

**TEOREMA POLYA UNTUK MENENTUKAN
GRAF YANG TIDAK ISOMORFIS**

SKRIPSI

Oleh :

**VIVI ANDARI
0210940043-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

TEOREMA POLYA UNTUK MENENTUKAN GRAF YANG TIDAK ISOMORFIS

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

VIVI ANDARI

0210940043-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

TEOREMA POLYA UNTUK MENENTUKAN GRAF YANG TIDAK ISOMORFIS

Oleh :

VIVI ANDARI

0210940043-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
Pada tanggal 6 Nopember 2008 dan dinyatakan memenuhi
syarat untuk
memperoleh gelar Sarjana Sains dalam Bidang Matematika

Telah diperiksa dan disahkan oleh :

**Menyetujui,
Dosen Pembimbing I**

Dosen Pembimbing II

Dr. Abdul Rouf A., MSc
NIP. 131 993 383

Drs. Noor Hidayat, MSi
NIP. 131 759 590

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika**

Dr. AGUS SURYANTO, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama : Vivi Andari

NIM : 0210940043-94

Program Studi : Matematika

Penulis Skripsi berjudul :

**TEOREMA POLYA UNTUK MENENTUKAN GRAF YANG
TIDAK ISOMORFIS**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila dikemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan segala kesadaran.

Malang, 6 Nopember 2008

Yang Menyatakan,

(Vivi Andari)

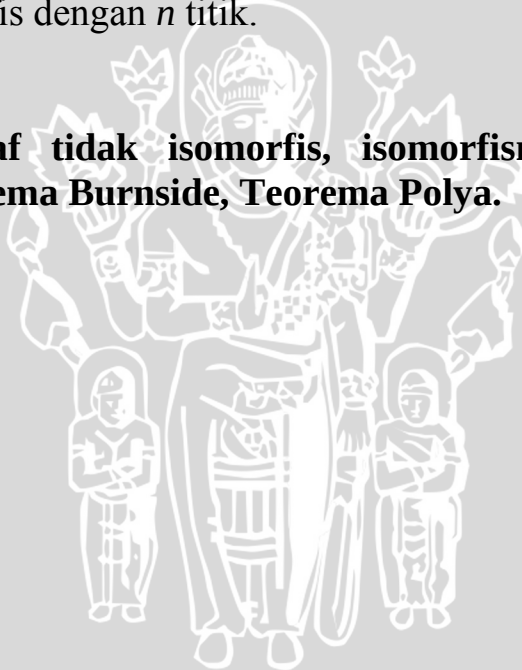
NIM. 0210940043-94

TEOREMA POLYA UNTUK MENENTUKAN GRAF YANG TIDAK ISOMORFIS

ABSTRAK

Salah satu permasalahan dalam teori graf adalah menghitung kemungkinan banyaknya graf yang biasa dikenal dengan enumerasi. Dalam melakukan enumerasi pada graf dapat menggunakan Teorema Polya. Untuk membuktikan Teorema Polya digunakan Teorema Burnside dan Teorema Isomorfisma Grup $G \cong G'$. Teorema Polya pertama digunakan untuk menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfis dengan n titik sedangkan Teorema Polya kedua digunakan untuk menentukan pola pewarnaan pada graf sederhana yang tidak isomorfis dengan n titik.

Kata kunci: graf tidak isomorfis, isomorfisma grup, pola pewarnaan, Teorema Burnside, Teorema Polya.

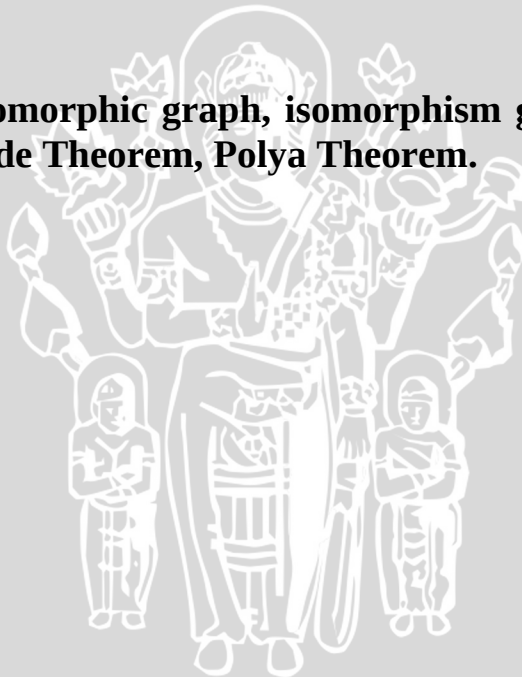


POLYA THEOREM TO DETERMINE GRAPH NON-ISOMORPHIC

ABSTRACT

One of the problem in graph theory is to accounting the number of graph on n vetices is called enumeration. Enumeration of graph can to use Polya Theorem. To prove Polya Theorem needed Burnside Theorem and Isomorphism grup Theorem $G \cong G'$. The first Polya Theorem be used to accounting the number of non isomorphic simple graph on n vertices and the second Polya Theorem be used to determine a pattern inventory of non isomorphic simple graph on n vertices.

Keyword : non isomorphic graph, isomorphism grup, pattern of colouring, Burnside Theorem, Polya Theorem.



KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'alamin, puji syukur kehadiran Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “TEOREMA POLYA UNTUK MENENTUKAN GRAF TIDAK ISOMORFIS”.

Penyusunan skripsi ini juga tidak lepas dari bantuan yang diberikan oleh berbagai pihak Karena itu penulis sampaikan ucapan terima kasih kepada:

1. Dr. Abdul Rouf A., M.Sc. dan Drs. Noor Hidayat, M.Si., selaku pembimbing atas segala masukan, saran dan waktu dalam proses pembuatan skripsi ini.
2. Drs Bambang Sugandi, MSi., Dra Ari Andari, MS., dan Drs. Marsudi, MS selaku penguji.
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika, yang telah memberikan izin kepada penulis sehingga skripsi ini selesai.
4. Drs. Acmad Ridhok, M.kom., selaku penasehat akademik, atas nasehatnya kepada penulis.
5. Ibu, bapak, adik Indah atas do'a semangat, dan segala pengorbanan yang diberikan selama ini.
6. Keluarga kecilku suamiku dan anak-anakku (Fahmi & Farah), atas semua do'a, semangat dan kesabarannya. Maafkan karena terlalu lama meninggalkan kalian.
7. Bapak dan ibu dosen, seluruh staf akademik & TU MIPA atas bimbingan dan ilmu yang telah diberikan kepada penulis.
8. Semua teman seperjuangan, Mat'02 atas dukungan, semangat dan juga semua kenangan bersama.
9. Semua pihak yang telah membantu proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, namun penulis berharap semoga tulisan ini dapat bermanfaat bagi semua pihak.

Malang, 6 Nopember 2008

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR SIMBOL	viii
 BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang Penelitian	1
1.2. Rumusan Masalah	1
1.3. Tujuan Masalah	2
1.4. Batasan Masalah	2
 BAB II DASAR TEORI	
2.1. Relasi dan Pemetaan.....	3
2.2. Operasi Biner.....	5
2.3. Grup dan Isomorfisma Grup.....	5
2.4. Koset.....	14
2.5. Graf dan Graf Isomorfis	20
 BAB III PEMBAHASAN	23
 BAB IV PENUTUP	
4.1. Kesimpulan.....	41
4.2. Saran.....	41
 DAFTAR PUSTAKA	43

DAFTAR SIMBOL

<u>Simbol</u>	<u>Keterangan</u>
$\mathbb{N}$	Bilangan Asli
ϕ	Himpunan Kosong
$\forall x$	Untuk semua x
$\exists x$	Terdapat x
xRy	x berelasi dengan y
$x \Rightarrow y$	Jika x maka y
$x \Leftrightarrow y$	x jika dan hanya jika y
$x \in X$	x anggota dari himpunan X
$x \notin X$	x bukan anggota himpunan X
$X \subseteq Y$	X himpunan bagian dari Y
$x \neq y$	x tidak sama dengan y
$x \ni y$	x sedemikian sehingga y
a^{-1}	Invers dari a
$ X $	Order X / Jumlah anggota himpunan X
G_x	Stabilizer x pada grup G
Gx	Orbit x pada grup G
X_g	Karakter permutasi g pada grup G
S_n	Grup Simetri berderajat n
■	Akhir pembuktian

BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar abstrak merupakan salah satu bidang ilmu aljabar yang di dalamnya dibahas bermacam-macam struktur aljabar. Sedangkan struktur aljabar dibangun oleh tiga komponen yaitu: himpunan, operasi biner dan aksioma. Salah satu bagian dari struktur aljabar adalah teori grup. Dalam teori grup dibahas mengenai Teorema Burnside dan Teorema Polya, di mana Teorema Polya dapat diterapkan pada graf.

Teori graf pertama diperkenalkan oleh *Leonhard Euler* pada tahun 1736 ketika mendiskusikan apakah mungkin untuk melewati sebuah jembatan di kota Kongsberg Rusia dalam sekali waktu. Publikasi dari masalah ini dan usulan solusinya di sebut teori graf. Pada permasalahan yang dialami Euler, simpul merepresentasikan kota yang dihubungkan oleh jembatan sedangkan simpul adalah jembatan yang menghubungkan antar kota (Chartrand and Lesniak, 1996).

Menurut (Wilson dan Watskins, 1990) terdapat empat buah masalah pokok dalam teori graf, yaitu masalah eksistensi, masalah konstruksi, masalah enumerasi dan masalah optimasi.

Dalam skripsi ini akan dibuktikan Teorema Polya dengan menggunakan Teorema Burnside dan teorema-teorema yang mendukung dan aplikasinya pada graf yaitu dengan melakukan enumerasi untuk mengetahui jumlah graf yang tidak isomorfis antara graf satu dengan lainnya.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang permasalahan yang telah dijelaskan sebelumnya , maka pokok permasalahan dalam penulisan skripsi ini adalah :

1. Bagaimana membuktikan teorema Polya dengan menggunakan teorema Brunside dan teorema-teorema yang mendukung.

2. Bagaimana melakukan enumerasi yaitu menghitung jumlah graf yang tidak Isomorfis dan menentukan pewarnaan graf yang tidak isomorfis.

1.3 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah untuk

1. Membuktikan Teorema Polya dengan menggunakan Teorema Burnside dan teorema-teorema yang mendukung.
2. Melakukan enumerasi yaitu menghitung jumlah graf yang tidak Isomorfis dan menentukan pewarnaan graf yang tidak isomorfis.

1.4 Batasan Masalah

Penulisan skripsi ini difokuskan pada himpunan yang memiliki elemen hingga ($n \geq 2$) dan pada graf sederhana.



BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini akan dibahas dasar teori yang menunjang pokok pembahasan pada Bab III diantaranya adalah dasar tentang teori himpunan, pemetaan, relasi, grup, grup action, grup permutasi, koset, graf.

2.1 Relasi dan Pemetaan

Definisi 2.1.1 (Hungerford, 1974)

Suatu himpunan dikatakan berelasi jika anggota sebuah himpunan tersebut dihubungkan dengan anggota himpunan lain atau dengan himpunan yang sama. Penyajian relasi dalam himpunan X dinotasikan sebagai berikut : $\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y$.

Definisi 2.1.2 (Hungerford, 1974)

Suatu relasi $\mathcal{R}$ pada himpunan X disebut relasi ekuivalen jika:

1. Refleksif : $(\forall x \in X, x\mathcal{R}x)$
2. Simetris : $(\forall x, y \in X, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$
3. Transitif : $(\forall x, y, z \in X, x\mathcal{R}y \text{ dan } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z)$

Definisi 2.1.3 (Grimaldi, 1994)

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalen pada himpunan X . $\forall x \in X$, kelas ekuivalen dari x dinotasikan $\langle x \rangle$, didefinisikan dengan $\langle x \rangle = \{y \in X | y\mathcal{R}x\}$.

Teorema 2.1.4 (Grimaldi, 1994)

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalen pada himpunan X dan $x, y \in X$.

Maka $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \langle x \rangle = \langle y \rangle$.

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Misalkan $x\mathcal{R}y$. Akan dibuktikan $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Jika $w \in \langle x \rangle$, maka $w\mathcal{R}x$ dan diketahui $\mathcal{R}$ transitif sehingga $w\mathcal{R}y$.

Oleh karena itu $w \in \langle y \rangle$ dan $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle$. Diketahui $\mathcal{R}$ simetris. Sehingga, jika $t \in \langle y \rangle$, maka $t\mathcal{R}y$ dan dengan sifat transitif maka $t\mathcal{R}x$. Oleh karena itu $t \in \langle x \rangle$ dan $\langle y \rangle \subseteq \langle x \rangle$. Jadi terbukti $\langle x \rangle = \langle y \rangle$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\langle x \rangle = \langle y \rangle$. Akan dibuktikan $x\mathcal{R}y$. Misalkan $x \in \langle x \rangle$, sehingga $x \in \langle y \rangle$. Jadi terbukti $x\mathcal{R}y$. ■

Definisi 2.1.5 (Whitelaw, 1995)

Misalkan X dan Y adalah suatu himpunan tak kosong. Relasi $f : X \rightarrow Y$ dikatakan suatu *pemetaan* atau *fungsi* dari X ke Y , jika untuk setiap $x \in X$, terdapat dengan tunggal $y \in Y$ sedemikian sehingga $y = f(x)$. Himpunan X disebut sebagai *domain* dari pemetaan f dan himpunan Y disebut *kodomain*.

Definisi 2.1.6 (Bhattacharya, 1986)

- Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ dikatakan *injektif*, jika memenuhi $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ dikatakan *surjektif* (onto), jika memenuhi $\forall y \in Y$, maka terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $y = f(x)$.
- Pemetaan $f : X \rightarrow Y$ dikatakan *bijektif*, jika pemetaan tersebut injektif dan juga surjektif. Pemetaan bijektif disebut juga korespondensi satu-satu.

Definisi 2.1.7 (Durbin, 1992)

Misalkan X adalah himpunan berhingga. Order dari X adalah banyaknya elemen dari X . Dinotasikan dengan $|X|$.

Definisi 2.1.8 (Bhattacharya, 1986)

Misalkan X dan Y adalah himpunan berhingga. Jika terdapat pemetaan bijektif $f : X \rightarrow Y$, maka $|X| = |Y|$.

Definisi 2.1.9 (Dummit, 1999)

Jika $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$, maka pemetaan komposisi $g \circ f : X \rightarrow Z$ didefinisikan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, untuk suatu $x \in X$.

2.2 Operasi Biner**Definisi 2.2.1** (Dummit, 1999)

Operasi biner $*$ pada himpunan G adalah fungsi :

$$* : G \times G \rightarrow G$$

$$(a, b) \mapsto *(a, b) = a * b, \forall a, b \in G$$

2.3 Grup dan Isomorfisma Grup**Definisi 2.3.1** (Fraleigh, 1994)

Himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada G disebut *grup* jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. Tertutup: $\forall a, b \in G, a * b \in G$.
2. Asosiatif: $(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$.
3. Terdapat elemen identitas
 $\forall a \in G, \exists e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$.
4. Terdapat invers
 $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = e$.

Jika G grup terhadap operasi biner $*$ dinotasikan $(G, *)$.

Definisi 2.3.2 (Battacharya, 1986)

Jika operasi biner pada grup $(G, *)$ adalah komutatif yaitu $\forall a, b \in G$ sedemikian sehingga $a * b = b * a$, maka grup G disebut grup komutatif (*grup Abelian*).

Definisi 2.3.3 (Battacharya, 1986)

Misalkan $(G, *)$ adalah suatu grup, dan misalkan H adalah subset G . H disebut subgrup G , ditulis $H < G$, jika terhadap operasi biner pada grup G , H adalah grup.

Teorema 2.3.4 (Durbin, 1985)

Misalkan G grup dengan operasi biner $*$, $H \neq \emptyset$ dan $H \subseteq G$.

Maka H adalah subgrup G jika dan hanya jika memenuhi:

1. $\forall a, b \in H$, maka $a * b \in H$
2. $\forall a \in H$, maka $a^{-1} \in H$

Bukti :

$(\Rightarrow)$ Diketahui H subgrup. Akan dibuktikan H memenuhi kedua sifat (1) dan (2) di atas. Karena H adalah subgrup G , sehingga jelas H memenuhi kedua sifat (1) dan (2) di atas.

$(\Leftarrow)$ Anggap H memenuhi (1) dan (2). Akan dibuktikan H subgrup. Karena $H \neq \emptyset$ maka terdapat elemen di H . Ambil $a \in H$, maka menurut (2) $a^{-1} \in H$, jadi H mempunyai invers. Dengan menggunakan (2) $a, a^{-1} \in H$ sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, jadi H mempunyai elemen identitas. Karena pada H berlaku sifat asosiatif, sehingga terbukti H subgrup G . ■

Definisi 2.3.5 (Dummit, 1999)

Misalkan G adalah grup terhadap operasi biner $\#$ dan H grup terhadap operasi biner $*$. Misalkan terdapat suatu pemetaan $f : G \rightarrow H$. Maka f disebut *homomorfisma* jika $f(a \# b) = f(a) * f(b)$, $\forall a, b \in G$.

Contoh 2.3.6

Misalkan $f : (R^+, \bullet) \rightarrow (R, +)$, didefinisikan $f(x) = \log(x)$. Maka $\forall x, y \in R^+$, $f(xy) = \log(xy) = \log(x) + \log(y) = f(x) + f(y)$. Jadi f adalah suatu pemetaan homomorfisma.

Definisi 2.3.7 (Grimaldi, 1994)

Jika $f : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma dan bijektif, maka f disebut *isomorfisma*. Sedangkan G, H disebut grup yang isomorfik.

Definisi 2.3.8 (Whitelaw, 1995)

Misalkan X adalah himpunan berhingga. Jika terdapat suatu pemetaan f yang memetakan himpunan X ke dirinya sendiri $f: X \rightarrow X$ dan f adalah pemetaan yang bijektif, maka f disebut *permutasi* pada X .

Contoh 2.3.9

Misalkan X adalah suatu himpunan, dimana $X = \{1,2,3,4,5\}$. Jika terdapat pemetaan $f: X \rightarrow X$ didefinisikan $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=4$, $f(4)=5$, $f(5)=2$. Karena f memetakan himpunan X dengan tepat satu ke himpunan X , sehingga f adalah suatu permutasi pada X .

Teorema 2.3.10 (Durbin, 1992)

Himpunan semua permutasi dari suatu himpunan berhingga X adalah grup terhadap operasi komposisi.

Bukti:

Misalkan G adalah suatu himpunan permutasi dari X . Akan dibuktikan G adalah grup terhadap operasi komposisi. Untuk membuktikan G adalah grup, maka G harus memenuhi aksioma-aksioma:

(i) Tertutup

Ambil sebarang $g_1, g_2 \in G$. Akan dibuktikan $g_1 \circ g_2 \in G$.

Diketahui G adalah himpunan semua permutasi sedemikian sehingga $g_1 \circ g_2(x) = g_1(g_2(x)) = g_1(y) = z, \forall x, y, z \in X$. Jadi G memenuhi sifat tertutup.

(ii) Asosiatif

Ambil sebarang $g_1, g_2, g_3 \in G$. Akan dibuktikan $g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3$

$$\begin{aligned} g_1 \circ (g_2 \circ g_3)(x) &= g_1(g_2 \circ g_3(x)) \\ &= g_1(g_2(g_3(x))) \\ &= g_1 \circ g_2(g_3(x)) \\ &= (g_1 \circ g_2) \circ g_3(x) \end{aligned}$$

Jadi G memenuhi sifat asosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas

Ambil sebarang $g \in G$, Akan dibuktikan terdapat $e \in G$, sedemikian sehingga $g \circ e = g$. Karena $g \circ e(x) = g(e(x)) = g(x), \forall x \in X$, maka $e \in G$ dan terbukti G mempunyai elemen identitas.

(iv) Mempunyai invers

Ambil sebarang $g \in G$. Akan dibuktikan $g^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $g \circ g^{-1} = e$. Diketahui G adalah himpunan semua permutasi dan permutasi adalah pemetaan yang bijektif sehingga terdapat $g^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $g \circ g^{-1}(x) = e(x), \forall x \in X$. Karena G memenuhi keempat aksioma, jadi terbukti G adalah grup. ■

Contoh 2.3.11

Misalkan X suatu himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan G adalah suatu himpunan permutasi $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ dimana $g_1 = (1)(2)(3)$, $g_2 = (1\ 2)(3)$, $g_3 = (1\ 2\ 3)$, $g_4 = (2\ 3)(1)$, $g_5 = (1\ 3\ 2)$ dan $g_6 = (1\ 3)(2)$. Akan dibuktikan G adalah grup.

Bukti:

Untuk membuktikan G adalah suatu grup, maka G harus memenuhi aksioma-aksioma :

(i) Tertutup

Misalkan $g_i \in G$ untuk $i = 1, 2, \dots, 6$, maka akan dibuktikan $g_i \circ g_j \in G$.

Didapatkan jika $g_2 \circ g_3 = g_4$, $g_3 \circ g_4 = g_2$, $g_4 \circ g_5 = g_2$, $g_5 \circ g_6 = g_3$.

Terbukti G memenuhi sifat tertutup.

(ii) Asosiatif

Misalkan $g_2, g_3, g_4 \in G$. Akan dibuktikan $g_2 \circ (g_3 \circ g_4) = (g_2 \circ g_3) \circ g_4$.

$g_2 \circ (g_3 \circ g_4) = g_1 = (g_2 \circ g_3) \circ g_4$. Terbukti G memenuhi sifat asosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas

Misalkan $g_4 \in G$, maka terdapat $g_1 \in G$. Sedemikian sehingga

$g_4 \circ g_1 = g_1 \circ g_4 = g_4$. Terbukti G mempunyai elemen identitas.

(iv) Mempunyai invers

Misalkan $g_4 \in G$, maka terdapat $g_4^{-1} \in G$. Sedemikian sehingga $g_4 \circ g_4^{-1} = g_4^{-1} \circ g_4 = g_1$. Jadi invers dari g_4 adalah g_4^{-1} . Terbukti G mempunyai invers. Diketahui G memenuhi empat aksioma, jadi G adalah grup.

Definisi 2.3.12 (Bhattacharya, 1986)

Misalkan X himpunan tak kosong. Grup dari semua permutasi terhadap pemetaan komposisi disebut *grup simetri* pada X . Dinotasikan dengan S_X . Subgrup dari grup simetri S_X disebut *grup permutasi* pada X . Jika $|X| = n$ untuk $n \in \mathbb{N}$, maka S_X disebut *grup simetri berderajat n* . Dinotasikan dengan S_n .

Definisi 2.3.13 (Pinter, 1990)

Misalkan $f \in S_n$. Jika terdapat barisan bilangan bulat yang berbeda $x_1, \dots, x_r \in n$ sedemikian sehingga $f(x_i) = x_{i+1}$, $i = 1, \dots, r-1$, $f(x_r) = x_1$, $f(x) = x$ jika $x \notin (x_1, x_2, \dots, x_r)$, maka f disebut *cycle* dengan panjang r dinotasikan dengan $(x_1 x_2 \dots x_r)$. Cycle yang memiliki panjang 2 disebut *transposisi*.

Contoh 2.3.14

Misalkan X adalah suatu himpunan, dimana $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan S_n adalah suatu grup simetri. Misalkan $f \in S_n$ dan $f = \begin{pmatrix} 12345 \\ 23451 \end{pmatrix}$ $= (12345)$ Maka banyaknya *cycle* dari permutasi f adalah 1 dengan panjang 5.

Teorema 2.3.15 (Pinter, 1990)

Setiap permutasi dari suatu himpunan X dibangun oleh perkalian *cycle-cycle* yang saling disjoint.

Bukti:

Misalkan f adalah suatu permutasi dari suatu himpunan X dengan n elemen. Akan ditunjukkan permutasi f dibangun oleh *cycle-cycle* yang saling disjoint.

Misalkan a_1 adalah elemen pertama didalam $\{1, 2, \dots, n\}$ sedemikian sehingga $f(a_1) \neq a_1$. Misalkan $a_2 = f(a_1), a_3 = f(a_2)$ sampai $f(a_k)$ sama dengan salah satu elemen $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$. Jika $f(a_i) \neq a_1$ dan diketahui $a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_{i-1} \rightarrow a_i \rightarrow \dots \rightarrow a_k \rightarrow a_1$ maka $f(a_{i-1}) = f(a_k) = a_1$, hal ini tidak mungkin karena f merupakan permutasi jadi merupakan pemetaan yang bijektif, sehingga $a_i = a_1$ dan oleh karena itu $f(a_k) = a_1$. Jadi diperoleh *cycle* pertama yaitu $(a_1, a_2, \dots, a_k)$. Selanjutnya, misalkan b_1 elemen yang belum pernah diberikan pada *cycle* pertama yaitu $b_i \neq a_i, \forall i$ sedemikian sehingga $f(b_1) \neq b_1$. Misalkan $b_2 = f(b_1), b_3 = f(b_2)$. Sama dengan proses untuk memperoleh *cycle* pertama, sehingga diperoleh *cycle* kedua $(b_1, b_2, \dots, b_t)$. Jadi jelas $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ dan $(b_1, b_2, \dots, b_t)$ saling disjoint. Kemudian dilanjutkan proses yang sama hingga elemen dalam $\{1, 2, \dots, n\}$ habis. Jadi terbukti bahwa suatu permutasi dibangun oleh *cycle-cycle* yang saling disjoint. ■

Contoh 2.3.16

Misalkan X adalah suatu himpunan, dimana $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan S_n adalah suatu grup simetri. Misalkan $f \in S_n$ dimana $f = \begin{pmatrix} 12345 \\ 32154 \end{pmatrix} = (132)(45)$. Maka f dapat dinyatakan dengan perkalian 2 *cycle* yang saling disjoint.

Definisi 2.3.17 (Dummit, 1999)

Misalkan G grup dan X himpunan. G dikatakan beraksi pada X jika terdapat pemetaan $\eta : G \times X \rightarrow X$ dimana untuk $\eta(a, x)$ di tulis ax , sedemikian sehingga $\forall a, b \in G, x \in X$ memenuhi :

1. $(ab)x = a(bx)$
2. $ex = x$

Pemetaan η disebut G action pada X dan X disebut G -set.

Definisi 2.3.18 (Bhattacharya 1986)

Misalkan G grup yang beraksi pada himpunan X dan $x \in X$. Didefinisikan $G_x = \{a \in G | ax = x\}$. Maka G_x disebut *stabilizer* x pada G .

Contoh 2.3.19

Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ adalah grup permutasi dari X , dimana $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (1)(2)(34)$, $g_3 = (12)(3)(4)$, $g_4 = (12)(34)$. Diketahui G_x adalah stabilizer x pada G , untuk suatu $x \in X$. Sehingga didapatkan $G_1 = \{g_1, g_2\}$, $G_2 = \{g_1, g_2\}$, $G_3 = \{g_1, g_3\}$, $G_4 = \{g_1, g_3\}$.

Teorema 2.3.20 (Dummit, 1999)

Misalkan G grup yang beraksi pada himpunan X . Jika G_x merupakan stabilizer dari x pada G , maka G_x adalah subgrup G .

Bukti:

Diketahui G_x adalah stabilizer dari x pada G . Akan ditunjukkan G_x subgrup G .

Misalkan $x \in X$ dan $a, b \in G_x$ sehingga $ax = x$ dan $bx = x$. Akibatnya $abx = a(bx) = ax = x$. Jadi $ab \in G_x$ dan G_x memenuhi sifat tertutup. Karena $ex = x$, hal ini menunjukkan $e \in G_x$ sedemikian sehingga $x = ex = a^{-1}ax = a^{-1}(ax) = a^{-1}x$.

Jadi $a^{-1} \in G_x$ dan G_x mempunyai invers. Karena G_x memenuhi sifat tertutup dan mempunyai invers, sehingga terbukti G_x subgrup G . ■

Definisi 2.3.21 (Bhattacharya 1986)

Misalkan G grup yang beraksi pada himpunan X dan $x \in X$. Didefinisikan $Gx = \{a \in G | ax\}$. Maka Gx disebut *orbit* x pada G .

Contoh 2.3.22

Misalkan $X = \{1,2,3,4\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ adalah grup permutasi dari X . Dimana $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (1)(2)(34)$, $g_3 = (12)(3)(4)$, $g_4 = (12)(34)$. Jika diketahui Gx adalah orbit x pada G , maka diperoleh $G1 = \{1,2\}$, $G2 = \{1,2\}$, $G3 = \{3,4\}$, $G4 = \{3,4\}$.

Teorema 2.3.23 (Durbin, 1992)

Misalkan G adalah grup yang beraksi pada himpunan X . Jika $\forall x, y \in X$ dan berada pada orbit yang sama, maka $|G_x| = |G_y|$.

Bukti:

Misalkan $x \mathcal{R} y$, maka terdapat $a \in G$ sedemikian sehingga $ax = y$. Akan dibuktikan $G_x = G_y$. Ambil sebarang $b \in G_x$ sehingga $bx = x$. Jika $bx = x \Rightarrow ba^{-1}y = x \Rightarrow baa^{-1}y = ax \Rightarrow by = y$. Hal ini menunjukkan $b \in G_y$. Jadi $G_x \subseteq G_y$. Ambil sebarang $c \in G_y$ sehingga $cy = y$. Diketahui $x \mathcal{R} y$ sehingga dapat diperoleh $cax = ax$. G adalah suatu grup, maka terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $caa^{-1}x = aa^{-1}x \Rightarrow cx = x$. Hal ini menunjukkan $c \in G_x$. Jadi $G_y \subseteq G_x$, sehingga terbukti $G_x = G_y$. Kemudian didefinisikan suatu pemetaan $\phi: G_x \rightarrow G_y$ dimana $\phi(a) = a, \forall a \in G_x$. Maka akan ditunjukkan ϕ adalah pemetaan yang bijektif.

(i) ϕ pemetaan

Misalkan $\forall a, b \in G_x$. Jika $a = b$, akan ditunjukkan $\phi(a) = \phi(b)$.

Ambil sebarang $x \in X$, maka $ax = bx$ *) sehingga $b^{-1}a \in G_x$.

Diketahui $x \mathcal{R} y$ maka terdapat $c \in G$ sedemikian sehingga $cx = y$,

kemudian disubstitusikan pada persamaan (*) sehingga diperoleh

$ac^{-1}y = bc^{-1}y \Rightarrow b^{-1}ac^{-1}y = c^{-1}y \Rightarrow b^{-1}ay = y, \forall y \in X$, sehingga

$ay = by$. Hal ini menunjukkan $b^{-1}a \in G_y$. Dengan definisi

pemetaan $\phi(a) = a$ dan $\phi(b) = b$ sehingga $\phi(a) = \phi(b)$. Jadi

terbukti ϕ adalah pemetaan.

(ii) ϕ injektif

Misalkan $\forall a, b \in G_x$, maka $ax = x$ dan $bx = x$. Jika $\phi(a) = \phi(b)$,

maka akan ditunjukkan $a = b$. Karena $ax = x$ maka $\phi(ax) = \phi(x)$

dan $bx = x$ maka $\phi(bx) = \phi(x)$. Sehingga diperoleh $\phi(ax) = \phi(bx)$,

$\forall x \in X$. Dengan menggunakan definisi pemetaan diketahui bahwa

$\phi(a) = a$ dan $\phi(b) = b$. Sehingga $a = b$. Jadi terbukti ϕ injektif.

(iii) ϕ surjektif

Misalkan $b \in G_y$, maka $by = y$. Akan dibuktikan $b \in G_x$. Diketahui

$x \mathcal{R} y$ sehingga $by = y \Rightarrow bax = ax \Rightarrow bx = x$. Hal ini menunjukkan

$b \in G_x$. Jadi terbukti ϕ surjektif.

Karena ϕ adalah pemetaan yang bijektif sehingga terbukti jika

$\forall x, y \in X$ berada pada orbit yang sama, maka $|G_x| = |G_y|$. ■

Definisi 2.3.24 (Bhattacharya 1986)

Misalkan G grup yang beraksi pada himpunan X . Didefinisikan

$X_g = \{x \in X \mid gx = x\}$, $g \in G$. Maka X_g disebut *karakter*

permutasi g pada G .

Contoh 2.3.25

Misalkan $X = \{1,2,3,4\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ adalah grup permutasi dari X . Dimana $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (1)(2)(34)$, $g_3 = (12)(3)(4)$, $g_4 = (12)(34)$. Misalkan X_{g_i} adalah karakter permutasi g_i , untuk $i = 1, 2, 3, 4$. Sehingga didapatkan $X_{g_1} = \{1,2,3,4\}$, $X_{g_2} = \{1,2\}$, $X_{g_3} = \{3,4\}$, $X_{g_4} = \emptyset$. Sedemikian sehingga karakter permutasi G adalah $\sum_{i=1}^4 |X_{g_i}| = 4 + 2 + 2 = 8$.

2.4 Koset**Definisi 2.4.1**(Whitelaw,1995)

Misalkan H adalah subgrup G dan $a \in G$. Himpunan $aH = \{h \in H | ah\}$ disebut koset kiri dari H dan himpunan koset kiri dari H didalam G ditulis G/H . Koset kanan didefinisikan serupa yaitu $Ha = \{h \in H | ha\}$ untuk $a \in G$ dan himpunan koset kanan dari H di dalam G ditulis H/G .

Teorema 2.4.2 (Grimaldi, 1994)

Jika H adalah subgrup dari grup G , maka $\forall a \in G \quad |aH| = |H|$.

Bukti :

Diketahui aH adalah himpunan koset kiri, $aH = \{h \in H | ah\}$, untuk $a \in G$. Misalkan terdapat suatu pemetaan $\sigma : H \rightarrow aH$ didefinisikan $\sigma(h) = ah$, $\forall h \in H$. Akan dibuktikan σ adalah pemetaan yang bijektif.

(i) Pemetaan.

Ambil sebarang $h_1, h_2 \in H$. Jika $h_1 = h_2$, maka akan dibuktikan $\sigma(h_1) = \sigma(h_2)$. Ambil sebarang $a \in G$. Karena $h_1 = h_2$ maka $ah_1 = ah_2$. Dengan definisi pemetaan, maka diperoleh bahwa

$\sigma(h_1) = ah_1 = ah_2 = \sigma(h_2)$. Jadi $\sigma(h_1) = \sigma(h_2)$. Terbukti σ pemetaan.

(ii) Injektif.

Ambil sebarang $h_1, h_2 \in H$. Jika $\sigma(h_1) = \sigma(h_2)$, maka akan dibuktikan $h_1 = h_2$. Dengan definisi pemetaan diketahui $\sigma(h_1) = ah_1$ dan $\sigma(h_2) = ah_2$, untuk $a \in G$. Hal ini menunjukkan $ah_1 = ah_2$. Karena G adalah suatu grup maka terdapat $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a^{-1}ah_1 = a^{-1}ah_2 \Rightarrow h_1 = h_2$. Jadi terbukti σ adalah injektif.

(iii) Surjektif.

Ambil sebarang $y \in aH$. Maka $y = ah$, untuk suatu $h \in H$. Tetapi $ah = \sigma(h)$. Jadi $y = \sigma(h)$. Sehingga σ surjektif.

Telah dibuktikan bahwa σ adalah pemetaan yang bijektif maka $|aH| = |H|$. ■

Definisi 2.4.3 (Whitelaw, 1995)

Jika H subgrup G , maka indeks kiri H pada G adalah jumlah koset kiri H pada G yang berbeda. Jika jumlahnya berhingga, maka indeks kiri H pada G dapat dinotasikan $|G : H|$.

Teorema 2.4.4 (Balakrishnan, 1995)

Misalkan H subgrup G dan $x \in G$. Jika xH adalah koset kiri dari H terhadap x , maka $xH = yH$ jika dan hanya jika $y^{-1}x \in H$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan $xH = yH, \forall x, y \in G$. H adalah subgrup sehingga terdapat elemen identitas $e \in H$, akibatnya $xe = x \in xH$. Oleh karena itu $x \in yH$. Jika terdapat $h \in H$ sedemikian sehingga $x = yh$, maka $y^{-1}x = h$. Jadi $y^{-1}x \in H$.

($\Leftarrow$) Misalkan $y^{-1}x \in H, \forall x, y \in G$. Jika terdapat $h \in H$ maka $y^{-1}x = h$ dan $x = yh$. Misalkan $z \in xH$ dan terdapat

$h' \in H$ sedemikian sehingga $z = xh' = yhh' = yh''$. Hal ini menunjukkan $z \in yH$. Jadi $yH = xH$. ■

Teorema 2.4.5 (Whitelaw, 1995)

Misalkan G grup berhingga dan misalkan H subgrup G maka $|G| = |G : H| \cdot |H|$.

Bukti :

Misal $|H| = m$ dan $|G : H| = k$ (sesuai dengan partisi G kedalam koset kiri H). Karena $|G : H| = k$, maka terdapat k partisi koset yang berbeda untuk setiap m elemen, oleh karena itu G terdiri km elemen $|G| = km = |G : H| \times |H|$. ■

Contoh 2.4.6

Misalkan himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ adalah grup permutasi, dimana $g_1 = (1)(2)(3)$, $g_2 = (12)(3)$, $g_3 = (132)$, $g_4 = (13)(2)$, $g_5 = (123)$, $g_6 = (1)(23)$. Jika $H = \{g_1, g_3, g_5\}$, dimana H merupakan subgrup G . Akan dibuktikan

$$|G : H| = \frac{|G|}{|H|}.$$

Jawab :

Diketahui $|G| = 6$ dan $|H| = 3$, maka $|G : H| = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{3} = 2$.

Akan dibuktikan $|G : H| = 2$

Untuk membuktikan jumlah indeks kiri H pada G digunakan koset kiri H pada G yaitu $g_1H = \{g_1, g_3, g_5\}$, $g_2H = \{g_2, g_4, g_6\}$,

$g_3H = \{g_3, g_1, g_5\}$, $g_4H = \{g_4, g_6, g_2\}$, $g_5H = \{g_5, g_3, g_1\}$ dan $g_6H = \{g_6, g_4, g_2\}$. Jadi terbukti $|G : H| = 2$.

Teorema 2.4.7 (Bhattacharya 1986)

Misalkan G grup yang beraksi pada himpunan X . Himpunan semua orbit X pada G adalah partisi X untuk setiap $x \in X$. Jika terdapat suatu pemetaan bijektif $Gx \rightarrow G/G_x$, maka $|Gx| = |G : G_x|$. Jika X adalah himpunan berhingga, maka $|X| = \sum_{x \in C} |G : G_x|$ dimana C adalah subset yang terdiri tepat satu elemen dari setiap orbit.

Bukti :

Partisi adalah himpunan dari kelas-kelas ekuivalen, sedangkan kelas-kelas ekuivalen merupakan himpunan dari relasi ekuivalen. Untuk itu $\forall x, y \in X$ dan $x \mathcal{R} y$. Akan ditunjukkan $\mathcal{R}$ relasi ekuivalen.

(i) $\mathcal{R}$ refleksif.

Diketahui jika $x \mathcal{R} y$ maka $x = ay$ untuk suatu $a \in G$. Karena G adalah grup maka terdapat elemen identitas $e \in G$, sedemikian sehingga $x = ex$, $\forall x \in X$. Jadi $x \mathcal{R} x$. Terbukti $\mathcal{R}$ refleksif.

(ii) $\mathcal{R}$ simetris.

Jika $x \mathcal{R} y$ maka $x = ay$, $\forall x, y \in X$. Karena G adalah grup maka terdapat invers dari $a \in G$ yaitu $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $y = a^{-1}x$. Jadi $y \mathcal{R} x$. Terbukti $\mathcal{R}$ simetris.

(iii) $\mathcal{R}$ transitif.

Jika $x \mathcal{R} y$ dan $y \mathcal{R} z$, maka $x = ay$ dan $y = bz$, $\forall x, y, z \in X$ dan $a, b \in G$. sedemikian sehingga $x = (ab)z$. Karena G adalah grup, maka G memenuhi sifat tertutup sehingga $ab \in G$. Jadi $x \mathcal{R} z$. Terbukti $\mathcal{R}$ transitif.

Karena $\mathcal{R}$ memenuhi sifat refleksif, simetris, transitif maka $\mathcal{R}$ adalah *relasi ekuivalen* pada X dan *kelas ekuivalen* pada $x \in X$ adalah orbit Gx . Karena itu himpunan semua orbit adalah partisi pada X . Jadi $X = \bigcup_{x \in C} Gx$ (disjoint.), dimana C adalah subset X yang mempunyai satu elamen pada setiap orbit.

Misalkan suatu pemetaan $\varphi : Gx \rightarrow G/G_x$ didefinisikan dengan

$ax \mapsto aG_x, \forall a \in G$. Akan dibuktikan φ adalah pemetaan bijektif.

(i) φ Pemetaan.

Jika $\forall a, b \in G, ax = bx$ maka akan ditunjukkan $\varphi(ax) = \varphi(bx)$.

Diketahui $ax = bx$ maka $ab^{-1}x = x$. Hal ini menunjukkan $ab^{-1} \in G_x$. Dengan Teorema 2.4.4 maka $aG_x = bG_x$. Sehingga $\varphi(ax) = \varphi(bx)$. Jadi terbukti φ pemetaan.

(i) φ injektif.

Jika $\forall a, b \in G, \varphi(ax) = \varphi(bx)$ akan ditunjukkan $ax = bx$.

$\varphi(ax) = \varphi(bx) \Leftrightarrow aG_x = bG_x$, menurut Teorema 2.4.4 maka $a^{-1}b \in G_x$. Sehingga diperoleh $a^{-1}bx = x \Rightarrow bx = ax$. Hal ini menunjukkan $ax = bx$. Terbukti φ injektif.

(ii) φ surjektif.

Jika $\forall a, b \in G$, maka $aGx = a(bx) = ax$. Terbukti φ surjektif.

Karena φ injektif dan surjektif maka φ adalah bijektif. Sehingga $|Gx| = |G/G_x| = |G : G_x|$. Diketahui X adalah gabungan orbit Gx yang disjoint dan X merupakan himpunan berhingga, maka

$$|X| = \sum_{x \in C} |Gx| = \sum_{x \in C} |G : G_x|. \quad \blacksquare$$

Teorema 2.4.8 (Balakrishnan, 1995)

Jika G grup yang beraksi pada himpunan X , maka: $\forall x \in X$

$$|Gx| |G_x| = |G|.$$

Bukti:

Dari Teorema 2.4.7 diketahui bahwa pemetaan $\varphi : Gx \rightarrow G/G_x$ adalah pemetaan yang bijektif, sedemikian sehingga $|Gx| = |G/G_x| \Rightarrow |Gx| = |G : G_x|$. Menurut Teorema 2.4.5 diperoleh

$$|Gx| = |G : G_x| \Rightarrow |Gx| = \frac{|G|}{|G_x|} \Rightarrow |G| = |Gx| |G_x|. \quad \blacksquare$$

Contoh 2.4.9

Misalkan himpunan $X = \{1, 2, 3\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ adalah grup permutasi, dimana $g_1 = (1)(2)(3)$, $g_2 = (12)(3)$, $g_3 = (132)$, $g_4 = (13)(2)$, $g_5 = (123)$, $g_6 = (1)(23)$.

Akan dibuktikan $|G| = |Gx||G_x|$.

Jawab :

Diketahui $|G| = 6$, $G1 = G2 = G3 = \{1, 2, 3\}$ jadi $|Gx| = 3$, $\forall x \in X$ dan diketahui $G_1 = \{g_1, g_6\}$, $G_2 = \{g_1, g_4\}$ dan $G_3 = \{g_1, g_2\}$.
Jadi $|G_x| = 2$, $\forall x \in X$. Sedemikian sehingga $|Gx||G_x| = 3 \cdot 2 = 6 = |G|$.

Teorema 2.4.10 (Teorema Burnside) (Bhattacharya 1986)

Misalkan G grup yang beraksi pada himpunan X . Maka banyaknya orbit X pada G adalah $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$

Bukti:

Misalkan $S = \{(g, x) \in G \times X \mid gx = x\}$. Untuk sebarang $g \in G$, maka jumlah pasangan order (g, x) pada S adalah sama dengan $|X_g|$.
Jika untuk sebarang $x \in X$, maka jumlah pasangan order (g, x) pada S adalah sama dengan $|G_x|$. Oleh karena itu,
 $\sum_{g \in G} |X_g| = |S| = \sum_{x \in X} |G_x|$. Dengan Teorema 2.4.7 menunjukkan

bahwa $|Gx| = |G : G_x| = |G|/|G_x|$, sehingga $\sum_{x \in X} |G_x| = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$.

Perhatikan bahwa $\frac{1}{|Gx|}$ akan bernilai sama untuk setiap x yang berada pada orbit yang sama. Dan jika O adalah sembarang orbit,

maka $\sum_{x \in O} \frac{1}{|Gx|} = 1$. Akibatnya $\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$ adalah banyaknya orbit di X terhadap G . Jadi $\sum_{x \in X} |Gx| = k|G|$. Jadi terbukti $k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X_g|$. ■

Contoh 2.4.11

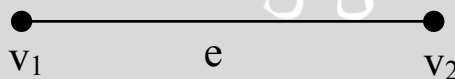
Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ adalah grup permutasi dari X , dimana $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (12)(34)$, $g_3 = (13)(24)$, $g_4 = (14)(23)$. Dari contoh 2.3.8 diperoleh bahwa $\sum_{g \in G} X_g = 8$ dan $|G| = 4$. Dengan menggunakan Teorema 2.4.6 maka jumlah orbit pada Grup permutasi G adalah

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} X_g = \frac{1}{4}(8) = 2.$$

2.5 Graf dan Graf Isomorfis

Definisi 2.5.1 (Clark dan Holton, 1991)

Suatu graf G terdiri dari pasangan himpunan $G(V, E)$, di mana V himpunan berhingga yang tidak kosong yang anggotanya disebut *simpul* (*vertice* atau *node*) dan E adalah himpunan yang anggotanya disebut *sisi* (*edge*) di mana setiap sisi menghubungkan tepat dua simpul.

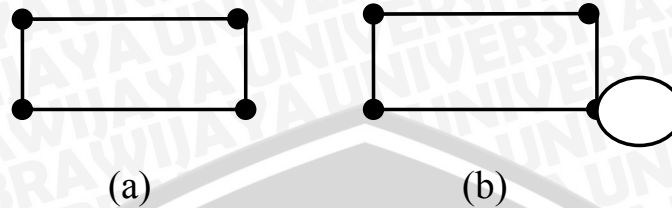


Gambar 2.5.1 Graf G dengan v adalah simpul dan e adalah sisi

Definisi 2.5.2 (Clark dan Holton, 1991)

Suatu graf yang tidak memiliki loop (gelang) dan sisi-sisi ganda disebut graf sederhana (*simple graph*), sedangkan graf ganda (*multigraph*) adalah graf yang memiliki sisi-sisi ganda atau

mengandung satu atau lebih loop (sisi yang menghubungkan sisi dengan dirinya sendiri).



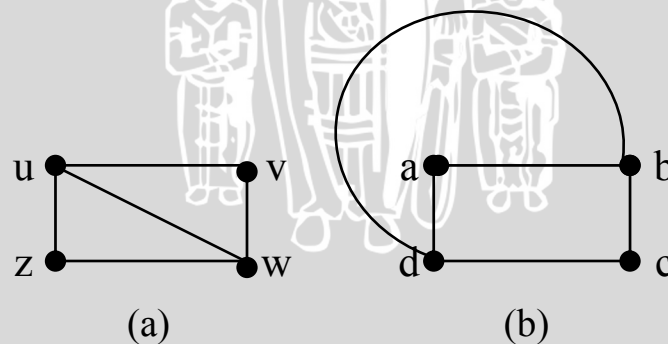
Gambar 2.5.2 Graf sederhana (a) dan graf ganda (b)

Definisi 2.5.3 (Clark dan Holton, 1991)

Misalkan $G(V, E)$ dan $G^*(V^*, E^*)$ adalah graf dan $f: V \rightarrow V^*$ adalah pemetaan yang bijektif. f adalah suatu isomorfisma jika $u, v \in V$ dan (u, v) adalah sisi-sisi pada G , maka $(f(u), f(v))$ adalah sisi-sisi pada G^* . Graf G dan G^* dikatakan saling *isomorfis*.

Contoh 2.5.4

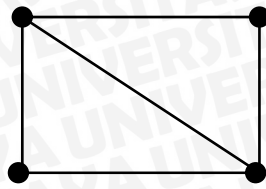
Misalkan $G(V, E)$ dan $G^*(V^*, E^*)$ adalah graf dan $V = \{u, v, w, z\}$, $V^* = \{a, b, c, d\}$. Jika terdapat suatu pemetaan f , dimana $f: V \rightarrow V^*$ yaitu $u \mapsto b$, $v \mapsto a$, $z \mapsto c$, $w \mapsto d$, maka f adalah suatu isomorfisma dan G dengan G^* adalah graf yang saling *isomorfis*.



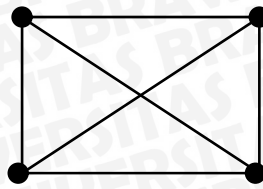
Gambar 2.5.3 graf (a) dan graf (b) saling isomorfis

Definisi 2.5.4 (Clark dan Holton, 1991)

Misalkan G adalah suatu graf. G disebut graf lengkap jika setiap simpul terhubung dengan simpul yang lain.



(a)



(b)

Gambar 2.5.4(a) graf tidak lengkap dan (b)graf lengkap

Proposisi 2.5.5 (Munir, 2005)

Jika G adalah graf lengkap dengan n simpul maka akan terdapat nC_2 sisi.

Bukti:

Misalkan graf G memiliki n simpul. Akan dibuktikan graf G mempunyai $a_n = {}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ sisi. Pernyataan tersebut akan dibuktikan dengan induksi matematika.

Misalkan $n = 1$. Maka terdapat $a_1 = 0$ sisi. Pernyataan benar.

Misalkan $n = 2$. Maka terdapat $a_2 = 1$ sisi. Pernyataan benar.

Andaikan $n = k$, maka terdapat $a_k = \frac{k(k-1)}{2}$ adalah benar. Akan dibuktikan $n = k + 1$ bernilai benar.

Jika $n = k + 1$, maka terdapat a_{k+1} sisi, yaitu :

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + k \\ &= \frac{k(k-1)}{2} + k \\ &= \frac{(k+1)k}{2} . \text{ Pernyataan benar.} \end{aligned}$$

Jadi benar jika graf G memiliki n simpul maka akan terdapat

$${}^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \text{ sisi.} \quad \blacksquare$$

BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi-definisi dan teorema-teorema yang digunakan untuk membuktikan teorema polya dan aplikasinya yaitu untuk menghitung dan menentukan jumlah graf yang tidak isomorfis khususnya pada graf sederhana.

Permutasi merupakan suatu pemetaan bijektif yang memetakan suatu himpunan X ke dirinya sendiri. Misalkan f adalah suatu pemetaan sedemikian sehingga $f : X \rightarrow X$. Suatu permutasi f dapat dibangun dari *cycle* yang saling disjoint (Durbin, 1992). Dalam definisi dibawah ini akan dijelaskan mengenai *tipe cycle* dari permutasi f .

Definisi 3.1 (Santosa, 2002)

Misalkan f adalah suatu permutasi dari himpunan X dengan n elemen yang memuat sebanyak a_1 *cycle* dengan panjang 1, a_2 *cycle* dengan panjang 2,..., a_i *cycle* dengan panjang i , untuk $i=1,2,3,\dots,n$, maka ***tipe cycle*** dari permutasi f disajikan dengan $[a_1 a_2 \dots a_n]$ dan ***bobot tipe cycle*** dari permutasi f adalah bilangan positif $W = 1^{a_1} 2^{a_2} \dots n^{a_n}$.

Contoh 3.2

Misalkan $X = \{1,2,\dots,9\}$. Jika terdapat suatu permutasi $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, maka f dapat ditulis dengan perkalian *cycle* yang saling disjoint, yaitu $f = (178)(346)(25)(9)$. Sehingga diperoleh $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Jadi *tipe cycle* dari permutasi f adalah $[112000000]$ dan *bobot tipe cycle* dari permutasi f adalah $1^1 2^1 3^2$.

Dengan menggunakan *tipe cycle* dari suatu permutasi akan didefinisikan *indeks cycle* dari suatu grup permutasi dimana merupakan jumlah dari *indeks cycle* tiap permutasi.

Definisi 3.3 (Santosa, 2002)

Misalkan G grup permutasi dari suatu himpunan berhingga X dengan n elemen. Misalkan $g \in G$, dimana g memiliki *tipe cycle* $[a_1 a_2 \dots a_n]$. **Indeks cycle** dari g didefinisikan sebagai

$Z(g : x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$ dan **indeks cycle** dari G di

definisikan sebagai $Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Z(g; x_1, x_2, \dots, x_n)$,

dimana x_i adalah penyajian *cycle* yang memiliki panjang i untuk $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

Contoh 3.4

Misalkan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$ adalah himpunan permutasi dari X . Dimana $g_1 = (1)(2)(3)(4)$, $g_2 = (12)(34)$, $g_3 = (13)(24)$, $g_4 = (14)(23)$. Akan dibuktikan G adalah grup permutasi dan akan ditunjukkan *indeks cycle* G .

Jawab :

a. Diketahui G adalah himpunan permutasi. Akan dibuktikan G adalah grup. Untuk membuktikan G adalah grup, maka G harus memenuhi aksioma-aksioma :

(i) Tertutup. Diketahui $g_2, g_3, g_4 \in G$ sedemikian sehingga $g_2 g_3 = g_3 g_2 = g_4$, $g_3 g_4 = g_4 g_3 = g_2$, $g_2 g_4 = g_4 g_2 = g_3$. Jadi G memenuhi sifat tertutup.

(ii) Asosiatif. Diketahui $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ sedemikian sehingga $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) = g_4$. Jadi G memenuhi sifat asosiatif.

(iii) Mempunyai elemen identitas. Diketahui $g_2, g_3, g_4 \in G$ maka terdapat $g_1 \in G$ sedemikian sehingga $g_1 g_2 = g_2 g_1 = g_2$,

$g_3 g_1 = g_1 g_3 = g_3$, $g_4 g_1 = g_1 g_4 = g_4$. Jadi g_1 merupakan elemen identitas pada G .

(iv) Mempunyai invers. Diketahui $g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ sedemikian sehingga $g_2 g_2 = g_1$, $g_3 g_3 = g_1$, $g_4 g_4 = g_1$. Jadi invers dari g_3 adalah g_3 , g_2 adalah g_2 , g_4 adalah g_4 . Karena G memenuhi keempat aksioma, sehingga terbukti G adalah grup.

b. Akan ditunjukkan *type cycle* dari grup permutasi G . Diketahui *tipe cycle* dari permutasi g_1 adalah $[4000]$. Jadi *indeks cycle* dari g_1 adalah $Z(g_1; x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^4$. Diketahui *tipe cycle* dari permutasi g_2 yaitu $[0200]$. Jadi *indeks cycle* dari g_2 adalah $Z(g_2; x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2^2$. Demikian juga untuk *indeks cycle* g_3 dan g_4 adalah sama dengan g_2 . Sehingga diperoleh *indeks cycle* G adalah

$$\begin{aligned} Z(G; x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^4 (g_i; x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \frac{1}{4} (x_1^4 + x_2^2 + x_2^2 + x_2^2) = \frac{1}{4} (x_1^4 + 3x_2^2). \end{aligned}$$

Setelah didefinisikan *indeks cycle* dari suatu grup permutasi, selanjutnya akan didefinisikan suatu fungsi yang memetakan himpunan berhingga X ke himpunan warna Y . Sehingga fungsi tersebut disebut pewarnaan X .

Definisi 3.5 (Santosa, 2002)

Misalkan X dan Y adalah suatu himpunan berhingga, dimana Y merupakan himpunan warna. Jika terdapat suatu fungsi Φ yang memetakan X ke Y , maka fungsi Φ disebut *pewarnaan* X . Sedangkan himpunan semua fungsi yang memetakan X ke Y dinotasikan T . Misalkan $\Phi, \Psi \in T$. Dua pewarnaan Φ, Ψ dikatakan tak dapat dibedakan terhadap grup permutasi G dari himpunan X jika terdapat $\pi \in G$ sedemikian sehingga

$$\Phi(x) = \Psi(\pi(x)), \forall x \in X.$$

Teorema 3.6 (Tucker, 1984)

Misalkan G grup permutasi dari himpunan X dan T adalah himpunan fungsi yang memetakan himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y . Misalkan $\Phi, \Psi \in T$. Jika $\Phi \mathcal{R} \Psi$ ($\mathcal{R}$ adalah relasi tak dapat dibedakan) maka $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalen.

Bukti :

Misalkan $\mathcal{R}$ adalah relasi tak dapat dibedakan. Akan dibuktikan $\mathcal{R}$ adalah relasi ekuivalen maka $\mathcal{R}$ harus memenuhi sifat refleksif, simetris, transitif.

a. $\mathcal{R}$ Refleksif.

Diketahui G grup sehingga terdapat elemen identitas $\varepsilon \in G$ sedemikian sehingga $\Phi(x) = \Phi(\varepsilon(x))$, $\forall \Phi \in T$ dan $\forall x \in X$. Jadi $\Phi \mathcal{R} \Phi$.

b. $\mathcal{R}$ Simetris.

Misalkan $\Phi, \Psi \in T, \pi \in G$. Jika $\Phi \mathcal{R} \Psi$ maka $\Phi(x) = \Psi(\pi(x))$, $\forall x \in X$. Karena G grup, maka terdapat $\pi^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $\Phi(\pi^{-1}(x)) = \Psi(\pi^{-1}\pi(x)) \Rightarrow \Phi(\pi^{-1}(x)) = \Psi(x)$. Jadi $\Psi \mathcal{R} \Phi$.

c. $\mathcal{R}$ Transitif.

Misalkan $\Phi, \Psi, \delta \in T$ dan $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in G$. Jika $\Phi \mathcal{R} \Psi$ dan $\Psi \mathcal{R} \delta$ maka $\Phi(x) = \Psi(\pi_1(x))$ dan $\Psi(x) = \delta(\pi_2(x))$, $\forall x \in X$. Diketahui G grup maka terdapat invers dari $\pi_1, \pi_2 \in G$ yaitu $\pi_1^{-1}, \pi_2^{-1} \in G$ sedemikian sehingga

$\Phi(\pi_1^{-1}(x)) = \Psi(\pi_1^{-1}\pi_1(x)) \Rightarrow \Phi(\pi_1^{-1}(x)) = \Psi(x)$. Oleh karena itu $\Phi(\pi_1^{-1}(x)) = \delta(\pi_2(x))$, sehingga $\Phi(\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}(x)) = \delta(\pi_2^{-1}\pi_2(x)) \Rightarrow \Phi(\pi_2^{-1}\pi_1^{-1}(x)) = \delta(x) \Rightarrow \Phi(\pi_3(x)) = \delta(x)$. Jadi $\Phi \mathcal{R} \delta$.

Karena $\mathcal{R}$ memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif, maka terbukti $\mathcal{R}$ relasi ekuivalen. ■

Jika $\mathcal{R}$ merupakan relasi ekuivalen pada himpunan T , maka himpunan semua kelas-kelas ekuivalen $\{\langle \Phi \rangle = \{\Psi \in T \mid \Phi \mathcal{R} \Psi\}\}$

adalah partisi dari T . Partisi di T merupakan himpunan kelas-kelas ekuivalen yang saling disjoint.

Definisi 3.7 (Santosa, 2002)

Kelas-kelas ekuivalen dari relasi ekuivalen disebut *pola-pola* di dalam T terhadap grup G .

Dua elemen dikatakan ekuivalen jika berada pada kelas yang sama. Dalam faktanya, setiap relasi ekuivalen menyebabkan suatu partisi demikian pula sebaliknya untuk setiap partisi menyebabkan suatu relasi ekuivalen (Durbin, 1992).

Teorema 3.8 (Santosa, 2002)

Misalkan T himpunan fungsi yang memetakan himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y . Misalkan G grup permutasi dari himpunan X . Untuk setiap $\pi \in G$, didefinisikan pemetaan $\pi': T \rightarrow T$ dimana $\pi'(\Phi(x)) = \Phi(\pi(x)) \quad \forall x \in X, \forall \Phi \in T$, maka :

- (a) π' adalah permutasi di T
- (b) $G' = \{\pi' \mid \pi \in G\}$ adalah grup.

Bukti:

a. Diketahui untuk setiap $\pi \in G$ didefinisikan $\pi': T \rightarrow T$ dimana $\pi'(\Phi(x)) = \Phi(\pi(x))$, $\forall x \in X, \forall \Phi \in T$. Akan dibuktikan π' adalah permutasi. Untuk membuktikan π' adalah permutasi, maka akan ditunjukkan π' adalah pemetaan yang bijektif.

(i) π' Pemetaan.

Ambil sebarang $\Phi_1, \Phi_2 \in T$ dengan $\Phi_1 = \Phi_2$. Akan ditunjukkan $\pi'(\Phi_1) = \pi'(\Phi_2)$. Ambil sebarang $x \in X$, maka $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$. Selanjutnya untuk sebarang $\pi \in G$ berlaku $\Phi_1(\pi(x)) = \Phi_2(\pi(x))$. Dengan definisi pemetaan diatas maka didapat $\Phi_1(\pi(x)) = \pi'(\Phi_1(x))$ dan $\Phi_2(\pi(x)) = \pi'(\Phi_2(x))$, sehingga $\pi'(\Phi_1(x)) = \pi'(\Phi_2(x))$. Hal ini menunjukkan $\pi'(\Phi_1) = \pi'(\Phi_2)$. Jadi terbukti π' adalah pemetaan.

(ii) π' Injektif.

Ambil sebarang $\Phi_1, \Phi_2 \in T$. Jika $\pi'(\Phi_1) = \pi'(\Phi_2)$, akan ditunjukkan $\Phi_1 = \Phi_2$. Ambil sebarang $x \in X$, maka $\pi'(\Phi_1(x)) = \pi'(\Phi_2(x))$. Dengan definisi pemetaan didapat $\pi'(\Phi_1(x)) = \Phi_1(\pi(x))$ dan $\pi'(\Phi_2(x)) = \Phi_2(\pi(x))$, sehingga $\Phi_1(\pi(x)) = \Phi_2(\pi(x))$, $\forall \pi \in G, x \in X$. Jadi $\Phi_1(t) = \Phi_2(t)$ $\forall t \in X$. Hal ini menunjukkan $\Phi_1 = \Phi_2$. Jadi terbukti π' adalah injektif.

(iii) π' Surjektif.

Ambil sebarang $\Phi \in T$. Diketahui G adalah grup, maka terdapat elemen identitas $e \in G$. Sedemikian sehingga $\Phi(x) = \Phi(e(x)) = \Phi(\pi\pi^{-1}(x)) = \Phi(\pi(\pi^{-1}(x))) = \pi'(\Phi(\pi^{-1}(x))) = \pi'((\Phi\pi^{-1})(x))$. Jadi terbukti π' surjektif.

Karena terbukti π' adalah pemetaan yang bijektif, sehingga π' adalah permutasi di T .

b. Diketahui G' adalah $\{\pi' : \pi \in G\}$ dan telah dibuktikan π' adalah permutasi, sehingga G' adalah himpunan dari semua permutasi. Jadi terbukti G' adalah grup permutasi. ■

Telah dibuktikan π' adalah suatu permutasi dan $G' = \{\pi' | \pi \in G\}$ adalah grup. Oleh karena itu, akan dibuktikan bahwa terdapat pemetaan dari G ke G' adalah pemetaan yang isomorfisma.

Teorema 3.9 (Santosa, 2002)

Misalkan T himpunan fungsi yang memetakan himpunan berhingga X ke himpunan berhingga Y . Misalkan G grup permutasi yang beraksi pada himpunan X dan jika terdapat pemetaan dari G ke G' yang di defisinikan sebagai $\pi \mapsto \pi'$ maka pemetaan tersebut isomorfisma.

Bukti:

Misalkan $\Gamma : G \rightarrow G'$ dengan definisi $\pi \mapsto \pi'$. Akan dibuktikan Γ adalah isomorfisma.

Untuk membuktikan Γ adalah isomorfisma maka harus dibuktikan bahwa Γ adalah pemetaan homomorfisma yang bijektif.

(i) Γ Pemetaan.

Ambil sebarang $\pi_1, \pi_2 \in G$. jika $\pi_1 = \pi_2$, maka akan dibuktikan $\Gamma(\pi_1) = \Gamma(\pi_2)$.

Ambil sebarang $x \in X$, maka $\pi_1(x) = \pi_2(x)$. Jika terdapat $\Phi \in T$, maka $\Phi(\pi_1(x)) = \Phi(\pi_2(x))$. Dengan Definisi pemetaan pada Teorema 3.8 didapat $\Phi(\pi_1(x)) = \pi'_1(\Phi(x))$ dan $\Phi(\pi_2(x)) = \pi'_2(\Phi(x))$ sehingga diperoleh $\pi'_1(\Phi(x)) = \pi'_2(\Phi(x))$.

Hal ini menunjukkan $\pi'_1 = \pi'_2$, untuk setiap $\pi'_1, \pi'_2 \in G'$. Dengan definisi pemetaan didapat $\pi'_1 = \Gamma(\pi_1)$ dan $\pi'_2 = \Gamma(\pi_2)$. Jadi $\Gamma(\pi_1) = \Gamma(\pi_2)$. Terbukti Γ adalah pemetaan..

(ii) Γ Surjektif.

Ambil sebarang $\pi' \in G'$. Akan dibuktikan bahwa $\forall \pi' \in G'$, maka terdapat $\pi \in G$ sedemikian sehingga $\pi' = \Gamma(\pi)$. Misalkan terdapat $\Phi \in T$. Dengan definisi pemetaan pada Teorema 3.8 didapat $\Phi(\pi(x)) = \pi'(\Phi(x))$, $\forall x \in X$. Menurut definisi pemetaan bahwa $\pi' = \Gamma(\pi)$ untuk suatu $\pi \in G$. Terbukti Γ surjektif.

(iii) Γ Injektif.

Ambil sebarang $\pi_1, \pi_2 \in G$. Akan dibuktikan jika $\Gamma(\pi_1) = \Gamma(\pi_2)$, maka $\pi_1 = \pi_2$. Sesuai dengan definisi pemetaan maka didapat $\Gamma(\pi_1) = \pi'_1$ dan $\Gamma(\pi_2) = \pi'_2$ sedemikian sehingga $\pi'_1 = \pi'_2$. Ambil sebarang $x \in X, \Phi \in T$, maka $\pi'_1\Phi(x) = \pi'_2\Phi(x)$. Sesuai dengan definisi pemetaan pada Teorema 3.8 maka didapat $\pi'_1(\Phi(x)) = \Phi(\pi_1(x))$ dan $\pi'_2(\Phi(x)) = \Phi(\pi_2(x))$ sedemikian sehingga $\Phi(\pi_1(x)) = \Phi(\pi_2(x))$. Hal ini menunjukkan $\pi_1 = \pi_2$. Jadi terbukti Γ injektif.

(iv) Γ Homomorfisma.

Misalkan $\pi_1, \pi_2 \in G$ dan $\pi'_1, \pi'_2 \in G'$. Akan ditunjukkan $(\pi_1 \pi_2)' = \pi'_1 \pi'_2$. Ambil sebarang $x \in X, \Phi \in T$.

Dengan menggunakan sifat pemetaan pada Teorema 3.8, maka

$$(\pi_1 \pi_2)' \Phi(x) = \Phi(\pi_1 \pi_2(x)) = \Phi(\pi_1(\pi_2(x))) = \pi_1' \Phi(\pi_2(x)) = \pi_1' \pi_2' \Phi(x)$$

sehingga $\Gamma(\pi_1 \pi_2) = (\pi_1 \pi_2)' = \pi'_1 \pi'_2 = \Gamma(\pi_1) \Gamma(\pi_2)$. Terbukti Γ adalah homomorfisma.

Karena Γ adalah pemetaan homomorfisma yang bijektif, jadi terbukti Γ adalah isomorfisma. ■

Teorema Polya adalah suatu teorema dimana salah satu aplikasinya yaitu untuk menentukan graf yang tidak isomorfis. Teorema Polya dibagi menjadi 2 teorema yaitu Teorema Polya pertama dan Teorema Polya kedua. Aplikasi Teorema Polya pertama yaitu untuk mengetahui jumlah pola pada graf yang tidak isomorfis sedangkan Teorema Polya kedua aplikasinya untuk menentukan pewarnaan pada graf yang tidak isomorfis.

Berikut disajikan pembuktian teorema Polya dengan menggunakan teorema Burnside dan juga Teorema 3.3 yang menyatakan bahwa pemetaan G ke G' adalah pemetaan yang isomorfis, sehingga $|G'| = |G|$.

Teorema 3.10 (Teorema polya pertama)(Santosa, 2002)

Misalkan T himpunan semua fungsi dari himpunan X dengan n elemen ke himpunan Y dengan r elemen dan G grup permutasi yang beraksi pada himpunan X . Jika *indeks cycle* pada G adalah $Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka jumlah pola didalam T terhadap G adalah $Z(G; r, r, \dots, r)$.

Bukti:

Dari Teorema 2.4.7 dan Definisi 3.7 dapat disimpulkan bahwa pola-pola pada T terhadap G grup permutasi pada himpunan X adalah orbit yang berbeda pada T terhadap G . Dengan menggunakan Teorema 3.9 akan menghasilkan pola-pola pada T terhadap G dan juga merupakan orbit yang berbeda pada T' terhadap G' .

Jadi dengan menggunakan Teorema Burnside, maka banyaknya orbit pada G' adalah :

$$k = \frac{1}{|G'|} \sum_{\pi \in G'} |X_{\pi'}| \quad (3.1)$$

$$\text{dimana } X_{\pi'} = \{\Phi \in T : \pi'(\Phi) = \Phi\}. \quad (3.2)$$

Dari persamaan (3.2) diketahui bahwa $\pi'(\Phi) = \Phi$. Ambil sebarang $x \in X$ maka $\pi'(\Phi(x)) = \Phi(x)$. Dengan definisi pemetaan pada Teorema 3.6 didapat $\pi'(\Phi(x)) = \Phi(\pi(x))$, $\forall x \in X$. Sedemikian sehingga $\Phi(\pi(x)) = \Phi(x)$. Dengan Teorema 3.7 diketahui bahwa pemetaan G ke G' adalah pemetaan yang isomorfis sehingga $|G'| = |G|$. Maka Persamaan (3.1) dapat diubah dalam bentuk

$$k = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} |\{\Phi \in T : \Phi(\pi(x)) = \Phi(x), \forall x \in X\}| \quad (3.3)$$

Jika $\Phi(\pi(x)) = \Phi(x)$ dan jika $(x_1 x_2 \dots x_j)$ adalah *cycle* dari π , maka $\Phi(x_1) = \Phi(x_2) = \dots = \Phi(x_j)$ yaitu Φ adalah konstan atas setiap *cycle* dari π . Sebaliknya, jika Φ adalah konstan atas setiap *cycle* dari π , dan jika $(xx_t \dots x_u)$ adalah *cycle* dengan sembarang $x \in X$, maka $\Phi(\pi(x)) = \Phi(x_t) = \Phi(x)$.

Karena penjumlahan pada persamaan (3.3) merupakan jumlah dari pewarnaan X dengan r warna sedemikian sehingga setiap elemen-elemen yang sama dalam *cycle* dari permutasi π akan diberikan warna yang sama pula. Jika $\pi \in G$ mempunyai tipe permutasi $[a_1 a_2 \dots a_n]$, maka banyak cara pewarnaan sama dengan $r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ dimana ekuivalen dengan persamaan (3.1). Sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} r^{a_1} r^{a_2} \dots r^{a_n} = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z(\pi; r, r, \dots, r) \\ &= Z(G; r, r, \dots, r). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Contoh 3.11

Misalkan G adalah suatu graf yang memiliki 3 simpul. Maka terdapat himpunan X dengan 3 elemen yaitu $X = \{1, 2, 3\}$ dan Y adalah suatu himpunan yang mempunyai r elemen ($r=2$). Misalkan $S_3 = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6\}$ adalah grup simetri, dimana

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3) \quad , \quad g_2 = (1 \ 2)(3), \quad g_3 = (1 \ 2 \ 3),$$

$g_4 = (2 \ 3)(1)$, $g_5 = (1 \ 3 \ 2)$ dan $g_6 = (1 \ 3)(2)$. Maka *indeks cycle* secara berturut-turut adalah $Z(g_1; x_1, x_2, x_3) = x_1^3$, $Z(g_2; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$, $Z(g_3; x_1, x_2, x_3) = x_3$, $Z(g_4; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$, $Z(g_5; x_1, x_2, x_3) = x_3$, $Z(g_6; x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$.

Sehingga diperoleh *indeks cycle* G adalah

$$Z(G; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3)$$

Diketahui $r=2$ sehingga $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. Dengan menggunakan Teorema Polya pertama didapatkan jumlah pola dari G adalah

$$Z(G; r, r, r) = Z(G; 2, 2, 2) = \frac{1}{6}(2^3 + 3 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2) = 4$$

Jadi terdapat 4 pola didalam T terhadap G . Hal ini menunjukkan bahwa graf G terdiri atas 4 graf yang tidak isomorfis.

Untuk membuktikan Teorema Polya kedua, didefinisikan himpunan Y adalah suatu himpunan warna dengan r elemen dimana terdapat fungsi bobot w yang memetakan himpunan Y dengan r elemen sehingga $w(y)$ yang merupakan fungsi yang menyatakan nilai dari pewarnaan.

Definisi 3.12 (Santosa, 2002)

Misalkan fungsi bobot w merupakan pemetaan pada himpunan Y dengan r warna, $\{w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)\}$. Maka Pola Pewarnaan pada T terhadap grup permutasi G yang beraksi pada himpunan X

adalah

$$PR(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_r \\ n_i \geq 0}} \alpha(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

$\alpha(n_1, n_2, \dots, n_r)$ merupakan koefisien dari jumlah pewarnaan (jumlah pola) yang dapat dibedakan dan warna $w(y_1)$ bersesuaian dengan n_1 elemen, $w(y_2)$ bersesuaian dengan n_2 elemen, ..., $w(y_r)$ bersesuaian dengan n_r elemen.

Teorema 3.13 (Santosa, 2002)

Misalkan G grup permutasi yang beraksi pada himpunan X dan T adalah himpunan semua fungsi dari himpunan X ke himpunan $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_r\}$. Didefinisikan $w(y)$ adalah fungsi bobot pada Y dan fungsi bobot pada T yaitu $\omega(\Phi)$ dengan bentuk $\omega(\Phi) = [w(\Phi(x_1))] [w(\Phi(x_2))] \dots [w(\Phi(x_n))]$, $x \in X, \Phi \in T$.

Sehingga :

- Jika Φ dan Ψ didalam T ekuivalen terhadap G , maka $\omega(\Phi) = \omega(\Psi)$
- $T_1, T_2, \dots, T_k$ adalah pola-pola pada T yang berbeda. Misalkan $\omega(T_i)$ merupakan konstan atas T_i , untuk $(i = 1, 2, \dots, k)$. Maka pola pewarnaan pada T dapat diekspresikan sebagai :

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum_{i=1}^k \omega(T_i).$$

Bukti:

- Misalkan Φ dan Ψ ekuivalen. Oleh karena itu terdapat permutasi $\pi \in G$ sedemikian sehingga $\Phi(x) = \Psi(\pi(x))$, $\forall x \in X$. Oleh karena itu :

$$\begin{aligned} \omega(\Phi) &= [w(\Phi(x_1))] [w(\Phi(x_2))] \dots [w(\Phi(x_n))] \\ &= [w(\Psi(\pi(x_1)))] [w(\Psi(\pi(x_2)))] \dots [w(\Psi(\pi(x_n)))] \\ &= [w(\Psi(x'_1))] [w(\Psi(x'_2))] \dots [w(\Psi(x'_n))] \\ &= \omega(\Psi) \end{aligned}$$

b. Didalam suatu permutasi pada pewarnaan obyek, jumlah obyek yang telah diwarnai tidak akan berubah. Jumlah obyek tersebut mengikuti semua susunan pola telah diberikan, T_i , didalam T yang digolongkan sesuai dengan urutan polanya, yaitu $(n_1, n_2, \dots, n_r)$.

Ini berarti bahwa setiap $\Phi \in T_i$ memetakan n_1 elemen dari X ke y_1 , n_2 elemen ke $y_2, \dots, n_r$ elemen ke y_r , sehingga bobot dari T_i adalah

$$\omega(T_i) = \omega(\Phi) = [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r}$$

Dengan definisi Pola Pewarnaan, koefisien $\alpha(n_1, n_2, \dots, n_r)$ didefinisikan sebagai jumlah dari pola yang memenuhi $(n_1, n_2, \dots, n_r)$, karena itu dapat ditulis sebagai :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \omega(T_i) &= \text{Total bobot dari } k \text{ pola} \\ &= \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} (\text{Total bobot dari pola yang memenuhi} \\ &\quad (n_1, n_2, \dots, n_r)) \\ &= \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_r)} \alpha(n_1, n_2, \dots, n_r) [w(y_1)]^{n_1} [w(y_2)]^{n_2} \dots [w(y_r)]^{n_r} \\ &= PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 3.14 (Teorema Polya kedua)(Santosa, 2002)

Misalkan G grup permutasi yang beraksi pada himpunan X dan T himpunan semua fungsi dari himpunan X ke himpunan Y . Maka Pola Pewarnaan, $PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r))$, merupakan nilai dari indeks cycle G yaitu $Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$, dengan $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ untuk $(i = 1, 2, \dots, n)$

Bukti:

Anggap fungsi bobot $\omega(\Phi)$ memenuhi sifat konstan untuk orbit-orbit T terhadap grup permutasi G .

$$PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) = \sum \omega(T_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \sum_{\Phi \in X_\pi} \omega(\Phi) \quad (3.4)$$

Dikembalikan pada bentuk X dan G , sesuai dengan teorema 3.9 sehingga diperoleh :

$$PP = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} \left\{ \sum_{\substack{\Phi \in T: \Phi(\pi(x)) = \Phi(x) \\ \forall x}} [w(\Phi(x_1))] [w(\Phi(x_2))] \dots [w(\Phi(x_n))] \right\} \quad (3.5)$$

Penjumlahan pada persamaan (3.5) diambil untuk semua fungsi $\Phi(x)$ yang konstan atas setiap *cycle* π . Misalkan π mempunyai tipe $[a_1 a_2 \dots a_n]$ dan didefinisikan $w(y_i)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Omega = & \overbrace{[w(y_1) + w(y_2) + \dots + w(y_r)]}^{a_1 \text{ faktor}} \dots \overbrace{[w(y_1) + w(y_2) + \dots + w(y_r)]}^{a_2 \text{ faktor}} \\ & \times \overbrace{[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \dots + w(y_r)^2]}^{a_3 \text{ faktor}} \dots \overbrace{[w(y_1)^2 + w(y_2)^2 + \dots + w(y_r)^2]}^{a_4 \text{ faktor}} \\ & \times \overbrace{[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \dots + w(y_r)^3]}^{a_5 \text{ faktor}} \dots \overbrace{[w(y_1)^3 + w(y_2)^3 + \dots + w(y_r)^3]}^{a_6 \text{ faktor}} \\ & \times \dots \dots \dots \overbrace{[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \dots + w(y_r)^n]}^{a_n \text{ faktor}} \dots \overbrace{[w(y_1)^n + w(y_2)^n + \dots + w(y_r)^n]}^{a_n \text{ faktor}} \end{aligned}$$

Perluasan dari Ω memuat $r^{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ bentuk, yang jumlahnya juga merupakan jumlah dari fungsi $\Phi(x)$ yang konstan atas setiap *cycle* π . Sehingga dapat ditunjukkan bahwa pada setiap bentuk individu dalam perluasan diatas sama dengan bobot ω dari fungsi $\Phi(x)$.

Misalkan penyajian *cycle* π mempunyai korespondensi satu-satu dengan faktor dari Ω , yaitu *cycle* dengan panjang 1 berkorespondensi satu-satu dengan faktor pertama a_1 , *cycle* dengan

panjang 2 dengan a_2 dan seterusnya. Misalkan $\Phi(x)$ memetakan *cycle* dengan panjang j yang diketahui (sebut saja himpunan Q) didalam y_v , maka

$$w(y_v)^j = \prod_{x \in Q} w(\Phi(x))$$

Seluruh bentuk perluasan yang diberikan dengan perkalian pada semua *cycle* akan sama dengan

$$\prod_U \left[\prod_{x \in Q} w(\Phi(x)) \right] \text{ dimana } U \text{ adalah semua } cycle \pi.$$

Tetapi tiap *cycle* ini mempunyai pengaruh pada partisi di X , sehingga bentuk perluasan hanya $\prod_{x \in X} w(\Phi(x)) = \omega(\Phi)$.

Jadi penjumlahan pada persamaan (3.5) mempunyai nilai yang sama dengan Ω . Sehingga jelas terlihat bahwa $\Omega = Z(\pi : x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$\text{Jadi } PP = \frac{1}{|G|} \sum_{\pi \in G} Z(\pi : x_1, x_2, \dots, x_n) = Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dengan $x_i = [w(y_1)]^i + [w(y_2)]^i + \dots + [w(y_r)]^i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. ■

Contoh 3.15

Dari Contoh 3.3 diketahui $X=3$ dan $r=2$, maka terdapat 2 bobot pada himpunan Y . Misalkan $w(y_1)$ = ada garis = t , $w(y_2)$ = tidak ada garis = 1. Kemudian substitusikan $x_1 = (1+t)$, $x_2 = (1+t^2)$ dan $x_3 = (1+t^3)$. Dengan Teorema Polya kedua didapat

$$\begin{aligned} PP(G; w(y_1), w(y_2), \dots, w(y_r)) &= Z(G; x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \frac{1}{6} (x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} ((1+t)^3 + 3(1+t)(1+t^2) + 2(1+t^3)) \\ &= \frac{1}{6} (6 + 6t^2 + 6t + 6t^3) \end{aligned}$$

$$= (1 + t + t^2 + t^3)$$

Jadi graf yang memiliki 3 titik akan ada 1 graf dengan 3 garis, 1 graf dengan 2 garis, 1 graf dengan 1 garis, dan 1 graf tanpa garis. Dan dapat digambarkan sebagai berikut :



Gambar 3.1 Graf tidak isomorfis dengan 3 simpul.

Contoh 3.16

Misalkan G suatu graf dengan 4 simpul, maka terdapat suatu himpunan X dengan 4 elemen dimana $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $S_4 = \{g_1, g_2, \dots, g_{24}\}$ adalah grup simetri dimana

$$\begin{array}{lll} g_1 = (1)(2)(3)(4) & g_2 = (14)(2)(3) & g_3 = (142)(3) \\ g_4 = (1)(3)(24) & g_5 = (1)(2)(34) & g_6 = (124)(3) \\ g_7 = (12)(3)(4) & g_8 = (12)(34) & g_9 = (1)(23)(4) \\ g_{10} = (14)(23) & g_{11} = (1)(234) & g_{12} = (1)(243) \\ g_{13} = (14)(23) & g_{14} = (13)(24) & g_{15} = (1324) \\ g_{16} = (1423) & g_{17} = (1342) & g_{18} = (1432) \\ g_{19} = (1234) & g_{20} = (1234) & g_{21} = (123)(4) \\ g_{22} = (134)(2) & g_{23} = (132)(4) & g_{24} = (143)(2) \end{array}$$

Jika G adalah graf lengkap dengan 4 simpul, maka G mempunyai 6 sisi. Sehingga harus dilakukan kombinasi pada tiap permutasi dari grup simetri S_4 . Sehingga diperoleh

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4) \text{ dan indeks cycle } g_1 = x_1^4, \text{ maka}$$

$$\text{diperoleh } g'_1 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \end{pmatrix} = (12)(13)(14)(23)(24)(34)$$

dan indeks cycle $g'_1 = x_1^6$.

$g_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4231 \end{pmatrix} = (14)(2)(3)$ dan indeks cycle $g_2 = x_1^2 x_2$, maka

diperoleh $g'_2 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 42 & 43 & 41 & 23 & 21 & 31 \end{pmatrix} = (12 \ 42)(13 \ 43)(14)(23)$

dan indeks cycle $g'_2 = x_1^2 x_2^2$.

$g_3 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4132 \end{pmatrix} = (142)(3)$ dan indeks cycle $g_3 = x_1 x_3$, maka

diperoleh $g'_3 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 41 & 43 & 42 & 13 & 12 & 32 \end{pmatrix} = (12 \ 41 \ 42)(13 \ 43 \ 32)$

dan indeks cycle $g'_3 = x_3^2$.

$g_8 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2143 \end{pmatrix} = (12)(34)$ dan indeks cycle $g_8 = x_2^2$, maka diperoleh

$g'_8 = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 21 & 24 & 23 & 14 & 13 & 43 \end{pmatrix} = (12)(13 \ 24)(14 \ 23)(34)$ dan

indeks cycle $g'_8 = x_1^2 x_2^2$.

$g_{15} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3421 \end{pmatrix} = (1324)$ dan indeks cycle $g_{15} = x_4$, maka diperoleh

$g'_{15} = \begin{pmatrix} 12 & 13 & 14 & 23 & 24 & 34 \\ 34 & 32 & 31 & 42 & 41 & 21 \end{pmatrix} = (12 \ 34)(13 \ 32 \ 42 \ 41)$ dan

indeks cycle $g'_{15} = x_2 x_4$.

Disimpulkan untuk $x_4 \rightarrow x_6$, $x_1^2 x_2 \rightarrow x_1^2 x_2^2$, $x_1 x_3 \rightarrow x_3^2$, $x_2^2 \rightarrow x_1^2 x_2^2$, $x_4 \rightarrow x_2 x_4$. Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Z(S_4; x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{|S_4|} \sum_{g_i \in S_4} Z(g'_i, x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= \frac{1}{|24|} (x_1^6 + 9x_1^2 x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2 x_4) \end{aligned}$$

Misalkan terdapat himpunan Y dengan r elemen ($r=2$). Maka, dengan Teorema Polya pertama dapat diperoleh

$$\begin{aligned} Z(S_4; 2, 2, 2, 2) &= \frac{1}{24} (2^6 + 9 \cdot 2^2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 \cdot 2) \\ &= 11 \end{aligned}$$

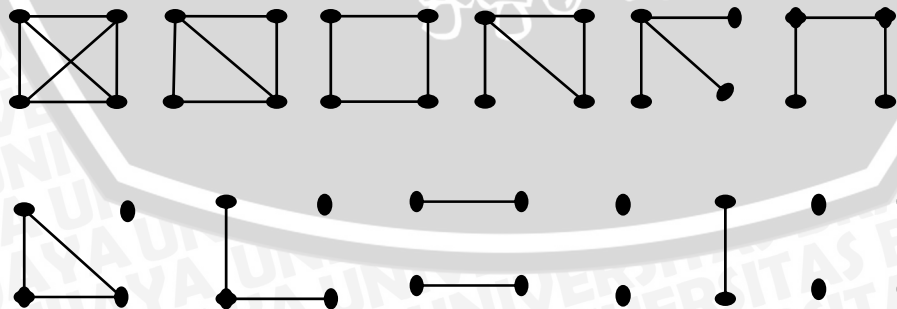
Jika G adalah graf yang memiliki 4 simpul, maka terdapat 11 pola graf yang tidak isomorfis.

Diketahui himpunan Y mempunyai 2 elemen ($r=2$). Maka terdapat 2 bobot pada himpunan Y . Misalkan $w(y_1) = t =$ ada garis, $w(y_2) = 1 =$ tidak ada garis. Kemudian disubstitusikan $x_1 = (t+1)$, $x_2 = (t^2+1)$, $x_3 = (t^3+1)$, $x_4 = (t^4+1)$.

Dengan menggunakan Teorema Polya kedua

$$\begin{aligned} PP(S_4; w(y_1), w(y_2), w(y_3), w(y_4)) &= Z(S_4; (t+1), (t^2+1), (t^3+1), (t^4+1)) \\ &= \frac{1}{24} ((t+1)^6 + 9(t+1)^2(t^2+1)^2 + 8(t^3+1)^2 + 6(t^2+1)(t^4+1)) \\ &= \frac{1}{24} (24t^6 + 24t^5 + 48t^4 + 72t^3 + 48t^2 + 24t + 24) \\ &= (t^6 + t^5 + 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + t + 1) \end{aligned}$$

Jadi, jika graf mempunyai 4 simpul maka terdapat 1 graf dengan 6 sisi, 1 graf dengan 5 sisi, 2 graf dengan 4 sisi, 3 graf dengan 3 sisi, 2 graf dengan 2 sisi dan 1 graf tanpa sisi.



Gambar 3.2 Graf yang saling tidak isomorfis dengan 4 simpul



BAB IV PENUTUP

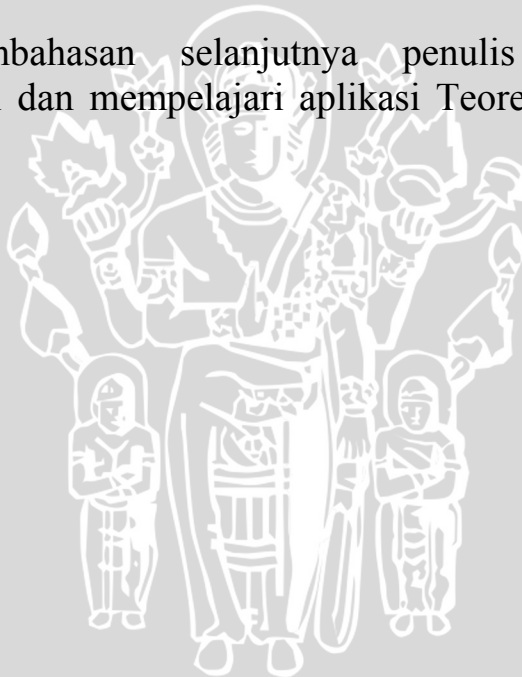
4.1 Kesimpulan

Dari uraian diatas, maka dapat disimpulkan sebagai berikut :

1. Untuk membuktikan Teorema Polya digunakan Teorema Burnside dan Teorema Isomorfisma Grup.
2. Teorema Polya pertama digunakan untuk menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfis dengan n titik.
3. Teorema Polya kedua digunakan untuk menghitung banyaknya graf sederhana yang tidak isomorfis dengan n titik dan k garis.

4.2 Saran

Untuk pembahasan selanjutnya penulis mengharapkan pembaca mengkaji dan mempelajari aplikasi Teorema Polya dalam bidang kimia.





DAFTAR PUSTAKA

- Balakrishnan, V. K., 1995, *Theory and Problem of Combinatorics(Including concepts of Graph Theory)*, McGraw-Hill Inc., United State of America.
- Bhattacharya, P. B., 1986, *Basic Abstract Algebra*, chambridge University Press, New York.
- Chartrand, G., and Lesniak, L., 1996, *Graph and Diagraph*, Second Edition, Champman and Hall Inc, New York.
- Clark, J., and Holton, D. A, 1991, *A First Look at Graph Theory*, Word Scientific Publishing Company, Singapore.
- Dummit, D. S., 1999, *Abstract Algebra, Second Edition*, Jhon Willey & Sons Inc., New York.
- Durbin, J. R., 1992, *Modern Algebra, Third Edition*, John Willey & Sons Inc., Singapore.
- Fraleigh, J. B., 1994, *A first Course In Abstract Algebra*, Addison wesley Publishing Company, New York.
- Grimaldi, R. P., 1994, *Discrete and Combinatorial Mathematics and Applied Introduction, Third Edition*, Addison-Wesley Publishing Company Inc., New York.
- Munir, R., 2005, *Matematika Diskrit, Edisi Ketiga*, Informatika, Bandung.
- Santosa, R., Gunawan, 2002, *Aplikasi Teorema Polya Pada Enumerasi Graf Sederhana*, <http://www.ukdw.ac.id>. Diakses pada tanggal 20 Agustus 2007 pukul 05.30 WIB.
- Hungerford, T. W., 1974, *Algebra*, Springer-Verlag, New York.
- Pinter, C. C., 1990, *A Book of Abstract Algebra, Second Edition*, McGraw-Hill Inc, New York.

Whitelaw, T. A., 1995, *Introduction to Abstract Algebra*, Chapman and Hall, New York.

Tucker, A., 1984, *Applied Combinatorics, Second Edition*, John Wiley & Sons, Inc Canada.

Wilson R.J & Watkins J.J., 1990, “*Graphs An Introductory Approach*”, John Wiley & Sons Inc, Singapore.

