'_{i+1}) = |\lambda(v'_{i+1}) - \lambda(v'_i)| \\
&= |(i-1) - (3n-2(i+1))| \\
&= |-3n+3i+1| \\
&= |3(i-n)+1| \\
&= |(3(n-i)-1)| = 3(n-i)-1
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j) &\Leftrightarrow 3(n-i)-1 \neq 3(n-j)-1 \\
&\Leftrightarrow 3(n-i) \neq 3(n-j) \\
&\Leftrightarrow (n-i) \neq (n-j) \\
&\Leftrightarrow -i \neq -j \\
&\Leftrightarrow i \neq j
\end{aligned}$$

dan

$$\lambda(e^*_i) = \lambda(v_i v'_i) = 3(n-i)+1 \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_i^*) &= \lambda(v_i v_i') = |\lambda(v_i) - \lambda(v_i')| \\
&= |(i-1) - (3n-2i)| \\
&= |-3n+3i-1| \\
&= |3(i-n)-1| \\
&= |(3(n-i)+1)| = 3(n-i)+1
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e_i^*) \neq \lambda(e_j^*)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_i^*) \neq \lambda(e_j^*) &\Leftrightarrow 3(n-i)+1 \neq 3(n-j)+1 \\
&\Leftrightarrow 3(n-i) \neq 3(n-j) \\
&\Leftrightarrow (n-i) \neq (n-j) \\
&\Leftrightarrow -i \neq -j \\
&\Leftrightarrow i \neq j
\end{aligned}$$

Pelabelan Cara 2 : Beri label $\lambda(v_i)$ untuk titik-titik dari graf L_n dengan :

$$\lambda(v_i) = \begin{cases} \frac{i-1}{2} & i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ (3n-1) - \frac{i}{2} & i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

dan

$$\lambda(v_i') = \begin{cases} 2n - \left(\frac{i+1}{2} \right) & i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ (n-1) + \frac{i}{2} & i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa **Pelabelan Cara 2 Proposisi 3.2** memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*). Suatu fungsi disebut *injektif* bila memenuhi

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Rightarrow v_i = v_j \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$$

Ambil sebarang $v_i, v_j \in V(K_1 \times P_n)$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$

Akan dibuktikan bahwa $v_i = v_j$.

1) Untuk i, j ganjil

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow \frac{i-1}{2} = \frac{j-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow i-1 = j-1$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

dan

$$\lambda(v'_i) = \lambda(v'_j) \Leftrightarrow 2n - \left(\frac{i+1}{2}\right) = 2n - \left(\frac{j+1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{i+1}{2}\right) = -\left(\frac{j+1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow i+1 = j+1$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

2) Untuk i, j genap

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Leftrightarrow (3n-1) - \frac{i}{2} = (3n-1) - \frac{j}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{i}{2} = -\frac{j}{2}$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

dan

$$\lambda(v'_i) = \lambda(v'_j) \Leftrightarrow (n-1) + \frac{i}{2} = (n-1) + \frac{j}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{i}{2} = \frac{j}{2}$$

$$\Leftrightarrow i = j$$

$$\Leftrightarrow v_i = v_j$$

Sehingga terbukti bahwa **Pelabelan Cara 2** memenuhi fungsi satu-satu.

Setelah pelabelan titik-titiknya diperoleh maka garis-garisnya diberi label $\lambda(e)$ untuk setiap $e \in E(Ln)$ menurut aturan sebagai berikut:

$$\lambda(e_i) = \lambda(v_i v_{i+1}) = 3n-1-i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \lambda(e_i) = \lambda(v_i v_{i+1}) &= |\lambda(v_{i+1}) - \lambda(v_i)| \\ &= \left| (3n-1) - \left(\frac{i+1}{2} \right) - \left(\frac{i-1}{2} \right) \right| \\ &= |3n-1-i| \\ &= 3n-1-i \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) \Leftrightarrow 3n-1-i \neq 3n-1-j$$

$$\Leftrightarrow -i \neq -j$$

$$\Leftrightarrow i \neq j$$

$$\lambda(e'_i) = \lambda(v'_i v'_{i+1}) = n-i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n-1,$$

Bukti:

$$\begin{aligned} \lambda(e'_i) &= \lambda(v'_i v'_{i+1}) = |\lambda(v'_{i+1}) - \lambda(v'_i)| \\ &= \left| (n-1) + \left(\frac{i+1}{2} \right) - 2n + \left(\frac{i+1}{2} \right) \right| \\ &= |i-n| \\ &= |-(n-i)| = (n-i) \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j) &\Leftrightarrow (n-i) \neq (n-j) \\ &\Leftrightarrow -i \neq -j \\ &\Leftrightarrow i \neq j \end{aligned}$$

dan

$$\lambda(e^*_i) = \lambda(v_i v'_i) = 2n-i \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \lambda(e^*_i) &= \lambda(v_i v'_i) = |\lambda(v'_i) - \lambda(v_i)| \\ &= \left| 2n - \left(\frac{i+1}{2} \right) - \left(\frac{i-1}{2} \right) \right| \\ &= |2n-i| \\ &= 2n-i \end{aligned}$$

Ambil sebarang i, j dengan $\lambda(e^*_i) \neq \lambda(e^*_j)$

Akan ditunjukkan $i \neq j$:

$$\lambda(e^*_i) \neq \lambda(e^*_j) \Leftrightarrow 2n - i \neq 2n - i$$

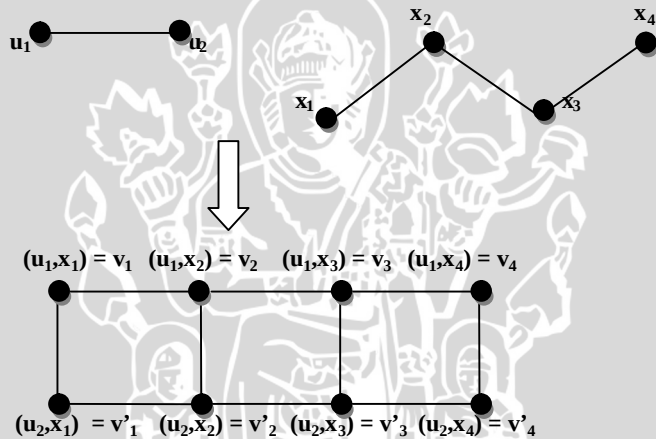
$$\Leftrightarrow -i \neq -j$$

$$\Leftrightarrow i \neq j$$

Karena dari **Pelabelan Cara 1** dan **Cara 2** diperoleh bahwa pelabelan titik-titiknya memenuhi fungsi satu-satu dan pelabelan garis-garisnya berbeda semua untuk setiap $e \in E(L_n)$ maka pelabelan λ diatas adalah pelabelan *graceful* .

Contoh 3.4:

Graf $K_2 \times P_2$ menggunakan **Pelabelan Cara 1**



Maka cara melabelinya dengan menggunakan **Cara 1** adalah:

$$v_1 = 1 - 1 = 0$$

$$v_2 = 3,4 - 2,2 = 8$$

$$v_3 = 3 - 1 = 2$$

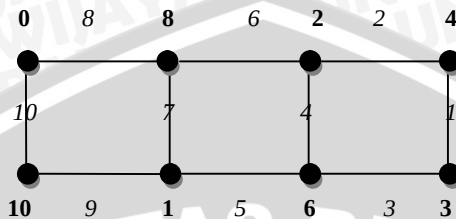
$$v_4 = 3,4 - 2,4 = 4$$

$$v'_1 = 3,4 - 2,1 = 10$$

$$v'_2 = 2 - 1 = 1$$

$$v'_3 = 3,4 - 2,3 = 6$$

$$v'_4 = 4 - 1 = 3$$



Gambar 3.7 Pelabelan *graceful* pada graf L_4 menggunakan **Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 1**

Contoh 3.5:

Graf $K_2 \times P_2$ menggunakan **Pelabelan Cara 2**

Maka cara melabelinya dengan menggunakan **Cara 1** adalah:

$$v_1 = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$v'_1 = 2.4 - \left(\frac{1+1}{2} \right) = 9$$

$$v_2 = 3.4 - 1 - \frac{2}{2} = 10$$

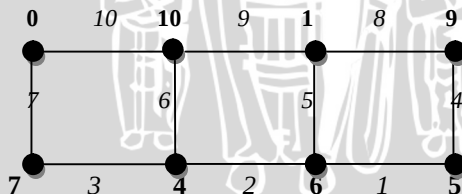
$$v'_2 = (4-1) + \frac{2}{2} = 4$$

$$v_3 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$v'_3 = 2.4 - \left(\frac{3+1}{2} \right) = 6$$

$$v_4 = 3.4 - 1 - \frac{4}{2} = 9$$

$$v'_4 = (4-1) + \frac{4}{2} = 5$$



Gambar 3.8 Pelabelan *graceful* pada Graf L_4 menggunakan **Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 2**

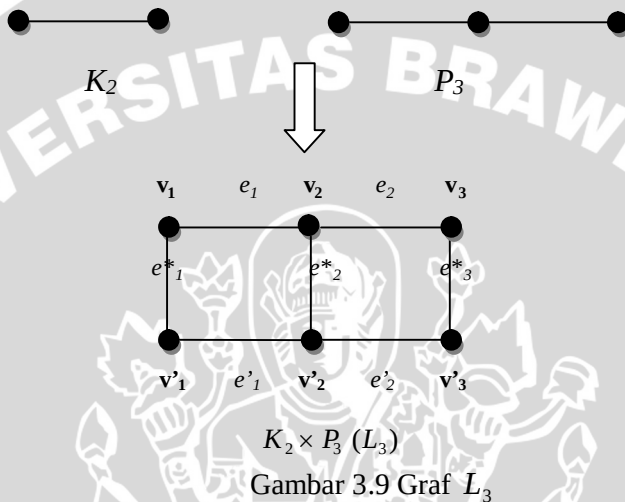
Contoh 3.6:

Labeli

a. Graf $K_2 \times P_3$

b. Graf $K_2 \times P_3$
 menurut pelabelan *graceful* !
Jawab:

a. Graf $K_2 \times P_3$



Maka cara melabelinya adalah dengan menggunakan **Cara 1:**

$$v_1 = 1 - 1 = 0$$

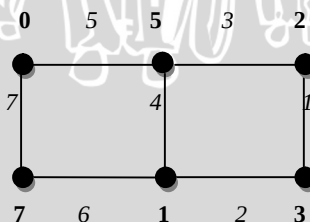
$$v_2 = 3.3 - 2.2 = 5$$

$$v_3 = 3 - 1 = 2$$

$$v'_1 = 3.3 - 2.1 = 7$$

$$v'_2 = 2 - 1 = 1$$

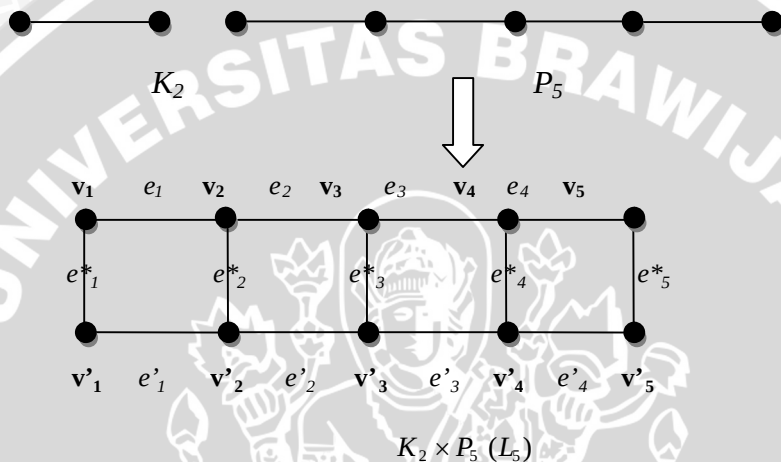
$$v'_3 = 3.3 - 2.3 = 3$$



Gambar 3.10 Pelabelan *graceful* pada Graf L_3

menggunakan **Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 1**

b. Graf $K_2 \times P_5$



Gambar 3.11 Graf L_5

Maka cara melabelinya adalah dengan menggunakan **Cara 2**:

$$v_1 = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$v'_1 = 2.5 - \left(\frac{1+1}{2} \right) = 9$$

$$v_2 = 3.5 - 1 - \frac{2}{2} = 13$$

$$v'_2 = 5 + \frac{2}{2} - 1 = 5$$

$$v_3 = \frac{3-1}{2} = 1$$

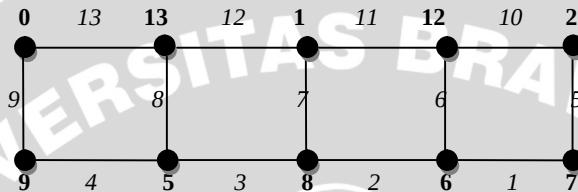
$$v'_3 = 2.5 - \left(\frac{3+1}{2} \right) = 8$$

$$v_4 = 3.5 - 1 - \frac{4}{2} = 12$$

$$v'_4 = 5 + \frac{4}{2} - 1 = 6$$

$$v_5 = \frac{5-1}{2} = 2$$

$$v'_5 = 2.5 - \left(\frac{5+1}{2} \right) = 7$$

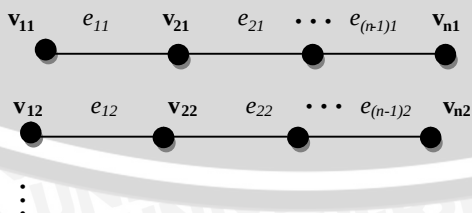


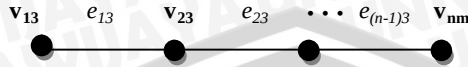
Gambar 3.12 Pelabelan *graceful* pada Graf L_5 menggunakan **Proposisi 3.2 Pelabelan Cara 2**

3.3 Pelabelan *Graceful* pada Graf Gabungan $K_1 \times P_n$

Graf gabungan m buah Graf $K_1 \times P_n$ dinotasikan $m(K_1 \times P_n)$, adalah graf tidak terhubung yang terdiri dari m komponen dimana setiap komponennya adalah Graf $K_1 \times P_n$. Misal Graf $m(K_1 \times P_n)$ mempunyai himpunan titik $V(m(K_1 \times P_n)) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$ dengan $V_j = \{v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj}\}$ dan himpunan garis $E(m(K_1 \times P_n)) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m$ dengan $E_j = \{e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{(n-1)j}\}$ dimana V_{ij} dan E_{ij} berturut-turut menyatakan himpunan titik dan garis dari komponen ke- j dari Graf $m(K_1 \times P_n)$ untuk setiap $j=1,2,3,\dots,m$.

Sebagai ilustrasi penotasian titik dan garis dari graf gabungan m buah Graf $K_1 \times P_n$ dapat kita lihat pada Gambar 3.13





Gambar 3.13 Penotasian graf gabungan m buah Graf $K_1 \times P_n$

Dari penotasian diatas jumlah titiknya adalah $m \times n$ titik dan jumlah garisnya $m \times (n-1)$ garis, sehingga jumlah titik lebih besar dari jumlah garisnya. Menurut Rosa (dlm Redl, T.A., 2003) graf yang mempunyai banyak titik dan tidak cukup garis tidak bisa dilabeli menurut pelabelan *graceful* sehingga dapat disimpulkan bahwa gabungan dari graf $m(K_1 \times P_n)$ bukan graf *graceful*.

3.4 Pelabelan *Graceful* pada Graf Gabungan $K_2 \times P_n$

Graf gabungan m buah Graf Tangga (L_n) dinotasikan mL_n , adalah graf tidak terhubung yang terdiri dari m komponen dimana setiap komponennya adalah Graf Tangga (L_n) . Misal Graf mL_n mempunyai himpunan titik $V(mL_n) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_m$

dengan $V_j = \{v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{nj}, v'_{1j}, v'_{2j}, \dots, v'_{nj}\}$ dan

himpunan garis $E(mL_n) = E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_m$

dengan $E_j = \{e_{1j}, e_{2j}, \dots, e_{(n-1)j}, e'_{1j}, e'_{2j}, \dots, e'_{(n-1)j}, e^*_{1j}, e^*_{2j}, \dots, e^*_{nj}\}$

dengan

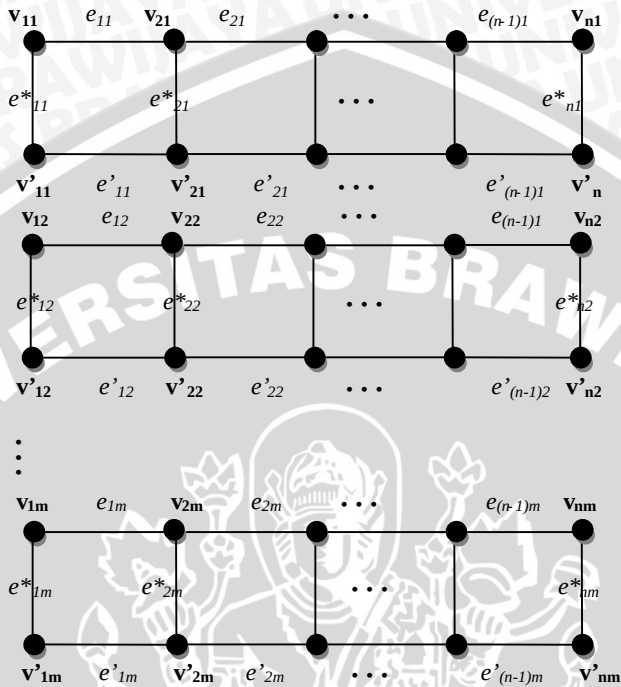
$$e_{ij} = v_{ij}v_{(i+1)j} \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$e'_{ij} = v'_{ij}v'_{(i+1)j} \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

$$e^*_{ij} = v_{ij}v'_{ij} \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

dimana V_{ij} dan E_{ij} berturut-turut menyatakan himpunan titik dan garis dari komponen ke- j dari Graf mL_n untuk setiap $j=1, 2, 3, \dots, m$.

Sebagai ilustrasi penotasian titik dan garis dari graf gabungan m buah Graf Tangga dapat kita lihat pada Gambar 3.15.



Gambar 3.14 Penotasian graf gabungan m buah Graf Tangga (mL_n)

Proposisi 3.3

Graf gabungan m buah Graf Tangga (mL_n) adalah graf graceful untuk setiap m dan n .

Bukti :

Diberikan oleh **Pelabelan Cara 1** dan **Cara 2** berikut ini.

Pelabelan Cara 1 : Beri label $\lambda(v_i)$ untuk titik-titik dari graf gabungan m buah Graf Tangga dengan :
Untuk $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

$$\lambda(v_{ij}) = \begin{cases} n(j-1) + (i+j-2) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i-3j+1) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

dan

$$\lambda(v'_{ij}) = \begin{cases} m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i-3j+1) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ n(j-1) + (i+j-2) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa **Pelabelan Cara 1** memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*). Suatu fungsi disebut *injektif* bila memenuhi

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Rightarrow v_i = v_j \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$$

Ambil sebarang $v_i, v_j \in V(K_1 \times P_n)$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$

Akan dibuktikan bahwa $v_{i1} = v_{i2}$.

1) Untuk i_1, i_2 ganjil

$$\begin{aligned} \lambda(v_{i1}) &= \lambda(v_{i2}) \\ \Leftrightarrow n(j-1) + (i_1 + j - 2) &= n(j-1) + (i_2 + j - 2) \\ \Leftrightarrow (i_1 + j - 2) &= (i_2 + j - 2) \\ \Leftrightarrow i_1 &= i_2 \\ \Leftrightarrow v_{i1} &= v_{i2} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \lambda(v'_{i1}) &= \lambda(v'_{i2}) \\ \Leftrightarrow m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_1 - 3j + 1) &= m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_2 - 3j + 1) \\ \Leftrightarrow -(2i_1 - 3j + 1) &= -(2i_2 - 3j + 1) \\ \Leftrightarrow -2i_1 &= -2i_2 \\ \Leftrightarrow i_1 &= i_2 \\ \Leftrightarrow v'_{i1} &= v'_{i2} \end{aligned}$$

2) Untuk i_1, i_2 genap

$$\begin{aligned}
& \lambda(v_{i_1}) = \lambda(v_{i_2}) \\
& \Leftrightarrow m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_1 - 3j+1) = m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_2 - 3j+1) \\
& \Leftrightarrow - (2i_1 - 3j+1) = - (2i_2 - 3j+1) \\
& \Leftrightarrow - 2i_1 = -2i_2 \\
& \Leftrightarrow i_1 = i_2 \\
& \Leftrightarrow v_{i_1} = v_{i_2}
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
& \lambda(v'_{i_1}) = \lambda(v'_{i_2}) \\
& \Leftrightarrow n(j-1) + (i_1 + j - 2) = n(j-1) + (i_2 + j - 2) \\
& \Leftrightarrow (i_1 + j - 2) = (i_2 + j - 2) \\
& \Leftrightarrow i_1 = i_2 \\
& \Leftrightarrow v'_{i_1} = v'_{i_2}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa **Pelabelan Cara 1** memenuhi fungsi satu-satu.

Pelabelan untuk garis-garisnya diberi label $\lambda(e)$ untuk setiap $e \in E(mL_n)$ dapat ditentukan sebagai berikut

$$\lambda(e_{ij}) = \lambda(v_{ij}v_{(i+1)j}) = \begin{cases} 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1) & \text{untuk } i=1,3,5,\dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j) & \text{untuk } i=2,4,6,\dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2, \end{cases}$$

Bukti : untuk i ganjil

$$\begin{aligned}
\lambda(e_{ij}) = \lambda(v_{ij}v_{(i+1)j}) &= |\lambda(v_{(i+1)j}) - \lambda(v_i)| \\
&= |m(3n-2) - 2n(j-1) - (2(i+1) - 3j+1) - n(j-1) - (i+j-2)| \\
&= |3nm - 2m - 2nj + 2n - 2i - 2 + 3j - 1 - nj + n - i - j + 2| \\
&= |3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1)| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e_{i_1,j}) \neq \lambda(e_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1)-2m-(3i_1-2j+1) \neq 3n(m-j+1)-2m-(3i_2-2j+1) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1-2j+1) \neq -(3i_2-2j+1) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

Untuk i genap:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_{ij}) &= \lambda(v_{ij} v_{(i+1)j}) = |\lambda(v_{(i+1)j}) - \lambda(v_{ij})| \\
&= |m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i-3j+1) - n(j-1) - ((i+1)+j-2)| \\
&= |3nm - 2m - 2nj + 2n - 2i + 3j - 1 - nj + n - i - j + 1| \\
&= |3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j)| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e_{i_1,j}) \neq \lambda(e_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_i) \neq \lambda(e_j) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1)-2m-(3i_1-2j) \neq 3n(m-j+1)-2m-(3i_2-2j) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1-2j) \neq -(3i_2-2j) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

$$\lambda(e'_{ij}) = \lambda(v'_{ij} v'_{(i+1)j}) = \begin{cases} 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2, \end{cases}$$

Bukti untuk i ganjil:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{ij}) &= \lambda(v'_{ij} v'_{(i+1)j}) = |\lambda(v'_{(i+1)j} - v'_{ij})| \\
&= |n(j-1) + ((i+1) + j - 2) - m(3n-2) + 2n(j-1) + (2i-3j+1)| \\
&= |nj - n + i + 1 + j - 2 - 3mn + 2m + 2nj - 2n + 2i - 3j + 1| \\
&= |-3n(m-j+1) + 2m + (3i-2j)| \\
&= |- (3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j))| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e'_{i_1,j}) \neq \lambda(e'_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{i_1}) \neq \lambda(e'_{i_2}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1-2j) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2-2j) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1-2j) \neq -(3i_2-2j) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

Untuk i genap:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{ij}) &= \lambda(v'_{ij} v'_{(i+1)j}) = |\lambda(v'_{(i+1)j} - v'_{ij})| \\
&= |n(j-1) + (i + j - 2) - m(3n-2) + 2n(j-1) + (2(i+1)-3j+1)| \\
&= |nj - n + i + j - 2 - 3mn + 2m + 2nj - 2n + 2i + 2 - 3j + 1| \\
&= |-3n(m-j+1) + 2m + (3i-2j+1)| \\
&= |- (3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1))| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e'_{i_1,j}) \neq \lambda(e'_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_i) \neq \lambda(e'_j) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1 - 2j+1) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2 - 2j+1) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1 - 2j+1) \neq -(3i_2 - 2j+1) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

dan

$$\lambda(e^*_{ij}) = \lambda(v_{ij}v'_{ij}) = 3n(m-j+1) - 2m - (3i - 2j - 1) \quad \text{untuk } i=1,2,3,\dots,n.$$

Bukti:

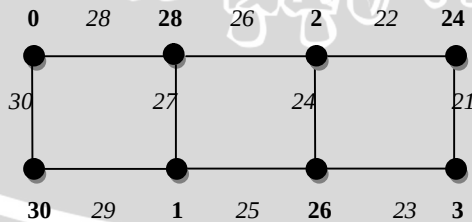
$$\begin{aligned}
\lambda(e^*_{ij}) &= \lambda(v_{ij}v'_{ij}) = |\lambda(v'_{ij}) - \lambda(v_{ij})| \\
&= |m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i-3j+1) - n(j-1) - (i+j-2)| \\
&= |3mn - 2m - 2nj + 2n - 2i + 3j - 1 - nj + n - i - j + 2| \\
&= |3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j-1)| \\
&= |3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j-1)| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j-1)
\end{aligned}$$

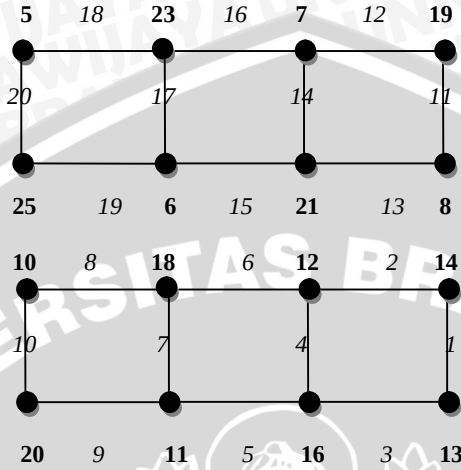
Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e^*_{i_1,j}) \neq \lambda(e^*_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e^*_{i_1}) \neq \lambda(e^*_{i_2}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1 - 2j - 1) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2 - 2j - 1) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1 - 2j - 1) \neq -(3i_2 - 2j - 1) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

Contoh 3.7:





Gambar 3.15 Pelabelan *graceful* pada Graf ${}_3L_4$ menggunakan **Pelabelan Cara 1**

Pelabelan Cara 2 : Didefinisikan label $\lambda(v_i)$ untuk titik-titik dari Graf (mL_n) dengan:

Untuk $j = 1, 2, 3, \dots$,

$$\lambda(v_{ij}) = \begin{cases} m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i-3j+1) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ n(j-1) + (i+j-2) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

dan

$$\lambda(v'_{ij}) = \begin{cases} n(j-1) + (i+j-2) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i-3j+1) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

Akan dibuktikan bahwa **Pelabelan Cara 2** memenuhi fungsi satu-satu (*injektif*). Suatu fungsi disebut *injektif* bila memenuhi

$$\lambda(v_i) = \lambda(v_j) \Rightarrow v_i = v_j \quad \forall v_i, v_j \in V(G)$$

Ambil sebarang $v_i, v_j \in V(K_1 \times P_n)$ dengan $\lambda(v_i) = \lambda(v_j)$

Akan dibuktikan bahwa $v_{i1} = v_{i2}$.

1) Untuk i_1, i_2 ganjil

$$\lambda(v_{i1}) = \lambda(v_{i2})$$

$$\Leftrightarrow m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_1 - 3j+1) = m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_2 - 3j+1)$$

$$\Leftrightarrow -(2i_1 - 3j+1) = -(2i_2 - 3j+1)$$

$$\Leftrightarrow -2i_1 = -2i_2$$

$$\Leftrightarrow i_1 = i_2$$

$$\Leftrightarrow v_{i1} = v_{i2}$$

dan

$$\lambda(v'_{i1}) = \lambda(v'_{i2})$$

$$\Leftrightarrow n(j-1) + (i_1 + j - 2) = n(j-1) + (i_2 + j - 2)$$

$$\Leftrightarrow (i_1 + j - 2) = (i_2 + j - 2)$$

$$\Leftrightarrow i_1 = i_2$$

$$\Leftrightarrow v'_{i1} = v'_{i2}$$

2) Untuk i_1, i_2 genap

$$\lambda(v_{i1}) = \lambda(v_{i2})$$

$$\Leftrightarrow n(j-1) + (i_1 + j - 2) = n(j-1) + (i_2 + j - 2)$$

$$\Leftrightarrow (i_1 + j - 2) = (i_2 + j - 2)$$

$$\Leftrightarrow i_1 = i_2$$

$$\Leftrightarrow v_{i1} = v_{i2}$$

dan

$$\begin{aligned}
& \lambda(v'_{i_1}) = \lambda(v'_{i_2}) \\
\Leftrightarrow & m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_1 - 3j + 1) = m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i_2 - 3j + 1) \\
\Leftrightarrow & - (2i_1 - 3j + 1) = - (2i_2 - 3j + 1) \\
\Leftrightarrow & - 2i_1 = - 2i_2 \\
\Leftrightarrow & i_1 = i_2 \\
\Leftrightarrow & v'_{i_1} = v'_{i_2}
\end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa **Pelabelan Cara 2** memenuhi fungsi satu-satu.

Aturan pelabelan untuk garis-garisnya diberi label $\lambda(e)$ untuk setiap $e \in E(mL_n)$ adalah sebagai berikut :

$$\lambda(e_{ij}) = \lambda(v_{ij} v_{(i+1)j}) = \begin{cases} 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 2, \end{cases}$$

Bukti untuk i ganjil:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_{ij}) &= \lambda(v_{ij} v_{(i+1)j}) = |\lambda(v_{(i+1)j}) - \lambda(v_{ij})| \\
&= |n(j-1) + ((i+1) + j - 2) - m(3n-2) + 2n(j-1) + (2i-3j+1)| \\
&= |nj - n + i + 1 + j - 2 - 3mn + 2m + 2nj - 2n + 2i - 3j + 1| \\
&= |-3n(m-j+1) + 2m + (2i-3j)| \\
&= |-(3n(m-j+1) - 2m - (2i-3j))| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (2i-3j)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e_{i_1,j}) \neq \lambda(e_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e_{i_1}) \neq \lambda(e_{i_2}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1 - 2j) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2 - 2j) \\
&\Leftrightarrow - (3i_1 - 2j) \neq - (3i_2 - 2j) \\
&\Leftrightarrow - 3i_1 \neq - 3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

Untuk i genap:

$$\begin{aligned}
 \lambda(e_{ij}) &= \lambda(v_{ij} v_{(i+1)j}) = |\lambda(v_{(i+1)j}) - \lambda(v_{ij})| \\
 &= |n(j-1) + (i+j-2) - m(3n-2) + 2n(j-1) + (2(i+1) - 3j+1)| \\
 &= |nj - n + i + j - 2 - 3mn + 2m + 2nj - 2n + 2i + 2 - 3j + 1| \\
 &= |-3n(m-j+1) + 2m + (2i-3j+1)| \\
 &= |(3n(m-j+1) - 2m - (2i-3j+1))| \\
 &= 3n(m-j+1) - 2m - (2i-3j+1)
 \end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e_{i_1,j}) \neq \lambda(e_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
 \lambda(e_{i_1}) \neq \lambda(e_{i_2}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1 - 2j) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2 - 2j) \\
 &\Leftrightarrow -(3i_1 - 2j) \neq -(3i_2 - 2j) \\
 &\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
 &\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
 \end{aligned}$$

$$\lambda(e'_{ij}) = \lambda(v_{ij} v'_{(i+1)j}) = \begin{cases} 3n(m-j+1) - 2m - (3i - 2j + 1) & \text{untuk } i = 1, 3, 5, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1, \\ 3n(m-j+1) - 2m - (3i - 2j) & \text{untuk } i = 2, 4, 6, \dots, 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \end{cases}$$

Bukti untuk i ganjil:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{ij}) &= \lambda(v'_{ij} v'_{(i+1)j}) = |\lambda(v'_{(i+1)j} - \lambda(v'_i)| \\
&= |m(3n-2) - 2n(j-1) - (2(i+1) - 3j+1) - n(j-1) - (i+j-2)| \\
&= |3nm - 2m - 2nj + 2n - 2i - 2 + 3j - 1 - nj + n - i - j + 2| \\
&= |3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1)| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j+1)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e'_{i_1,j}) \neq \lambda(e'_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{i_1}) \neq \lambda(e'_{i_2}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1 - 2j+1) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2 - 2j+1) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1 - 2j+1) \neq -(3i_2 - 2j+1) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

Untuk i genap:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{ij}) &= \lambda(v'_{ij} v'_{(i+1)j}) = |\lambda(v'_{(i+1)j} - \lambda(v'_i)| \\
&= |m(3n-2) - 2n(j-1) - (2i - 3j+1) - n(j-1) - ((i+1) + j - 2)| \\
&= |3nm - 2m - 2nj + 2n - 2i + 3j - 1 - nj + n - i - j + 1| \\
&= |3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j)| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e'_{i_1,j}) \neq \lambda(e'_{i_2,j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e'_{i_1}) \neq \lambda(e'_{i_2}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1 - 2j) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2 - 2j) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1 - 2j) \neq -(3i_2 - 2j) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

dan

$$\lambda(e^*_{ij}) = \lambda(v_{ij} v'_{ij}) = 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j-1) \quad \text{untuk } i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Bukti:

$$\begin{aligned}
\lambda(e^*_{ij}) &= \lambda(v_{ij}v'_{ij}) = |\lambda(v'_{ij}) - \lambda(v_{ij})| \\
&= |n(j-1) + (i+j-2) - m(3n-2) + 2n(j-1) + (2i-3j+1)| \\
&= |nj - n + i + j - 2 - 3mn + 2m + 2nj - 2n + 2i - 3j + 1| \\
&= |-3n(m-j+1) + 2m + (3i-2j-1)| \\
&= |(3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j-1))| \\
&= 3n(m-j+1) - 2m - (3i-2j-1)
\end{aligned}$$

Ambil sebarang i_1, i_2 dengan $\lambda(e^*_{i_1j}) \neq \lambda(e^*_{i_2j})$

Akan ditunjukkan $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned}
\lambda(e^*_{i_1j}) \neq \lambda(e^*_{i_2j}) &\Leftrightarrow 3n(m-j+1) - 2m - (3i_1-2j-1) \neq 3n(m-j+1) - 2m - (3i_2-2j-1) \\
&\Leftrightarrow -(3i_1-2j-1) \neq -(3i_2-2j-1) \\
&\Leftrightarrow -3i_1 \neq -3i_2 \\
&\Leftrightarrow i_1 \neq i_2
\end{aligned}$$

Karena dari **Pelabelan Cara 1** dan **Cara 2** diperoleh bahwa pelabelan titik-titiknya memenuhi fungsi satu-satu dan pelabelan garis-garisnya berbeda semua untuk setiap $e \in E(mL_n)$ maka pelabelan λ diatas adalah pelabelan *graceful*.

BAB IV PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Graf hasil pergandaan $K_1 \times P_n$, dan $K_2 \times P_n$ adalah graf *graceful*.
2. Graf hasil gabungan pergandaan dari $m(K_1 \times P_n)$ bukan termasuk graf *graceful*, sedangkan Graf $m(K_2 \times P_n)$ adalah graf *graceful*.

4.2 Saran

Skripsi ini hanya membahas pelabelan graf dengan metode *graceful* pada pergandaan dan gabungan pergandaan, dari Graf K_r dan P_n untuk semua n dan $r=1, 2$. Untuk pembahasan selanjutnya, diharapkan dapat dikaji untuk Graf K_r dan P_n untuk semua n dan $r=3, 4$. Selain itu, juga diharapkan untuk mengkaji cara melabeli graf *graceful* dengan menggunakan algoritma atau program.

DAFTAR PUSTAKA

- Chartrand, G., and R.O. Oellermann, 1996, *Applied and Algorithmic Graph Theory*, Mc Graw Hill Inc, New York.
- Clark, J., and D.A. Holton, 1991, *A First Look at graph Theory*, World Scientific Publishing Company, Singapore.
- Dierker, P.F., and W.L. Voxman, 1986, *Discrete Mathematics*, Hacourt Brace Jovanovich, New York.
- Drake, and T.A. Redl, *On The Enumeration Of A Class Of Non-Graceful Graphs*, University Of Houston-Downtown Houston, Texas.
- Durbin, J.R., 1992, *Modern Algebra*, Third Edition, John Wiley and Sons, Inc., Canada.
- Fletcher, P., H. Joyle, and C.W. Patty, 1990, *Foundations of Discrete Mathematics*, Pws-Kent Publishing Company Buston.
- Harary, F., 1994, *Graph Theory*, Addison-weley Publishing Company, Inc.
- Johnsonbaugh, R., 1984, *Discrete Mathematics*, MacMillan Publishing Company, New York.
- Gallian, J.A., 2002, *A Dynamic Survey of Graph Labeling*, Department of Mathematics and Statistics University of Minnesota Duluth, Duluth, Minnesota 55812.
- Lipschutz, S., and M.L. Lipson, 2000, *Solved Problem Discrete Mathematics*. McGraw.Hill, inc.
- Lipschutz, S., and J.J. Schiller, , 1995, *Finite Mathematics*, Second Edition, Mc Graw Hill Inc, New York.

Marsudi, 2006, *Pengantar Teori Graf*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya

Munro, J.E., 1992, *Discrete Mathematics for Computing*, Chapman and Hall, Japan.

Redl, T.A., 2003, *Graceful Graph and Graceful Labeling*, Departement of Computational and Applied Mathematics, Rice University, Houston, Texas.

Rosen, K.H., 2005, *Discrete Mathematics and Its Application*, Fifth Edition, Mc Graw Hill Inc, New York.

Siang, J.J., 2002, *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer*. Andi Yogyakarta.

Whitelaw, T.A., 1995, *Introduction to Abstract Algebra*, Third Edition, Department of Mathematics University of Glasgow.

