

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN  
SATELLITE PROGRESSIVE DECAY  
UNTUK SATELIT ORBIT RENDAH**

**SKRIPSI**

oleh :  
**ALYON PUGUH SAPUTRO**  
**0410940006-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2008**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN  
SATELLITE PROGRESSIVE DECAY  
UNTUK SATELIT ORBIT RENDAH**

**SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :  
**ALYON PUGUH SAPUTRO**  
**0410940006-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2008**

**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN  
SATELLITE PROGRESSIVE DECAY  
UNTUK SATELIT ORBIT RENDAH**

Oleh :

**ALYON PUGUH SAPUTRO  
0410940006-94**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
pada tanggal 28 Januari 2008  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang matematika**

**Pembimbing I**

**Pembimbing II**

**Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si  
NIP. 132 048 784**

**Syaiful Anam, S.Si, MT  
NIP. 132 300 237**

**Mengetahui,  
Ketua Jurusan Matematika  
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc  
NIP. 132 126 049**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : ALYON PUGUH SAPUTRO  
NIM : 0410940006  
Jurusan : MATEMATIKA  
Penulis Skripsi berjudul : SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN  
*SATELLITE PROGRESSIVE DECAY*  
UNTUK SATELIT ORBIT RENDAH

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama - nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.  
Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 30 Januari 2008

Yang menyatakan,

(Alyon Puguh Saputro)

NIM. 0410940006

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN**

# SATELLITE PROGRESSIVE DECAY UNTUK SATELIT ORBIT RENDAH

## ABSTRAK

Persamaan *Satellite Progressive Decay* merupakan suatu model matematis yang menggambarkan penurunan ketinggian sebuah satelit yang beredar mengelilingi planet bumi disebabkan oleh interaksinya dengan molekul-molekul udara di atmosfer. Pada Skripsi ini dibahas penyelesaian persamaan *Satellite Progressive Decay* untuk Satelit Orbit Rendah secara numerik. Solusi numerik ini diperoleh dengan mempergunakan metode Runge-Kutta orde empat yang kemudian dilanjutkan dan diperbaiki oleh perpaduan antara metode Newton untuk sistem persamaan nonlinier dan formulasi beda hingga sebagai pendekatan turunan fungsi. Di samping itu dilakukan pula verifikasi antara solusi numerik dan solusi analitik. Berdasarkan verifikasi tersebut dapat ditunjukkan bahwa solusi numerik memiliki akurasi yang cukup baik sehingga dapat dipergunakan untuk merepresentasikan peristiwa yang sesungguhnya di dunia nyata.

**Kata kunci :** persamaan *Satellite Progressive Decay*, metode beda hingga, metode Runge-Kutta orde empat, metode Newton untuk sistem persamaan nonlinier

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



# NUMERICAL SOLUTION OF SATELLITE PROGRESSIVE DECAY EQUATIONS FOR LOW ORBIT SATELLITES

## ABSTRACT

*Satellite Progressive Decay* equations are mathematical model used to illustrate orbital decay experienced by an earth-orbiting-satellite due to its interaction with air molecules scattered in the atmosphere. This final project discusses numerical solution of *Satellite Progressive Decay* equations for Low Orbit Satellites. The solution is obtained by using Fourth-order Runge-Kutta method which is continued and corrected by the combination of Newton method for nonlinear system of equations and finite difference formulations as derivative approximations. A verification between numerical solution and an analytical one is also performed. It is clearly shown that the numerical solution has a good accuracy so that it can be used to represent the actual event.

**Keywords :** *Satellite Progressive Decay* equations, finite element method, fourth order Runge-Kutta method, Newton method for nonlinear system of equations

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT karena berkat segala rahmat serta hidayah yang telah dilimpahkanNya penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi yang berjudul **”Solusi Numerik Persamaan *Satellite Progressive Decay* untuk Satelit Orbit Rendah”**. Skripsi ini disusun dan diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar sarjana pada Program Studi Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Brawijaya.

Penulis menyadari bahwa penulisan Skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bantuan baik yang bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak, untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Dr. Wuryansari, M. K., M.Si. selaku pembimbing I sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan, waktu dan segala sesuatu yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Syaiful Anam, S.Si, MT selaku pembimbing II atas bimbingan, saran, kesabaran, perhatian, nasihat dan dukungan yang selalu diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi ini.
3. Dr. Marjono, M.Phil, Drs. Marsudi, MS, dan Drs. M. Aruman Imron, M.Si selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.
4. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika atas segala bantuan serta motivasi yang telah diberikan kepada penulis.
5. Segenap bapak dan ibu dosen yang telah mendidik dan mengamalkan ilmunya kepada penulis.
6. Drs. Hery Subagyo, M.Kes. selaku dosen penasihat akademik atas nasehat dan perhatiannya selama melaksanakan studi.
7. Orang tua, guru, beserta saudara yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasehat, perhatian, motivasi, dan kasih sayang serta dukungan hingga terselesainya Skripsi ini.
8. Feronika Arfia, M. Haris, M. Kholis, Akbar Ramadhani, serta teman - teman khususnya dari program studi Matematika angkatan 2002, 2003 dan 2004 atas dukungan dan semangat yang senantiasa mereka berikan.

9. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu, yang telah membantu penulis dalam penulisan Skripsi ini.

Sebagai manusia yang memiliki keterbatasan dan dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa dalam penulisan Skripsi ini masih terdapat banyak kekurangan sehingga belum dapat dikatakan sempurna. Untuk itu penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan Skripsi ini.

Akhir kata, penulis berharap semoga Skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 27 Januari 2008

Penulis



# DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL</b> .....	i
<b>HALAMAN PENGESAHAN</b> .....	iii
<b>HALAMAN PERNYATAAN</b> .....	v
<b>ABSTRAK</b> .....	vii
<b>ABSTRACT</b> .....	ix
<b>KATA PENGANTAR</b> .....	xi
<b>DAFTAR ISI</b> .....	xiii
<b>DAFTAR GAMBAR</b> .....	xy
<b>DAFTAR TABEL</b> .....	xvii
<b>BAB I PENDAHULUAN</b> .....	1
1.1. Latar Belakang .....	2
1.2. Rumusan Masalah .....	2
1.3. Batasan Masalah.....	2
1.4. Tujuan.....	2
<b>BAB II DASAR TEORI</b> .....	3
2.1. Persamaan Diferensial.....	3
2.2. Deret Taylor .....	4
2.3 Akurasi dalam Perhitungan Numerik .....	5
2.4. Metode Beda Hingga.....	5
2.5. Metode Runge-Kutta Orde Empat untuk Sistem iiiiiiiiiiiiiiiiii Persamaan Diferensial .....	6
2.6. Metode Newton untuk Sistem Persamaan Nonlinier.	7
2.7. Hukum II Newton.....	9
2.8 Percepatan Gravitasi Bumi .....	10
2.9. Gaya Hambat Udara .....	11
2.10. Kerapatan Atmosfer.....	12
2.11. Model Analitik <i>Satellite Progressive Decay</i> .....	13
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	15
3.1. Konstruksi Persamaan <i>Satellite Progressive Decay</i> ..	15
3.1.1. Penguraian Vektor Kecepatan dan Gaya Hambat Udara .....	15

3.1.2.	Analisis terhadap Resultan Gaya yang Bekerja pada Sumbu Vertikal .....	17
3.1.3.	Analisis terhadap Resultan Gaya yang Bekerja pada Sumbu Horisontal .....	18
3.2.	Skema Numerik Persamaan <i>Satellite Progressive Decay</i> .....	18
3.2.1.	Diskritisasi Temporal .....	18
3.2.2.	Metode Beda Hingga untuk Pendekatan Nilai Turunan Fungsi .....	19
3.2.2.1.	Metode Beda Hingga untuk Pendekatan Nilai Turunan Pertama .....	19
3.2.2.2.	Metode Beda Hingga untuk Pendekatan Nilai Turunan Kedua .....	22
3.2.3.	Perhitungan Nilai Fungsi pada $t_1, t_2, t_3, t_4,$ dan $t_5$ .....	24
3.2.3.1.	Metode Runge-Kutta sebagai Aproksimasi Awal.....	24
3.2.3.2.	Metode Newton untuk Memperbaiki Aproksimasi Sebelumnya.....	25
3.2.4.	Perhitungan Nilai Fungsi pada $t_r$ dengan $r > 5$ ..	28
3.3.	Algoritma dan <i>Flowchart</i> Skema Numerik Persamaan <i>Satellite Progressive Decay</i> .....	30
3.4.	Analisis dan Interpretasi Solusi Numerik Persamaan <i>Satellite Progressive Decay</i> .....	34
3.4.1.	Pengaruh Massa Satelit terhadap Gerakan Satelit dan Waktu Terjadinya <i>Reentry</i> .....	34
3.4.2.	Pengaruh Area Frontal dan Koefisien Drag terhadap Gerakan Satelit dan Waktu Terjadinya <i>Reentry</i> .....	36
3.4.3.	Pengaruh Aktivitas Matahari terhadap Gerakan Satelit dan Waktu Terjadinya <i>Reentry</i> .....	38
3.5.	Verifikasi Skema Numerik .....	40
<b>BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....		45
4.1.	Kesimpulan.....	45
4.2.	Saran .....	45
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....		47

## DAFTAR GAMBAR

		Halaman
Gambar 2.1	Ilustrasi proses partisi interval $[a, b]$ menjadi sebanyak $N$ subinterval dengan lebar masing-masing $\Delta t$ .....	8
Gambar 2.2	Grafik yang menunjukkan nilai kerapatan atmosfer pada ketinggian 180 hingga 500 km dari permukaan air laut, diamati pada kondisi <i>solar minimum</i> ( $R_f = 65$ dan $A_p = 0$ ), <i>solar mean</i> ( $R_f = 180$ dan $A_p = 200$ ), dan <i>solar maximum</i> ( $R_f = 300$ dan $A_p = 400$ ) .....	12
Gambar 3.1	Ilustrasi penguraian vektor kecepatan ( $v$ ) dan gaya hambat udara ( $F_d$ ) menjadi komponen horisontal dan vertikal .....	16
Gambar 3.2	<i>Flowchart</i> skema numerik persamaan <i>Satellite Progressive Decay</i> .....	33
Gambar 3.3	Plot gerakan satelit dengan massa 100, 150, dan 200 kg pada kondisi $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300 \text{ km}$ , $R_f = 70$ dan $A_p = 0$ .....	34
Gambar 3.4	Plot ketinggian satelit dengan massa 100, 150, dan 200 kg pada kondisi $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300 \text{ km}$ , $R_f = 70$ dan $A_p = 0$ .....	35
Gambar 3.5	Plot gerakan satelit dengan area efektif 2.2, 2.5, dan $2.8 \text{ m}^2$ pada kondisi $m = 100 \text{ kg}$ , $y_0 = 300 \text{ km}$ , $R_f = 70$ dan $A_p = 0$ .....	36
Gambar 3.6	Plot ketinggian satelit dengan area efektif 2.2, 2.5, dan $2.8 \text{ m}^2$ pada kondisi $m = 100 \text{ kg}$ , $y_0 = 300 \text{ km}$ , $R_f = 70$ dan $A_p = 0$ .....	37
Gambar 3.7	Plot gerakan satelit dengan $m = 100 \text{ kg}$ , $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300 \text{ km}$ pada kondisi <i>solar minimum</i> ( $R_f = 65$ dan $A_p = 0$ ), <i>solar mean</i> ( $R_f = 180$ dan $A_p = 200$ ), dan <i>solar maximum</i> ( $R_f = 300$ dan $A_p = 400$ ) .....	38

Gambar 3.8	Plot ketinggian satelit dengan $m = 100$ kg, $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300$ km pada kondisi <i>solar minimum</i> ( $R_f = 65$ dan $A_p = 0$ ), <i>solar mean</i> ( $R_f = 180$ dan $A_p = 200$ ), dan <i>solar maximum</i> ( $R_f = 300$ dan $A_p = 400$ ).....	39
Gambar 3.9	Verifikasi solusi numerik terhadap solusi analitik untuk plot ketinggian satelit dengan $m = 100$ kg, $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300$ km, $R_f = 70$ , $A_p = 0$ , dan $\Delta t = 1$ .....	40
Gambar 3.10	Verifikasi solusi numerik terhadap solusi analitik untuk plot ketinggian satelit dengan $m = 100$ kg, $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300$ km, $R_f = 70$ , $A_p = 0$ , dan $\Delta t = 0.75$ .....	41
Gambar 3.11	Verifikasi solusi numerik terhadap solusi analitik untuk plot ketinggian satelit dengan $m = 100$ kg, $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300$ km, $R_f = 70$ , $A_p = 0$ , dan $\Delta t = 0.5$ .....	41
Gambar 3.12	Verifikasi solusi numerik terhadap solusi analitik untuk plot ketinggian satelit dengan $m = 100$ kg, $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300$ km, $R_f = 70$ , $A_p = 0$ , dan $\Delta t = 0.25$ .....	42
Gambar 3.13	Verifikasi solusi numerik terhadap solusi analitik untuk plot gerakan satelit dengan $m = 100$ kg, $A = 1 \text{ m}^2$ , $C_d = 2.2$ , $y_0 = 300$ km, $R_f = 70$ , $A_p = 0$ , dan $\Delta t = 0.2$ .....	43

## DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 3.1	Pengaruh nilai ukuran langkah terhadap akurasi prediksi masa aktif satelit .....	43
-----------	--	----

UNIVERSITAS BRAWIJAYA





**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN  
SATELLITE PROGRESSIVE DECAY  
UNTUK  
SATELIT ORBIT RENDAH**



1

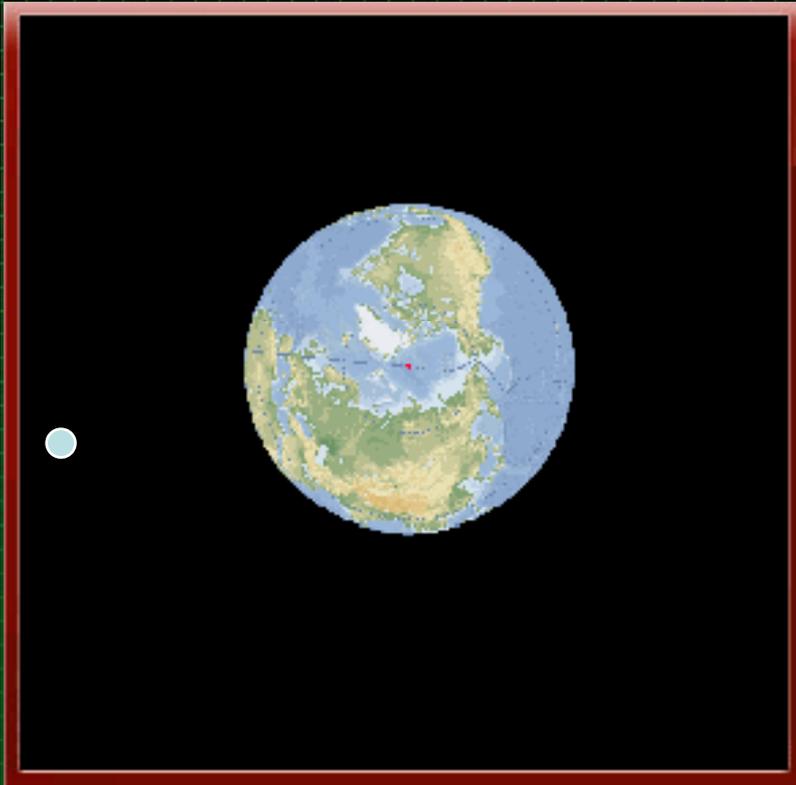
## ABSTRAK

Persamaan *Satellite Progressive Decay* merupakan suatu model matematis yang menggambarkan penurunan ketinggian sebuah satelit yang beredar mengelilingi planet bumi disebabkan oleh interaksinya dengan molekul - molekul udara di atmosfer. Pada Skripsi ini dibahas penyelesaian persamaan *Satellite Progressive Decay* untuk Satelit Orbit Rendah secara numerik. Solusi numerik ini diperoleh dengan mempergunakan metode Runge-Kutta orde empat yang kemudian dilanjutkan dan diperbaiki oleh perpaduan antara metode Newton untuk sistem persamaan nonlinier dan formulasi beda hingga sebagai pendekatan turunan fungsi. Di samping itu dilakukan pula verifikasi antara solusi numerik dan solusi analitik. Berdasarkan verifikasi tersebut dapat ditunjukkan bahwa solusi numerik memiliki akurasi yang cukup baik sehingga dapat dipergunakan untuk merepresentasikan peristiwa yang sesungguhnya di dunia nyata.



2

## LATAR BELAKANG



Satelit yang beredar mengelilingi bumi akan mengalami gangguan pada gerakannya akibat gesekan dan benturan dengan partikel-partikel udara yang tersebar di atmosfer bumi sehingga pada akhirnya terjadi penurunan ketinggian satelit tersebut dari waktu ke waktu yang disebut *Satellite Progressive Decay (SPD)*.

1 ABSTRACT

2 **PRELUDE**

3 MATH THEORIES

4 LAWS OF PHYSICS

5 TEST MODEL

6 FORCE ANALYSIS

7 NUM. METHODS

8 FLOW-CHART

9 RESULT

\* VERIFICATION

0 CONCLUSION

\* REFERENCES

3

## LATAR BELAKANG



Perhitungan *reentry* satelit sangat penting agar material satelit tidak menumbuk suatu wilayah berpenduduk di bumi. Dengan hanya mengandalkan perhitungan kasar, prediksi *reentry* masih memuat persentase ketidakpastian yang cukup tinggi.

An appreciation of the uncertainty is shown by a NORAD prediction in April 1979 for the expected re-entry of the SKYLAB space station between 11 June and 1 July of that year. The actual re-entry occurred on July 11, outside the stated interval, a prediction error from mid-interval of around 15%. In the light of such errors in relatively short term predictions, there is a gross mismatch between the detail employed in the atmospheric models of large sophisticated prediction programs and the accuracy of the forecast space environmental parameters employed as input. In the following section, a very simple atmospheric model is described that appears more closely matched to the accuracy limitations imposed upon a forecast of satellite lifetime by the uncertainties in the other variables.



## 4

## RUMUSAN MASALAH

Rumusan masalah / tujuan Skripsi :

1. Menurunkan model matematis yang mendeskripsikan peristiwa *Satellite Progressive Decay*.
2. Menyelesaikan model matematis yang telah diperoleh secara numerik.
3. Membuat perbandingan antara hasil yang diperoleh dari model matematis dan model uji yang tersedia.
4. Menyusun perkiraan waktu terjadinya *reentry* satelit berdasarkan hasil tersebut hasil yang diperoleh sehingga perkiraan masa aktif satelit pada orbit yang dilaluinya dapat diketahui.



5

## BATASAN MASALAH

Batasan masalah / asumsi yang dipergunakan :

1. Satelit yang akan dibahas gerakannya adalah Satelit Orbit Rendah yang beredar pada orbit sirkular dengan ketinggian maksimum 300 kilometer di atas permukaan air laut.
2. Fluktuasi kepadatan atmosfer akibat pengaruh radiasi matahari tidak terlampaui besar selama waktu edar satelit.
3. Satelit tidak dilengkapi dengan mesin pendorong internal yang memungkinkannya untuk mengubah arah gerak dan kecepatan.
4. Luas bagian satelit yang menghadap arah gerakan selalu sama.
5. Kondisi fisik satelit (komposisi, massa, maupun bentuk) relatif tidak mengalami perubahan selama masa aktifnya.



Brook Taylor  
(1685 - 1731)

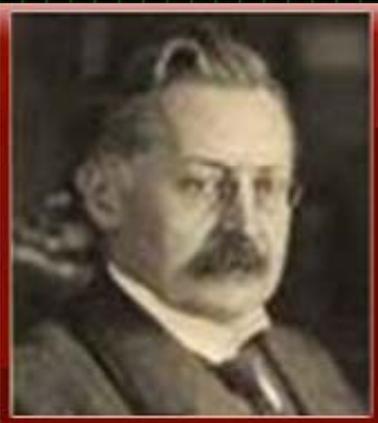
Deret Taylor :

$$f(t_r + \Delta t) = f(t_r) + f'(t_r)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f''(t_r) + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} f^{(n)}(t_r) + R_n$$

$$R_n = \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad t_i \leq \xi \leq t_{i+1}$$

Bentuk umum formulasi beda hingga untuk mengaproksimasi nilai turunan fungsi :

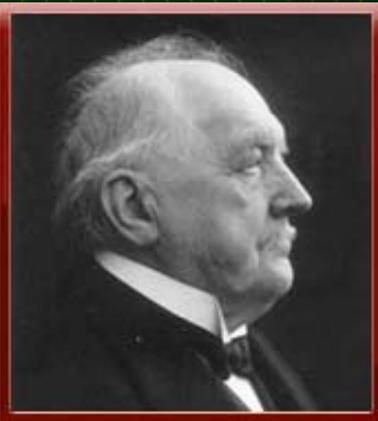
$$\frac{d^n f}{dt^n} = \frac{1}{(\Delta t)^n} \sum_{i=p}^q a_i f_i + O(\Delta t^k)$$



Metode Runge-Kutta orde empat dapat dipergunakan untuk menyelesaikan sistem PD

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_m), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Rumus yang digunakan adalah :



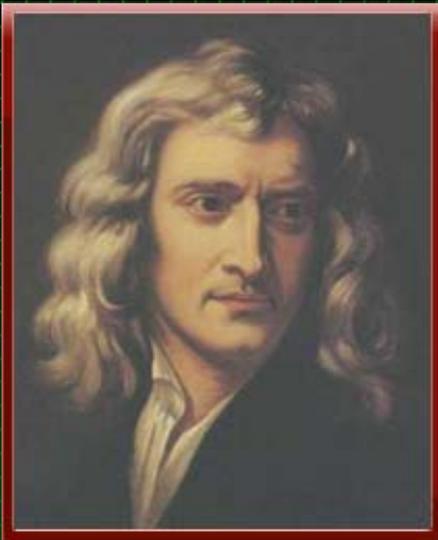
$$y_j^{r+1} = y_j^r + \frac{1}{6} (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}),$$

$$k_{1,j} = (\Delta t) f_j(t_r, y_1^r, y_2^r, \dots, y_m^r)$$

$$k_{2,j} = (\Delta t) f_j(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, y_1^r + \frac{1}{2} k_{1,1}, y_2^r + \frac{1}{2} k_{1,2}, \dots, y_m^r + \frac{1}{2} k_{1,m})$$

$$k_{3,j} = (\Delta t) f_j(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, y_1^r + \frac{1}{2} k_{2,1}, y_2^r + \frac{1}{2} k_{2,2}, \dots, y_m^r + \frac{1}{2} k_{2,m})$$

$$k_{4,j} = (\Delta t) f_j(t_r + \Delta t, y_1^r + k_{3,1}, y_2^r + k_{3,2}, \dots, y_m^r + k_{3,m}).$$



Isaac Newton  
(1642 - 1727)

Untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear, metode numerik yang dapat digunakan adalah Metode Newton.

Inisialisasi  
nilai awal



$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) &= 0 \\ \dots \\ f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= 0 \end{aligned}$$

Iterasi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_1}{\partial x_j} &= f_1^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_2}{\partial x_j} &= f_2^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \dots \\ \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_k}{\partial x_j} &= f_k^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \end{aligned}$$

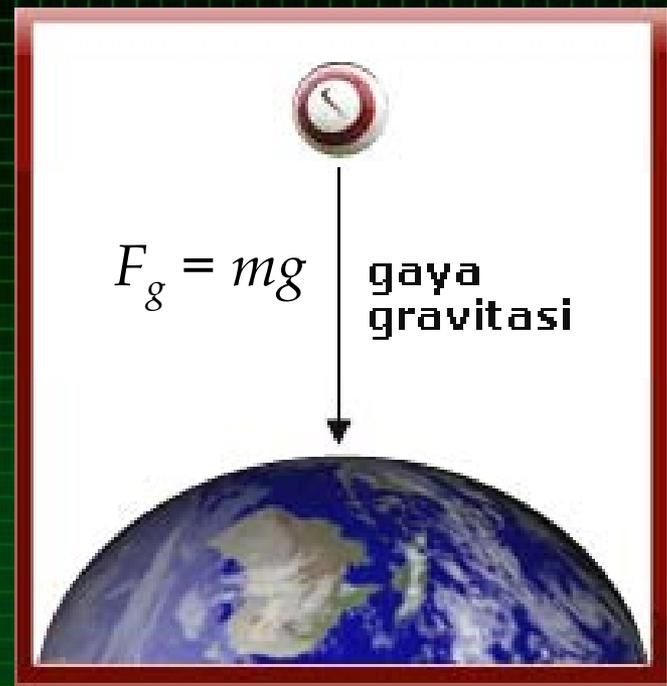
1 ABSTRACT	2 PRELUDE	3 MATH THEORIES	4 LAWS OF PHYSICS	5 TEST MODEL	6 FORCE ANALYSIS
7 NUM. METHODS	8 FLOW-CHART	9 RESULT	* VERIFICATION	0 CONCLUSION	* REFERENCES

Hukum II Newton :

Setiap gaya yang bekerja pada benda menimbulkan percepatan pada benda yang arahnya mengikuti arah gaya itu. Apabila resultan gaya yang mengenai benda dinotasikan  $\Sigma F$ , massa benda dinotasikan  $m$ , dan percepatan akibat gaya tersebut dinotasikan  $a$ , maka

$$\Sigma F = ma$$

$$g = G \frac{M}{(r_e + h)^2}$$



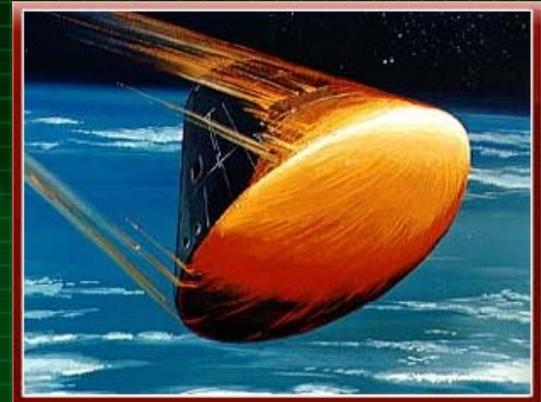
1 ABSTRACT	2 PRELUDE	3 MATH THEORIES	4 LAWS OF PHYSICS	5 TEST MODEL	6 FORCE ANALYSIS
7 NUM. METHODS	8 FLOW-CHART	9 RESULT	* VERIFICATION	0 CONCLUSION	* REFERENCES

10

## RESISTANSI MEDIUM

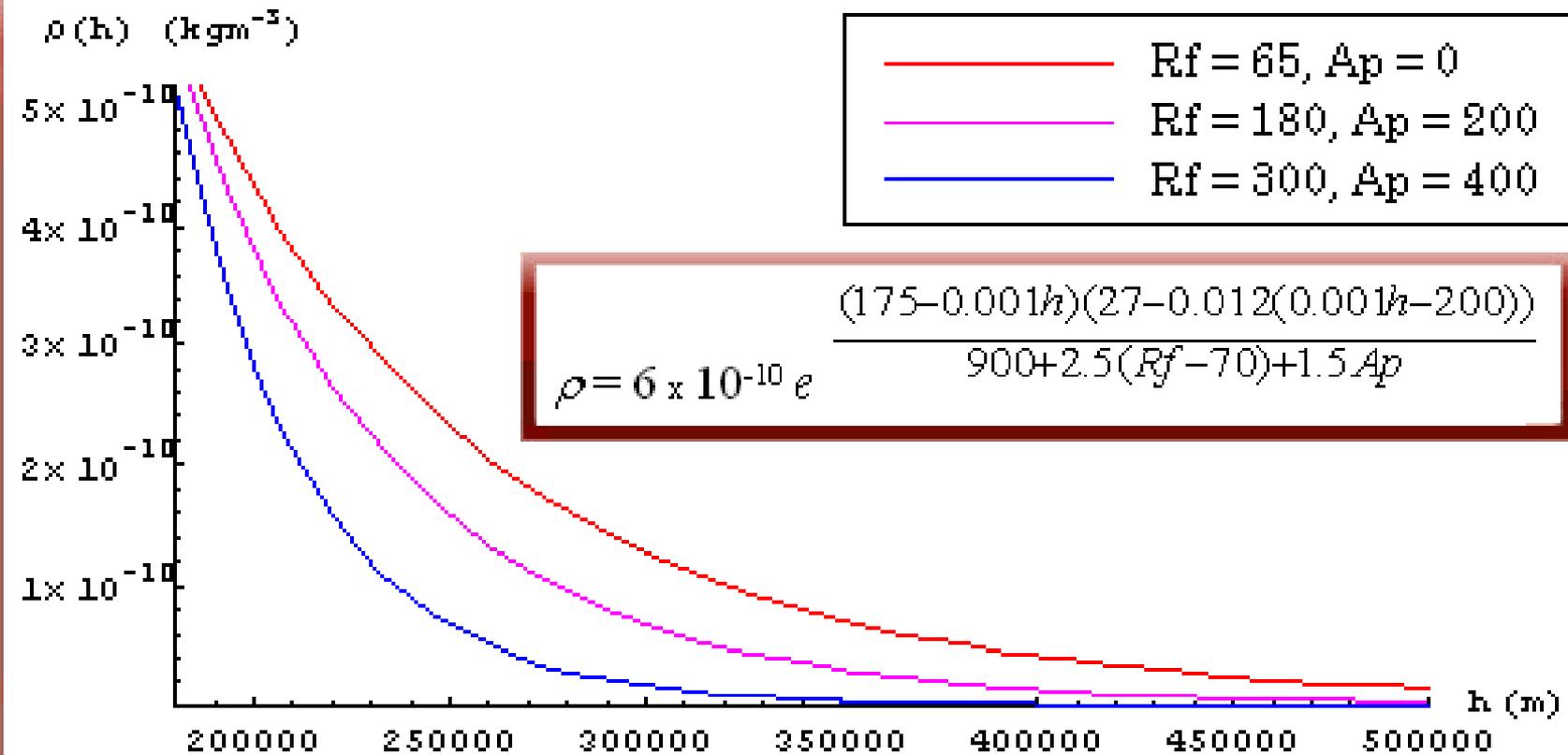
Suatu medium akan memunculkan gaya hambat ketika ada objek yang melintas di dalamnya. Besarnya gaya hambat yang dialami oleh benda bergerak dengan area frontal  $A$ , koefisien drag  $C_d$ , dan kecepatan  $v$  dalam suatu medium yang mempunyai kerapatan  $\rho$  adalah :

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2$$



11

## KERAPATAN ATMOSFER BUMI





Model uji yang disusun berdasarkan perubahan energi mekanik satelit dapat pula digunakan untuk memprediksi waktu terjadinya *reentry*, oleh sebab itu model tersebut dapat dijadikan sebagai pembanding dalam verifikasi model numerik.

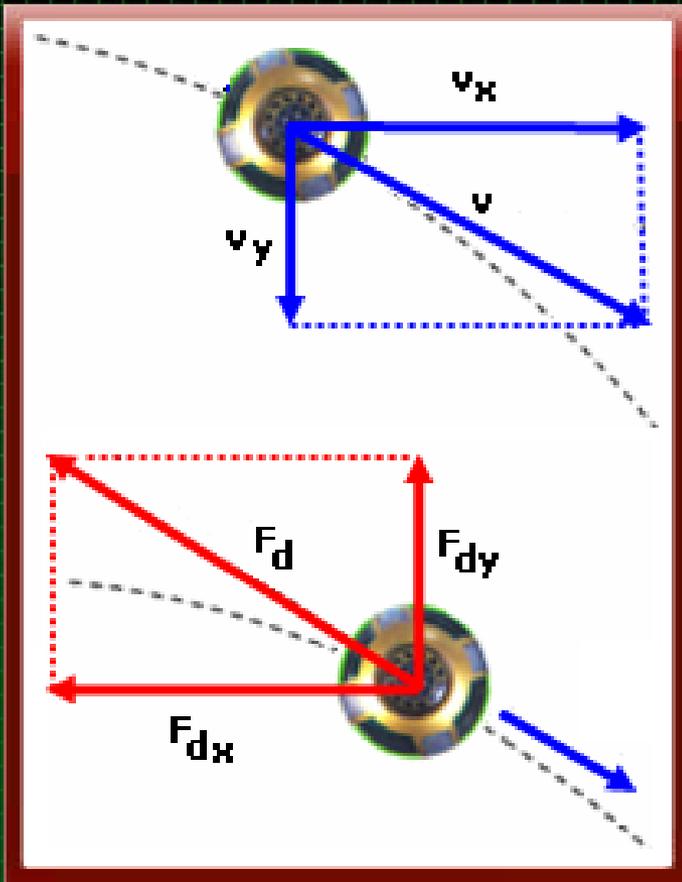
ENERGY THEOREM :

During an orbit, the energy gain is equal to the work (product of force by travel distance) from all working forces acting on satellite

- Weight is a radial force, it does not produce work
- Drag work = energy loss  $\Delta E = -1/2 \cdot \rho \cdot A \cdot C_d \cdot V \cdot V \cdot 2 \cdot \pi \cdot \Delta a$
- Energy loss linked to radius loss :  $\square E = \frac{m \cdot V^2}{2 \cdot a} \square a$
- Finally :  $\Delta a = -2 \pi \cdot C_d \cdot A / m \cdot \rho \cdot a \cdot a$

For circular orbits we can approximate the changes in semi-major axis, period, and velocity per revolution using the following equations:

(3.44) 
$$\Delta a_{rev} = \frac{-2 \pi C_D A \rho a^2}{m}$$



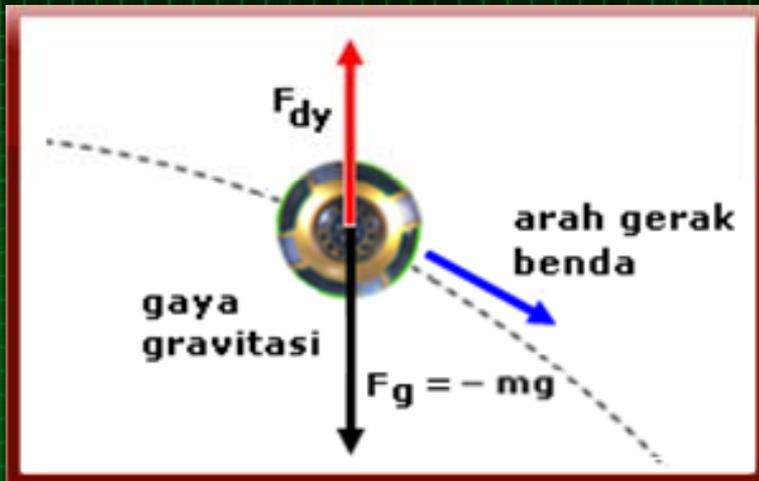
Pada sumbu horizontal, gaya yang bekerja pada benda hanyalah  $F_{dx}$  yang arahnya berlawanan dengan  $v_x$  sehingga  $F_{dx}$  menimbulkan terdapatnya percepatan horizontal pada gerak benda yang disimbolkan  $a_x$ .

$$F_{dx} = m a_x \Leftrightarrow a_x = \frac{1}{m} F_{dx}$$

$$\Leftrightarrow a_x = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_x |v|$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2m} \rho C_d A \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

Pada sumbu vertikal, gaya yang bekerja pada satelit adalah gaya gravitasi  $F_g$  serta komponen vertikal gaya hambat  $F_{dy}$  yang berlawanan arah dengan  $v_y$ . Secara simultan,  $F_g$  dan  $F_{dx}$  yang bekerja secara berlawanan akan menimbulkan terdapatnya percepatan vertikal pada gerakan satelit yang disimbolkan  $a_y$ .



$$F_{dy} - F_g = m a_y \Leftrightarrow a_y = \frac{1}{m} (F_{dy} - F_g)$$

$$\Leftrightarrow a_y = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_y |v| - g$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2m} \rho C_d A \frac{dy}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - g$$

Metode RK4 digunakan untuk menghasilkan tebakan awal yang nantinya disubstitusikan sebagai nilai awal pada Metode Newton

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = Q_1 \left( t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = Q_2 \left( t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$$

$$Q_3 \left( t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \frac{dx}{dt}$$

$$Q_4 \left( t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = \frac{dy}{dt}$$

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_{r+1}} = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_r} + \frac{1}{6} (k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1})$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_{r+1}} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_r} + \frac{1}{6} (k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})$$

$$x_{r+1} = x_r + \frac{1}{6} (k_{1,3} + 2k_{2,3} + 2k_{3,3} + k_{4,3})$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6} (k_{1,4} + 2k_{2,4} + 2k_{3,4} + k_{4,4})$$

$$k_{1,j} = (\Delta t) Q_j(t_r, x_r, y_r, (x')_r, (y')_r)$$

$$k_{2,j} = (\Delta t) Q_j(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{1}{2} k_{1,1}, y_r + \frac{1}{2} k_{1,2}, (x')_r + \frac{1}{2} k_{1,3}, (y')_r + \frac{1}{2} k_{1,4})$$

$$k_{3,j} = (\Delta t) Q_j(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, x_r + \frac{1}{2} k_{2,1}, y_r + \frac{1}{2} k_{2,2}, (x')_r + \frac{1}{2} k_{2,3}, (y')_r + \frac{1}{2} k_{2,4})$$

$$k_{4,j} = (\Delta t) Q_j(t_r + \Delta t, x_r + k_{3,1}, y_r + k_{3,2}, (x')_r + k_{3,3}, (y')_r + k_{3,4})$$

untuk  $j = 1, 2, 3,$  dan  $4.$

$$U(t_r) = \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=t_r} - kf(y_r) \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_r} \sqrt{\left( \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_r} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_r} \right)^2}$$

$$V(t_r) = \frac{d^2y}{dt^2} \Big|_{t=t_r} + g(y_r) - kf(y_r) \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_r} \sqrt{\left( \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_r} \right)^2 + \left( \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_r} \right)^2}$$

Setelah fungsi  $U$  dan  $V$  dikonstruksi, formulasi beda hingga yang telah diperoleh disubstitusikan ke dalamnya sehingga dihasilkan rumus pendekatan nilai fungsi  $U(t_0)$  hingga  $U(t_4)$  dan  $V(t_0)$  hingga  $V(t_4)$  yang masing-masing melibatkan nilai  $x_0$  hingga  $x_5$  dan  $y_0$  hingga  $y_5$ . Terbentuklah sistem persamaan nonlinear yang terdiri atas 10 persamaan dan 10 variabel ( $x_1$  hingga  $x_5$  dan  $y_1$  hingga  $y_5$ ).



Contoh untuk  $r = 1$ .

$$\left. \frac{d^2 F}{dt^2} \right|_{t=t_1} = \frac{10F_0 - 15F_1 - 4F_2 + 14F_3 - 6F_4 + F_5}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta F^4)$$

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t=t_1} = \frac{-12F_0 - 65F_1 + 120F_2 - 60F_3 + 20F_4 - 3F_5}{60\Delta t} + O(\Delta F^5)$$

$$U(t_1) = \left. \frac{d^2 x}{dt^2} \right|_{t=t_1} + kf(y_1) \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1} \sqrt{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_1}^2 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1}^2}$$

$$V(t_1) = \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{t=t_1} - g(y_1) - kf(y_1) \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_1} \sqrt{\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_1}^2 + \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_1}^2}$$

Terbentuk persamaan nonlinear yang terdiri atas 10 persamaan dengan 10 variabel yaitu  $x_1$  hingga  $x_5$  dan  $y_1$  hingga  $y_5$ .

Nilai awal  
diperoleh  
dari metode  
RK4



$$\sum_{j=1}^s x_j^s \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^s y_j^s \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s} \quad \text{Iterasi}$$

$$= U_i^s + \sum_{j=1}^s x_j^{s+1} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^s y_j^{s+1} \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s}$$

$$\sum_{j=1}^s x_j^s \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^s y_j^s \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s}$$

$$= V_i^s + \sum_{j=1}^s x_j^{s+1} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^s y_j^{s+1} \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s}$$

Nilai  
 $x_1$  hingga  $x_5$   
dan  
 $y_1$  hingga  $y_5$



Konvergen



Nilai awal  
diperoleh  
dari metode  
RK4

$$x_r^{s+1} = x_r^s - \left( \frac{U_r \frac{\partial V_r}{\partial y_r} - V_r \frac{\partial U_r}{\partial y_r}}{\frac{\partial U_r}{\partial x_r} \frac{\partial V_r}{\partial y_r} - \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \frac{\partial V_r}{\partial x_r}} \right) \quad \text{Iterasi}$$

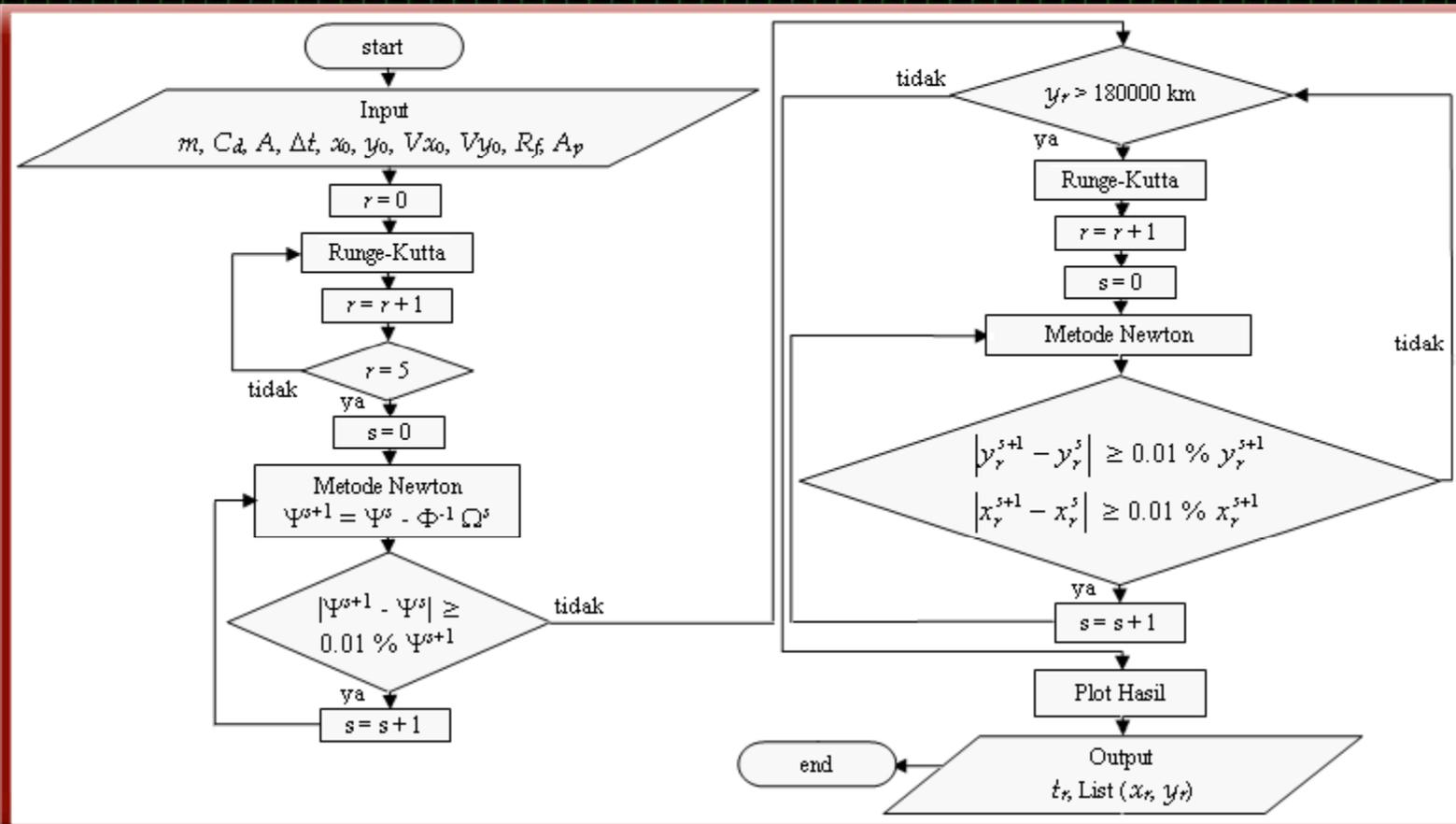
$$x_r = x_r^s, y_r = y_r^s$$

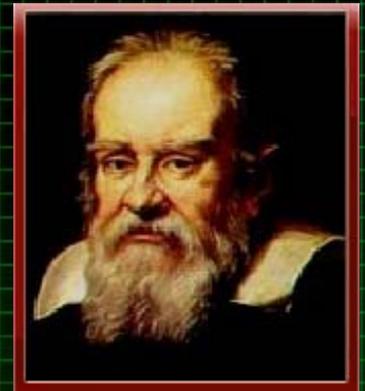
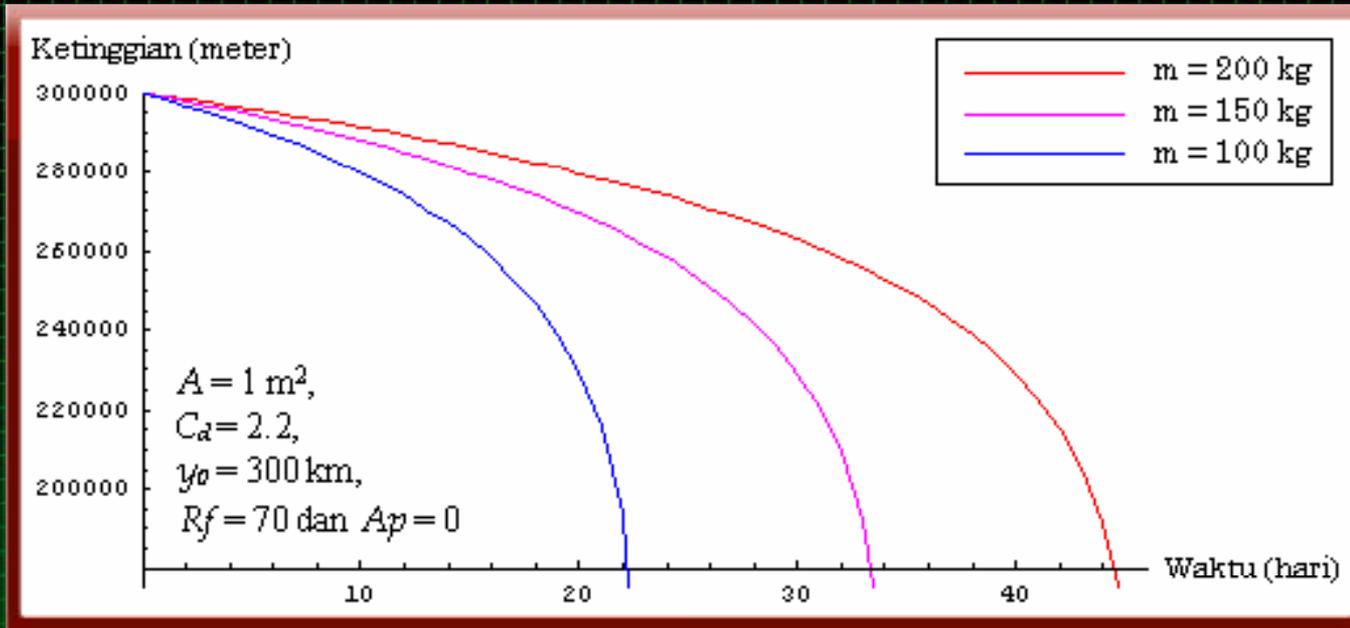
$$y_r^{s+1} = y_r^s - \left( \frac{-U_r \frac{\partial V_r}{\partial x_r} + V_r \frac{\partial U_r}{\partial x_r}}{\frac{\partial U_r}{\partial x_r} \frac{\partial V_r}{\partial y_r} - \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \frac{\partial V_r}{\partial x_r}} \right) \quad \text{Iterasi}$$

$$x_r = x_r^s, y_r = y_r^s$$

Nilai  
 $x_r$  dan  $y_r$

Konvergen

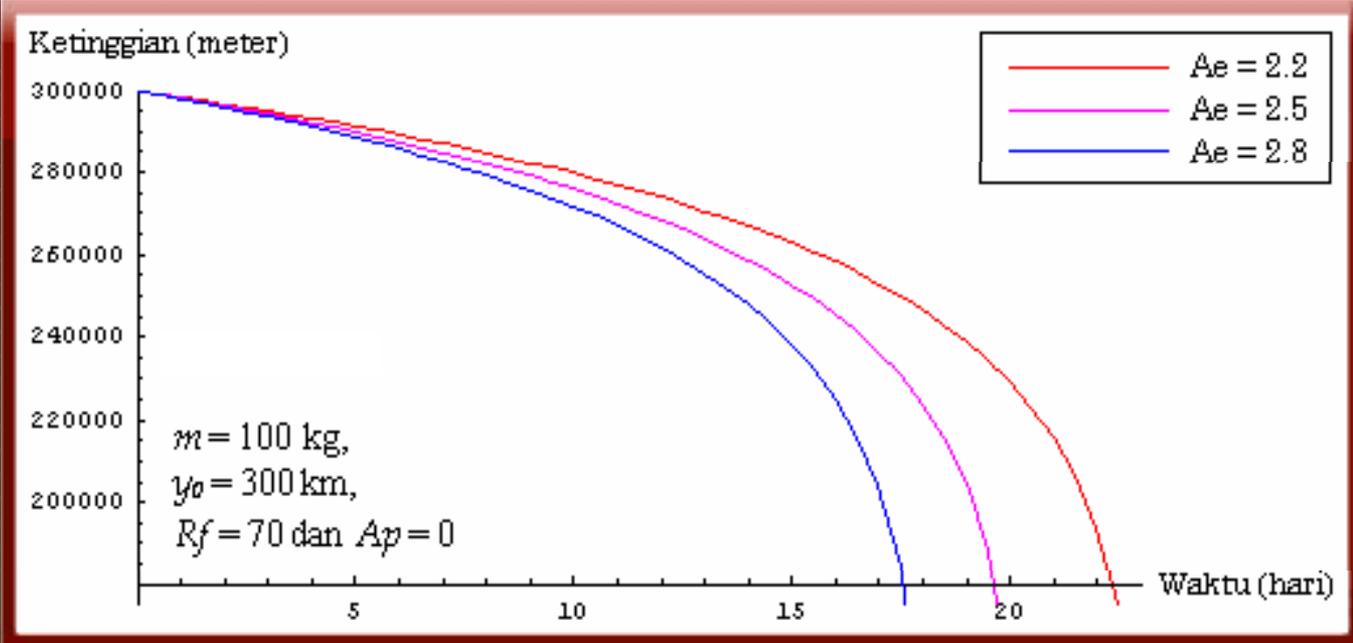




Semakin besar massa satelit, semakin lama satelit itu mengalami *reentry*.

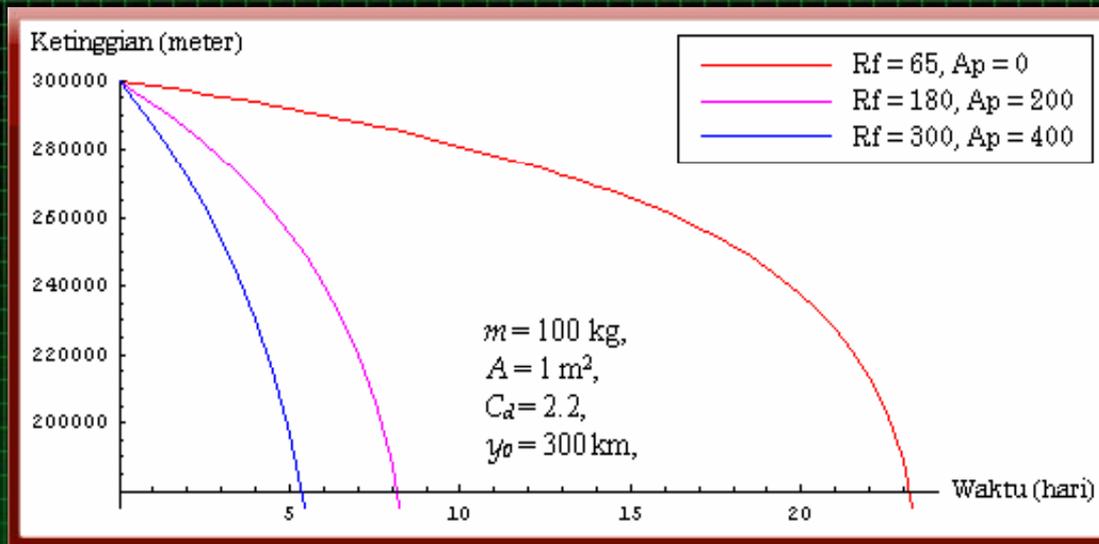
22

PENGARUH AREA EFEKTIF TERHADAP REENTRY



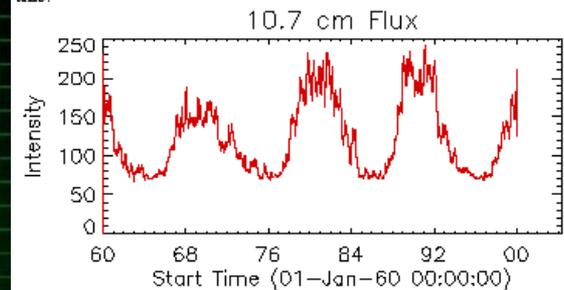
Mk-6 RV

Semakin besar area efektif satelit, semakin cepat pulalah satelit itu mengalami *reentry*.

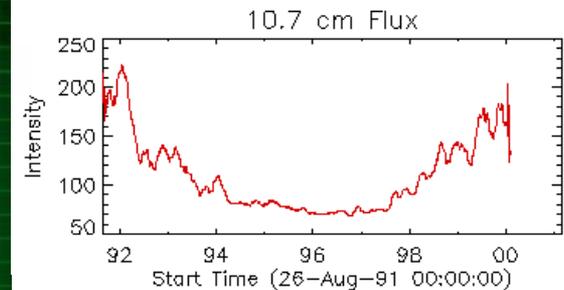


Semakin tinggi aktivitas matahari, semakin cepat sebuah satelit mengalami *reentry*.

cycle looks like. In fact, over the last 40 years or so, solar activity (as defined by the 10.7 cm solar emission) looks like this:



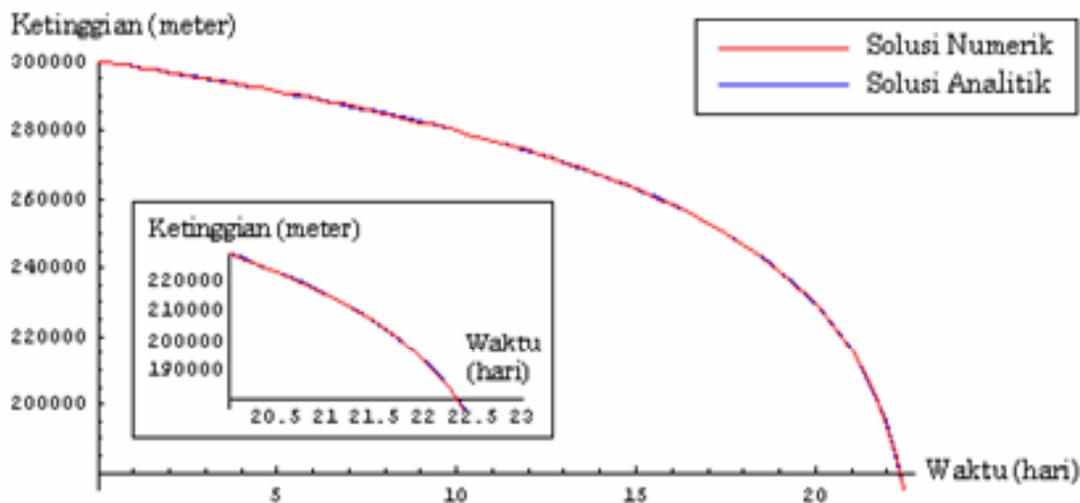
The cycle peaks every 11 years or so. A full solar cycle is actually about 22 years, meaning we get two solar maxima per cycle. Now, let's expand the scale and look at the shorter period since *Yohkoh* launch in the latter half of 1991:



So its evident from this graph that we launched near solar maximum, and we're currently pretty darned close to another

## 24

## VERIFIKASI SKEMA NUMERIK



Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot ketinggian satelit dengan  $m=100$  kg,  $A=1$  m<sup>2</sup>,  $C_d=2.2$ ,  $y_0=300$  km,  $R_f=70$ ,  $A_p=0$ , dan  $\Delta t=0.25$

$\Delta t$ (hari)	Masa aktif satelit (hari)	Galat sejati
1	22.1618	0.851 %
0.75	22.2937	0.261 %
0.5	22.3156	0.105 %
0.25	22.3393	0.057 %

Semakin kecil nilai ukuran langkah (sampai pada batas tertentu), hasil yang diperoleh dari model matematis semakin akurat.



Kesimpulan :

1. Persamaan *Satellite Progressive Decay* yang merepresentasikan gerakan satelit pada orbit dapat diturunkan dengan melakukan analisis terhadap resultan gaya yang bekerja pada satelit baik pada sumbu horisontal maupun sumbu vertikal.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2m} \rho C_d A \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2m} \rho C_d A \frac{dy}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - g$$



2. Persamaan *SPD* dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode RK4 untuk sistem persamaan diferensial yang kemudian dilanjutkan dan diperbaiki oleh perpaduan antara metode Newton untuk sistem nonlinier dan formulasi beda hingga sebagai pendekatan turunan fungsi.
3. Penyelesaian numerik dapat mendekati kejadian nyata yang direpresentasikan oleh solusi uji apabila nilai  $\Delta t$  atau ukuran langkah yang digunakan pada skema cukup kecil dibandingkan dengan panjang masa aktif satelit yang diuji.
4. Pada skema numerik, posisi satelit dihitung secara rekursif hingga ketinggian satelit kurang dari 180 km. Waktu terjadinya *reentry* diperkirakan melalui interpolasi sejumlah data terakhir.



Alankhaya, Steve A. 2008. *Recovery and Maintenance of GPS Satellites*. Jakarta: Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional. <http://www.kemendiknas.go.id/2008/000428/000428.html>. Tanggal akses : 31 Agustus 2007

Safford, Steve. 2001. *Fakta Sains*. Erlangga. Jakarta

Agustine, R. 2004. *Satellite Orbital Decay*. NOAA. Washington DC, California

Braeunig, Robert A. 2004. *Basics of Space Flight Course Orbital Mechanics*. <http://www.braeunig.us/space/orbmech.htm>. Tanggal akses : 20 Agustus 2007

John. 1999. *Satellite Orbital Decay Calculation*. Sydney. The Australian Weather Agency

Chapra, Steven C. and Raymond P. Canale. 2002. *Numerical Methods for Engineers, with Software Applications*, fourth edition. McGraw-Hill, New York

Fullerton, David. 2003. <http://www.kathews.com/n2003/ProjectileMotionMod.html>. Tanggal akses : 4 April 2007

Edwards, C. Henry and David E. Penney. 2001. *Differential Equations*. Prentice Hall, New Jersey

Arif, A. 2005. *Aljabar*. Arktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik. Guna Widya. Surabaya

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1. Latar Belakang

Setelah sebuah satelit diluncurkan menuju angkasa luar dan ditempatkan pada ketinggian tertentu di atas permukaan bumi, satelit tersebut akan terus mengelilingi bumi pada orbitnya dengan periode tertentu. Sepanjang gerakannya, satelit tersebut akan mengalami gesekan dan benturan dengan partikel-partikel udara yang tersebar di atmosfer bumi sehingga terjadi suatu gangguan pada gerakannya. Secara terus-menerus, gangguan ini akan mengakibatkan terjadinya penurunan ketinggian satelit tersebut dari waktu ke waktu sejalan dengan tarikan gravitasi bumi yang semakin meningkat. Penurunan ketinggian satelit secara berkesinambungan ini dikenal dengan istilah *Satellite Progressive Decay*.

Penurunan ketinggian yang dialami oleh satelit secara langsung menentukan usia atau masa aktif satelit itu sendiri. Pada umumnya, masa aktif sebuah satelit antariksa diukur hingga satelit tersebut telah mengalami peristiwa *reentry* yakni ketika satelit tersebut telah mencapai ketinggian 180 kilometer diukur dari permukaan air laut. Pada ketinggian ini atmosfer bumi sudah terlalu padat dan tebal untuk dapat ditembus oleh satelit dengan kecepatan tinggi, oleh sebab itu tubuh satelit akan merasakan gesekan yang luar biasa kuat sehingga satelit tersebut akan mengalami kerusakan dan hancur.

Perhitungan lokasi dan waktu terjadinya peristiwa *reentry* sebuah satelit sangatlah penting mengingat besarnya bahaya yang dapat ditimbulkan seandainya material satelit yang beratnya mencapai beberapa ton menumbuk suatu wilayah berpenduduk di bumi. Dengan hanya mengandalkan perhitungan dan perkiraan secara kasar, prediksi waktu terjadinya *reentry* masih memuat persentase ketidakpastian yang cukup tinggi. Untuk satelit yang diramalkan akan mengalami *reentry* setelah mengorbit selama 10 tahun, kesalahan prediksi yang muncul dapat mencapai 1 tahun yang ekuivalen dengan galat 10 %. Sebagai contoh, peristiwa *reentry* stasiun ruang angkasa SKYLAB yang diramalkan terjadi antara tanggal 11 Juni dan 1 Juli 1979 ternyata baru terjadi pada tanggal 11 Juli. Hal ini merupakan satu contoh nyata yang menunjukkan betapa pentingnya prediksi waktu *reentry* secara akurat.

## 1.2. Rumusan Masalah

Dalam skripsi ini dibahas bagaimana penurunan model matematis yang mendeskripsikan peristiwa *Satellite Progressive Decay*, berikut bagaimana menyelesaikan model tersebut secara numerik. Di samping itu akan dibahas pula perbandingan antara penyelesaian numerik yang diperoleh dan model uji yang tersedia, serta bagaimana memperkirakan waktu terjadinya *reentry* satelit berdasarkan hasil tersebut.

## 1.3. Batasan Masalah

Dalam skripsi ini dipergunakan asumsi-asumsi sebagai berikut.

1. Tipe satelit yang akan dibahas gerakannya adalah Satelit Orbit Rendah yaitu satelit yang mengelilingi bumi pada ketinggian beberapa ratus kilometer saja di atas permukaan air laut, dengan ketentuan tambahan bahwa satelit tersebut beredar pada orbit sirkular dengan ketinggian maksimum 300 kilometer di atas permukaan air laut.
2. Fluktuasi kepadatan atmosfer akibat pengaruh radiasi matahari tidak terlampaui besar selama waktu edar satelit.
3. Satelit tidak dilengkapi dengan mesin pendorong internal yang memungkinkannya untuk mengubah arah gerak dan kecepatan sepanjang gerakannya.
4. Luas bagian satelit yang menghadap arah gerakan selalu sama.
5. Kondisi fisik satelit (komposisi, massa, maupun bentuk) relatif tidak mengalami perubahan selama masa aktifnya.

## 1.4. Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menurunkan model matematis yang mendeskripsikan peristiwa *Satellite Progressive Decay*
2. Menyelesaikan model matematis *Satellite Progressive Decay* yang telah diperoleh secara numerik.
3. Membuat perbandingan antara hasil yang diperoleh dari model matematis dan model uji yang tersedia.
4. Menyusun perkiraan waktu terjadinya *reentry* berdasarkan hasil yang diperoleh sehingga perkiraan masa aktif satelit pada orbit yang dilaluinya dapat diketahui.

## BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan dasar-dasar teori yang dipergunakan untuk menyelesaikan persamaan *Satellite Progressive Decay*. Dasar-dasar teori tersebut meliputi definisi dan uraian singkat mengenai persamaan diferensial, persamaan diferensial biasa, metode beda hingga, metode Newton untuk sistem persamaan nonlinier, formulasi kepadatan atmosfer, gaya hambat udara, serta sejumlah teori lainnya yang juga diperlukan untuk menemukan penyelesaian persamaan *Satellite Progressive Decay* secara numerik.

### 2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang menghubungkan suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya. Suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde  $n$  apabila turunan tertinggi yang terdapat dalam persamaan diferensial itu merupakan turunan ke- $n$ . Suatu persamaan diferensial dikatakan mempunyai derajat  $k$  apabila turunan tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut berderajat  $k$ . Sebagai contoh, persamaan

$$y = x \frac{dy}{dx} + \left( \frac{dy}{dx} \right)^3$$

disebut sebagai persamaan diferensial berorde satu dan berderajat tiga dikarenakan turunan tertinggi yang termuat di dalamnya merupakan turunan pertama dan turunan tertinggi tersebut mempunyai derajat sebesar tiga.

Apabila suatu persamaan diferensial menyatakan hubungan antara fungsi dengan satu variabel bebas dan satu atau lebih turunan dari fungsi itu terhadap variabel bebas tersebut, persamaan tersebut disebut sebagai persamaan diferensial biasa. Di sisi lain, apabila suatu persamaan diferensial menyatakan hubungan antara fungsi dengan sejumlah variabel bebas dan satu atau lebih turunan parsial dari fungsi itu terhadap variabel bebas tersebut, persamaan tersebut disebut sebagai persamaan diferensial parsial (Edwards dan Penney, 2001). Berdasarkan definisi ini, persamaan diferensial

$$y = x \frac{dy}{dx} + 2\sqrt{\frac{dy}{dx}}$$

$$(y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} - (x^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2$$

berturut-turut merupakan contoh persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

## 2.2. Deret Taylor

Dalam metode numerik, deret Taylor dipergunakan sebagai sarana untuk mendapatkan aproksimasi terhadap nilai suatu fungsi pada suatu titik tertentu (Chapra dan Canale, 2002). Ekspansi deret Taylor untuk fungsi  $f(t)$  di sekitar titik  $t = t_r$  adalah

$$f(t_r + \Delta t) = f(t_r) + f'(t_r)\Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} f''(t_r) + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} f^{(n)}(t_r) + R_n, \quad (2.1)$$

dengan  $\Delta t$  adalah ukuran langkah dan

$$R_n = \frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad t_i \leq \xi \leq t_{i+1}. \quad (2.2)$$

Tanpa mengubah esensi persamaan-persamaan tersebut, dalam uraian selanjutnya akan dipergunakan notasi  $f_r = f(t_r)$  dengan  $t_{r+1} = t_r + \Delta t$ .

Secara teoritis, deret Taylor akan memberikan nilai suatu fungsi pada titik tertentu secara akurat apabila seluruh suku yang muncul dalam deret tersebut diperhitungkan. Karena penjumlahan seluruh suku pada deret Taylor tidak mungkin dilakukan pada kalkulasi numerik, nilai suatu fungsi hanya dapat diaproksimasi dengan menjumlahkan beberapa suku pertama deret Taylor sehingga hasil yang diperoleh tidak tepat seperti pada penyelesaian uji. Kesalahan yang dihasilkan akibat pengabaian suku-suku terakhir deret Taylor disebut kesalahan pemotongan.

Suku  $R_n$  yang memberikan rumusan kesalahan pemotongan pada persamaan (2.1) dan (2.2) dapat pula dituliskan dalam bentuk  $O(\Delta t^{n+1})$ . Tata nama  $O(\Delta t^{n+1})$  menunjukkan bahwa galat pemotongan ekspansi tersebut mempunyai orde  $(n+1)$ , hal ini berarti kesalahan tersebut sebanding dengan ukuran langkah  $\Delta t$  dipangkatkan sebanyak  $(n+1)$  kali. Kesalahan pemotongan akan semakin kecil apabila  $\Delta t$  kecil dan suku-suku terakhir dari deret tersebut turut diperhitungkan.

### 2.3. Akurasi dalam Perhitungan Numerik

Penyelesaian suatu persamaan matematis dengan menggunakan metode numerik kadangkala tidak tepat sama dengan solusi yang diperoleh secara eksak atau analitik. Besarnya selisih antara nilai sejati dan nilai yang diperoleh melalui aproksimasi secara numerik disebut galat sejati yang dinotasikan  $\varepsilon(x)$ . Perbandingan antara galat sejati dan nilai sejati disebut galat relatif yang dinotasikan  $\varepsilon_{rel}(x)$ . Apabila  $x$  menyatakan nilai eksak dari suatu kuantitas sedangkan  $\bar{x}$  merupakan nilai pendekatan dari  $x$  maka kedua definisi tersebut dapat dituliskan secara matematis sebagai

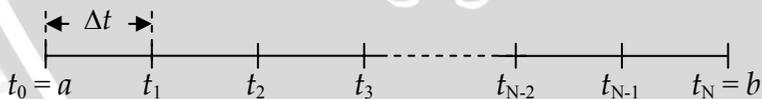
$$\varepsilon(x) = |\Delta x| = |x - \bar{x}| \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_{rel}(x) = \left| \frac{\Delta x}{x} \right| = \left| \frac{x - \bar{x}}{x} \right| \quad (2.4)$$

Galat relatif yang sangat kecil pada suatu perhitungan numerik menunjukkan bahwa hasil yang diperoleh sudah sangat mendekati nilai eksak. Semakin kecil nilai galat relatif tersebut, semakin baiklah akurasi penyelesaian yang didapatkan dengan menggunakan metode numerik (Bronshtein, 2005).

### 2.4. Metode Beda Hingga

Metode numerik yang mempergunakan deret Taylor untuk mendekati nilai turunan suatu fungsi pada titik tertentu disebut metode beda hingga. Untuk dapat menghasilkan nilai pendekatan yang dimaksud dengan mempergunakan metode beda hingga diperlukan nilai-nilai fungsi yang bersangkutan pada sejumlah titik berbeda. Titik-titik ini ditentukan dengan membagi terlebih dahulu domain penyelesaian persamaan diferensial menjadi sebanyak hingga partisi atau subinterval yang masing-masing mempunyai lebar sama yaitu  $\Delta t$ .



Gambar 2.1. Ilustrasi proses partisi interval  $[a, b]$  menjadi sebanyak  $N$  subinterval dengan lebar masing-masing  $\Delta t$ .

Bentuk umum formulasi untuk mengaproksimasi nilai turunan fungsi dengan metode beda hingga adalah

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \frac{1}{(\Delta t)^n} \sum_{i=p}^q a_i f_i + O(\Delta t^k), \quad (2.5)$$

dengan  $a_i$  adalah koefisien-koefisien real dan  $k$  adalah besarnya orde kesalahan pemotongan. Pada formulasi tersebut, besarnya masing-masing koefisien yang digunakan bergantung pada besarnya akurasi yang dikehendaki (Edwards dan Penney, 2001).

## 2.5. Metode Runge-Kutta Orde Empat untuk Sistem Persamaan Diferensial

Pada kasus yang paling umum, metode Runge-Kutta merupakan proses untuk mencari nilai fungsi  $y(x)$  dari persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (2.6)$$

Seperti halnya deret Taylor, metode Runge-Kutta merupakan alternatif yang dapat dipergunakan untuk mengaproksimasi  $f(t_r + h)$ . Sekalipun akurasi yang dihasilkan tidak seagung akurasi pada ekspansi Taylor, penggunaan metode Runge-Kutta memiliki satu keunggulan yaitu tidak membutuhkan perhitungan turunan (Munif dan Aries, 1995). Khusus untuk persamaan (2.6), metode Runge-Kutta dengan orde- $n$  diformulasikan sebagai berikut

$$y_{r+1} = y_r + a_1 k_1 + a_2 k_2 + \dots + a_n k_n, \quad (2.7)$$

dengan  $a_1, a_2, \dots, a_n$  adalah konstanta dan

$$k_1 = (\Delta t) f(t_r, y_r)$$

$$k_i = (\Delta t) f\left(t_r + p_{i-1}(\Delta t), y_r + \sum_{j=1}^{i-1} q_{i-1,j} k_j\right) \text{ untuk } i > 1.$$

Pada metode ini, nilai konstanta  $a_i, p_i,$  dan  $q_{ij}$  dipilih sedemikian rupa agar kesalahan yang muncul seminimum mungkin dan persamaan (2.7) sama dengan ekspansi Taylor dengan orde setinggi mungkin. Apabila metode yang dipilih adalah metode Runge-Kutta orde empat, rumus yang dipergunakan adalah

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (2.8)$$

dengan

$$k_1 = (\Delta t) f(t_r, y_r)$$

$$k_2 = (\Delta t) f(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, y_r + \frac{1}{2} k_1)$$

$$k_3 = (\Delta t) f(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, y_r + \frac{1}{2} k_2)$$

$$k_4 = (\Delta t) f(t_r + \Delta t, y_r + k_3).$$

Dengan menerapkan beberapa modifikasi, formulasi (2.8) pada metode Runge-Kutta orde empat dapat tetap dipergunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial yang memiliki bentuk

$$\frac{dy_j}{dt} = f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (2.9)$$

dengan  $j = 1, 2, \dots, m$ . Pada kasus ini, rumus yang dipakai adalah

$$y_j^{r+1} = y_j^r + \frac{1}{6} (k_{1j} + 2k_{2j} + 2k_{3j} + k_{4j}), \quad (2.10)$$

dengan

$$k_{1j} = (\Delta t) f_j(t_r, y_1^r, y_2^r, \dots, y_m^r)$$

$$k_{2j} = (\Delta t) f_j(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, y_1^r + \frac{1}{2} k_{1,1}, y_2^r + \frac{1}{2} k_{1,2}, \dots, y_m^r + \frac{1}{2} k_{1,m})$$

$$k_{3j} = (\Delta t) f_j(t_r + \frac{1}{2} \Delta t, y_1^r + \frac{1}{2} k_{2,1}, y_2^r + \frac{1}{2} k_{2,2}, \dots, y_m^r + \frac{1}{2} k_{2,m})$$

$$k_{4j} = (\Delta t) f_j(t_r + \Delta t, y_1^r + k_{3,1}, y_2^r + k_{3,2}, \dots, y_m^r + k_{3,m}).$$

Khusus untuk kasus ini,  $y_j^r$  menunjukkan nilai fungsi  $y_j$  pada  $t_r$ .

## 2.6. Metode Newton untuk Sistem Persamaan Nonlinier

Untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinier

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$$

...

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0, \quad (2.11)$$

metode numerik yang dapat digunakan adalah metode Newton yang merupakan aplikasi dari deret Taylor (Chapra dan Canale, 2002).

Untuk kasus satu variabel, nilai fungsi satu variabel  $f_i$  pada iterasi ke- $(s+1)$  dapat diaproksimasi dengan mempergunakan deret Taylor orde pertama.

$$f_i^{s+1} = f_i^s + \frac{df_i}{dx} \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (2.12)$$

Secara analog, pendekatan serupa dapat disusun pula apabila  $f_i$  merupakan suatu fungsi yang bergantung pada sejumlah variabel bebas  $x_1, x_2, \dots, x_k$ .

$$f_i^{s+1} = f_i^s + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Delta x_k. \quad (2.13)$$

Karena tujuan dibentuknya sistem ini adalah untuk menemukan solusi yang memenuhi sistem persamaan (2.11), nilai  $f_i^{s+1}$  diupayakan agar bernilai nol sehingga persamaan (2.13) menjadi

$$\begin{aligned} 0 &= f_i^s + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \Delta x_k \\ \Leftrightarrow 0 &= f_i^s + (x_1^{s+1} - x_1^s) \frac{\partial f_i}{\partial x_1} + (x_2^{s+1} - x_2^s) \frac{\partial f_i}{\partial x_2} + \dots + (x_k^{s+1} - x_k^s) \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_i}{\partial x_j} &= f_i^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Untuk menemukan nilai-nilai  $x_j^{s+1}$  yang merupakan penyelesaian persamaan (2.14), terlebih dahulu nilai  $x_j^s$  diisi dengan sejumlah nilai duga untuk  $j = 1, 2, \dots, k$  sedangkan nilai  $f_i^s$  selanjutnya dapat dicari dengan mempergunakan nilai-nilai  $x_j^s$  tersebut. Karena pada kasus ini  $i = 1, 2, \dots, k$  maka terdapat sebanyak  $k$  persamaan yang berlaku secara simultan sehingga terbentuklah sistem persamaan nonlinier dengan  $k$  variabel yang belum diketahui nilainya yaitu  $x_j^{s+1}$  untuk  $j = 1, 2, \dots, k$ .

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_1}{\partial x_j} &= f_1^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_2}{\partial x_j} &= f_2^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ &\dots \\ \sum_{j=1}^k x_j^s \frac{\partial f_k}{\partial x_j} &= f_k^s + \sum_{j=1}^k x_j^{s+1} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Pada metode Newton, nilai-nilai  $x_j^{s+1}$  yang didapatkan hanyalah merupakan pendekatan dari penyelesaian sistem persamaan (2.11) sebab apabila nilai-nilai tersebut disubstitusikan ke dalam fungsi-fungsi yang diberikan, hasil yang didapatkan ternyata tidaklah tepat nol sebagaimana dikehendaki. Agar menjadi sedekat mungkin dengan solusi yang sesungguhnya, nilai-nilai  $x_j^{s+1}$  yang baru saja didapatkan perlu disubstitusikan kembali ke dalam sistem persamaan (2.15) sebagai  $x_j^s$  sehingga akhirnya didapatkan sejumlah nilai baru. Iterasi ini terus dijalankan hingga nilai-nilai  $x_j$  yang didapatkan konvergen menuju nilai-nilai tertentu. Syarat henti yang biasa dipergunakan pada kasus semacam ini adalah

$$\left| \frac{x_j^{s+1} - x_j^s}{x_j^{s+1}} \right| < \varepsilon_j \quad (2.16)$$

dengan  $\varepsilon_j$  ialah suatu konstanta tertentu yang dipilih sekecil mungkin untuk  $j = 1, 2, \dots, k$ . Pada akhir iterasi, nilai  $x_j^{s+1}$  yang diperoleh akan mengakibatkan nilai-nilai fungsi  $f_1, f_2, \dots, f_k$  menjadi sedekat mungkin dengan nol seperti yang dikehendaki pada sistem persamaan (2.11).

## 2.7. Hukum II Newton

Dalam salah satu volume bukunya yang berjudul *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, matematikawan Inggris Sir Isaac Newton menyatakan bahwa besarnya percepatan yang dialami oleh suatu benda yang bergerak berbanding lurus dengan besarnya gaya yang dikenakan kepadanya dan arah percepatan itu mengikuti arah gaya tersebut. Aturan yang terkenal dengan nama *Hukum II Newton* ini menerangkan hubungan antara besarnya gaya yang bekerja pada suatu benda dengan besarnya percepatan yang akan dialaminya akibat gaya tersebut. Misalkan sebuah benda yang memiliki massa sebesar  $m$  mengalami percepatan sebesar  $a$  ketika ia dikenai gaya sebesar  $F$ , maka benda yang sama akan mengalami percepatan sebesar dua kali lipat jika gaya yang mengenainya sebesar dua kali lipat gaya semula (Setford, 2001).

Apabila gaya, massa benda, dan percepatan yang dialami oleh benda akibat gaya tersebut berturut-turut dinotasikan  $F$ ,  $m$ , dan  $a$ , hukum gerak tersebut dapat dituliskan secara matematis sebagai

$$F = m a. \quad (2.17)$$

Apabila pada benda yang bersangkutan bekerja lebih dari satu gaya, persamaan sebelumnya dapat dimodifikasi menjadi

$$\Sigma F = m a, \quad (2.18)$$

dengan  $\Sigma F$  adalah paduan atau resultan seluruh gaya yang bekerja pada benda tersebut. Persamaan ini berlaku secara umum pada setiap benda, termasuk satelit yang bergerak cepat di sekeliling bumi.

## 2.8. Percepatan Gravitasi Bumi

Apabila sebuah benda berada pada jarak yang cukup dekat dari pusat planet bumi, gaya gravitasi bumi akan turut mempengaruhi gerakan benda tersebut. Pada umumnya pemodelan gerakan benda menganggap percepatan gravitasi yang disimbolkan  $g$  sebagai sebuah konstanta, akan tetapi pada kenyataannya besaran tersebut merupakan sebuah fungsi yang bergantung pada ketinggian benda. Apabila massa bumi, massa benda, dan jarak benda dari pusat bumi masing-masing dinotasikan  $M$ ,  $m$ , dan  $r$  (satuan SI) sedangkan  $G$  adalah konstanta gravitasi yang besarnya  $6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$ , maka gaya gravitasi antara benda dan bumi diformulasikan sebagai

$$F_g = G \frac{Mm}{r^2}. \quad (2.19)$$

Sesuai dengan persamaan (2.17), besarnya percepatan yang diakibatkan oleh gaya gravitasi tersebut (dinotasikan  $g$ ) ialah

$$F_g = m g, \quad (2.20)$$

dengan

$$g = G \frac{M}{r^2}. \quad (2.21)$$

Apabila persamaan (2.21) diterapkan pada kasus sebuah satelit yang mengorbit pada ketinggian  $h$  dari permukaan air laut, maka  $r$  yang terdapat pada persamaan tersebut adalah panjang jari-jari planet bumi yang dinotasikan  $r_e$  ditambah dengan  $h$ . Dengan demikian persamaan (2.21) dapat ditulis ulang menjadi

$$g = G \frac{M}{(r_e + h)^2}. \quad (2.22)$$

Persamaan tersebut menunjukkan bahwa besarnya percepatan gravitasi bumi yang dirasakan oleh suatu benda bergantung pada

kuadrat jarak antara benda itu sendiri dan pusat bumi. Semakin tinggi posisi suatu benda dari permukaan bumi, semakin jauh pulalah jarak benda tersebut dari pusat bumi sehingga percepatan gravitasi bumi yang dirasakan oleh benda itu akan semakin kecil (Parker, 1998).

## 2.9. Gaya Hambat Udara

Ketika ada sebuah objek yang melintas di dalam suatu medium, medium tersebut akan memunculkan suatu gaya yang disebut sebagai gaya hambat atau *drag force* yang bekerja pada arah yang berlawanan dengan arah gerakan benda. Secara matematis, besarnya gaya hambat (dinotasikan  $F_d$ ) yang dialami oleh benda yang sedang bergerak dengan area frontal  $A$  dan kecepatan  $v$  dalam suatu medium yang mempunyai kerapatan  $\rho$  diformulasikan sebagai

$$F_d = \frac{1}{2} \rho C_d A v^2. \quad (2.23)$$

Pada persamaan tersebut,  $C_d$  atau koefisien drag merupakan suatu nilai yang menggambarkan secara kasar kuantitas drag yang akan dialami oleh suatu benda ketika ia bergerak menembus suatu medium berupa fluida. Apabila dua objek yang memiliki area frontal sama bergerak sama cepat dalam medium yang sama, maka objek dengan nilai  $C_d$  yang lebih besar akan merasakan gaya hambat yang lebih besar (Hansen, 2004). Koefisien drag dapat bernilai 1 atau lebih untuk benda-benda kasar yang tidak memiliki desain *streamline*, sedangkan untuk benda-benda yang lebih *streamline* nilai ini dapat lebih kecil lagi. Sebagai contoh, sebuah truk biasa memiliki nilai  $C_d$  sekitar 0,6 sedangkan pesawat terbang Boeing 747 mempunyai nilai  $C_d$  sebesar 0,031. Nilai  $C_d$  yang dimiliki oleh sebuah satelit umumnya cukup besar dan berkisar antara 2 dan 4 (Braeunig, 2007). Perkalian antara koefisien drag dan area frontal sebuah benda disebut sebagai area efektif dan disimbolkan  $A_e$ .

Apabila  $F_d$  atau gaya hambat udara diuraikan menjadi komponen horisontal dan vertikalnya yaitu  $F_{dx}$  dan  $F_{dy}$  maka formulasi yang dipergunakan adalah sebagai berikut.

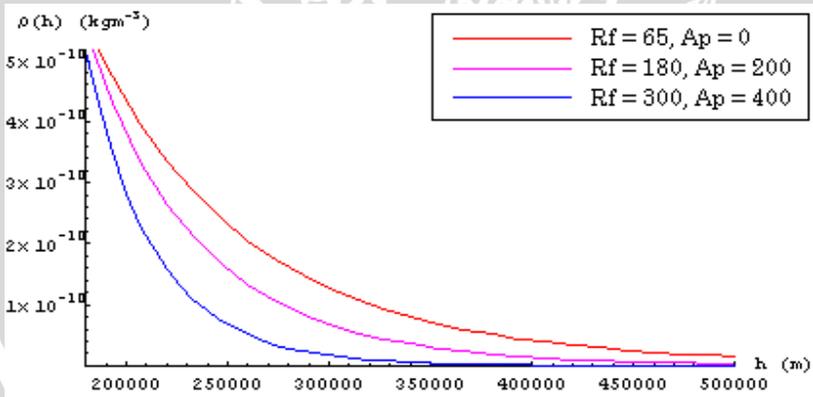
$$F_{dx} = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_x |v| \quad (2.24)$$

$$F_{dy} = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_y |v|, \quad (2.25)$$

dengan  $v_x$  dan  $v_y$  masing-masing merupakan komponen horisontal dan komponen vertikal vektor kecepatan  $v$  (Matthews, 2004).

## 2.10. Kerapatan Atmosfer

Seperti tercantum pada persamaan (2.23), perhitungan nilai  $F_d$  membutuhkan nilai  $\rho$  yang merupakan kerapatan medium tempat benda bergerak. Pada kasus gerakan satelit, kerapatan yang dimaksud adalah kerapatan atmosfer bumi. Nilai kerapatan atmosfer pada suatu titik yang terletak di atas permukaan bumi ditentukan secara simultan oleh ketinggian, temperatur, tekanan udara, fluks radiasi matahari, dan indeks geomagnetik pada titik tersebut. Fluks radiasi matahari didefinisikan sebagai kuantitas energi matahari yang diterima oleh setiap satuan luas permukaan suatu benda pada setiap satuan waktu, sedangkan indeks geomagnetik merepresentasikan kondisi medan magnetik bumi yang sangat dipengaruhi oleh laju pancaran partikel-partikel asing dari luar atmosfer. Nilai fluks radiasi matahari bervariasi dari 65 hingga 300 SFU sementara indeks geomagnetik berkisar antara nol saat aktivitas matahari berada pada titik minimum hingga 400 ketika aktivitas matahari mencapai puncaknya. Pada saat nilai indeks geomagnetik mencapai maksimum, medan magnet bumi mengalami fluktuasi hebat yang dikenal sebagai badai geomagnetik dan mampu menyebabkan peningkatan kerapatan atmosfer secara signifikan (Admiranto, 2000).



Gambar 2.2. Grafik yang menunjukkan nilai kerapatan atmosfer pada ketinggian 180 hingga 500 km dari permukaan air laut, diamati pada kondisi *solar minimum* ( $R_f = 65$  dan  $A_p = 0$ ), *solar mean* ( $R_f = 180$  dan  $A_p = 200$ ), dan *solar maximum* ( $R_f = 300$  dan  $A_p = 400$ )

Formulasi yang dapat digunakan untuk menghitung kerapatan atmosfer bumi adalah sebagai berikut.

$$\rho = 6 \times 10^{-10} e^{\frac{(175-0.001h)(27-0.012(0.001h-200))}{900+2.5(Rf-70)+1.5Ap}} \quad (2.26)$$

dengan  $h$ ,  $Rf$ , dan  $Ap$  berturut-turut adalah ketinggian diukur dari permukaan air laut, fluks, dan indeks geomagnetik. Nilai kerapatan atmosfer yang didapatkan dari formulasi tersebut mempergunakan satuan SI (Kennewell, 1999).

Sebuah satelit yang beredar di atmosfer secara terus-menerus akan merasakan hambatan yang diakibatkan oleh interaksi satelit itu sendiri dengan molekul-molekul udara yang bertebaran di atmosfer. Hal ini akan mengakibatkan berkurangnya ketinggian satelit tersebut dari waktu ke waktu hingga akhirnya terjadilah peristiwa *reentry*. Berdasarkan pengamatan, *reentry* satelit akan lebih cepat terjadi pada saat aktivitas matahari mencapai titik maksimum. Peristiwa yang disebut sebagai *solar maximum* ini terjadi setiap 11 tahun sekali, sama dengan separuh lama siklus matahari (Handy, 2000).

## 2.11. Model Uji *Satellite Progressive Decay*

Selain menggunakan pendekatan matematis melalui perhitungan secara numerik, penurunan ketinggian yang dialami oleh satelit di antariksa dapat ditelusuri dengan memperhatikan perubahan energi mekanik satelit yang bersangkutan. Metode ini dapat dipergunakan untuk menggambarkan fenomena *Satellite Progressive Decay* tanpa perlu melibatkan perhitungan yang terlampau rumit, dengan demikian hasil yang dikehendaki dapat diperoleh dengan cukup mudah. Model uji *Satellite Progressive Decay* yang disusun berdasarkan metode ini mampu memprediksi waktu terjadinya *reentry* satelit dengan akurasi yang dapat diandalkan, oleh sebab itu model tersebut dapat dijadikan sebagai pembandingan untuk memverifikasi model numerik.

Secara teoritis, besarnya perubahan energi mekanik suatu benda sama dengan besarnya usaha yang diakibatkan oleh gaya-gaya yang bekerja secara nonradial pada benda tersebut. Perubahan energi mekanik ini dialami pula oleh setiap satelit yang beredar mengelilingi bumi, bahkan penurunan ketinggian yang dialami oleh satelit ternyata berhubungan erat dengan perubahan energi mekanik tersebut. Pada gerakan satelit, satu-satunya faktor yang berpengaruh pada energi

mekanik satelit adalah usaha yang ditimbulkan oleh gaya hambat udara. Meskipun gaya gravitasi bumi juga bekerja pada satelit, gaya tersebut bersifat radial sehingga tidak menghasilkan usaha dan tidak menimbulkan pengaruh apapun terhadap energi mekanik satelit (Bart, 2006).

Besarnya perubahan energi mekanik satelit pada setiap revolusi yang diakibatkan oleh eksistensi gaya hambat udara adalah

$$\begin{aligned}\Delta E &= -2 \pi a F_d \\ &= -2 \pi a (\frac{1}{2} \rho C_d A v^2) \\ &= -\pi \rho C_d A a v^2,\end{aligned}\tag{2.27}$$

dengan  $\Delta E$ ,  $a$ , dan  $v$  berturut-turut menyatakan perubahan energi mekanik satelit, radius orbit satelit, dan kecepatan edar satelit. Pada konteks ini radius orbit didefinisikan sebagai jarak antara satelit dan pusat bumi, dengan demikian panjang radius orbit kurang lebih sama dengan panjang jari-jari bumi ditambah dengan ketinggian satelit tersebut diukur dari permukaan air laut.

Selain dihitung berdasarkan usaha yang ditimbulkan oleh gaya-gaya yang bekerja secara nonradial pada satelit, perubahan energi mekanik satelit pada setiap revolusi dapat pula dihitung berdasarkan penurunan radius orbit menurut persamaan

$$\Delta E = \frac{1}{2} a^{-1} m v^2 \Delta a,\tag{2.28}$$

dengan  $\Delta a$  menyatakan besarnya perubahan radius orbit satelit pada setiap putaran atau revolusi mengelilingi bumi. Dengan demikian, besarnya penurunan ketinggian sebuah satelit pada setiap revolusi dapat dihitung dengan mengolah persamaan (2.27) dan (2.28) sehingga dihasilkan

$$\begin{aligned}-\pi \rho C_d A a v^2 &= \frac{1}{2} a^{-1} m v^2 \Delta a \\ \Leftrightarrow \Delta a &= -2\pi \rho C_d A a^2 m^{-1}.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Kendati model uji *Satellite Progressive Decay* sebagaimana tergambar pada persamaan (2.29) memiliki akurasi yang tinggi, data yang dapat diperoleh dari persamaan tersebut hanyalah posisi horisontal dan ketinggian satelit pada setiap putaran atau revolusi. Dengan kata lain, posisi horisontal maupun vertikal satelit tidak dapat diketahui sebelum satelit tersebut berhasil melakukan satu putaran penuh pada orbitnya (Viereck, 2004).

## **BAB III**

### **HASIL DAN PEMBAHASAN**

#### **3.1. Konstruksi Persamaan *Satellite Progressive Decay***

Untuk dapat mengetahui plot gerakan satelit di antariksa selama masa edarnya terlebih dahulu perlu disusun sejumlah persamaan diferensial biasa yang disebut sebagai persamaan *Satellite Progressive Decay*. Persamaan ini dapat dikonstruksi berdasarkan analisis yang dilakukan terhadap resultan gaya yang bekerja pada tubuh satelit baik pada sumbu horisontal maupun vertikal.

Selama mengitari bumi pada ketinggian tertentu, gerakan sebuah satelit dipengaruhi oleh dua gaya yang berbeda yaitu gaya gravitasi bumi dan gaya hambat udara. Posisi horisontal dan vertikal satelit ditentukan oleh resultan kedua gaya tersebut, oleh sebab itu perlu dilakukan analisis terhadap resultan gaya yang bekerja pada satelit baik pada sumbu horisontal maupun sumbu vertikal. Sebelum analisis dilakukan, masing - masing gaya tersebut diuraikan terlebih dahulu menjadi komponen - komponennya agar pengaruh gaya - gaya yang bersangkutan terhadap gerakan satelit jelas terlihat.

##### **3.1.1. Penguraian Vektor Kecepatan dan Gaya Hambat Udara**

Beberapa besaran yang terlibat dalam gerakan sebuah satelit yaitu kecepatan, gaya gravitasi, dan gaya hambat udara merupakan besaran vektor, dengan demikian ketiganya dapat diuraikan menjadi komponen horisontal dan vertikal. Untuk menyeragamkan pemberian tanda pada komponen-komponen vektor tersebut selanjutnya akan dipergunakan koordinat Cartesius kuadran satu sebagai standar dengan mengikuti beberapa konvensi sebagai berikut.

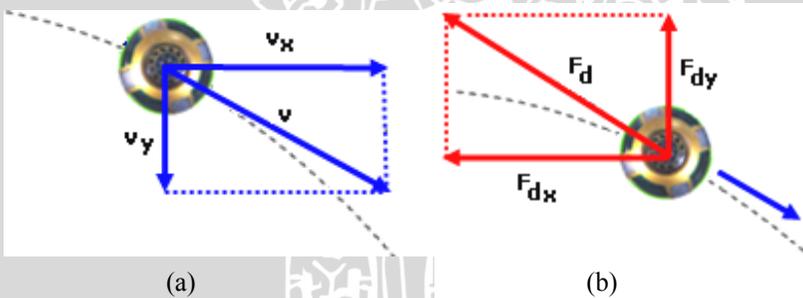
1. Posisi awal satelit adalah pada sumbu  $y$  positif sementara sumbu  $x$  merepresentasikan permukaan bumi.
2. Dalam koordinat Cartesius, gerakan satelit dianggap menuju ke arah kanan yaitu mengikuti arah sumbu  $x$  positif.
3. Sumbu-sumbu pada koordinat Cartesius merupakan acuan untuk mendeskripsikan arah komponen horisontal dan vertikal vektor-vektor yang ada. Sebagai contoh, apabila komponen vertikal suatu vektor mengarah ke bawah yaitu ke arah sumbu  $y$  negatif maka komponen vektor tersebut menyandang tanda negatif.

Sebagai langkah awal dalam menganalisis pengaruh kedua gaya tersebut terhadap gerakan satelit, terlebih dahulu akan dilakukan penguraian vektor kecepatan gerak satelit yang disimbolkan  $v$  menjadi dua komponen yakni komponen horisontal ( $v_x$ ) dan komponen vertikal ( $v_y$ ). Sesuai dengan persamaan (2.24) dan (2.25), komponen vertikal dan horisontal gaya hambat udara yaitu  $F_{dy}$  dan  $F_{dx}$  berturut-turut dirumuskan sebagai

$$F_{dy} = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_y |v| \quad (3.1)$$

$$F_{dx} = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_x |v|. \quad (3.2)$$

Karena satelit mengalami penurunan ketinggian secara terus-menerus, vektor  $v_y$  senantiasa mengarah ke bawah yaitu menuju pusat bumi. Sesuai konvensi yang ada, hal ini mengakibatkan komponen vektor tersebut menyandang tanda negatif. Dengan mempergunakan aturan yang sama, karena vektor  $v_x$  mengarah ke arah kanan sumbu koordinat maka vektor tersebut menyandang tanda positif.



Gambar 3.1. Ilustrasi penguraian vektor kecepatan ( $v$ ) dan gaya hambat udara ( $F_d$ ) menjadi komponen horisontal dan vertikal.

Karena gaya hambat udara bekerja pada arah yang berlawanan dengan arah gerak benda, arah vektor gaya hambat ( $F_d$ ) senantiasa bertolak belakang dengan arah vektor  $v$ . Hal ini menyebabkan arah komponen horisontal gaya hambat ( $F_{dx}$ ) berlawanan dengan arah vektor  $v_x$  sedangkan arah komponen vertikal gaya hambat ( $F_{dy}$ ) berkebalikan dengan arah vektor  $v_y$ . Dengan demikian, vektor  $F_{dx}$  menyandang tanda negatif sementara  $F_{dy}$  menyandang tanda positif.

### 3.1.2. Analisis terhadap Resultan Gaya yang Bekerja pada Sumbu Vertikal

Pada sumbu vertikal, gaya yang bekerja pada satelit adalah gaya gravitasi  $F_g$  yang mengarah ke bawah (menuju pusat bumi) serta komponen vertikal gaya hambat  $F_{dy}$  yang arahnya berlawanan dengan  $v_y$ . Secara simultan,  $F_g$  dan  $F_{dx}$  yang bekerja secara berlawanan akan menimbulkan terdapatnya percepatan pada gerakan satelit secara vertikal yang disimbolkan  $a_y$ . Sesuai persamaan (2.17) dan (3.1) maka diperoleh

$$\begin{aligned} F_{dy} - F_g &= m a_y \\ \Leftrightarrow a_y &= \frac{1}{m} (F_{dy} - F_g) \\ \Leftrightarrow a_y &= \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_y |v| - g. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Karena  $a_y$  dan  $v_y$  berturut-turut merupakan turunan pertama dan ke dua dari vektor  $y$  yang merepresentasikan posisi vertikal satelit terhadap waktu, persamaan (3.3) dapat pula dituliskan sebagai

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{1}{2m} \rho C_d A \frac{dy}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - g. \quad (3.4)$$

Pada persamaan (3.4),  $g$  menyatakan besarnya percepatan yang diakibatkan oleh tarikan gravitasi bumi. Sebagaimana tercantum pada persamaan (2.22), besarnya percepatan gravitasi ini bergantung pada nilai  $y$  yaitu ketinggian satelit diukur dari permukaan air laut. Di sisi lain, nilai  $\rho$  yang merupakan kerapatan atmosfer bumi juga bergantung pada  $y$  seperti tertera pada persamaan (2.24). Dengan demikian, baik  $g$  maupun  $\rho$  dapat dituliskan sebagai suatu fungsi, bukan sebagai sebuah konstanta. Apabila dibuat permisalan

$$k = \frac{1}{m} \frac{1}{2} C_d A \quad (3.5)$$

sedangkan percepatan gravitasi dan kerapatan atmosfer bumi pada ketinggian  $y$  berturut-turut dituliskan  $g(y)$  dan  $f(y)$ , persamaan (3.4) dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = kf(y) \frac{dy}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} - g(y), \quad (3.6)$$

dengan

$$f(y) = 6 \times 10^{-10} e^{\frac{(175-0.001h)(27-0.012(0.001h-200))}{900+2.5(Rf-70)+1.5Ap}}$$

$$g(y) = G \frac{M}{(r_e + h)^2}.$$

### 3.1.3. Analisis terhadap Resultan Gaya yang Bekerja pada Sumbu Horizontal

Pada sumbu horizontal, satu-satunya gaya yang bekerja pada benda adalah  $F_{dx}$  yang arahnya berlawanan dengan  $v_x$  sehingga  $F_{dx}$  akan menimbulkan terdapatnya percepatan pada gerak benda secara horizontal yang disimbolkan  $a_x$ . Sesuai persamaan (2.17) dan (3.2) maka diperoleh

$$F_{dx} = m a_x$$

$$\Leftrightarrow a_x = \frac{1}{m} F_{dx}$$

$$\Leftrightarrow a_x = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \rho C_d A v_x |v|. \quad (3.7)$$

Karena  $v_x$  dan  $a_x$  berturut-turut merupakan turunan pertama dan ke dua dari vektor  $x$  yang merepresentasikan posisi horizontal satelit terhadap waktu, persamaan (3.7) dapat pula dituliskan sebagai

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2m} \rho C_d A \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \quad (3.8)$$

Dengan menggunakan permisalan (3.5) dan kenyataan bahwa  $\rho$  adalah fungsi yang bergantung pada  $y$ , persamaan (3.8) selanjutnya dapat ditulis sebagai

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = kf(y) \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}. \quad (3.9)$$

Secara simultan, persamaan (3.6) dan (3.9) berlaku pada gerakan sebuah satelit yang mengorbit di sekeliling ekuator bumi dalam orbit sirkular. Persamaan inilah yang disebut sebagai persamaan *Satellite Progressive Decay*.

### 3.2. Skema Numerik Persamaan *Satellite Progressive Decay*

Penyelesaian persamaan *Satellite Progressive Decay* sukar untuk ditentukan secara eksak sehingga alternatif yang dapat ditempuh ialah

dengan mempergunakan metode numerik. Metode numerik yang dipergunakan untuk mencari solusi dari persamaan tersebut adalah metode Runge-Kutta orde empat untuk sistem persamaan diferensial yang kemudian dilanjutkan dan diperbaiki dengan menggunakan paduan antara metode Newton untuk sistem persamaan nonlinier dan formulasi beda hingga sebagai pendekatan turunan fungsi.

### 3.2.1. Diskritisasi Temporal

Dalam memodelkan *Satellite Progressive Decay*, lebar domain temporal (waktu) belum dapat diketahui pada awal pemodelan. Hal ini dikarenakan batas akhir domain tersebut adalah momen ketika satelit telah turun hingga mencapai ketinggian 180 km dari permukaan air laut, padahal waktu terjadinya peristiwa ini belum dapat ditentukan sebelum pemodelan dikerjakan secara tuntas. Meskipun demikian, diskritisasi tetap dapat dilakukan dengan mengambil suatu ukuran langkah tertentu ( $\Delta t$ ) kemudian membentuk grid yang disusun secara teratur berdasarkan titik awal yaitu  $t = 0$ . Dari diskritisasi ini akhirnya didapatkan sejumlah hingga titik yaitu  $t_0, t_1, t_2, \dots$  dengan  $t_r = r\Delta t$ .

### 3.2.2. Metode Beda Hingga untuk Pendekatan Nilai Turunan Fungsi

Pada diskritisasi temporal dengan mempergunakan metode beda hingga, nilai turunan pertama fungsi  $x$  maupun  $y$  didekati dengan beda hingga orde lima sedangkan turunan ke dua dari fungsi-fungsi tersebut didekati dengan beda hingga orde empat. Untuk menghitung pendekatan nilai turunan suatu fungsi pada suatu titik dibutuhkan nilai fungsi tersebut pada lima atau enam titik berbeda.

#### 3.2.2.1. Metode Beda Hingga untuk Pendekatan Nilai Turunan Pertama

Untuk enam titik pertama dalam domain temporal, aproksimasi nilai turunan pertama fungsi  $x$  dan  $y$  ditentukan berdasarkan nilai fungsi tersebut pada enam titik pertama yaitu  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4$ , dan  $t_5$ . Ekspansi deret Taylor fungsi  $f(t)$  di sekitar keenam titik tersebut adalah

$$\begin{aligned} f(t_1) &= f(t_0 + \Delta t) \\ &= f(t_0) + (\Delta t)f'(t_0) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2f''(t_0) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3f^{(3)}(t_0) \\ &\quad + \frac{1}{24}(\Delta t)^4f^{(4)}(t_0) + \frac{1}{120}(\Delta t)^5f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^6) \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned}
 f(t_2) &= f(t_0 + 2\Delta t) \\
 &= f(t_0) + 2(\Delta t)f'(t_0) + 2(\Delta t)^2 f''(t_0) + \frac{4}{3}(\Delta t)^3 f^{(3)}(t_0) \\
 &\quad + \frac{2}{3}(\Delta t)^4 f^{(4)}(t_0) + \frac{4}{15}(\Delta t)^5 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^6) \quad (3.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t_3) &= f(t_0 + 3\Delta t) \\
 &= f(t_0) + 3(\Delta t)f'(t_0) + \frac{9}{2}(\Delta t)^2 f''(t_0) + \frac{9}{2}(\Delta t)^3 f^{(3)}(t_0) \\
 &\quad + \frac{27}{8}(\Delta t)^4 f^{(4)}(t_0) + \frac{81}{40}(\Delta t)^5 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^6) \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t_4) &= f(t_0 + 4\Delta t) \\
 &= f(t_0) + 4(\Delta t)f'(t_0) + 8(\Delta t)^2 f''(t_0) + \frac{32}{3}(\Delta t)^3 f^{(3)}(t_0) \\
 &\quad + \frac{32}{3}(\Delta t)^4 f^{(4)}(t_0) + \frac{128}{15}(\Delta t)^5 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^6) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(t_5) &= f(t_0 + 5\Delta t) \\
 &= f(t_0) + 5(\Delta t)f'(t_0) + \frac{25}{2}(\Delta t)^2 f''(t_0) + \frac{125}{6}(\Delta t)^3 f^{(3)}(t_0) \\
 &\quad + \frac{625}{24}(\Delta t)^4 f^{(4)}(t_0) + \frac{625}{24}(\Delta t)^5 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^6). \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Formulasi beda hingga untuk mengaproksimasi nilai turunan pertama fungsi  $f(t)$  di sekitar  $t = t_r$  dengan menggunakan nilai fungsi tersebut pada enam titik pertama dapat disusun dengan memperhatikan bentuk

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_r} \approx \frac{1}{\Delta t} (a_0 f(t_0) + a_1 f(t_1) + a_2 f(t_2) + a_3 f(t_3) + a_4 f(t_4) + a_5 f(t_5)). \quad (3.15)$$

Ekspansi deret Taylor fungsi  $f'(t_r)$  yang muncul pada ruas kiri bentuk (3.15) adalah

$$\begin{aligned}
 f'(t_r) &= f'(t_0 + r\Delta t) \\
 &= f'(t_0) + r(\Delta t)f''(t_0) + \frac{1}{2}r^2(\Delta t)^2 f^{(3)}(t_0) + \frac{1}{6}r^3(\Delta t)^3 f^{(4)}(t_0) \\
 &\quad + \frac{1}{24}r^4(\Delta t)^4 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^5). \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, substitusi ekspansi deret Taylor (3.10) hingga (3.14) ke dalam ruas kanan bentuk (3.15) menghasilkan

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\Delta t} (a_0 f(t_0) + a_1 f(t_1) + a_2 f(t_2) + a_3 f(t_3) + a_4 f(t_4) + a_5 f(t_5)) \\
 &= \frac{1}{\Delta t} (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) f(t_0) + (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5) f'(t_0) \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2}a_3 + 8a_4 + \frac{25}{2}a_5\right) (\Delta t) f''(t_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{9}{2}a_3 + \frac{32}{3}a_4 + \frac{125}{6}a_5\right)(\Delta t)^2 f^{(3)}(t_0) \\
& + \left(\frac{1}{24}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{27}{8}a_3 + \frac{32}{3}a_4 + \frac{625}{24}a_5\right)(\Delta t)^3 f^{(4)}(t_0) \\
& + \left(\frac{1}{120}a_1 + \frac{4}{15}a_2 + \frac{81}{40}a_3 + \frac{128}{15}a_4 + \frac{625}{24}a_5\right)(\Delta t)^4 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^5). \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Dengan membandingkan suku-suku yang muncul pada persamaan (3.16) dan (3.17) akhirnya diperoleh sistem persamaan linear dengan enam variabel yaitu  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,$  dan  $a_5$ .

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 0 \\
a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 1 \\
\frac{1}{2}a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2}a_3 + 8a_4 + \frac{25}{2}a_5 &= r \\
\frac{1}{6}a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{9}{2}a_3 + \frac{32}{3}a_4 + \frac{125}{6}a_5 &= \frac{1}{2}r^2 \\
\frac{1}{24}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{27}{8}a_3 + \frac{32}{3}a_4 + \frac{625}{24}a_5 &= \frac{1}{6}r^3 \\
\frac{1}{120}a_1 + \frac{4}{15}a_2 + \frac{81}{40}a_3 + \frac{128}{15}a_4 + \frac{625}{24}a_5 &= \frac{1}{24}r^4. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Sistem persamaan ini dapat diselesaikan untuk menghasilkan koefisien-koefisien yang dibutuhkan dalam formulasi beda hingga. Untuk  $r = 0, 1, 2, 3, 4,$  dan  $5,$  formulasi beda hingga yang didapatkan adalah

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_0} = \frac{-137f_0 + 300f_1 - 300f_2 + 200f_3 - 75f_4 + 12f_5}{60\Delta t} + O(\Delta t^5) \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_1} = \frac{-12f_0 - 65f_1 + 120f_2 - 60f_3 + 20f_4 - 3f_5}{60\Delta t} + O(\Delta t^5) \quad (3.20)$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_2} = \frac{3f_0 - 30f_1 - 20f_2 + 60f_3 - 15f_4 + 2f_5}{60\Delta t} + O(\Delta t^5) \quad (3.21)$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_3} = \frac{-2f_0 + 15f_1 - 60f_2 + 20f_3 + 30f_4 - 3f_5}{60\Delta t} + O(\Delta t^5) \quad (3.22)$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_4} = \frac{3f_0 - 20f_1 + 60f_2 - 120f_3 + 65f_4 + 12f_5}{60\Delta t} + O(\Delta t^5) \quad (3.23)$$

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=t_5} = \frac{-12f_0 + 75f_1 - 200f_2 + 300f_3 - 300f_4 + 137f_5}{60\Delta t} + O(\Delta t^5) \quad (3.24)$$

dengan  $f_r = f(t_r)$ . Untuk  $r = 5,$  pendekatan nilai turunan pertama dapat diperoleh dengan mempergunakan nilai-nilai fungsi tersebut pada  $t_5$

itu sendiri dan lima titik sebelumnya. Kondisi ini dapat digeneralisasi juga untuk nilai-nilai  $r$  yang lebih besar, dengan demikian untuk  $r \geq 5$  rumus beda hingga yang dipergunakan adalah

$$\frac{df}{dt} \Big|_{t=t_r} = \frac{-12f_{r-5} + 75f_{r-4} - 200f_{r-3} + 300f_{r-2} - 300f_{r-1} + 137f_r}{12\Delta t} + O(\Delta t^5). \quad (3.25)$$

Persamaan (3.19) hingga (3.25) adalah formulasi beda hingga yang dapat dipergunakan untuk menentukan pendekatan nilai turunan pertama fungsi  $y$  maupun  $x$  secara numerik.

### 3.2.2.2. Metode Beda Hingga untuk Pendekatan Nilai Turunan ke Dua

Seperti pada pendekatan nilai turunan pertama, aproksimasi nilai turunan ke dua dari fungsi  $x$  dan  $y$  untuk enam titik pertama dalam domain temporal ditentukan berdasarkan nilai fungsi tersebut pada enam titik pertama yaitu  $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4,$  dan  $t_5$ . Formulasi beda hingga untuk mengaproksimasi nilai turunan ke dua fungsi  $f(t)$  di sekitar  $t = t_r$  dengan mempergunakan nilai fungsi tersebut pada enam titik pertama dapat disusun dengan memperhatikan bentuk

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_r} \approx \frac{(a_0 f(t_0) + a_1 f(t_1) + a_2 f(t_2) + a_3 f(t_3) + a_4 f(t_4) + a_5 f(t_5))}{(\Delta t)^2}. \quad (3.26)$$

Ekspansi deret Taylor fungsi  $f''(t_r)$  pada ruas kiri bentuk (3.26) adalah

$$\begin{aligned} f''(t_r) &= f''(t^0 + r\Delta t) \\ &= f''(t^0) + r(\Delta t)f'''(t^0) + \frac{1}{2}r^2(\Delta t)^2 f^{(4)}(t^0) \\ &\quad + \frac{1}{6}r^3(\Delta t)^3 f^{(5)}(t^0) + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Selanjutnya, substitusi ekspansi deret Taylor (3.10) hingga (3.14) ke dalam ruas kanan bentuk (3.26) menghasilkan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(\Delta t)^2} (a_0 f(t_0) + a_1 f(t_1) + a_2 f(t_2) + a_3 f(t_3) + a_4 f(t_4) + a_5 f(t_5)) \\ &= \frac{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{(\Delta t)^2} f(t_0) + \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5}{\Delta t} f'(t_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{1}{2} a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2} a_3 + 8a_4 + \frac{25}{2} a_5\right) f''(t_0) \\
& + \left(\frac{1}{6} a_1 + \frac{4}{3} a_2 + \frac{9}{2} a_3 + \frac{32}{3} a_4 + \frac{125}{6} a_5\right) (\Delta t) f^{(3)}(t_0) \\
& + \left(\frac{1}{24} a_1 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{27}{8} a_3 + \frac{32}{3} a_4 + \frac{625}{24} a_5\right) (\Delta t)^2 f^{(4)}(t_0) \\
& + \left(\frac{1}{120} a_1 + \frac{4}{15} a_2 + \frac{81}{40} a_3 + \frac{128}{15} a_4 + \frac{625}{24} a_5\right) (\Delta t)^3 f^{(5)}(t_0) + O(\Delta t^4). \quad (3.28)
\end{aligned}$$

Dengan membandingkan suku-suku yang muncul pada persamaan (3.27) dan (3.28) akhirnya diperoleh sistem persamaan linear dengan enam variabel yaitu  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4,$  dan  $a_5$ .

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= 0 \\
a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 &= 0 \\
\frac{1}{2} a_1 + 2a_2 + \frac{9}{2} a_3 + 8a_4 + \frac{25}{2} a_5 &= 1 \\
\frac{1}{6} a_1 + \frac{4}{3} a_2 + \frac{9}{2} a_3 + \frac{32}{3} a_4 + \frac{125}{6} a_5 &= r \\
\frac{1}{24} a_1 + \frac{2}{3} a_2 + \frac{27}{8} a_3 + \frac{32}{3} a_4 + \frac{625}{24} a_5 &= \frac{1}{2} r^2 \\
\frac{1}{120} a_1 + \frac{4}{15} a_2 + \frac{81}{40} a_3 + \frac{128}{15} a_4 + \frac{625}{24} a_5 &= \frac{1}{6} r^3. \quad (3.29)
\end{aligned}$$

Sistem persamaan ini dapat diselesaikan untuk menghasilkan koefisien-koefisien yang dibutuhkan dalam formulasi beda hingga. Untuk  $r = 0, 1, 2, 3, 4,$  dan  $5,$  formulasi beda hingga yang didapatkan adalah

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_0} = \frac{45f_0 - 154f_1 + 214f_2 - 156f_3 + 61f_4 - 10f_5}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4) \quad (3.30)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_1} = \frac{10f_0 - 15f_1 - 4f_2 + 14f_3 - 6f_4 + f_5}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4) \quad (3.31)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_2} = \frac{-f_0 + 16f_1 - 30f_2 + 16f_3 - f_4}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4) \quad (3.32)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_3} = \frac{-f_1 + 16f_2 - 30f_3 + 16f_4 - f_5}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4) \quad (3.33)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_4} = \frac{f_0 - 6f_1 + 14f_2 - 4f_3 - 15f_4 + 10f_5}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4) \quad (3.34)$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_{t=t_5} = \frac{-10f_0 + 61f_1 - 156f_2 + 214f_3 - 154f_4 + 45f_5}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4) \quad (3.35)$$

dengan  $f_r = f(t_r)$ . Untuk  $r = 5$ , pendekatan nilai turunan ke dua dapat diperoleh dengan mempergunakan nilai-nilai fungsi tersebut pada  $t_5$  itu sendiri dan lima titik sebelumnya. Kondisi ini dapat digeneralisasi juga untuk nilai-nilai  $r$  yang lebih besar, dengan demikian untuk  $r \geq 5$  rumus beda hingga yang dipergunakan adalah

$$\left. \frac{d^2 f}{dt^2} \right|_{t=t_r} = \frac{-10f_{r-5} + 61f_{r-4} - 156f_{r-3} + 214f_{r-2} - 154f_{r-1} + 45f_r}{12(\Delta t)^2} + O(\Delta t^4). \quad (3.36)$$

Persamaan (3.30) hingga (3.36) adalah formulasi beda hingga yang dapat dipergunakan untuk menentukan pendekatan nilai turunan ke dua fungsi  $y$  maupun  $x$  secara numerik

### 3.2.3. Perhitungan Nilai Fungsi pada $t_1, t_2, t_3, t_4$ , dan $t_5$

Untuk menentukan nilai fungsi  $y$  maupun  $x$  pada sejumlah titik pertama dalam domain temporal yaitu  $t_1, t_2, t_3, t_4$ , dan  $t_5$  digunakan metode Runge-Kutta orde empat yang kemudian diperbaiki dengan memanfaatkan metode Newton.

#### 3.2.3.1. Metode Runge-Kutta sebagai Aproksimasi Awal

Pada dasarnya persamaan (3.9) dan (3.6) berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk yang lebih sederhana yaitu

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = Q_1 \left( t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (3.37)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = Q_2 \left( t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right), \quad (3.38)$$

dengan syarat awal

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = Vx_0$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = Vy_0.$$

Apabila diterapkan dalam algoritma Runge-Kutta, persamaan (3.37) dan (3.39) hanya akan menghasilkan nilai-nilai fungsi  $x'$  dan  $y'$ . Agar nantinya dapat dihasilkan pula nilai-nilai fungsi  $x$  dan  $y$  pada setiap

iterasi, perlu disusun dua buah persamaan baru sebagai pelengkap yaitu

$$Q_3\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} \quad (3.39)$$

$$Q_4\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \frac{dy}{dt} \quad (3.40)$$

Bertolak dari syarat awal yang diberikan, nilai fungsi  $x'$ ,  $y'$ ,  $x$ , maupun  $y$  pada  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ , dan  $t_5$  dapat dihitung dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat menurut formulasi

$$\frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_{r+1}} = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_r} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) \quad (3.41)$$

$$\frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_{r+1}} = \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_r} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) \quad (3.42)$$

$$x_{r+1} = x_r + \frac{1}{6}(k_{1,3} + 2k_{2,3} + 2k_{3,3} + k_{4,3}) \quad (3.43)$$

$$y_{r+1} = y_r + \frac{1}{6}(k_{1,4} + 2k_{2,4} + 2k_{3,4} + k_{4,4}), \quad (3.44)$$

dengan

$$k_{1,j} = (\Delta t)Q_j(t_r, x_r, y_r, (x')_r, (y')_r)$$

$$k_{2,j} = (\Delta t)Q_j(t_r + \frac{1}{2}\Delta t, x_r + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_r + \frac{1}{2}k_{1,2}, (x')_r + \frac{1}{2}k_{1,3}, (y')_r + \frac{1}{2}k_{1,4})$$

$$k_{3,j} = (\Delta t)Q_j(t_r + \frac{1}{2}\Delta t, x_r + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_r + \frac{1}{2}k_{2,2}, (x')_r + \frac{1}{2}k_{2,3}, (y')_r + \frac{1}{2}k_{2,4})$$

$$k_{4,j} = (\Delta t)Q_j(t_r + \Delta t, x_r + k_{3,1}, y_r + k_{3,2}, (x')_r + k_{3,3}, (y')_r + k_{3,4})$$

untuk  $j = 1, 2, 3$ , dan  $4$ .

### 3.2.3.2. Metode Newton untuk Memperbaiki Hasil Aproksimasi Sebelumnya

Nilai-nilai fungsi  $x'$ ,  $y'$ ,  $x$ , maupun  $y$  pada  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$ ,  $t_4$ , dan  $t_5$  yang sebelumnya telah diperoleh dengan mempergunakan metode Runge-Kutta orde empat kemudian diperbaiki dengan menggunakan metode Newton. Apabila dimisalkan

$$U(t) = \frac{d^2x}{dt^2} - kf(y) \frac{dx}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \quad (3.45)$$

$$V(t) = \frac{d^2y}{dt^2} - kf(y) \frac{dy}{dt} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} + g(y), \quad (3.46)$$

maka diperoleh

$$U(t) = 0 \quad (3.47)$$

$$V(t) = 0. \quad (3.48)$$

Dengan demikian, setiap solusi yang memenuhi persamaan (3.45) dan (3.46) haruslah memenuhi pula persamaan (3.47) dan (3.48).

Untuk menghitung pendekatan nilai fungsi U dan V pada  $t_1, t_2, t_3, t_4,$  dan  $t_5,$  formulasi beda hingga yang telah diperoleh pada langkah sebelumnya disubstitusikan pada turunan pertama dan ke dua yang bersesuaian pada persamaan (3.49) dan (3.50) berikut ini.

$$U(t_r) = \frac{d^2x}{dt^2} \Big|_{t=t_r} - kf(y_r) \frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_r} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_r}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_r}\right)^2} \quad (3.49)$$

$$V(t_r) = \frac{d^2y}{dt^2} \Big|_{t=t_r} + g(y_r) - kf(y_r) \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_r} \sqrt{\left(\frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_r}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt} \Big|_{t=t_r}\right)^2}. \quad (3.50)$$

Substitusi persamaan (3.19) hingga (3.23) dan (3.30) hingga (3.34) ke dalam persamaan (3.45) dan (3.46) akan menghasilkan rumus pendekatan nilai fungsi  $U(t_0), U(t_1), U(t_2), U(t_3), U(t_4), V(t_0), V(t_1), V(t_2), V(t_3),$  dan  $V(t_4)$  yang masing-masing melibatkan nilai  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4,$  dan  $x_5$  serta  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4,$  dan  $y_5.$  Karena nilai  $x_0$  dan  $y_0$  telah diberikan sebagai kondisi awal, kesepuluh rumus pendekatan nilai fungsi U dan V membentuk suatu sistem persamaan nonlinear dengan sepuluh variabel yang belum diketahui nilainya yaitu  $x_1, x_2, x_3, x_4,$  dan  $x_5$  serta  $y_1, y_2, y_3, y_4,$  dan  $y_5.$

Sesuai dengan bentuk (2.15), sistem persamaan yang dihasilkan adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^5 x_j^s \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^5 y_j^s \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s} \\ & = U_i^s + \sum_{j=1}^5 x_j^{s+1} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^5 y_j^{s+1} \frac{\partial U_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^5 x_j^s \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^5 y_j^s \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s} \\ &= V_i^s + \sum_{j=1}^5 x_j^{s+1} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \Big|_{x_j = x_j^s} + \sum_{j=1}^5 y_j^{s+1} \frac{\partial V_i}{\partial y_j} \Big|_{y_j = y_j^s} \end{aligned} \quad (3.51)$$

dengan  $i = 0, 1, \dots, 4$  dan  $U_i = U(t_i)$ . Sistem persamaan ini dapat pula dituliskan dalam bentuk perkalian matriks

$$\begin{aligned} \Phi \Psi^s &= \Omega^s + \Phi \Psi^{s+1} \\ \Leftrightarrow \Phi \Psi^{s+1} &= \Phi \Psi^s - \Omega^s \\ \Leftrightarrow \Psi^{s+1} &= \Psi^s - \Phi^{-1} \Omega^s \end{aligned} \quad (3.52)$$

dengan

$$\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = x_1^s} & \dots & \frac{\partial U_0}{\partial x_5} \Big|_{x_5 = x_5^s} & \frac{\partial U_0}{\partial y_1} \Big|_{y_1 = y_1^s} & \dots & \frac{\partial U_0}{\partial y_5} \Big|_{y_5 = y_5^s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial U_4}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = x_1^s} & \dots & \frac{\partial U_4}{\partial x_5} \Big|_{x_5 = x_5^s} & \frac{\partial U_4}{\partial y_1} \Big|_{y_1 = y_1^s} & \dots & \frac{\partial U_4}{\partial y_5} \Big|_{y_5 = y_5^s} \\ \frac{\partial V_0}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = x_1^s} & \dots & \frac{\partial V_0}{\partial x_5} \Big|_{x_5 = x_5^s} & \frac{V_0}{\partial y_1} \Big|_{y_1 = y_1^s} & \dots & \frac{\partial V_0}{\partial y_5} \Big|_{y_5 = y_5^s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial V_4}{\partial x_1} \Big|_{x_1 = x_1^s} & \dots & \frac{\partial V_4}{\partial x_5} \Big|_{x_5 = x_5^s} & \frac{\partial V_4}{\partial y_1} \Big|_{y_1 = y_1^s} & \dots & \frac{\partial V_4}{\partial y_5} \Big|_{y_5 = y_5^s} \end{pmatrix}$$

$$\Psi^s = \begin{pmatrix} x_1^s \\ \vdots \\ x_5^s \\ y_1^s \\ \vdots \\ y_5^s \end{pmatrix} \quad \Omega^s = \begin{pmatrix} U_0^s \\ \vdots \\ U_4^s \\ V_0^s \\ \vdots \\ V_4^s \end{pmatrix}$$

Pada matriks  $\Phi$ , nilai turunan fungsi dihitung dengan menggunakan beda hingga orde empat sebagai berikut

$$\frac{\partial f}{\partial c} \Big|_{c=c_r} = \frac{c_{r-2} - 8c_{r-1} + 8c_{r+1} - c_{r+2}}{12\Delta c} + O(\Delta c^4) \quad (3.53)$$

Untuk  $s = 0$ , nilai  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , dan  $x_5$  serta  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , dan  $y_5$  yang diisikan pada matriks  $\Psi^s$  adalah nilai-nilai yang telah didapatkan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Perhitungan dengan mempergunakan persamaan (3.52) untuk menghasilkan matriks  $\Psi^{s+1}$  dilakukan secara terus-menerus hingga nilai  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , dan  $x_5$  serta  $y_1, y_2, y_3, y_4$ , dan  $y_5$  yang didapatkan konvergen menuju nilai-nilai tertentu. Dengan demikian, perulangan tersebut dapat dihentikan jika matriks  $\Psi^{s+1}$  telah cukup menyamai  $\Psi^s$ . Dalam hal ini, kondisi  $|\Psi^{s+1} - \Psi^s| < 0.01 \% \Psi^{s+1}$  sudah cukup memadai sebagai syarat henti.

### 3.2.4. Perhitungan Nilai Fungsi pada $t_r$ dengan $r > 5$

Untuk menentukan nilai fungsi  $y$  maupun  $x$  pada titik-titik berikutnya dalam domain temporal kembali dipergunakan metode Runge-Kutta orde empat yang kemudian diperbaiki memanfaatkan metode Newton. Pada tahap ini, formulasi beda hingga yang disubstitusikan pada turunan pertama dan ke dua yang bersesuaian pada persamaan (3.49) dan (3.50) adalah persamaan (3.24) dan (3.36). Proses substitusi ini akan menghasilkan rumus pendekatan nilai fungsi  $U(t_r)$  dan  $V(t_r)$  yang masing-masing melibatkan nilai  $x_{r-5}, x_{r-4}, x_{r-3}, x_{r-2}, x_{r-1}$ , dan  $x_r$  serta  $y_{r-5}, y_{r-4}, y_{r-3}, y_{r-2}, y_{r-1}$ , dan  $y_r$ . Karena nilai  $x_{r-5}, x_{r-4}, x_{r-3}, x_{r-2}$ , dan  $x_{r-1}$  serta  $y_{r-5}, y_{r-4}, y_{r-3}, y_{r-2}$ , dan  $y_{r-1}$  untuk  $r > 5$  telah didapatkan melalui iterasi sebelumnya, rumus pendekatan nilai fungsi  $U(t_r)$  dan  $V(t_r)$  akan membentuk sistem persamaan nonlinear dengan dua variabel yang belum diketahui nilainya yaitu  $x_r$  dan  $y_r$ .

$$\begin{aligned}
 & x_r^s \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} + y_r^s \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \\
 &= U_r^s + x_r^{s+1} \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} + y_r^{s+1} \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \\
 & x_r^s \frac{\partial V_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} + y_r^s \frac{\partial V_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \\
 &= V_r^s + x_r^{s+1} \frac{\partial V_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} + y_r^{s+1} \frac{\partial V_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

dengan  $r > 5$  dan  $U_i = U(t_i)$ . Dari sistem tersebut akhirnya diperoleh bentuk

$$\begin{pmatrix} x_r^{s+1} \\ y_r^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r^s \\ y_r^s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} & \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \\ \frac{\partial V_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} & \frac{\partial V_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_r^s \\ V_r^s \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

yang pada akhirnya menghasilkan

$$x_r^{s+1} = x_r^s - \begin{pmatrix} U_r \frac{\partial V_r}{\partial y_r} - V_r \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \\ \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \frac{\partial V_r}{\partial y_r} - \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \frac{\partial V_r}{\partial x_r} \end{pmatrix} \Big|_{x_r = x_r^s, y_r = y_r^s} \quad (3.56)$$

$$y_r^{s+1} = y_r^s - \begin{pmatrix} -U_r \frac{\partial V_r}{\partial x_r} + V_r \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \\ \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \frac{\partial V_r}{\partial y_r} - \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \frac{\partial V_r}{\partial x_r} \end{pmatrix} \Big|_{x_r = x_r^s, y_r = y_r^s} \quad (3.57)$$

Iterasi ini terus dilakukan hingga nilai  $|y_r^{s+1} - y_r^s|$  maupun  $|x_r^{s+1} - x_r^s|$  lebih kecil dari batas henti yang dikehendaki, untuk hal ini pemilihan syarat henti

$$\begin{aligned} |y_r^{s+1} - y_r^s| &< 10^{-4} y_r^{s+1} \\ |x_r^{s+1} - x_r^s| &< 10^{-4} x_r^{s+1} \end{aligned}$$

sudah cukup memadai.

Ketika nilai  $y_r$  kurang dari atau sama dengan 180000 meter, ini menandakan bahwa satelit telah mengalami *reentry*. Perhitungan nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  dihentikan pada kondisi ini dan masa aktif satelit tersebut dapat ditaksir dengan memperhatikan nilai akhir  $t_r$ .

### 3.3. Algoritma dan *Flowchart* Skema Numerik Persamaan *Satellite Progressive Decay*

Algoritma skema numerik untuk menyelesaikan persamaan *Satellite Progressive Decay* adalah sebagai berikut.

Input :  $m$  (massa satelit)

$C_d$  (koefisien drag satelit)

$A$  (area satelit yang menghadap arah gerakan)

$\Delta t$  (lebar grid temporal)

$x_0$  (posisi horisontal awal satelit)

$y_0$  (ketinggian awal satelit)

$Vx_0$  (kecepatan horisontal awal satelit)

$Vy_0$  (kecepatan vertikal awal satelit)

$Rf$  (fluks radiasi matahari)

$Ap$  (indeks geomagnetik)

Output :  $x_r$  (posisi horisontal satelit pada  $t_r$  diukur dari posisi awal)

$y_r$  (ketinggian satelit pada  $t_r$  diukur dari permukaan air laut)

$t_r$  (taksiran waktu terjadinya *reentry*)

Langkah-langkah :

Langkah 1 : untuk  $r = 1, 2, \dots, 5$  nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan memanfaatkan syarat-syarat awal sebagai titik tolak

Langkah 2 : untuk  $i = 1, 2, \dots, 5$  dan  $j = 1, 2, \dots, 5$ , hitung nilai  $\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ ,  $\frac{\partial U_i}{\partial y_j}$ ,  $\frac{\partial V_i}{\partial x_j}$ , dan  $\frac{\partial V_i}{\partial y_j}$  dengan menggunakan nilai-nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  yang telah didapatkan

Langkah 3 : bentuk matriks  $\Phi$ ,  $\Psi$ , dan  $\Omega$  berdasarkan nilai-nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  yang telah didapatkan

Langkah 4 : selesaikan sistem persamaan

$$\Psi^{s+1} = \Psi^s - \Phi^{-1} \Omega^s$$

untuk mendapatkan nilai-nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  baru

Langkah 5 : apabila

$$|\Psi^{s+1} - \Psi^s| \geq 10^{-4} \Psi^{s+1}$$

lakukan kembali langkah 2 hingga 4

Langkah 6 : apabila nilai  $y_r$  untuk  $r$  terbesar masih lebih dari 180 km lakukan langkah 7 hingga 10

Langkah 7 : untuk  $r > 5$  nilai  $x_r$  dan  $y_r$  dihitung menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan memanfaatkan nilai-nilai fungsi pada waktu sebelumnya sebagai titik tolak

Langkah 8 : hitung nilai  $\frac{\partial U}{\partial x}$  dan  $\frac{\partial V}{\partial y}$  dengan menggunakan nilai-nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  yang telah didapatkan

Langkah 9 : hitung nilai-nilai fungsi  $x_r$  dan  $y_r$  baru menurut rumus

$$\begin{pmatrix} x_r^{s+1} \\ y_r^{s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r^s \\ y_r^s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial U_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} & \frac{\partial U_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \\ \frac{\partial V_r}{\partial x_r} \Big|_{x_r = x_r^s} & \frac{\partial V_r}{\partial y_r} \Big|_{y_r = y_r^s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_r^s \\ V_r^s \end{pmatrix}$$

Langkah 10 : apabila

$$|y_r^{s+1} - y_r^s| \geq 10^{-4} y_r^{s+1}$$

$$|x_r^{s+1} - x_r^s| \geq 10^{-4} x_r^{s+1},$$

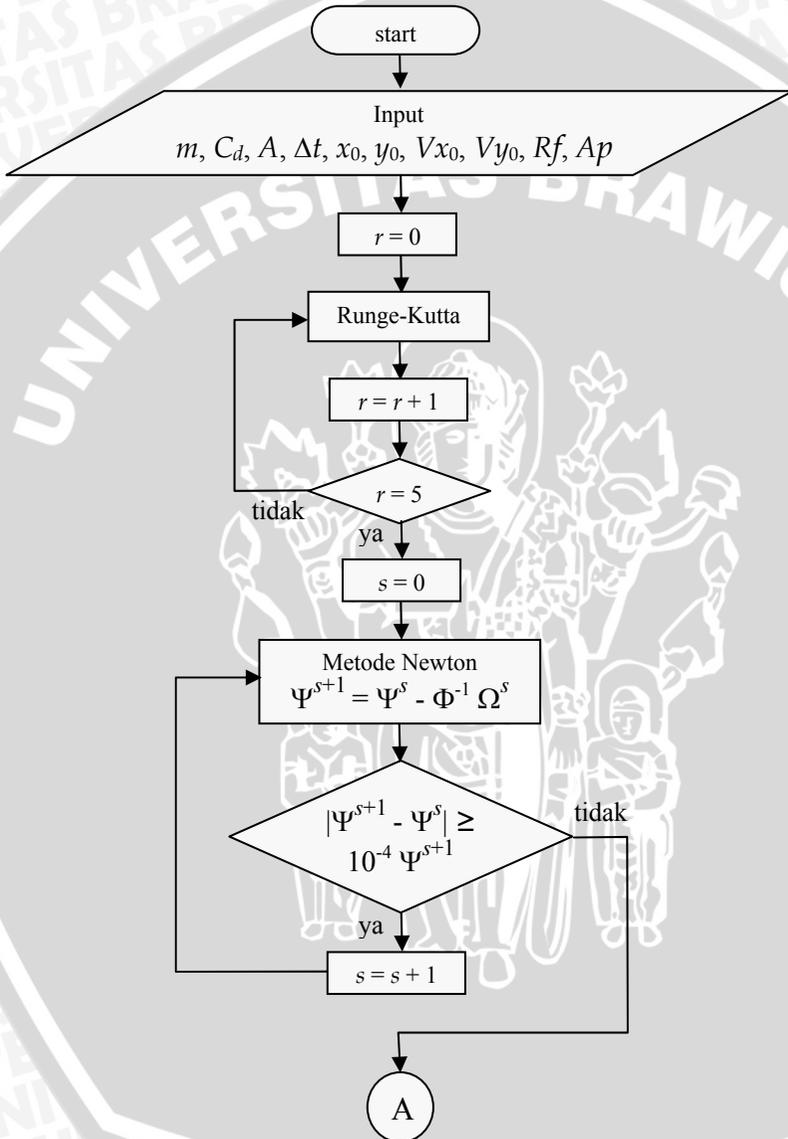
lakukan kembali langkah 8 dan 9

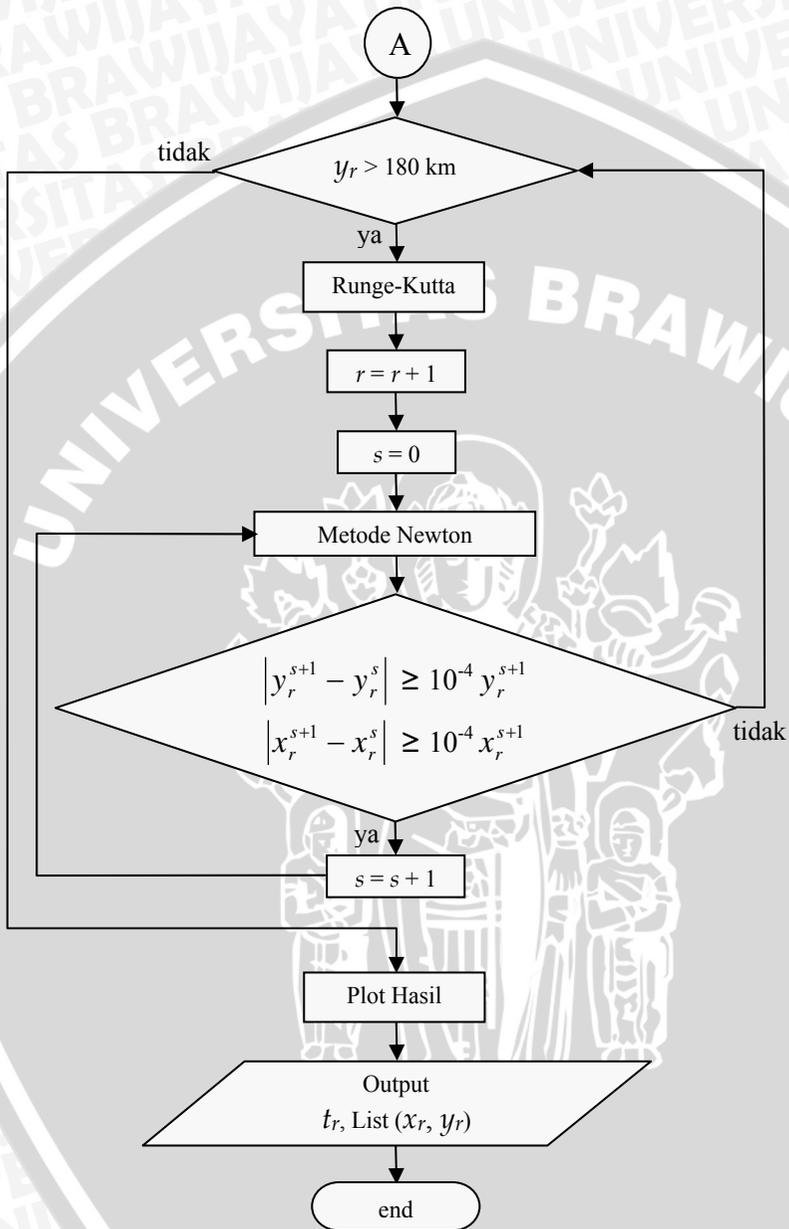
Langkah 11 : plot nilai-nilai  $x_r$  dan  $y_r$  yang telah didapatkan

Langkah 12 : prediksi waktu terjadinya *reentry* berdasarkan nilai  $t_r$  untuk  $r$  terakhir

Langkah 13 : selesai

Flowchart skema numerik untuk menyelesaikan persamaan *Satellite Progressive Decay* adalah sebagai berikut.





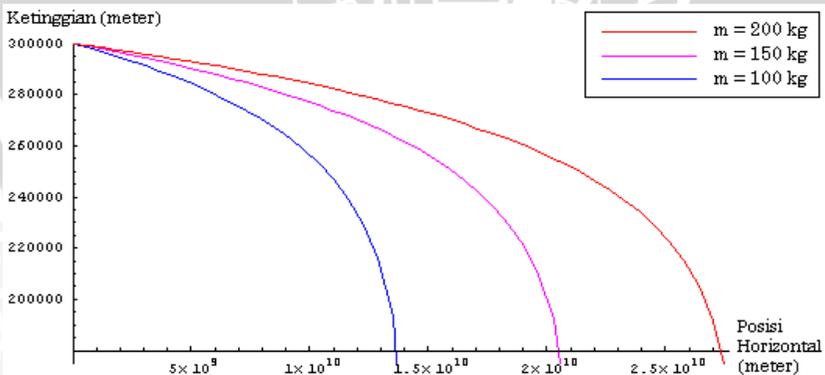
Gambar 3.2. Flowchart skema numerik persamaan *Satellite Progressive Decay*

### 3.4 Analisis dan Interpretasi Solusi Numerik Persamaan *Satellite Progressive Decay*

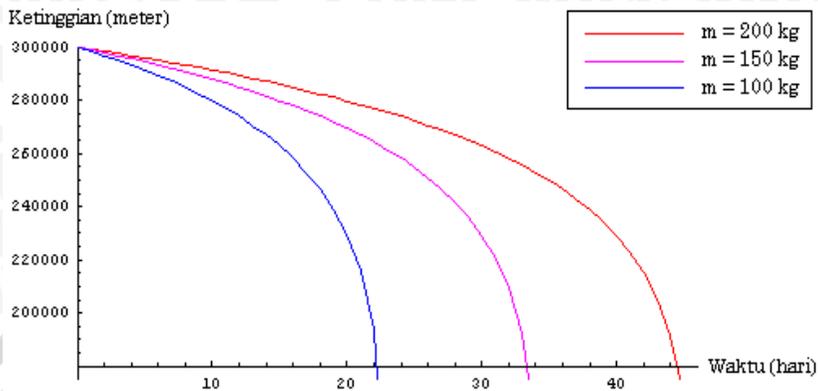
Dengan mempergunakan skema numerik yang telah dikonstruksi, solusi numerik persamaan *Satellite Progressive Decay* dapat diperoleh untuk tiap-tiap kasus. Keluaran yang dihasilkan melalui skema tersebut antara lain posisi horisontal dan vertikal satelit dari waktu ke waktu yang selanjutnya dapat dipergunakan untuk memperkirakan waktu terjadinya peristiwa *reentry*. Untuk mengetahui pengaruh masing-masing besaran yang terlibat dalam persamaan *Satellite Progressive Decay* seperti massa, area frontal, koefisien drag, serta fluks radiasi matahari dan indeks geomagnetik terhadap pergerakan satelit, berikut ini akan ditunjukkan hasil yang diperoleh dari skema numerik dengan melakukan berbagai variasi pada nilai besaran-besaran tersebut.

#### 3.4.1 Pengaruh Massa Satelit terhadap Gerakan Satelit dan Waktu Terjadinya *Reentry*

Seperti tercantum pada persamaan (3.3) dan (3.7), besarnya percepatan (atau perlambatan) yang dialami oleh sebuah satelit pada orbitnya turut dipengaruhi oleh massa dari satelit tersebut. Untuk mengetahui pengaruh massa terhadap pergerakan satelit di angkasa beserta masa aktifnya, berikut ini ditunjukkan hasil yang diperoleh dari skema numerik dengan beberapa nilai massa berbeda. Satelit yang dipergunakan pada kasus ini memiliki area frontal  $1 \text{ m}^2$ , koefisien drag sebesar 2,2, dan ketinggian awal 300 km. Diasumsikan pula bahwa simulasi ini dijalankan pada kondisi ketika aktivitas matahari mendekati titik minimum dengan  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$ .



Gambar 3.3. Plot gerakan satelit dengan massa 100, 150, dan 200 kg pada kondisi  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300 \text{ km}$ ,  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$



Gambar 3.4. Plot ketinggian satelit dengan massa 100, 150, dan 200 kg pada kondisi  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300 \text{ km}$ ,  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$

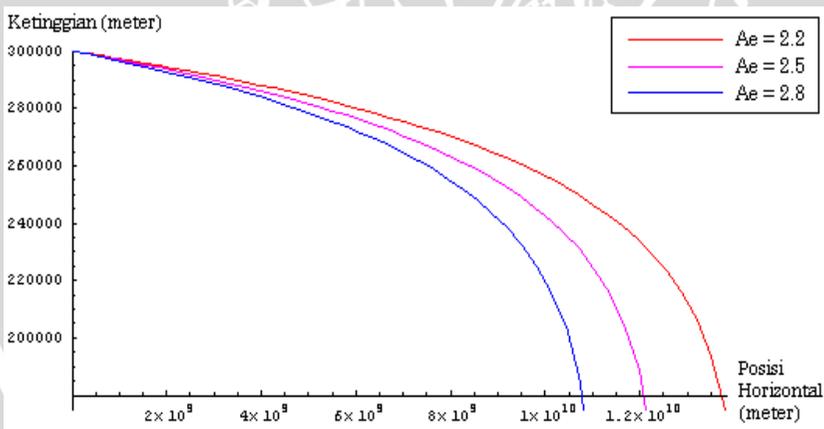
Gambar 3.3 dan 3.4 menunjukkan bahwa massa sebuah satelit menentukan masa aktifnya di angkasa. Semakin besar massa satelit, semakin lama pulalah masa aktifnya. Untuk satelit dengan massa 200 kg, peristiwa *reentry* baru akan terjadi pada hari ke-44 yaitu setelah satelit tersebut menempuh jarak horisontal lebih dari 27 juta kilometer yang kira-kira dicapai dalam 674 kali revolusi mengitari planet bumi. Untuk satelit-satelit yang memiliki massa lebih kecil, peristiwa *reentry* akan terjadi lebih cepat dan jarak horisontal yang dapat ditempuh oleh satelit sebelum memasuki periode nonaktif jauh lebih pendek. Sebagaimana tertera pada Gambar 3.4, satelit dengan massa 150 dan 100 kg masing-masing mengalami *reentry* pada hari ke-33 dan ke-22 semenjak satelit tersebut dioperasikan pada orbitnya di antariksa.

Pengaruh massa satelit terhadap masa aktifnya dapat dijelaskan dengan menggunakan fakta sederhana bahwa benda yang memiliki massa lebih besar mampu mengatasi hambatan udara dengan lebih baik. Seperti seringkali teramati di alam, benda-benda yang massanya tidak cukup besar dapat dengan mudah dipengaruhi oleh hantaman yang ditimbulkan oleh udara sehingga benda tersebut akan terombang-ambing dalam gerakannya. Secara teoritis, gerakan sebuah satelit yang mampu mengatasi hambatan udara dengan baik dapat menyamai gerakan benda yang menempuh lintasan sirkular pada ruang hampa. Pada kasus semacam ini, gerakan satelit itu sendiri dapat mengimbangi tarikan gravitasi bumi sehingga radius orbit

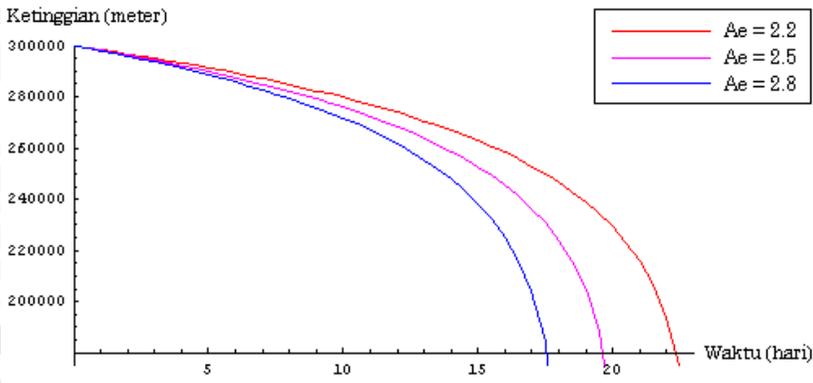
sirkular tersebut hampir tidak mengalami perubahan. Apabila massa sebuah satelit tidak cukup besar, pengaruh hambatan udara terhadap satelit itu akan cukup besar pula sehingga pengaruh gravitasi bumi tidak dapat diimbangi oleh gerakan satelit. Hal ini mengakibatkan ketinggian satelit itu berkurang lebih cepat dan mengalami *reentry* dalam waktu yang lebih cepat pula.

### 3.4.2 Pengaruh Area Frontal dan Koefisien Drag terhadap Gerakan Satelit dan Waktu Terjadinya *Reentry*

Menurut persamaan (2.23), besarnya gaya hambat udara yang diderita oleh suatu benda ditentukan oleh hasil perkalian antara area frontal dan koefisien drag yang disebut sebagai area efektif. Untuk mengetahui pengaruh besarnya area efektif terhadap pergerakan satelit di antariksa beserta masa aktifnya, berikut ini ditunjukkan hasil yang diperoleh dari skema numerik dengan beberapa nilai  $A_e$  berbeda. Satelit yang dipergunakan pada kasus ini adalah satelit dengan massa 100 kg dan ketinggian awal 300 km. Diasumsikan pula bahwa simulasi ini dijalankan pada kondisi ketika aktivitas matahari mendekati titik minimum dengan  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$ .



Gambar 3.5. Plot gerakan satelit dengan area efektif 2,2, 2,5, dan 2,8 m<sup>2</sup> pada kondisi  $m = 100$  kg,  $y_0 = 300$  km,  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$



Gambar 3.6. Plot ketinggian satelit dengan area efektif 2,2, 2,5, dan 2,8  $\text{m}^2$  pada kondisi  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $y_0 = 300 \text{ km}$ ,  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$

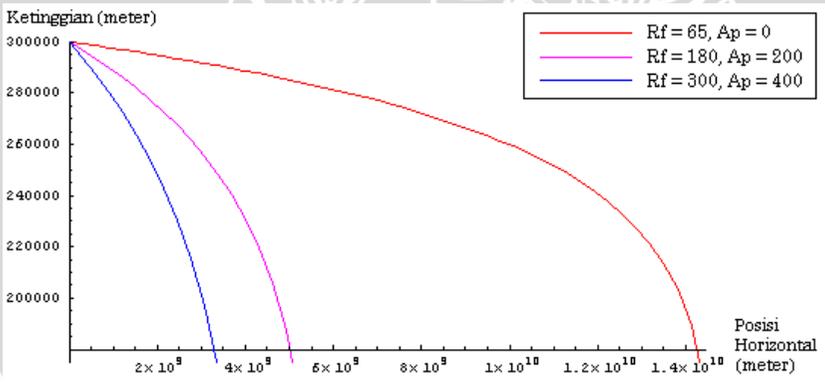
Gambar 3.5 dan 3.6 menunjukkan bahwa area efektif sebuah satelit menentukan masa aktifnya di antariksa. Semakin luas area efektif sebuah satelit, semakin pendeklah masa aktifnya. Untuk satelit dengan area efektif  $2,2 \text{ m}^2$ , *reentry* baru akan terjadi pada hari ke-22 sedangkan untuk satelit-satelit yang memiliki area efektif lebih luas, peristiwa *reentry* justru akan terjadi lebih cepat dan jarak horisontal yang dapat ditempuh oleh satelit sebelum memasuki periode nonaktif jauh lebih pendek. Sebagaimana tertera pada Gambar 3.6, satelit dengan area efektif  $2,5$  dan  $2,8 \text{ m}^2$  masing-masing mengalami peristiwa *reentry* pada hari ke-17 dan ke-19 semenjak satelit tersebut dioperasikan pada orbitnya di angkasa.

Pada benda yang melakukan gerakan di atmosfer, gaya hambat udara bekerja pada setiap satuan luas dari area frontal benda tersebut. Semakin luas permukaan benda yang menghadap arah gerakan, semakin besar pulalah hambatan udara yang dirasakan oleh benda tersebut. Hal serupa terjadi pula apabila nilai koefisien drag yang dimiliki oleh benda tersebut semakin besar. Untuk satelit-satelit yang memiliki area frontal dan koefisien drag cukup besar, gaya hambat udara yang diderita oleh satelit akan cukup besar pula sehingga gerakan satelit tidak dapat mengimbangi tarikan gravitasi bumi. Hal ini mengakibatkan ketinggian satelit tersebut berkurang lebih cepat dan mengalami *reentry* dalam waktu yang lebih cepat pula.

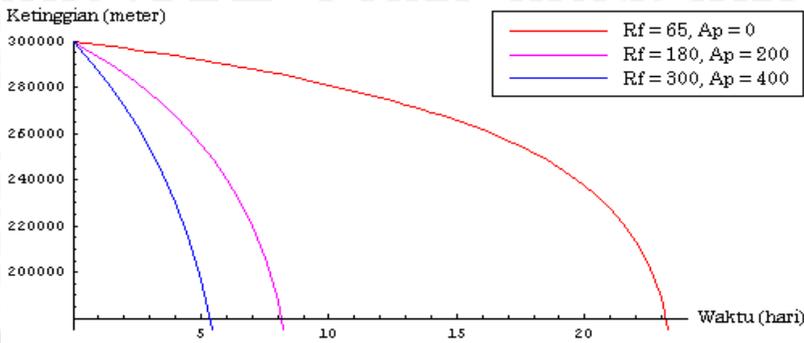
### 3.4.3 Pengaruh Aktivitas Matahari terhadap Gerakan Satelit dan Waktu Terjadinya *Reentry*

Menurut persamaan (2.23), besarnya gaya hambat udara yang diderita oleh suatu benda bergantung pada kerapatan atmosfer bumi sementara kerapatan atmosfer itu sendiri dipengaruhi oleh besarnya fluks radiasi matahari dan nilai indeks geomagnetik. Pada dasarnya, kedua besaran tersebut merepresentasikan efek aktifitas matahari terhadap atmosfer dan medan magnet bumi. Apabila aktivitas matahari berada pada titik maksimum, nilai kedua besaran tersebut mencapai maksimum pula. Fluks radiasi matahari dan indeks geomagnetik baru akan mengalami penurunan ketika aktivitas matahari berangsur-angsur mencapai titik minimum.

Untuk mengetahui pengaruh aktivitas matahari terhadap gerakan satelit di antariksa beserta masa aktifnya, berikut ini ditunjukkan hasil yang diperoleh dari skema numerik dengan beberapa nilai  $R_f$  dan  $A_p$  berbeda. Satelit yang dipergunakan pada kasus ini adalah satelit dengan massa 100 kg, area frontal 1 m<sup>2</sup>, koefisien drag sebesar 2,2, dan ketinggian awal 300 km.



Gambar 3.7. Plot gerakan satelit dengan  $m = 100$  kg,  $A = 1$  m<sup>2</sup>,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300$  km pada kondisi *solar minimum* ( $R_f = 65$  dan  $A_p = 0$ ), *solar mean* ( $R_f = 180$  dan  $A_p = 200$ ), dan *solar maximum* ( $R_f = 300$  dan  $A_p = 400$ )



Gambar 3.8. Plot ketinggian satelit dengan  $m = 100 \text{ kg}$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300 \text{ km}$  pada kondisi *solar minimum* ( $R_f = 65$  dan  $A_p = 0$ ), *solar mean* ( $R_f = 180$  dan  $A_p = 200$ ), dan *solar maximum* ( $R_f = 300$  dan  $A_p = 400$ )

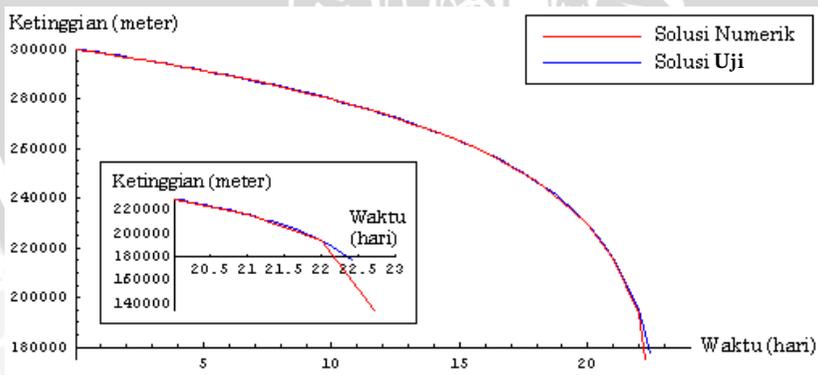
Gambar 3.7 dan 3.8 menunjukkan bahwa aktivitas matahari memiliki pengaruh yang cukup signifikan terhadap masa aktif sebuah satelit yang tengah mengorbit pada ketinggian tertentu di angkasa. Sesuai dengan hasil pengamatan, satelit akan lebih cepat mengalami *reentry* ketika aktivitas matahari mencapai titik maksimum. Untuk  $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$  (*solar minimum*), peristiwa *reentry* baru akan terjadi pada hari ke-23 sedangkan untuk kondisi ketika aktivitas matahari mulai menunjukkan adanya peningkatan, peristiwa *reentry* justru akan terjadi lebih cepat dan jarak horisontal yang dapat ditempuh oleh satelit sebelum memasuki periode nonaktif jauh lebih pendek. Sebagaimana tertera pada Gambar 3.8, satelit yang beredar pada kondisi *solar mean* ( $R_f = 180$  dan  $A_p = 200$ ) dan *solar maximum* ( $R_f = 300$  dan  $A_p = 400$ ) masing-masing hanya mampu bertahan di angkasa hingga hari kelima dan kedelapan semenjak satelit tersebut dioperasikan di antariksa.

Menurut persamaan (2.26), nilai  $R_f$  dan  $A_p$  memang merupakan dua faktor yang berpengaruh pada besarnya kerapatan atmosfer pada ketinggian tertentu. Jika aktivitas matahari mengalami peningkatan yang ditandai dengan bertambahnya nilai fluks radiasi matahari dan indeks geomagnetik, kerapatan atmosfer juga akan turut meningkat sehingga gaya hambat udara yang dirasakan oleh satelit akan bertambah pula. Hal ini merupakan alasan mengapa masa aktif satelit yang mengorbit di atmosfer pada kondisi *solar maximum* jauh lebih pendek daripada masa aktif satelit yang beredar pada kondisi *solar minimum*.

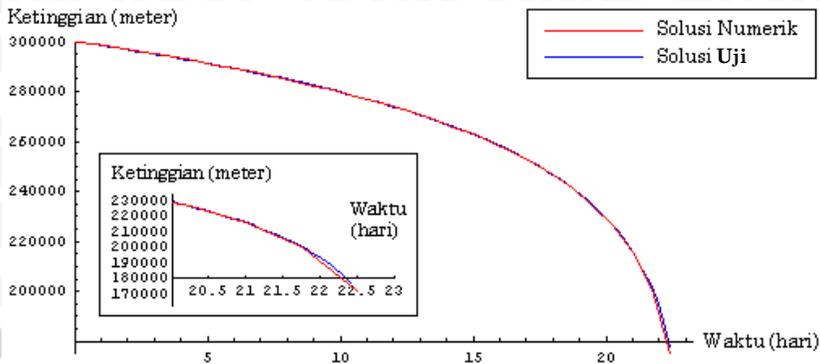
### 3.5 Verifikasi Skema Numerik

Verifikasi skema numerik persamaan *Satellite Progressive Decay* dilakukan dengan membandingkan solusi uji yang didapatkan melalui persamaan (2.29) dan solusi numerik yang diperoleh melalui penerapan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Newton. Verifikasi skema numerik ini dilakukan untuk menunjukkan bahwa penyelesaian numerik yang diperoleh adalah benar dan mampu merepresentasikan peristiwa yang terjadi di dunia nyata dengan akurasi yang dapat diandalkan. Meskipun solusi uji hanya memberikan data mengenai posisi horisontal dan ketinggian satelit pada setiap revolusi, solusi tersebut tetap dapat digunakan sebagai pembanding karena waktu yang diperlukan oleh Satelit Orbit Rendah untuk melakukan satu kali revolusi jauh lebih kecil daripada nilai  $\Delta t$  yang digunakan pada skema numerik. Sebagai contoh, satelit dengan ketinggian 300 km memerlukan waktu 0,0625 hari untuk melakukan satu kali revolusi. Semakin rendah posisi suatu satelit, waktu yang diperlukan untuk melakukan satu kali revolusi juga semakin pendek.

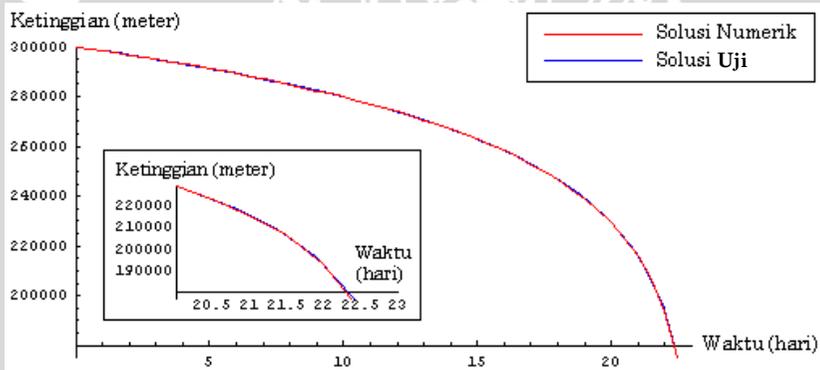
Berikut ini ditunjukkan perbandingan antara solusi numerik dan solusi uji untuk kasus satelit NMAD CTI-5 dengan massa 100 kg, area frontal 1 m<sup>2</sup>, dan koefisien drag sebesar 2,2 yang dioperasikan pada ketinggian awal 300 km dalam kondisi *solar minimum* ( $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$ ). Dalam analisis komparatif ini dipergunakan nilai  $\Delta t$  atau ukuran langkah yang berbeda-beda yaitu 1, 0,75, 0,5, dan 0,25 untuk mengamati akurasi solusi numerik yang dihasilkan.



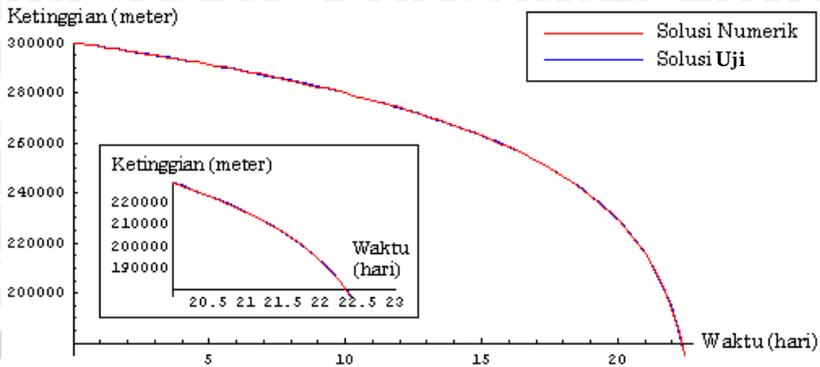
Gambar 3.9. Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot ketinggian satelit NMAD CTI-5 dengan  $m = 100$  kg,  $A = 1$  m<sup>2</sup>,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300$  km,  $R_f = 70$ ,  $A_p = 0$ , dan  $\Delta t = 1$



Gambar 3.10. Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot ketinggian satelit NMAD CTI-5 dengan  $m = 100$  kg,  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300$  km,  $R_f = 70$ ,  $A_p = 0$ , dan  $\Delta t = 0,75$



Gambar 3.11. Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot ketinggian satelit NMAD CTI-5 dengan  $m = 100$  kg,  $A = 1 \text{ m}^2$ ,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300$  km,  $R_f = 70$ ,  $A_p = 0$ , dan  $\Delta t = 0,5$



Gambar 3.12. Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot ketinggian satelit NMAD CTI-5 dengan  $m = 100$  kg,  $A = 1$  m<sup>2</sup>,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300$  km,  $R_f = 70$ ,  $A_p = 0$ , dan  $\Delta t = 0,25$

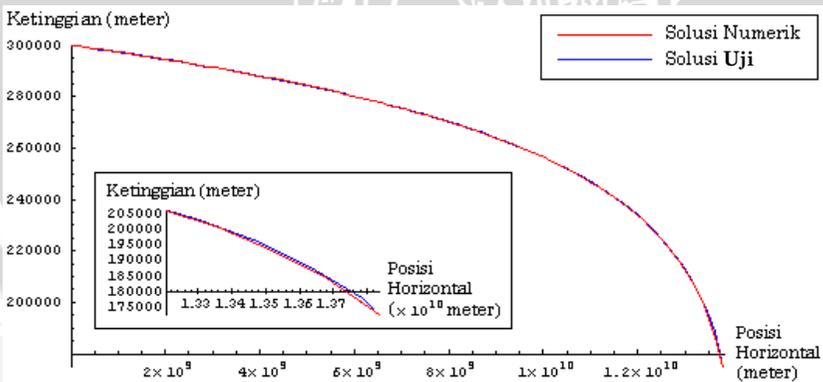
Gambar 3.9 hingga 3.12 menunjukkan bahwa untuk kasus yang sama, penggunaan nilai ukuran langkah yang semakin kecil menghasilkan penyelesaian numerik dengan akurasi yang semakin baik dan plot ketinggian yang dihasilkan mampu mendekati peristiwa sebenarnya di dunia nyata yang direpresentasikan oleh plot uji. Untuk masing-masing nilai  $\Delta t$  yang dipergunakan, waktu terjadinya *reentry* dapat diperkirakan dengan menginterpolasi sejumlah data terakhir yang dihasilkan melalui skema numerik sehingga masa aktif satelit dapat diketahui pula. Sebagai pembandingan, masa aktif yang didapatkan melalui model uji untuk kasus ini ialah 22,3521 hari.

Gambar 3.9 hingga 3.12 menunjukkan pula bahwa untuk kasus yang sama, penggunaan nilai  $\Delta t$  atau ukuran langkah yang semakin kecil menghasilkan penyelesaian numerik yang semakin mendekati solusi uji. Untuk  $\Delta t = 1$  hari, perbedaan masa aktif satelit yang didapatkan melalui skema numerik memiliki galat relatif sebesar 0,851 % yang kurang lebih ekuivalen dengan 4,5 jam. Pemilihan nilai  $\Delta t$  atau ukuran langkah yang lebih kecil dapat meminimalisir galat tersebut, sebagai contoh pemilihan  $\Delta t = 0,25$  hari menghasilkan galat sebesar 0,057 % atau 18,4 menit, lebih kecil dibandingkan dengan galat pada kasus sebelumnya. Hal ini menunjukkan bahwa akurasi terbaik skema numerik diperoleh apabila ukuran langkah yang dipergunakan sekecil mungkin.

Tabel 3.1 Pengaruh nilai ukuran langkah terhadap akurasi prediksi masa aktif satelit

$\Delta t$ (hari)	Masa aktif satelit (hari)	Galat relatif
1	22,1618	0,00851
0,75	22,2937	0,00261
0,5	22,3156	0,00163
0,25	22,3393	0,00057

Berdasarkan hasil yang didapatkan dari model numerik dengan  $\Delta t = 0,25$  hari, dapat diamati bahwa satelit dengan massa 100 kg, area frontal 1 m<sup>2</sup>, dan koefisien drag sebesar 2,2 yang dioperasikan pada ketinggian awal 300 km dalam kondisi *solar minimum* ( $R_f = 70$  dan  $A_p = 0$ ) akan mengalami peristiwa *reentry* pada hari ke-22 setelah menempuh jarak horisontal sejauh 13739719,212 km. Data ini menunjukkan bahwa satelit tersebut beredar mengelilingi bumi dalam 342 kali revolusi sebelum akhirnya mengalami kerusakan akibat gesekan hebat dengan partikel-partikel udara yang terdapat di bagian bawah atmosfer bumi. Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot gerakan satelit tersebut pada orbitnya di antariksa ditunjukkan pada Gambar 3.13 dengan galat relatif sebesar 0,00099.



Gambar 3.13. Verifikasi solusi numerik terhadap solusi uji untuk plot gerakan satelit NMAD CTI-5 dengan  $m = 100$  kg,  $A = 1$  m<sup>2</sup>,  $C_d = 2,2$ ,  $y_0 = 300$  km,  $R_f = 70$ ,  $A_p = 0$ , dan  $\Delta t = 0,25$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## BAB IV PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Dari analisis yang telah dilakukan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut.

1. Persamaan *Satellite Progressive Decay* yang merepresentasikan gerakan satelit pada orbit dapat diturunkan dengan melakukan analisis terhadap resultan gaya yang bekerja pada satelit baik pada sumbu horisontal maupun vertikal sehingga diperoleh persamaan (3.6) dan (3.9).
2. Persamaan *Satellite Progressive Decay* dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk sistem persamaan diferensial yang kemudian dilanjutkan dan diperbaiki oleh perpaduan antara metode Newton untuk sistem nonlinier dan formulasi beda hingga sebagai pendekatan turunan fungsi.
3. Dari verifikasi yang dilakukan terhadap skema numerik dapat disimpulkan bahwa skema numerik yang dipergunakan memiliki akurasi yang baik. Solusi numerik dapat mendekati kejadian nyata yang direpresentasikan oleh solusi uji apabila nilai ukuran langkah yang digunakan pada skema cukup kecil dibandingkan dengan panjang masa aktif satelit yang diuji.
4. Pada skema numerik, posisi satelit pada waktu tertentu dihitung secara rekursif berdasarkan posisi pada waktu sebelumnya dan perhitungan terus dijalankan hingga ketinggian satelit kurang dari 180 km. Waktu terjadinya *reentry* satelit dapat diperkirakan dengan menginterpolasi sejumlah data terakhir yang dihasilkan melalui skema numerik sehingga masa aktif satelit dapat diketahui.

### 4.2. Saran

Untuk selanjutnya disarankan agar penyelesaian persamaan *Satellite Progressive Decay* mempergunakan asumsi-asumsi yang sesedikit mungkin sehingga model yang didapatkan dapat diterapkan pada rentang waktu yang lebih panjang tanpa harus mengabaikan fluktuasi kepadatan atmosfer akibat pengaruh radiasi matahari.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



## DAFTAR PUSTAKA

- Admiranto, Agustinus Gunawan. 2000. *Tata Surya dan Alam Semesta*. Kanisius. Yogyakarta
- Bayart, Cedric et. al. 2006. *Deorbit*. Stanford University Press. California
- Braeunig, Robert A. 2007. *Basic of Space Flight : Orbital Mechanics*. <http://www.braeunig.us/space/orbmech.htm>. Tanggal akses : 20 Agustus 2007
- Bronstein, I. N. 2005. *Handbook of Mathematics*. Springer. Berlin
- Chapra, Steven C. and Raymond P. Canale. 2002. *Numerical Methods for Engineers with Software and Programming Applications, fourth edition*. Mc Graw-Hill, Inc. New York
- Edwards, C. Henry and David E. Penney. 2001. *Differential Equations and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey
- Handy, Brian. 2000. *Running in Circles*. <http://solar.physics.montana.edu/nuggets/2000/000428/000428.html>. Tanggal akses : 31 Agustus 2007
- Hansen, Flemming. 2004. *Satellite Technology Course Space Environment*. Copenhagen. Danish Space Research Institute
- Kennewell, John. 1999. *Satellite Orbital Decay Calculation*. Sydney. The Australian Weather Agency
- Matthews, John H. 2004. *Module for Projectile Motion*. <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/ProjectileMotionMod.html>. Tanggal akses : 4 April 2007
- Munif, A. dan Aries, P. H. 1995. *Cara Praktis Penguasaan dan Penggunaan Metode Numerik*. Guna Widya. Surabaya
- Parker, Steve. 1998. *Isaac Newton dan Gravitasi*. Quality Press. Jakarta
- Setford, Steve. 2001. *Fakta Sains*. Erlangga. Jakarta
- Viereck, R. 2004. *Satellite Orbital Decay*. NOAA. Washington DC