

**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR – PREY DENGAN
PENYAKIT**

SKRIPSI

oleh:

HOSNAWIATUN HASANAH

0410940025-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA**

2008

**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR – PREY
DENGAN PENYAKIT**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
HOSNAWIATUN HASANAH
0410940025-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR – PREY
DENGAN PENYAKIT**

Oleh:

**HOSNAWIATUN HASANAH
0410940025-94**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 27 Oktober 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

Pembimbing I

Pembimbing II

**Dr. Wuryansari M.K, M.Si
NIP. 132 048 784**

**Drs. M. Muslikh M.Si
NIP. 131 871 740**

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 131 126 049**

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Hosnawiatun Hasanah
NIM : 0410940025 - 94
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Analisis Dinamik Model Predator–Prey dengan Penyakit

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 27 Oktober 2008
Yang menyatakan,

(Hosnawiatun Hasanah)
NIM. 0410940025-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



ANALISIS DINAMIK MODEL PREDATOR – PREY DENGAN PENYAKIT

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas formulasi model dan analisis model predator – prey dengan dinamika penyakit. Model tersebut menjelaskan interaksi antara ikan yang rentan (*susceptibles fish*) S , ikan terinfeksi (*infectives fish*) I dan predatornya P . Pembahasan pada skripsi ini lebih ditekankan pada analisis dinamik, yang meliputi penentuan titik kesetimbangan, uji eksistensi titik kesetimbangan, dan penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Berdasarkan hasil uji eksistensi diperoleh lima titik kesetimbangan yang nilainya bergantung pada parameter-parameter yang terdapat pada model. Eksistensi kelima titik kesetimbangan tersebut dinyatakan dalam peta eksistensi. Dengan melakukan linierisasi di sekitar titik kesetimbangan, jenis kestabilan lima titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan. Terdapat dua parameter yang berpengaruh terhadap kestabilan sehingga berdasarkan parameter tersebut diperoleh enam daerah kestabilan yang disajikan dalam peta kestabilan. Perubahan parameter menyebabkan perubahan eksistensi dan sifat kestabilan titik kesetimbangan. Fenomena tersebut dikenal sebagai bifurkasi. Untuk memberikan ilustrasi terhadap hasil analisis tersebut, dilakukan simulasi dengan membangun skema numerik.

Kata Kunci: Model predator – prey, titik kesetimbangan, peta eksistensi, peta kestabilan, bifurkasi.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DYNAMICS ANALISYS A PREDATOR-PREY MODEL WITH DISEASE

ABSTRACT

This research describes a deterministic model formulation and analyzes a predator-prey model with disease dynamics. This model describes interaction between susceptible fish S , infective fish I , and the predator P . The discussion in this research is focused on dynamical analysis, i.e. determination of equilibrium points, observation on the existence of equilibrium points, and determination on type of stability of equilibrium points. Based on the existence examination, it is obtained five equilibrium points which depend on the parameters of model. The dependence of the equilibrium points on the parameters is presented by existence map. By linierizing the system around the equilibrium points, the stabilities of the equilibrium points can be determined. There are two parameters that influence the stability. Based on those parameters, it is yield six stability regions showed in stability map. The change of parameter causes change on the existence and stability types. This phenomenon is called bifurcation. By constructing a numerical scheme, some simulations on the analytical result are performed.

Key Word : Predator-prey model, equilibrium point, existence map, stability map, bifurcation.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Alhamdulillah hirabbil'alamin atas segala limpahan rahmat Allah yang maha berkehendak dan memutuskan sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Sholawat dan salam tetap tercurahkan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW.

Pada penyusunan Skripsi dengan judul “Analisis Dinamik Model Predator – Prey dengan Penyakit” banyak pihak yang telah membantu. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Dr. Wuryansari Muharini K., M.Si selaku dosen pembimbing I atas bimbingan, kesabaran, dan koreksi di dalam penulisan skripsi ini.
2. Drs. M. Muslikh, M.Si. selaku dosen pembimbing II dan pembimbing akademik atas bimbingan, kesabaran, dan koreksi di dalam penulisan skripsi ini.
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku ketua Jurusan Matematika Universitas Brawijaya atas dukungan dan motivasi di dalam penulisan skripsi ini.
4. Mr. Chris Flake yang telah memberikan koreksi atas model penulis.
5. Bapak, Ibu dan adikku atas doa, kasih sayang tiada tara dan motivasi terbesar untuk menyelesaikan skripsi ini.
6. Seluruh staf tata usaha Jurusan Matematika dan fakultas MIPA atas bantuannya selama ini.
7. Saudara – saudara seperjuangan di medan dakwah, semoga Allah memudahkan jalan kita.

Penulis menyadari masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, segala macam kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan demi perbaikan selanjutnya. Semoga tulisan ini bermanfaat bagi penulis dan semua pihak.

Malang, 27 Oktober 2008

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xiv
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR LAMPIRAN	xvii
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Batasan Masalah	2
1.4 Tujuan	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	5
2.1 Persamaan Diferensial	5
2.2 Sistem Otonomus.....	6
2.3 Sistem Otonomus Linier	8
2.4 Sistem Otonomus Nonlinier	7
2.5 Model Predator - Prey	13
2.6 Kriteria Routh - Hurwitz	13
2.7 Metode Runge-Kutta Orde Empat	14
BAB III PEMBAHASAN	17
3.1 Formulasi Model	17
3.2 Menentukan Titik Kesetimbangan.....	21
3.3 Uji Eksistensi Titik Kesetimbangan	24
3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan	26
3.5 Simulasi Grafik dan Kajian Perilaku Solusi.....	35
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	47

DAFTAR PUSTAKA	49
LAMPIRAN.....	51

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 3.1	Parameter model predator-prey dengan penyakit..... 33
Tabel 3.2	Syarat eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan..... 33
Tabel 3.3	Nilai titik kesetimbangan dengan daerah kestabilan yang ditentukan oleh nilai β dan e 34
Tabel 3.4	Nilai awal solusi di sekitar titik kesetimbangan SI dan SP..... 37
Tabel 3.5	Nilai awal solusi di sekitar titik kesetimbangan SI dan SP..... 41
Tabel 3.6	Nilai awal di sekitar titik kesetimbangan SP..... 44
Tabel 3.7	Nilai awal di sekitar titik SP=(3.08,1.5,9.21) untuk $(\beta, e)=(0.1,0.6)$ 46



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR GAMBAR

		Halaman
Gambar 3.1	Daerah $= \{ (,) > \text{ dan } + (1 +) < 1 \}$	25
Gambar 3.2	Daerah eksistensi titik kesetimbangan pada bidang $-e$	26
Gambar 3.3	Daerah kestabilan titik kesetimbangan pada bidang $-e$	31
Gambar 3.4	Peta daerah kestabilan setelah disubstitusikan nilai parameter pada syarat kestabilan	32
Gambar 3.5	Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ untuk $(, e) = (0.2, 0.7)$ dengan nilai awal $(0.09, 0.2, 0.1)$, $(0.9, 0.3, 0.2)$, $(0.6, 0.4, 0.3)$, dan $(0.3, 0.6, 0.5)$	35
Gambar 3.6	Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ untuk $(, e) = (1.5, 0.7)$ dengan nilai awal $(0.09, 0.2, 0.1)$, $(0.9, 0.3, 0.2)$, $(0.6, 0.4, 0.3)$, dan $(0.3, 0.6, 0.5)$	36
Gambar 3.7	Grafik solusi $s(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) Konvergen ke SP	37
Gambar 3.8	Grafik solusi $i(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) Konvergen ke SP	38
Gambar 3.9	Grafik solusi $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) Konvergen ke SP	39
Gambar 3.10	Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ untuk nilai $(, e) = (1.5, 0.7)$ dengan nilai awal $(0.09, 0.2, 0.1)$, $(0.9, 0.3, 0.2)$, $(0.6, 0.4, 0.3)$ dan $(0.3, 0.6, 0.5)$	40
Gambar 3.11	Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) <i>limit cycle</i> SP	42
Gambar 3.12	Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) konvergen ke SP	42
Gambar 3.13	Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$ dan $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) <i>limit cycle</i> SP	43
Gambar 3.14	<i>Limit cycle</i> SP dan kestabilan titik kesetimbangan	44

Gambar 3.15 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ untuk $(\beta, e)=(0.8, 0.1)$	45
Gambar 3.16 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ tidak pernah stabil.....	46

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1	Penurunan Penyekalaan Persamaan Model Predato–Prey dengan Dinamika Penyakit 51
Lampiran 2	Algoritma Metode Runge – Kutta Orde Empat untuk Menghitung $s(t)$, $i(t)$ dan $p(t)$ 54
Lampiran 3	Skema Numerik Metode Runge-Kutta Orde Empat 55



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pada pertengahan Agustus 1996 bakteri jenis *Vibrio vulnificus* berkembang pesat di danau Salton. Berkembangnya jumlah bakteri ini menyebabkan banyaknya kematian ikan Tilapia. Hasil penelitian Flake dkk. (2003) menunjukkan bahwa bakteri ini berkontribusi mengurangi kadar oksigen dalam tubuh ikan. Hal ini menyebabkan ikan berenang ke permukaan air untuk mencari oksigen. Ikan yang terinfeksi bakteri bergerak lamban sehingga memberi peluang emas bagi predatornya yaitu pelikan untuk memangsanya. Namun, peluang emas tersebut berakibat buruk bagi pelikan karena dapat menyebabkan infeksi bakteri dalam tubuhnya, bahkan dapat mengantarkannya pada kematian.

Model interaksi dua spesies seperti contoh di atas umumnya disebut model Lotka-Volterra. Di dalam dunia nyata dengan permasalahannya yang lebih kompleks, model Lotka-Volterra tergolong sederhana sehingga tidak dapat memberikan intepretasi secara tepat. Berdasarkan permasalahan ini Holling mengkonstruksi sebuah model yang disebut Model Holling Tipe II. Model ini lebih kompleks dibandingkan model Lotka-Volterra akan tetapi hanya tersedia untuk model satu predator dan satu prey. Pada kasus yang terjadi di danau Salton, predator bisa saja memakan ikan sehat dan sakit. Hal ini menunjukkan bahwa predator memangsa dua prey sehingga model Holling Tipe II kurang sesuai untuk kasus ini. Oleh karena itu Holling mengembangkan modelnya lebih lanjut dengan membuat sebuah percobaan yang merepresentasikan kasus tersebut, agar model yang dihasilkan mendekati kondisi nyata. Percobaan dilakukan dengan menggunakan media *disk* sebagai prey dan predatornya adalah orang yang ditutup matanya. Cara kerjanya, orang tersebut melempar *disk* dengan panah kecil. Untuk menunjukkan bahwa prey terdiri dari dua macam, dipasang *disk* dengan ukuran berbeda. Prey yang terinfeksi mempunyai ukuran *disk* lebih besar daripada prey yang sehat karena ikan yang terinfeksi lebih mudah untuk dimangsa. Berdasarkan percobaan tersebut diperoleh model baru yaitu tiga persamaan differensial biasa

nonlinier yang meliputi persamaan untuk populasi ikan yang rentan (*susceptible fish*) S , ikan terinfeksi (*infected fish*) I , dan pelikan P .

Tahap pertama pada skripsi ini membahas bagaimana formulasi model Holling Tipe II menjadi model baru yaitu tiga persamaan diferensial biasa nonlinier. Tiga persamaan ini dinyatakan dalam model Kolmogorov yang merupakan bentuk umum model interaksi dua spesies. Tahap ke dua, menentukan titik-titik kesetimbangan model, kemudian diuji eksistensi, dan kestabilannya. Tahap terakhir, dilakukan simulasi grafik dan kajian solusi dengan membangun skema numerik.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang skripsi di atas, maka dirumuskan permasalahan-permasalahan yang akan dibahas, antara lain:

1. Bagaimana formulasi model dari satu predator (pelikan) dan dua prey, yaitu ikan yang rentan (*susceptible fish*) S dan ikan terinfeksi (*infected fish*) I ?
2. Bagaimana nilai titik kesetimbangan model?
3. Bagaimana eksistensi titik kesetimbangan?
4. Bagaimana hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan?
5. Bagaimana simulasi grafik dan kajian perilaku solusi?

1.3 Batasan Masalah

Model yang baik adalah model yang mempunyai sedikit batasan. Namun, model yang diperoleh boleh jadi lebih kompleks. Dengan demikian, skripsi ini dibatasi oleh hal-hal berikut:

1. Lingkungan bersifat tertutup, tidak ada migrasi baik predator maupun prey.
2. Hanya terdapat satu predator yaitu pelikan.
3. Ikan yang terinfeksi tidak bereproduksi karena masa hidupnya yang pendek dan tidak ada *recovery*.
4. Pelikan hanya mengkonsumsi ikan yang terdapat di danau baik sehat maupun terinfeksi.

1.4 Tujuan

Adapun tujuan yang hendak dipaparkan dalam modifikasi model predator-prey ini adalah

1. Memahami formulasi model satu predator (pelikan) dan dua prey, yaitu ikan yang rentan (*susceptible fish*) S dan ikan terinfeksi (*infected fish*) I .
2. Menentukan titik kesetimbangan model.
3. Menentukan eksistensi titik kesetimbangan.
4. Menganalisis kestabilan titik kesetimbangan.
5. Simulasi dan kajian perilaku solusi.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial

Definisi 2.1.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui dengan satu atau lebih turunannya (Giordano dan Weir, 1991).

Definisi 2.1.2

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang hanya memuat satu variabel bebas (Giordano dan Weir, 1991).

Definisi 2.1.3

Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi dalam suatu persamaan diferensial (Ross, 1984).

Definisi 2.1.4

Suatu persamaan diferensial biasa dengan variabel bebas x dan variabel tak bebas y disebut linier dengan orde n , jika persamaan tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + a_n(x) y = b(x) \quad (2.1)$$

dengan $a_0 \neq 0$ (Ross, 1984).

Definisi 2.1.5

Persamaan diferensial biasa nonlinier adalah persamaan diferensial biasa yang variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya (Ross, 1984).

Definisi 2.1.6

Sistem persamaan diferensial biasa berdimensi n adalah sistem yang terdiri dari n persamaan diferensial biasa dengan n fungsi yang tidak diketahui, dan \mathbf{K} . Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linier berdimensi n adalah

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \mathbf{K} + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \mathbf{K} + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \mathbf{K} + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Bentuk (2.2) dapat ditulis secara singkat sebagai

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + f_i(t), i=1,2,\dots,n,$$

dan dalam bentuk matriks dinyatakan sebagai

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

dengan $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]$, $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_n(t)]^T$

(Finizio dan Ladas, 1982).

2.2 Sistem Otonomus

Definisi 2.2.1

Suatu sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = G(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = H(x, y, z) \end{cases} \quad (2.3)$$

dengan fungsi F , G , dan H tidak bergantung terhadap waktu t disebut sistem persamaan diferensial yang bersifat otonomus (Finizio dan Ladas, 1982).

Definisi 2.2.2

Pandang sistem otonomus (2.3). Titik (x_*, y_*, z_*) yang memenuhi $(\dots) = \mathbf{0}$, $(\dots) = \mathbf{0}$, dan $(\dots) = \mathbf{0}$ disebut titik kritis (titik kesetimbangan) sistem otonomus (2.3) (Ross, 1984).

Definisi 2.2.3

Titik kritis atau titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_*, y_*, z_*)$ disebut stabil jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat suatu $\delta > 0$ sedemikian sehingga setiap solusi $\vec{x} = (\dots)$ yang memenuhi

$$(\mathbf{0}) - <$$

berlaku

$$(\dots) - <$$

untuk setiap $> \mathbf{0}$, dengan $= (\dots)$ dan $= (\dots)$ (Robinson, 2004).

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_*, y_*, z_*)$ disebut tak stabil apabila tidak memenuhi definisi 2.2.3 (Ross, 1984).

Definisi 2.2.4

Titik kesetimbangan $\vec{x}^* = (x_*, y_*, z_*)$ dikatakan stabil asimtotik jika ia stabil dan terdapat sebuah δ_0 , dengan $0 < \delta_0 < \delta$, sedemikian sehingga sebuah solusi $\vec{x} = (\dots)$ yang memenuhi

$$(\dots) - <$$

berlaku

$$\lim (\dots) = (x_*, y_*, z_*) \text{ (Robinson, 2004).}$$

2.3 Sistem Otonomus Linier

Perhatikan sistem otonomus linier berikut

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ \frac{dz}{dt} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{cases}$$

yang dapat dinyatakan sebagai $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, dengan

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{dan} \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3

Misalkan λ , μ , dan ν adalah nilai eigen matriks koefisien \mathbf{A} sistem otonomus linier dengan $\det \mathbf{A} \neq 0$. Titik kesetimbangan (x^*, y^*, z^*) bersifat

1. Stabil jika bagian riil ketiga nilai eigen $\text{Re}(\lambda), \text{Re}(\mu), \text{Re}(\nu)$ mempunyai bagian real tak positif.
2. Tidak stabil jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif (Edward dan Penney, 2001).

2.4 Sistem Otonomus Nonlinier

Perhatikan sistem otonomus non linier berikut

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = h(x, y, z) \end{cases} \quad (2.4)$$

Anggap bahwa fungsi f , g , dan h mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik (x_*, y_*, z_*) . Deret Taylor fungsi f , g , dan h di sekitar (x_*, y_*, z_*) adalah

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x_*, y_*, z_*) + \frac{f_x(x_*, y_*, z_*)}{1!} (x - x_*) + \\ &\quad + \frac{f_y(x_*, y_*, z_*)}{1!} (y - y_*) + \frac{f_z(x_*, y_*, z_*)}{1!} (z - z_*) + \frac{1}{2!} \left(f_{xx}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2f_{xy}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)(y - y_*) + f_{yy}(x_*, y_*, z_*) (y - y_*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2f_{xz}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)(z - z_*) + 2f_{yz}(x_*, y_*, z_*) (y - y_*)(z - z_*) + \right. \\ &\quad \left. + f_{zz}(x_*, y_*, z_*) (z - z_*)^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= g(x_*, y_*, z_*) + \frac{g_x(x_*, y_*, z_*)}{1!} (x - x_*) + \\ &\quad + \frac{g_y(x_*, y_*, z_*)}{1!} (y - y_*) + \frac{g_z(x_*, y_*, z_*)}{1!} (z - z_*) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(g_{xx}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2g_{xy}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)(y - y_*) + g_{yy}(x_*, y_*, z_*) (y - y_*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2g_{xz}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)(z - z_*) + 2g_{yz}(x_*, y_*, z_*) (y - y_*)(z - z_*) + \right. \\ &\quad \left. + g_{zz}(x_*, y_*, z_*) (z - z_*)^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

dan

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= h(x_*, y_*, z_*) + \frac{h_x(x_*, y_*, z_*)}{1!} (x - x_*) + \\ &\quad + \frac{h_y(x_*, y_*, z_*)}{1!} (y - y_*) + \frac{h_z(x_*, y_*, z_*)}{1!} (z - z_*) + \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left(h_{xx}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2h_{xy}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)(y - y_*) + h_{yy}(x_*, y_*, z_*) (y - y_*)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2h_{xz}(x_*, y_*, z_*) (x - x_*)(z - z_*) + 2h_{yz}(x_*, y_*, z_*) (y - y_*)(z - z_*) + \right. \\ &\quad \left. + h_{zz}(x_*, y_*, z_*) (z - z_*)^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

dengan $\eta_1(x, y, z)$, $\eta_2(x, y, z)$ dan $\eta_3(x, y, z)$ adalah suku sisa.

Untuk hampiran orde satu di atas, suku sisa memenuhi sifat-sifat

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_*, y_*, z_*)} \frac{\eta_1(x, y, z)}{\|\vec{w}\|} &= 0, \\ \lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_*, y_*, z_*)} \frac{\eta_2(x, y, z)}{\|\vec{w}\|^2} &= 0, \text{ dan} \\ \lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_*, y_*, z_*)} \frac{\eta_3(x, y, z)}{\|\vec{w}\|^3} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

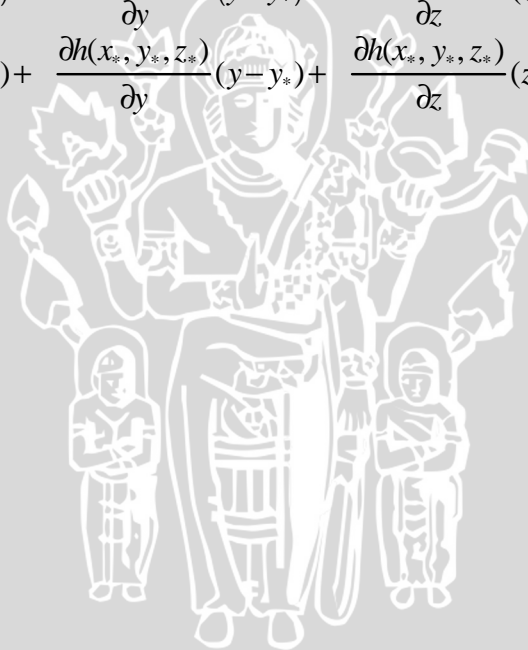
dengan $\vec{w} = (x - x_*, y - y_*, z - z_*)$.

Dengan menggunakan persamaan (2.5) , (2.6), dan (2.7), serta mengingat $\frac{dx}{dt} = \frac{d(x-x_*)}{dt}$, $\frac{dy}{dt} = \frac{d(y-y_*)}{dt}$, $\frac{dz}{dt} = \frac{d(z-z_*)}{dt}$,

maka persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk matriks berikut

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x-x_* \\ y-y_* \\ z-z_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_*, y_*, z_*) \\ g(x_*, y_*, z_*) \\ h(x_*, y_*, z_*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial x}(x-x_*) + \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial y}(y-y_*) + \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial z}(z-z_*) \\ \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial x}(x-x_*) + \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial y}(y-y_*) + \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial z}(z-z_*) \\ \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial x}(x-x_*) + \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial y}(y-y_*) + \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial z}(z-z_*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix}$$

atau



$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x - x_* \\ y - y_* \\ z - z_* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_*, y_*, z_*) \\ g(x_*, y_*, z_*) \\ h(x_*, y_*, z_*) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x - x_*) \\ (y - y_*) \\ (z - z_*) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1(x, y, z) \\ \eta_2(x, y, z) \\ \eta_3(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Matriks $\begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \end{bmatrix}$ disebut

matriks Jacobi atau *partial derivative matrix*, dan dinotasikan dengan

$DF(x_*, y_*, z_*)$ atau DF saja bila dianggap jelas.

Jika dimisalkan $u = x - x_*$, $v = y - y_*$, $w = z - z_*$ maka $\bar{w} = (u, v, w)$.

Mengingat $f(x_*, y_*, z_*) = g(x_*, y_*, z_*) = h(x_*, y_*, z_*) = 0$, maka persamaan (2.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial f(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \\ \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial g(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial x} & \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial y} & \frac{\partial h(x_*, y_*, z_*)}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix},$$

Dengan demikian, bentuk di atas dapat ditulis sebagai

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF_{\vec{w}} + \vec{\eta}. \quad (2.10)$$

Untuk (x, y, z) yang berada cukup dekat dengan (x_*, y_*, z_*) , (u, v, w) bernilai kecil, sehingga $\|\vec{\eta}\| \leq \|\vec{w}\|$. Oleh karena itu $\dot{\vec{\eta}}$ dapat diabaikan dan sistem nonlinier (2.4) dapat dihampiri oleh sistem linier

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = DF_{\vec{w}}. \quad (2.11)$$

Untuk $x = x_*$, $y = y_*$ dan $z = z_*$ diperoleh $(u_*, v_*, w_*) = (0, 0, 0)$, sehingga sistem linier (2.11) memiliki titik kesetimbangan $(u_*, v_*, w_*) = (0, 0, 0)$ (Boyce dan DiPrima, 2005).

Teorema 2.4

Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinier (2.4) bersifat

1. Stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan adalah stabil.
2. Tak stabil jika titik kesetimbangan sistem yang dilinierkan adalah tak stabil (Edward dan Penney, 2001).

Definisi 2.4

Limit Cycle adalah suatu solusi periodik yang berbentuk lintasan tertutup pada bidang fase dengan arah konvergensi solusi

yang lain menuju ke lintasan tersebut baik dari dalam atau luar lintasan (Boyce dan DiPrima, 2005).

2.5 Model Predator-Prey

Persamaan Diferensial Biasa yang menggambarkan interaksi dua spesies (Predator-Prey) pertamakali digunakan oleh *Volterra* pada tahun 1928 dan dikenal dengan nama model *Lotka-Volterra*.

Perhatikan persamaan berikut

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (r - c_1)x - \alpha xy \\ \dot{y} &= (\beta xy - d)y \end{aligned}$$

dengan r , c_1 , α , dan d adalah konstanta positif. $x(t)$ dan $y(t)$ menyatakan jumlah populasi prey dan predator, sedangkan t dinyatakan dalam tahun. Suku rx menyatakan pertumbuhan populasi prey tanpa adanya predator. Suku $-\alpha xy$ dan βxy menyatakan interaksi spesies. Populasi prey berkurang sedangkan predator diuntungkan dengan kondisi ini. Suku $-dy$ menunjukkan punahnya predator karena tidak adanya prey (Stephen, 2004).

2.6 Kriteria Kestabilan Routh – Hurwitz

Jika suatu sistem linier mempunyai persamaan karakteristik berbentuk

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (2.12)$$

Maka kestabilan titik kesetimbangannya dapat ditentukan dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* tanpa harus menentukan nilai eigennya.

Definisi 2.6

Dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.12), dibangun m matriks sebagai berikut.

$$H = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

Titik kesetimbangan sistem stabil, jika dan hanya jika determinan matriks *Routh-Hurwitz* positif, yaitu

$$\text{Det} > 0 \text{ untuk } j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

(Brauer dan Chavez, 2001).

2.7 Metode Runge - Kutta Orde Empat

Metode Runge - Kutta merupakan metode satu langkah, karena ia hanya memerlukan satu titik sebelumnya untuk menghitung nilai berikutnya.

Untuk menyelesaikan masalah syarat awal

$$= (y_0, z_0), \quad (t_0) = t_0$$

dapat digunakan metode Runge - Kutta orde empat dengan rumus rekursif berikut.

$$= y_0 + h \sum_{i=1}^4 k_i$$

$$= y_0 + h \left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4 \right), \quad = 0, 1, \dots \quad (2.13)$$

dengan h adalah ukuran langkah dan

$$= (k_1, k_2, k_3, k_4)$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}, \quad = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}.$$

Misalkan $(y_0, z_0), \dots, (t_0)$ adalah solusi sistem PDB orde 1 dengan m persamaan

$$(y_0) = (y_0, z_0, \dots, t_0)$$

$$(y_0) = (y_0, z_0, \dots, t_0)$$

$$(y_0) = (y_0, z_0, \dots, t_0)$$

yang memenuhi syarat awal

$$(y_0) = (y_0, z_0, \dots, t_0), \quad (y_0) = (y_0, z_0, \dots, t_0), \quad (y_0) = (y_0, z_0, \dots, t_0)$$

Misalkan y_i , merupakan taksiran bagi $y(t_i)$, untuk $i = 1, 2, \dots, m$ dan $t_i = t_0 + i \Delta t$ untuk $i = 0, 1, \dots, m$ maka rumus rekursif metode Runge – Kutta orde empat untuk sistem persamaan diperoleh dari (2.13) dan (2.14) dengan mengganti y, y', y'', y''' , dan $y^{(4)}$ sebagai vektor yaitu $Y = (y_1, \dots, y_m)^T$, $Y' = (y_1', \dots, y_m')^T$, $Y'' = (y_1'', \dots, y_m'')^T$, dan seterusnya.

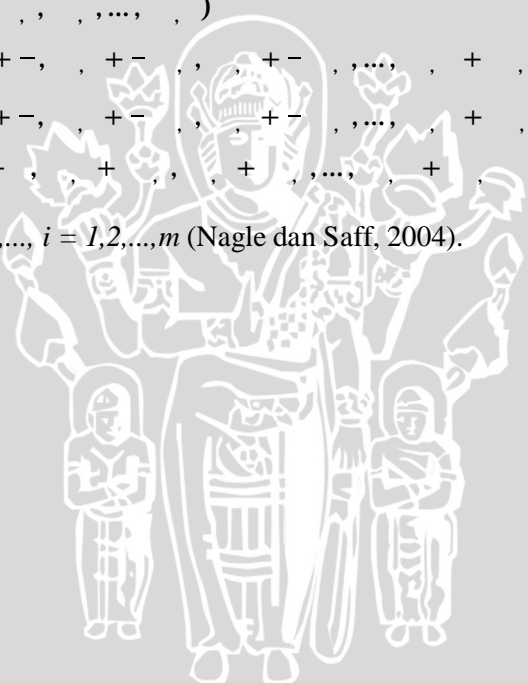
Oleh karena itu rumus umum metode Runge–Kutta orde empat untuk sistem PDB adalah

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta t \left(\frac{1}{4}k_1 + \frac{3}{4}k_2 + \frac{3}{4}k_3 + \frac{1}{4}k_4 \right) \quad (2.15)$$

dengan h adalah ukuran langkah dan

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, Y_i) \\ k_2 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, Y_i + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, Y_i + \Delta t \left(\frac{1}{2}k_1 + k_2\right)\right) \\ k_4 &= f\left(t_i + \Delta t, Y_i + \Delta t k_3\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

dengan $n = 0, 1, \dots, i = 1, 2, \dots, m$ (Nagle dan Saff, 2004).



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

Pada bab ini dibahas formulasi model predator-prey dengan prey berupa ikan yang rentan (*susceptible fish*) S , ikan terinfeksi (*infected fish*) I , dan predatornya pelikan P . Formulasi model memerlukan beberapa penyekalaan untuk menyederhanakan proses formulasi. Pembahasan dalam skripsi ini lebih ditekankan pada analisis dinamik, yaitu penentuan titik kesetimbangan, uji eksistensi titik kesetimbangan, penentuan jenis kestabilan titik kesetimbangan. Langkah terakhir, dilakukan simulasi grafik dan kajian solusi dengan membangun skema numerik.

3.1 Formulasi Model

3.1.1 Model Populasi Prey (Ikan)

Model populasi ikan dinyatakan dalam bentuk dua model yaitu, ikan yang rentan (*susceptible fish*) S dan ikan terinfeksi (*infected fish*) I . Model tersebut berbentuk

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \lambda - \mu S - \beta SI \\ \dot{I} &= \beta SI - \mu I \end{aligned} \quad (3.1)$$

λ menyatakan laju kelahiran, μ merupakan peluang penyebaran infeksi, β adalah laju kematian alami ikan sehat dan μ menyatakan laju kematian karena infeksi. Model ini mempunyai asumsi bahwa penyakit menyebar melalui kontak antara ikan sehat dan terinfeksi.

3.1.2 Model Predator-prey Holling Tipe II

Model predator-prey Holling Tipe II dinyatakan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \dot{S} &= \lambda - \mu S - \frac{\beta SI}{1 + \alpha SI} \\ \dot{I} &= \frac{\beta SI}{1 + \alpha SI} - \mu I \end{aligned} \quad (3.2)$$

λ menyatakan laju populasi ikan, r laju pertumbuhan ikan, dan P laju populasi pelikan. Tanpa predator, populasi ikan bertambah sesuai model logistik dengan kapasitas maksimum K . Jika tidak terdapat ikan, maka pelikan akan mengalami kematian dengan

kecepatan sebesar d . Pada sistem tersebut m menyatakan rata-rata peluang pertemuan antara ikan dan pelikan. Suku C menyatakan faktor konversi dan merupakan koefisien setengah jenuh. Namun, model predasi ini hanya merepresentasikan satu predator memangsa satu prey. Selanjutnya, akan dilakukan formulasi model dengan cara mengembangkan model Holling Tipe II pada suku $mNP/(1 + N)$.

Untuk mendapatkan model yang sesuai dengan kasus interaksi dua spesies di danau Salton, dilakukan sebuah percobaan. Percobaan tersebut dilakukan dengan menganalogikan pelikan dengan seorang yang ditutup matanya, ikan dengan *disk* sedangkan untuk ikan yang terinfeksi dengan *disk* yang ukurannya lebih besar daripada ukuran *disk* ikan yang rentan. Bentuk predasi digambarkan dengan seorang yang ditutup matanya dan berdiri di depan *disk* yang dipasang di papan dengan jarak satu meter. Kemudian ia melemparkan panah hingga menancap ke sebuah *disk*. Sesuai kondisi nyata ikan yang terinfeksi akan lebih mudah dimangsa. Secara matematis kondisi tersebut dinyatakan dalam bentuk berikut.

$$= \quad (3.3)$$

y adalah jumlah total *disk* yang terkena lemparan, a merupakan probabilitas pencarian *disk*, T_s menyatakan waktu yang tersedia dan x adalah kepadatan *disk*. T_s diperoleh dari pengurangan jumlah waktu tersedia dikurangi dengan jumlah waktu total mendapatkan *disk*. Hal tersebut dinyatakan sebagai berikut

$$= - \quad (3.4)$$

b adalah waktu mendapatkan satu *disk*.

Dengan mensubstitusikan (3.4) ke (3.3) diperoleh persamaan

$$= \frac{\quad}{\quad}$$

Untuk mendapatkan model yang sesuai dengan asumsi, dilakukan modifikasi pada *disk* yang ada, dengan membuat *disk* untuk ikan yang terinfeksi lebih besar, sehingga lebih mudah untuk didapatkan. Berdasarkan asumsi tersebut diperoleh bentuk predasi baru untuk ikan yang rentan dan terinfeksi yaitu

$$= \quad , \quad = \quad , \quad (3.5)$$

dengan a_s dan a_I menyatakan ukuran *disk* ikan yang rentan dan terinfeksi. Adanya asumsi bahwa ikan terinfeksi lebih mudah dimangsa diberikan sebagai faktor mudahnya dimangsa dan > 1 . Anggap bahwa $a = a_s$ sehingga $a_I = va_s = a$. Dengan demikian persamaan (3.5) menjadi

$$= \dots, \quad = \dots \quad (3.6)$$

Degan mengambil nilai waktu total maksimum 1 dan mensubstitusikan nilai $= +$ ke persamaan (3.4) diperoleh

$$= 1 - (+). \quad (3.7)$$

Langkah selanjutnya adalah mensubstitusikan persamaan (3.7) ke (3.6) yaitu

$$= 1 - (+)$$

$$= - -$$

Bila persamaan di atas dinyatakan dalam aS diperoleh

$$+ + = \text{atau } (1 +) + = \dots \quad (3.8.1)$$

Dengan teknik yang sama dapat dijabarkan dalam bentuk berikut

$$= 1 - (+)$$

$$= - -$$

Persamaan di atas dinyatakan dalam aI , yaitu memindahkan suku selain vaI ke ruas kiri

$$+ + =$$

$$+ (1 +) = \dots \quad (3.8.2)$$

Persamaan (3.8.1) dan (3.8.2) dapat disajikan dalam bentuk matriks

$$1 + \dots = \dots$$

$$1 + \dots = \dots$$

Digunakan aturan *Cramer* untuk memperoleh y_s dan y_I , yaitu

$$= \frac{\dots}{(\dots)}, \quad = \frac{\dots}{(\dots)}$$

Untuk menyederhanakan proses formulasi selanjutnya, dilakukan penyekalaan $=1/b$ dan $=1/ab$. Oleh karena itu, diperoleh persamaan

$$= \frac{\dots}{+ +}, \quad = \frac{\dots}{+ +}$$

3.1.3 Model Kematian Pelikan (P)

Diasumsikan bahwa kematian pelikan sebanding dengan jumlah ikan terinfeksi yang dikonsumsi. Model tersebut dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{1}{-} - = -(+) \text{ atau } - = -(+)$$

d adalah kematian alami pelikan dan \dots adalah kematian pelikan karena infeksi.

Model yang diperoleh, secara umum dinyatakan sebagai tiga persamaan diferensial biasa nonlinier berikut

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \frac{+}{+ +} - \frac{-}{+ +} \quad , \\
 &= \frac{-}{+ +} - \frac{-}{+ +} \quad , \\
 &= \frac{(+)}{+ +} - \frac{-}{+ +} \quad .
 \end{aligned}$$

Sebelum melakukan analisis lebih lanjut, model diskalakan terlebih dahulu, dengan mengambil $= -$, $= /$, $=$, $= \underline{\quad}$, $= -$,

$= -$, $= -$, $= -$, $= -$, $= -$. Penyekalaan tersebut menghasilkan pengurangan parameter sehingga model lebih sederhana dan mudah dianalisis.

Dengan menggunakan aturan rantai dan penyekalaan yang telah ditentukan, persamaan model predator-prey dengan dinamika penyakit diformulasikan dalam bentuk berikut.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{+} - \frac{1}{+} \\
 &= \frac{1}{+} \\
 &= \frac{1}{+} \left(1 - \frac{+}{+ +} - \frac{-}{+ +} \right) \\
 &= \frac{1}{+} \left(1 - (+) - \frac{-}{+ +} \right) \\
 &= \frac{1}{+} \left(1 - (+) - \frac{-}{+ +} \right) \\
 &= \left(1 - (+) - \frac{-}{+ +} - \frac{-}{+ +} \right) \\
 &= \left(1 - (+) - \frac{-}{+ +} - \frac{-}{+ +} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1 - (+) - \frac{\quad}{- + +} - \quad) \\
 &= 1 - (+) - \frac{\quad}{+ +} - \quad \\
 &= 1 - \quad - (1 +) - \frac{\quad}{+ +} \\
 &= (, ,).
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang serupa diperoleh $\quad = (, ,)$ dan $\quad = (, ,)$. Penurunan lebih rinci dapat dilihat di lampiran.

Formulasi model di atas apabila dinyatakan dalam satu sistem adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 &= 1 - \quad - (1 +) - \frac{\quad}{\quad} \\
 &= (-) - \frac{\quad}{\quad} \quad (3.9) \\
 &= \frac{(\quad)}{\quad}
 \end{aligned}$$

Masing-masing parameter mempunyai interpretasi sebagai berikut. Suku menyatakan penyebaran penyakit secara konstan. Suku menyatakan titik setengah jenuh dari bentuk predasi. Suku menyatakan kecenderungan ikan terinfeksi lebih mudah dimangsa dibandingkan ikan yang rentan. Suku menyatakan kematian ikan terinfeksi karena infeksi bukan karena predasi. Suku c menyatakan perbandingan pertumbuhan pelikan terhadap ikan. Suku menyatakan bahaya bagi pelikan apabila mengkonsumsi ikan terinfeksi. Suku e menyatakan kematian per kapita pelikan relatif terhadap pertumbuhannya.

3.2 Menentukan Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan persamaan (3.9) dapat diperoleh dengan cara membuat ruas kanan persamaan (3.9) sama dengan nol, yaitu

$$1 - \quad - (1 +) - \frac{\quad}{+ +} = 0, \quad (3.10)$$

$$(-) - \frac{\quad}{+ +} = 0, \quad (3.11)$$

dan

$$\frac{+ (1 -)}{+ +} - = 0. \quad (3.12)$$

Persamaan (3.10), (3.11) dan (3.12) berturut-turut dapat dinyatakan dalam bentuk berikut

$$= 0 \quad (3.13)$$

atau

$$1 - \frac{-(1 +)}{+ +} = 0, \quad (3.14)$$

$$= 0 \quad (3.15)$$

atau

$$\left(- \right) - \frac{}{+ +} = 0, \quad (3.16)$$

$$= 0 \quad (3.17)$$

atau

$$\frac{+ (1 -)}{+ +} - = 0. \quad (3.18)$$

Dengan mengkombinasikan keenam persamaan di atas diperoleh delapan kombinasi persamaan. Namun delapan kombinasi persamaan tersebut hanya menghasilkan lima titik kesetimbangan yang eksis. Tiga titik kesetimbangan yang lain merupakan titik kesetimbangan yang mustahil. Pada bagian berikut ini ditunjukkan cara memperoleh kelima titik kesetimbangan tersebut.

3.2.1 Titik kesetimbangan = (, ,)

Titik kesetimbangan ini diperoleh dari kombinasi persamaan (3.13), (3.15), dan (3.17).

3.2.2 Titik Kesetimbangan = (, ,)

Titik kesetimbangan S diperoleh dari kombinasi persamaan (3.14), (3.15), dan (3.17). Dengan mensubstitusikan $= 0$ dan $= 0$ pada persamaan (3.14) diperoleh $1 - = 0$ sehingga $= 1$.

3.2.3 Titik Kesetimbangan = , — ,

Titik kesetimbangan SI diperoleh dari kombinasi persamaan (3.14), (3.16), dan (3.17).

Jika = 0 disubstitusikan pada persamaan (3.16) maka persamaan tersebut menjadi (-) = 0. Karena 0 maka - = 0 sehingga = .

Langkah berikutnya adalah mensubstitusikan = dan = 0 ke persamaan (3.14), diperoleh 1 - = (1 +) . Jadi diperoleh = , = — , dan = 0. Dengan demikian, diperoleh titik kesetimbangan ke tiga.

3.2.4 Titik Kesetimbangan = (— , , $\frac{(\quad)}{(\quad)}$)

Titik kesetimbangan SP diperoleh dari kombinasi persamaan (3.14), (3.15), dan (3.18).

Dibandingkan dengan titik kesetimbangan yang lain, penentuan titik kesetimbangan ini lebih rumit. Mula-mula, = 0 disubstitusikan ke persamaan (3.18). Pensubstitusian tersebut menghasilkan persamaan = — .

Jika = 0 dan = — disubstitusikan ke persamaan (3.14) diperoleh = $\frac{(\quad)}{(\quad)}$.

3.2.5 Titik Kesetimbangan = (, ,)

Titik kesetimbangan SIP diperoleh dari kombinasi persamaan (3.14), (3.16) dan (3.18). Titik kesetimbangan ini sangat rumit ditentukan karena melibatkan banyak parameter. Oleh karena itu cukup dinyatakan sebagai berikut

$$1 - \frac{(1 +)}{(-)(+ +)} = + \tag{3.19}$$

$$= \frac{(\quad)}{(\quad)} \tag{3.20}$$

Jika parameter-parameter yang telah ditentukan disubstitusikan ke persamaan di atas maka akan diperoleh titik kesetimbangan SIP.

3.3 Uji Eksistensi Titik-titik Kesetimbangan

Pada titik-titik kesetimbangan sebelumnya, eksistensi masing-masing titik kesetimbangan langsung dapat ditentukan. Titik T dan S selalu eksis untuk setiap nilai parameter.

Titik SI eksis bila $1 - \frac{a}{b} < 1$ dan titik SP eksis bila $1 - \frac{a}{b} < \frac{a}{b}$. Anggap bahwa (i, s) (i, s) . Titik SIP eksis ketika $i, s > 0$. Agar diperoleh nilai $i > 0$ maka persamaan (3.14) dan (3.16) dinyatakan dalam p . Persamaan tersebut menjadi

$$1 - \frac{a}{b} - (1 + \frac{a}{b}) = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

dan

$$(1 - \frac{a}{b}) = \frac{a}{b} + \frac{a}{b}$$

Karena $\frac{a}{b} + \frac{a}{b}$ selalu bernilai positif, agar $i > 0$ maka $1 - \frac{a}{b} - (1 + \frac{a}{b}) > 0$ dan $(1 - \frac{a}{b}) > 0$.

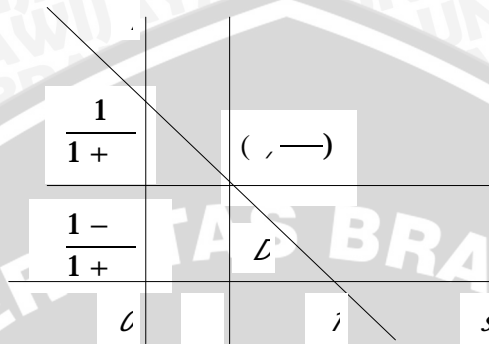
Misal $(i, s) = (i, s) > 0$ dan $1 + (1 + \frac{a}{b}) < 1$, untuk menunjukkan SIP eksis maka harus dipastikan bahwa $(i, s) > 0$. Daerah D diperoleh dari persamaan berikut

$$1 - \frac{a}{b} - (1 + \frac{a}{b}) = 0$$

$$1 - \frac{a}{b} = (1 + \frac{a}{b})$$

Jika $s = 0$ maka $i = \frac{a}{b}$. Jika $i = 0$ maka $s = 1$. Penjabaran persamaan tersebut merupakan batas-batas daerah D .

Dengan demikian daerah D dapat digambarkan sebagai berikut



Gambar 3.1 Daerah D dengan $= \{(,) / > \text{dan} + 1+ < 1.$

Berdasarkan Gambar 3.1 diperoleh nilai i berada pada interval $0 < < \text{---}$. Selanjutnya ditentukan syarat eksistensi SIP dengan mensubstitusikan parameter-parameter yang diketahui dalam persamaan (3.19). Penjabaran persamaan (3.19) pada baris ke dua menghasilkan

$$= \frac{+ (1 -)}{+ +}$$

Dengan mensubstitusikan $= \text{dan} = \text{---}$ pada persamaan di atas diperoleh

$$= \frac{(1 +) + (1 -)(1 -)}{(+)(1 +) + (1 -)}$$

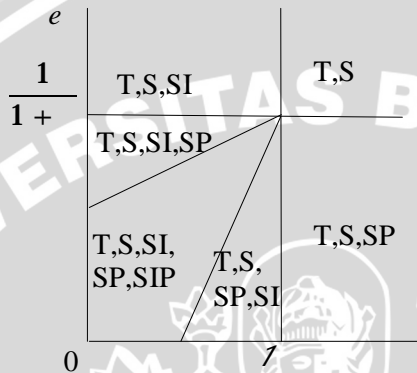
agar lebih sederhana, persamaan di atas dinyatakan dalam E_1 , yaitu

$$= \frac{(1 +) + (1 -)(1 -)}{(+)(1 +) + (1 -)}$$

Syarat ke dua eksistensi p ditentukan dari persamaan (3.19) baris pertama, dengan mensubstitusikan $= \text{---}$ dan $= 1$ pada persamaan tersebut. Dengan demikian, diperoleh syarat ke dua yaitu

$$= \frac{() ()}{() ()} \text{ . Substitusikan dengan 1 diperoleh}$$

Berbagai syarat di atas secara umum dapat disederhanakan menjadi $\alpha < 1$ dan $\beta < \frac{1}{1+\alpha}$. Daerah eksistensi titik-titik kesetimbangan dapat dinyatakan dalam bidang (α, β) sebagai berikut.



Gambar 3.2 Daerah eksistensi titik kesetimbangan pada bidang (α, β) .

3.4 Analisis Kestabilan Titik-titik Kesetimbangan

3.4.1 Titik Kesetimbangan (α^*, β^*)

Persamaan (3.9) merupakan sistem persamaan otonom nonlinier sehingga untuk menyelesaikannya dilakukan linierisasi terlebih dahulu dengan menentukan matriks *Jacobi*. Matriks *Jacobi* dari sistem persamaan (3.9) adalah sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{pmatrix}$$

dengan $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1 - \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{7} + (-1 + \frac{1}{1+\alpha})$,
 $\frac{\partial x}{\partial \beta} = -\frac{1}{1+\alpha} + \frac{1}{7}$, $\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{1}{7}$,

$$\begin{aligned} \text{---} &= \left(+ \frac{\text{---}}{\text{---}} \right), & \text{---} &= \left(- \right) - \text{---} + \frac{\text{---}}{\text{---}}, \\ \text{---} &= - \text{---}, & \text{---} &= \left(\frac{\text{---}}{\text{---}} \right), \\ \text{---} &= \left(\frac{\text{---}}{\text{---}} \right) \left(\frac{\text{---}}{\text{---}} \right) \left(\frac{\text{---}}{\text{---}} \right), & \text{dan} & \text{---} = \left(\frac{\text{---}}{\text{---}} - \right). \end{aligned}$$

Substitusikan $(0,0,0)$ pada matriks *Jacobi* sehingga diperoleh

$$(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix}.$$

Agar titik kesetimbangan T dapat ditentukan jenis kestabilannya maka dihitung nilai eigen matriks *Jacobi*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 \\ 0 & 0 & - \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 -)(- -)(- -) = 0.$$

Diperoleh $= 1 > 0$, $= - < 0$, dan $= - < 0$. Karena terdapat satu nilai eigen bernilai positif maka titik T = (0,0,0) tidak stabil.

3.4.2 Titik Kesetimbangan = (, ,)

Dengan mensubstitusikan titik kesetimbangan pada matriks *Jacobi* diperoleh

$$(1,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -(1 +) & - \frac{\text{---}}{\text{---}} \\ 0 & (1 -) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{+ 1} - \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya harus ditentukan nilai eigen untuk menentukan jenis kestabilan titik kesetimbangan tersebut.

$$\begin{pmatrix} -1 - & -(1 +) & - \frac{\text{---}}{\text{---}} \\ 0 & (1 -) - & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{+ 1} - \end{pmatrix} = 0$$

Determinan tersebut menghasilkan $(-1 -)(1 -) - 1 + 1 - - = 0$.

Oleh karena itu, diperoleh $\lambda = -1 < 0$, $\lambda = (1 - \alpha) < 0$

jika $\alpha > 1$, dan $\lambda = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} < 0$ jika $\alpha > 1$.

Berdasarkan Teorema 2.4 titik kesetimbangan S adalah stabil jika $\alpha > 1$ dan $\alpha > 1$.

3.4.3 Titik Kesetimbangan $\lambda = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$,

Matriks *Jacobi* titik kesetimbangan SI adalah

$$J_{SI} = \begin{pmatrix} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} & 0 & \frac{1 - \alpha}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} \\ 0 & 0 & \frac{(1 - \alpha)(1 - e)}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} \end{pmatrix}$$

Berdasarkan matriks *Jacobi* di atas dapat ditentukan nilai eigen untuk menentukan jenis kestabilan dengan penjabaran berikut.

$$\begin{vmatrix} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \frac{(1 - \alpha)(1 - \lambda)}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} \cdot \frac{(1 - \lambda)(1 - e)}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} = 0$$

Misal $\frac{(1 - \alpha)(1 - \lambda)}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} = 0$ maka diperoleh nilai eigen pertama yaitu

$$\begin{aligned} & (-\lambda)(-\lambda) + (1 + \alpha) \frac{(1 - \lambda)}{1 + \alpha} (1 - \lambda) = 0 \\ & (-\lambda) [(-\lambda)(-\lambda) + (1 + \alpha) \frac{(1 - \lambda)}{1 + \alpha}] = 0 \\ & = \frac{(1 + \alpha)(1 - e) + (1 - \alpha)(1 - e)}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} \end{aligned}$$

Agar $\lambda < 0$ maka haruslah $(1 + \alpha)(1 - e) + (1 - \alpha)(1 - e) < 0$.

Dengan menjabarkan masing-masing suku diperoleh bentuk yang lebih sederhana berikut

$$\frac{(1 + \alpha) + (1 - \alpha)(1 - e)}{(1 + \alpha)(1 + \alpha) + (1 - \alpha)} < 0$$

Atau dapat pula dinyatakan sebagai $\alpha > 1$ dan $\alpha < 0$.

Nilai eigen yang lain ditentukan dengan menyelesaikan persamaan berikut

$$\begin{pmatrix} - & - \\ + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - \\ - \end{pmatrix} + (1 +) \frac{(1 -)}{1 +} = 0$$

$$+ + - = 0$$

agar diperoleh nilai eigen ke dua dan ke tiga digunakan rumus abc

$$= \frac{- \pm \sqrt{-4(-)}}{2}$$

Selanjutnya ditentukan < 0 jika $-4(-) < 0$ maka $-4 + 4 < 0$
 $<$
 $<$
 < 1 .

Dengan demikian $SI = , -, 0$ adalah stabil jika $>$ dan < 1 .

3.4.4 Titik Kesetimbangan = (, , $\frac{(-)}{(-)}$)

Matriks *Jacobi* titik kesetimbangan tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} (+ + -1) & - \\ -1 & (1 - -) + (- -) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1 - (+1)}{(1 -)} = 0$$

Untuk menentukan jenis kestabilan harus ditentukan nilai eigen matiks *Jacobi* dengan penjabaran berikut

$$\begin{pmatrix} (+ + -1) & - \\ -1 & (1 - -) + (- -) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 - -)$$

Uraian determinan tersebut menghasilkan

$$\frac{(1 - \dots) + (\dots - \dots)}{-1} - \frac{(\dots + \dots - 1)}{-1} - (\dots) - (\dots) \frac{(1 - \dots)}{-1} = 0.$$

Berdasarkan penghitungan di atas diperoleh nilai eigen pertama, yaitu

$$= \frac{(1 - \dots) + (\dots - \dots)}{-1}.$$

Agar < 0 maka $(1 - \dots) + (\dots - \dots) < 0$. Dengan menjabarkan pertaksamaan tersebut diperoleh pertaksamaan berikut

$$\begin{aligned} - \dots + \dots - \dots &< 0 \\ - \dots - \dots &< - \dots \\ (\dots + \dots + \dots) &< + \dots \\ &< \frac{(\dots + \dots) + (\dots + \dots)}{\dots} \end{aligned}$$

atau dapat pula dinyatakan sebagai $< \dots < 0$.

Untuk menentukan tanda nilai eigen yang lain, digunakan kriteria *Routh-Hurwitz* dengan $n = 2$.

$$\begin{aligned} &\frac{(\dots + \dots - 1)}{\dots} \\ \cdot &= \frac{-1}{(1 - \dots)} \cdot \dots \end{aligned}$$

Sesuai dengan kriteria *Routh - Hurwitz*, agar seluruh nilai eigen bernilai negatif maka $\det(DF_{2,2}) > 0$ dan $\text{trace}(DF_{2,2}) < 0$.

$\det(DF_{2,2}) > 0$ menghasilkan syarat $< \dots$ sedangkan $\text{trace}(DF_{2,2}) < 0$ menghasilkan syarat yang lain yaitu $> \dots$.

Berdasarkan ketiga syarat nilai eigen di atas dapat disimpulkan bahwa titik **SP** = $\dots, 0, \frac{(\dots)}{(\dots)}$ stabil jika

$$\frac{1 - \dots}{1 + \dots} < \dots < \min \frac{1}{+ 1}, \dots$$

3.4.5 Titik Kesetimbangan SIP

Matriks *Jacobi* untuk titik kesetimbangan SIP dinyatakan dengan menurunkan masing-masing fungsi terhadap s , i , dan p . Diperoleh penurunan sebagai berikut

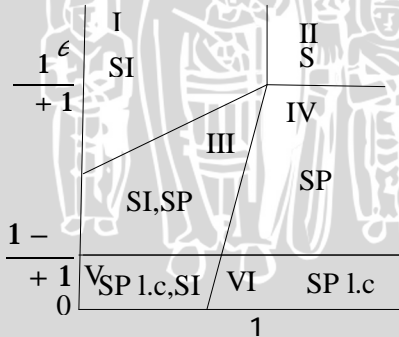
$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \dots + 0$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* kestabilan titik kesetimbangan tersebut dapat ditentukan tanpa menentukan nilai eigennya. Namun, untuk menyelesaikan persamaan ini lebih rumit karena nilai parameternya tidak dapat langsung diperoleh sebagaimana persamaan-persamaan sebelumnya.

Jika $\lambda = 0$ maka $\det(\Delta(\lambda)) = -(\dots + \dots - \dots)$. Karena $\dots = 0$ maka $\dots + \dots - \dots = \frac{(\dots)}{\dots} > 0$ dan $\dots = \frac{\dots}{\dots} < 0$. Penghitungan tersebut menghasilkan $\det(\Delta(\lambda)) > 0$. Kriteria *Routh-Hurwitz* untuk matriks ordo 3x3 menyatakan bahwa terdapat sedikitnya satu nilai eigen $\text{DF}(\lambda)$ bernilai real non-negatif. Hal ini menunjukkan bahwa SIP merupakan titik kesetimbangan tidak stabil di daerah ia eksis.

3.4.6 Peta Daerah Kestabilan

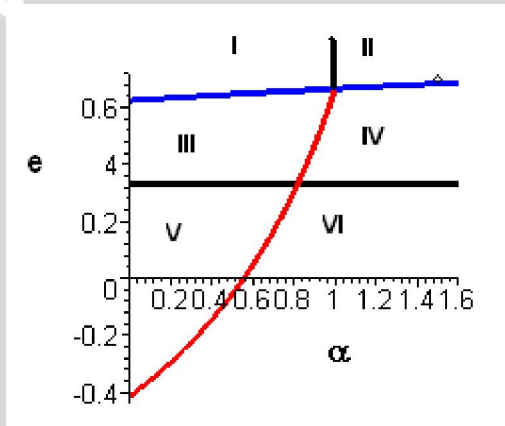
Jika dinyatakan dalam gambar maka daerah kestabilan titik – titik kesetimbangan tersebut adalah sebagai berikut



Gambar 3.3 Peta daerah kestabilan titik kesetimbangan pada bidang $-e$.

Daerah kestabilan hanya dipengaruhi oleh parameter α dan e , sehingga nilai parameter-parameter lain yang digunakan dalam simulasi disajikan dalam tabel tersendiri, yaitu Tabel 3.1. Pada skripsi ini diambil nilai parameter sesuai dengan Tabel 3.1 seandainya dalam kasus yang lain, boleh diambil nilai parameter yang berbeda.

Dengan mensubstitusikan nilai-nilai parameter pada Tabel 3.1 terhadap syarat kestabilan titik kesetimbangan, maka diperoleh nilai α dan e yang memenuhi syarat kestabilan pada masing-masing daerah kestabilan. Dengan demikian, dapat digambarkan daerah kestabilan dengan mengambil nilai-nilai α dan e sesuai dengan daerah kestabilan tersebut.



Gambar 3.4 Peta daerah kestabilan setelah disubstitusikan nilai parameter pada syarat kestabilan.

Untuk memudahkan pembahasan selanjutnya syarat – syarat eksistensi dan kestabilan titik – titik kesetimbangan disajikan dalam Tabel 3.2. Nilai parameter dan titik kesetimbangan sesuai dengan daerah kestabilannya disajikan dalam Tabel 3.3.

Perubahan nilai parameter α dan e berpengaruh terhadap perilaku eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan. Perubahan perilaku eksistensi dan kestabilan titik kesetimbangan karena perubahan parameter dikenal sebagai bifurkasi. Bifurkasi eksistensi titik kesetimbangan dapat dilihat pada peta daerah eksistensi sedangkan bifurkasi kestabilan titik kesetimbangan dapat dilihat pada peta daerah kestabilan.

Tabel 3.1 Parameter model predator – prey dengan penyakit

No	Parameter	Nilai
1	c	0.2
2		5
3		0.5
4		1
5		1.5

Tabel 3.2 Syarat eksistensi dan kestabilan titik – titik kesetimbangan model

No	Titik kesetimbangan	Syarat eksistensi	Syarat kestabilan
1	$= (0,0,0)$	-	Tak stabil
2	$S = (1, 0, 0)$	-	$> 1, > -$
3	$SI = (, -, 0)$	< 1	$> \frac{(1 +) + (1 -)(1 -)}{(+)(1 +) + (1 -)}$ < 1
4	$SP = (-, 0, \frac{()}{()})$	$< \frac{1}{+ 1}$	$< \frac{+}{(+) + (+)}$ $< -, > -$
5	$SIP = (, ,)$	$> \frac{(1 +) + (1 -)(1 -)}{(+)(1 +) + (1 -)}$ $< \frac{+}{(+) + (+)}$	Tak stabil

Tabel 3.3 Nilai titik kesetimbangan dengan daerah kestabilan yang ditentukan oleh nilai μ dan e .

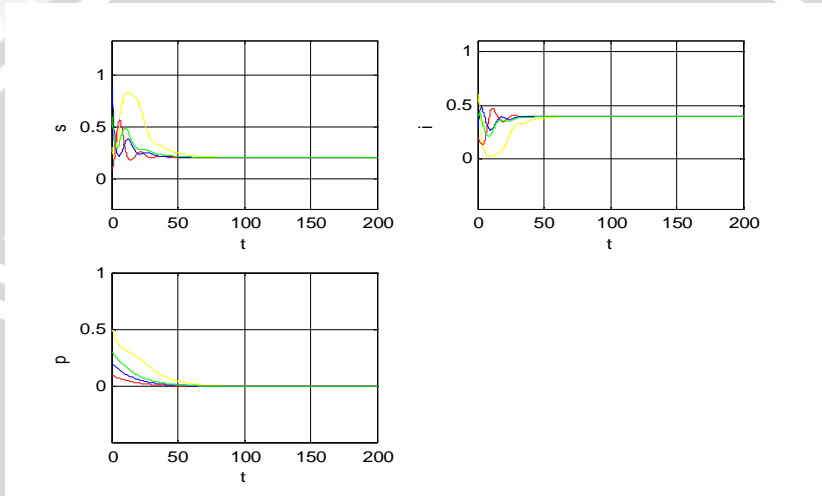
Daerah	Parameter		Titik Kesetimbangan				
	μ	e	T(0,0,0)	S(1,0,0)	SI	SP	SIP
I	0.2	0.7	TSP	TS	(0.2,0.4,0) SA	TE	TE
II	1.5	0.7	TSP	SA	TE	TE	TE
III	0.1	0.6	TSP	TS	(0.1,0.45,0) SA	(0.75,0,0.62) SA	(3.08,1.5,9.21) TS
IV	1	0.5	TSP	TS	TE	(0.5,0,1) SA	TE
V	0.1	0.1	TSP	TS	(0.1,0.45,0) SA	(0.05,0,1.05) LC	TE
VI	0.8	0.1	TSP	TS	(0.8,0,1.0)TS	(0.05,0,1.05) LC	TE

TSP = Tak Stabil Pelana TS = Tak Stabil SA = Stabil Asimtotik LC = *Limit Cycle* TE = Tak Eksis

3.5 Simulasi Grafik dan Kajian Perilaku Solusi

Sesuai peta daerah kestabilan pada Gambar 3.4, maka pembahasan perilaku solusi model predator – prey dengan dinamika penyakit disajikan sesuai dengan enam daerah tersebut.

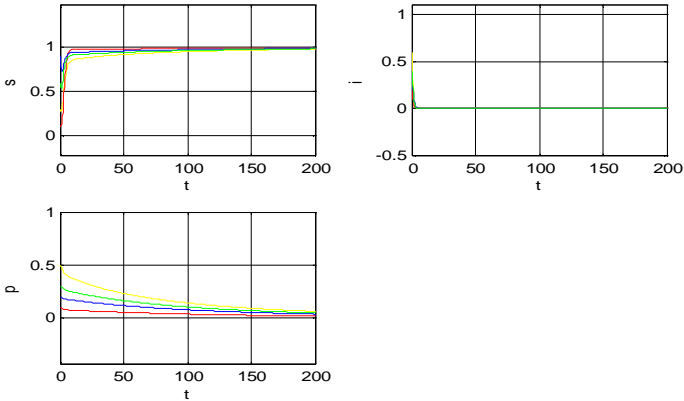
3.5.1 Daerah Kestabilan I



Gambar 3.5 Grafik solusi $s(t), i(t)$, dan $p(t)$ untuk $(, e) = (0.2, 0.7)$ dengan nilai awal $(0.09, 0.2, 0.1)$, $(0.9, 0.3, 0.2)$, $(0.6, 0.4, 0.3)$, dan $(0.3, 0.6, 0.5)$.

Berdasarkan peta daerah kestabilan, daerah I merupakan daerah kestabilan untuk titik $SI = (0.2, 0.4, 0)$. Dengan demikian, titik SI stabil bila nilai s dan e berada di daerah I. Oleh karena itu, berapapun nilai awal yang diberikan akan menghasilkan solusi yang selalu konvergen ke titik kesetimbangan. Sebagai contoh, meskipun nilai awal $(0.9, 0.4, 0.2)$ berada pada posisi yang cukup jauh dari titik $SI = (0.2, 0.4, 0)$, namun pada $t = 60$ grafik solusinya menuju ke titik SI.

3.5.2 Daerah Kestabilan II



Gambar 3.6 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ untuk $(\beta, e) = (1.5, 0.7)$ dengan nilai awal $(0.09, 0.2, 0.1)$, $(0.9, 0.3, 0.2)$, $(0.6, 0.4, 0.3)$, dan $(0.3, 0.6, 0.5)$.

Pada daerah II ini hanya terdapat satu titik kesetimbangan $S=(1,0,0)$ yang stabil. Dinamika solusi pada daerah II mempunyai kesamaan dengan daerah I yaitu hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang stabil. Jika diambil nilai awal yang posisinya terletak cukup jauh atau dekat dengan titik kesetimbangan maka perilaku solusi yang diperoleh selalu konvergen menuju ke titik S. Dinamika solusi tersebut dapat dilihat pada Gambar 3.6.

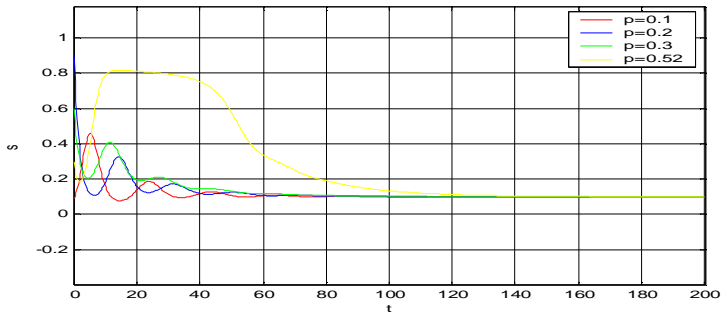
3.5.3 Daerah Kestabilan III

Perilaku solusi pada daerah III mempunyai daya tarik tersendiri karena di daerah ini terdapat dua titik kesetimbangan yang stabil yaitu SI dan SP. Apabila diambil sebuah nilai awal maka nilai awal tersebut akan menghasilkan solusi yang konvergen menuju salah satu titik kesetimbangan tersebut. Berikut ini, disajikan tabel dengan beberapa nilai awal yang menghasilkan solusi yang konvergen menuju ke SI dan SP.

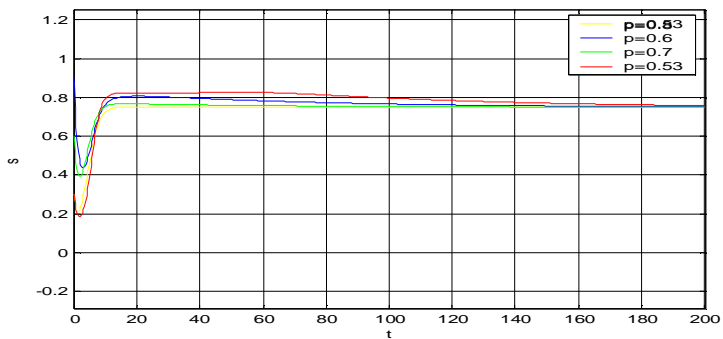
Tabel 3.4 Nilai awal solusi di sekitar titik kesetimbangan SI dan SP

Nilai Awal	Konvergen ke
(0.09,0.2,0.1)	SI(0.1,0.45,0)
(0.9,0.3,0.2)	SI(0.1,0.45,0)
(0.6,0.4,0.3)	SI(0.1,0.45,0)
(0.3,0.6,0.52)	SI(0.1,0.45,0)
(0.09,0.2,0.53)	SP (0.75,0,0.62)
(0.9,0.3,0.6)	SP (0.75,0,0.62)
(0.6,0.4,0.7)	SP (0.75,0,0.62)
(0.3,0.6,0.8)	SP (0.75,0,0.62)

Konvergensi solusi dari Tabel 3.4 secara grafik dapat dilihat pada Gambar 3.7, 3.8, dan 3.9.



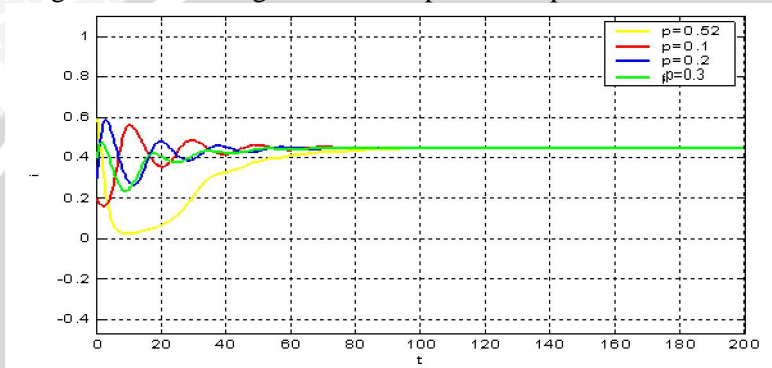
(a)



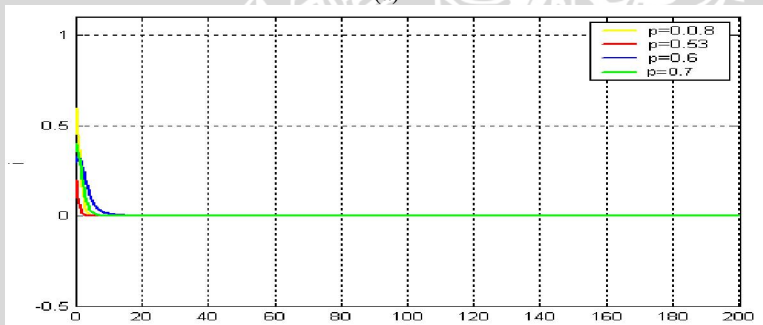
(b)

Gambar 3.7 Grafik solusi $s(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) Konvergen ke SP.

Berdasarkan Gambar 3.7a ketika diambil nilai awal (0.3,0.6,0.52) perilaku solusi pada saat $t = 10$ sampai $t = 30$ terlihat akan menuju ke SP tetapi untuk t berikutnya ternyata perilaku solusi masih menuju ke SI. Pada saat diambil nilai awal dengan nilai $p=0.53$ perilaku solusi $s(t)$ konvergen ke SP. Grafik solusi $s(t)$ yang menghasilkan konvergensi ke SP dapat dilihat pada Gambar 3.7b.

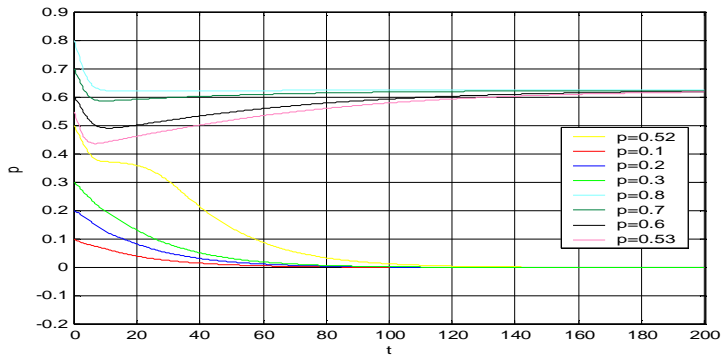


(a)



(b)

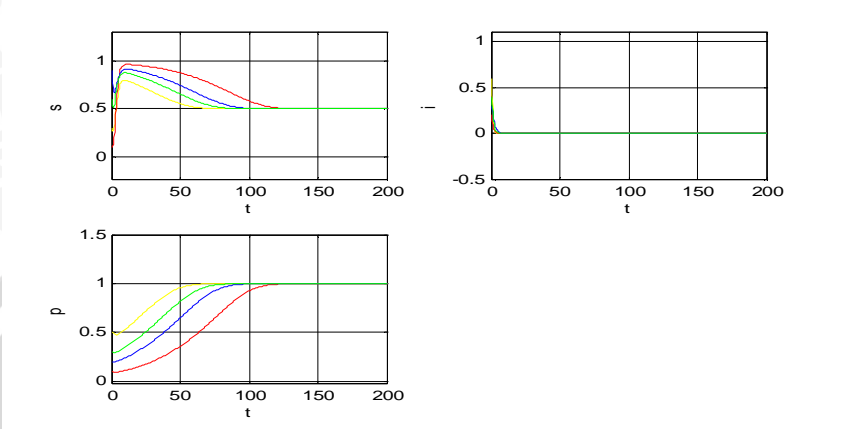
Gambar 3.8 Grafik solusi $i(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) Konvergen ke SP.



Gambar 3.9 Grafik solusi $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) Konvergen ke SP.

Setelah dilakukan uji pada beberapa nilai awal dengan mengambil nilai s , i dan p konstan secara bergantian, dapat disimpulkan bahwa nilai awal untuk p sangat sensitif terhadap perilaku solusi. Dapat dilihat pada Tabel 3.4 bahwa solusi-solusi dengan nilai awal p kurang dari 0.53 konvergen menuju SI. Di lain pihak, ketika diambil nilai awal p lebih besar atau sama dengan 0.53 maka solusi akan konvergen menuju titik SP. Di sinilah uniknya perilaku solusi di daerah III, yaitu terdapat ambang batas untuk nilai awal p yang menentukan arah konvergensi solusi. Dengan demikian, nilai awal $p=0.53$ merupakan *threshold* bagi arah konvergensi solusi.

3.5.4 Daerah Kestabilan IV



Gambar 3.10 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ untuk nilai $(\beta, e) = (1.5, 0.7)$ dengan nilai awal $(0.09, 0.2, 0.1)$, $(0.9, 0.3, 0.2)$, $(0.6, 0.4, 0.3)$ dan $(0.3, 0.6, 0.5)$.

Disubstitusikan nilai – nilai parameter pada titik SP sehingga diperoleh nilai titik kesetimbangan SP = $(0.5, 0, 1)$. Nilai tersebut diperoleh berdasarkan penghitungan secara analitik. Sementara itu secara numerik diperoleh grafik $s(t)$, $i(t)$ dan $p(t)$ yang menunjukkan hasil yang sama dengan hasil analitiknya. Kesamaan hasil tersebut ditunjukkan oleh grafik $s(t)$ dengan empat nilai awal berbeda yang konvergen menuju $s = 0.5$. Demikian pula dengan grafik $i(t)$, setiap nilai awal yang diberikan selalu menghasilkan solusi yang konvergen menuju $i = 0$ dan grafik $p(t)$ dengan berbagai nilai awal juga menuju ke $p = 1$.

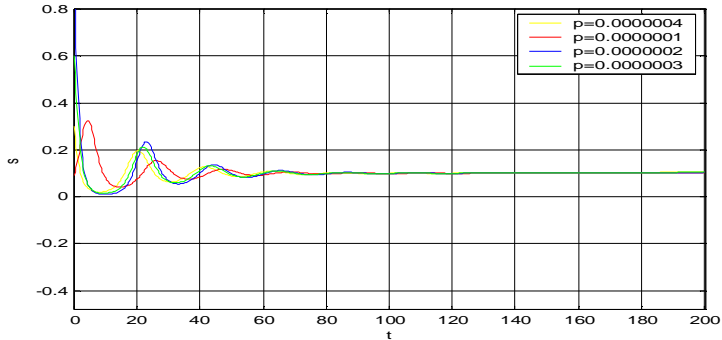
Pada daerah IV ini, hanya titik kesetimbangan SP yang stabil. Seandainya diambil nilai β dan e yang lain, asalkan masih berada di daerah kestabilan IV, maka nilai awal yang dipilih akan menuju ke titik kesetimbangan. Daerah kestabilan IV kasusnya mirip dengan daerah kestabilan I dan II yaitu hanya mempunyai titik kesetimbangan tunggal yang stabil.

3.5.5 Daerah Kestabilan V

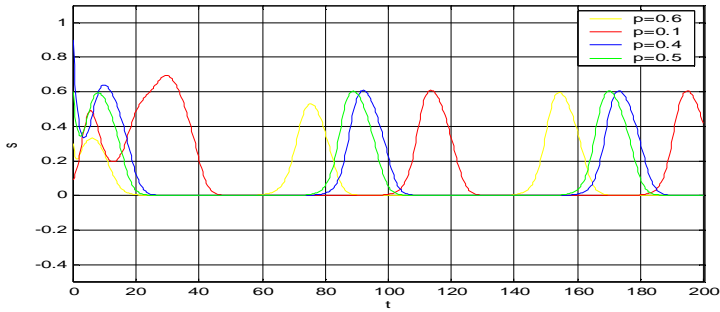
Tabel 3.5 Nilai awal solusi di sekitar titik kesetimbangan SI dan SP

Nilai Awal	Konvergen Ke
(0.09,0.2,0.0000001)	SI=(0.1,0.45,0)
(0.9,0.3,0.0000002)	SI=(0.1,0.45,0)
(0.6,0.4,0.0000003)	SI=(0.1,0.45,0)
(0.3,0.6,0.0000004)	SI=(0.1,0.45,0)
(0.09,0.2,0.1)	SP=(0.05,0,1.05)
(0.9,0.3,0.4)	SP=(0.05,0,1.05)
(0.6,0.4,0.5)	SP=(0.05,0,1.05)
(0.3,0.6,0.6)	SP=(0.05,0,1.05)

Berdasarkan peta daerah kestabilan di daerah V terdapat dua titik kesetimbangan yaitu SI dan SP. Setelah dilakukan analisis, titik SI bersifat stabil dan titik SP merupakan *limit cycle*. Untuk mendapatkan nilai awal yang mempunyai solusi konvergen ke titik SI sesuai Tabel 3.5 memerlukan banyak sekali percobaan. Berikut disajikan grafik perilaku solusi pada daerah V.

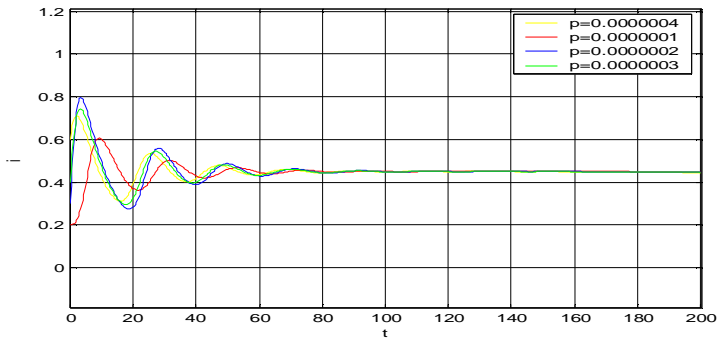


(a)

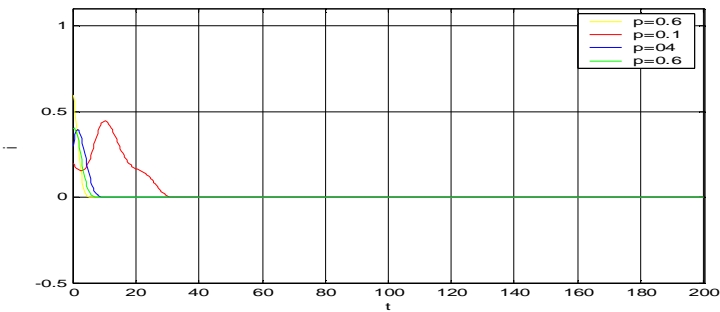


(b)

Gambar 3.11 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$. (a) konvergen ke SI. (b) *limit cycle* SP.

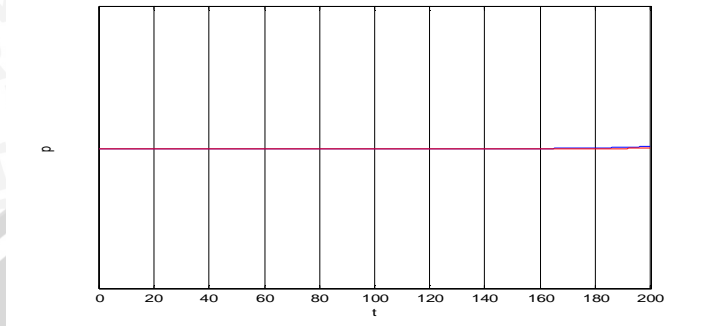


(a)

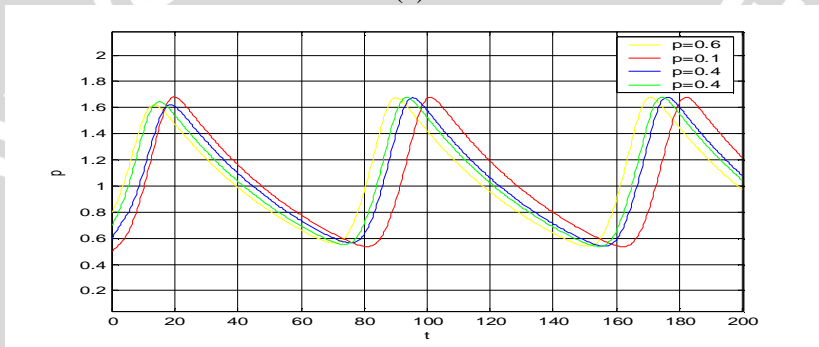


(b)

Gambar 3.12 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) konvergen ke SP.



(a)



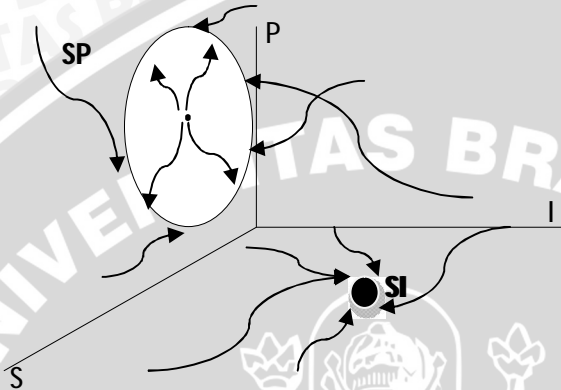
(b)

Gambar 3.13 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$ dan $p(t)$. (a) Konvergen ke SI. (b) *limit cycle* SP.

Berdasarkan Gambar 3.11a, 3.12a, dan 3.123a grafik menghasilkan solusi yang konvergen ke titik SI. Nilai awal p sangatlah kecil, apabila terdapat perubahan sedikit saja sesuai Tabel 3.5 maka perilaku solusinya juga berubah atau titik SI tidak lagi stabil. Oleh karena itu, pada Gambar 3.13a hanya berupa garis di $p = 0$. Hal tersebut diakibatkan nilai p yang hampir mendekati nol.

Untuk nilai awal $(0.09, 0.2, 0.5)$, $(0.9, 0.3, 0.6)$, $(0.6, 0.4, 0.7)$, $(0.3, 0.6, 0.8)$ mempunyai perilaku solusi yang unik. Perilaku nilai awal tersebut pada Gambar 3.11b dan Gambar 3.13b beresilasi dengan diameter sekitar 0.6 dan 1. Osilasi pada Gambar 3.11b dan Gambar 3.13b apabila dinyatakan dalam bidang SP merupakan *limit cycle* dengan bentuk *elips* sedangkan titik kesetimbangan SP = $(0.05, 0, 1.05)$ terletak pada *elips* tersebut. Lebih jelasnya dapat

dilihat Gambar 3.14. Ketika diambil nilai awal di sekitar sumbu IP yang mendekati nol maka perilaku solusinya konvergen menuju ke titik SI. Namun, jika diambil nilai awal di sumbu IP yang lain dan sumbu SP maka perilaku solusi akan menuju *limit cycle* SP.

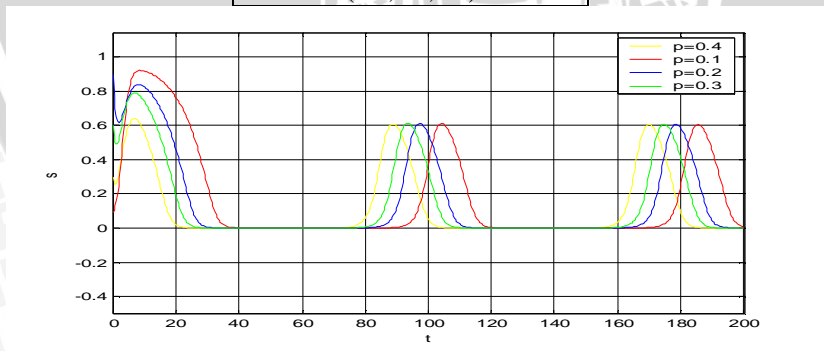


Gambar 3.14 *Limit cycle* SP dan kestabilan titik kesetimbangan SI

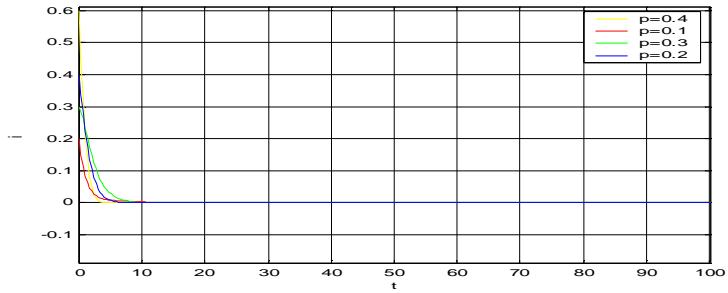
5.4.6 Daerah Kestabilan VI

Tabel 3.6 Nilai awal di sekitar titik kesetimbangan SP

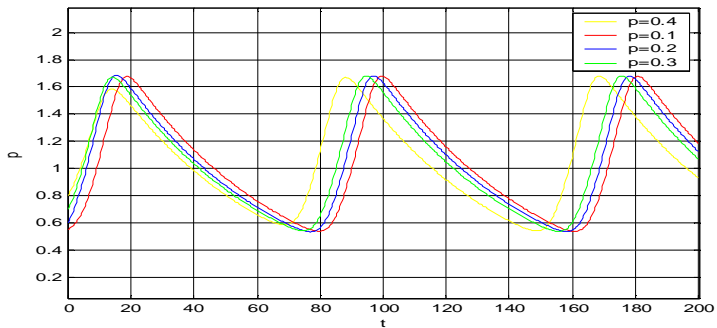
Nilai awal SP (0.05,0,1.05)
(0.09,0.2,0.1)
(0.9,0.3,0.2)
(0.6,0.4,0.3)
(0.3,0.6,0.4)



(a)



(b)



(c)

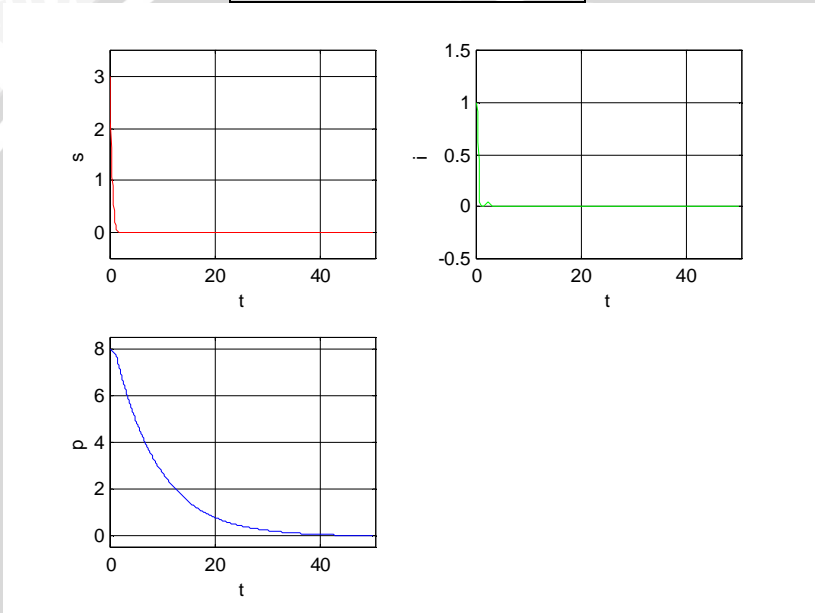
Gambar 3.15 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$

Kasus di daerah VI hampir sama dengan kasus di daerah V untuk nilai awal yang ke dua. Pada daerah ini hanya terdapat satu titik kesetimbangan yaitu SP. Grafik solusi $s(t)$ dan $p(t)$ pada kasus ini beresilasi sebagaimana pada kasus sebelumnya dengan diameter yang sama pula. Apabila diambil nilai awal yang berbeda dari nilai awal yang terdapat di Tabel 3.6, maka hasil yang diperoleh juga akan sama yaitu $s(t)$ dan $p(t)$ beresilasi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa titik kesetimbangan yang terdapat di daerah V adalah *limit cycle* dengan titik kesetimbangan $(0.05, 0.1, 0.05)$ terletak pada *elips*.

Titik Kesetimbangan SIP merupakan titik kesetimbangan yang eksis. Namun, titik SIP tidak stabil pada daerah ia eksis. Diberikan beberapa nilai awal pada Tabel 3.7 untuk menunjukkan bahwa solusi yang dihasilkan tidak pernah konvergen menuju titik SIP.

Tabel 3.7 Nilai awal di sekitar titik SIP=(3.08,1.5,9.21) untuk $(s, e)=(0.1, 0.6)$

Nilai Awal SIP
(3,1,8)
(2,0.8,7)
(2.5,1.2,9)
(3.2,0.5,10)



Gambar 3.16 Grafik solusi $s(t)$, $i(t)$, dan $p(t)$ tidak pernah stabil

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Kasus penyebaran penyakit oleh Bakteri *Vibrio vulnificus* terhadap ikan Tilapia serta interaksinya dengan predator yaitu pelikan di danau Salton dapat dinyatakan dalam sistem persamaan diferensial biasa nonlinier. Model tersebut dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1 + \frac{a_1 x_1}{b_1} + \frac{a_2 x_2}{b_2} + \frac{a_3 x_3}{b_3}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{a_1 x_1}{b_1} + \frac{a_2 x_2}{b_2} + \frac{a_3 x_3}{b_3}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{a_1 x_1}{b_1} + \frac{a_2 x_2}{b_2} + \frac{a_3 x_3}{b_3}}
 \end{aligned}$$

Untuk menyederhanakan model dilakukan penyekalaan sehingga dihasilkan model dalam bentuk Kolmogorov yaitu

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1 + \frac{a_1 x_1}{b_1} + \frac{a_2 x_2}{b_2} + \frac{a_3 x_3}{b_3}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{a_1 x_1}{b_1} + \frac{a_2 x_2}{b_2} + \frac{a_3 x_3}{b_3}} \\
 &= \frac{1}{1 + \frac{a_1 x_1}{b_1} + \frac{a_2 x_2}{b_2} + \frac{a_3 x_3}{b_3}}
 \end{aligned}$$

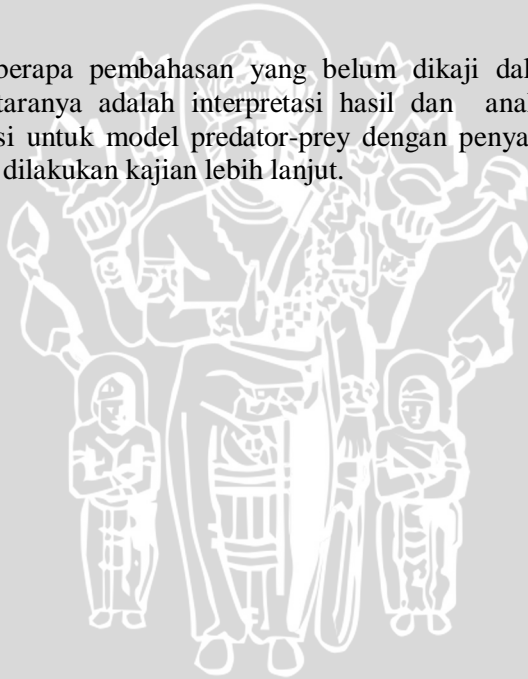
2. Penentuan titik kesetimbangan sistem dinamik dengan tiga variabel diperoleh dengan membuat ruas kanan sistem tersebut dengan nol. Tiga persamaan yang diperoleh menghasilkan delapan kombinasi sistem persamaan. Delapan kombinasi tersebut menghasilkan lima titik kesetimbangan.
3. Setelah dilakukan uji eksistensi diperoleh lima titik kesetimbangan yang eksis yaitu $T = (0,0,0)$, $S = (1,0,0)$, $SI = (\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, 0)$, $SP = (\frac{b_1}{a_1}, 0, \frac{b_3}{a_3})$ dan $SIP = (\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3})$.
4. Perubahan parameter d dan e menghasilkan perubahan eksistensi titik kesetimbangan dan perilaku solusi. Perubahan semacam ini disebut bifurkasi. Karena kestabilan titik kesetimbangan

dipengaruhi oleh parameter μ dan e maka diperoleh enam daerah kestabilan.

5. Telah dilakukan simulasi dan kajian perilaku solusi yang meliputi enam daerah. Daerah I merupakan daerah kestabilan untuk titik SI. Daerah II adalah daerah kestabilan untuk titik S. Daerah III adalah daerah khusus yang mempunyai dua titik kesetimbangan yang stabil yaitu SI dan SP. Daerah IV merupakan daerah kestabilan SP. Daerah V merupakan daerah yang unik karena terdapat titik SI yang stabil dan titik SP berupa *limit cycle*. Daerah terakhir adalah daerah VI dengan titik SP berupa *limit cycle*.

4.2 Saran

Terdapat beberapa pembahasan yang belum dikaji dalam skripsi ini di antaranya adalah interpretasi hasil dan analisa keterbatasan solusi untuk model predator-prey dengan penyakit. Disarankan untuk dilakukan kajian lebih lanjut.



DAFTAR PUSTAKA

- Boyce dan Di Prima. 2005. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem*. Eight Ed. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Brauer, F. dan C. C. Chavez. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiologi*. Springer-Verlag New York Inc. New York.
- Edwards, C.H. dan D.E. Penney. 2001. *Differential Equation and Linear Algebra*. Prentice Hall Inc. New Jersey.
- Finizio dan G. Ladas. 1982. *Persamaan Differensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi Kedua. Terjemahan Widiarti Santoso. Erlangga. Jakarta.
- Flake, C., T. Hoang dan E. Perrigo. 2003. *A Predator-Prey Model with Disease Dynamics*. Departement of Mathematic and Statistics. University of Nebraska- Lincoln.
- Giordano, F.R. dan M.D. Weir. 1991. *Differential Equations, a Modeling Approach*. Addison-Wesley. USA.
- Nagle, R.K. dan E.B. Saff. 2004. *Fundamental of Differential Equation and Boundary Value Problem*. Addison – Wesley Publishing Company. USA.
- Robinson, R.C. 2004. *An Introduction to Dynamical Systems: Continuous and Discrete*. Prentice Hall Education. USA.
- Ross, S. L. 1984. *Differential Equation*. Third Ed. John Wiley and Sons Inc. New York.
- Stephen, L. 2004. *Dynamical System with Application Using Matlab*. Birkhauser. Boston.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 1

Penurunan Penyekalaan Persamaan Model Predator – Prey dengan Dinamika Penyakit

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \\
 &= \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu}, \quad \frac{1}{1 + \mu} \\
 &= \frac{1}{1 + \mu} \\
 &= \frac{1}{1 + \mu} \left(1 - \frac{+}{+ +} - \frac{+}{+ +} \right) \\
 &= \frac{1}{1 + \mu} \left(1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \right) \\
 &= \frac{1}{1 + \mu} \left(1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \right) \\
 &= \left(1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \right) \\
 &= \left(1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \right) \\
 &= \left(1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \right) \\
 &= 1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \\
 &= 1 - \left(\frac{+}{+} \right) - \frac{+}{+ +} \\
 &= \left(\frac{+}{+}, \frac{+}{+} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{(+)}{++} - \frac{(+)}{++} \\
&= \frac{(+)}{++} - \frac{(+)}{++} \\
&= \frac{++}{+(1-)} - \frac{++}{++} \\
&= (, ,)
\end{aligned}$$

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Lampiran 2

Algoritma Metode Runge – Kutta Orde Empat untuk Menentukan $s(t)$, $i(t)$ dan $p(t)$.

INPUT selang interval a , b , jumlah subinterval N , nilai awal

OUTPUT pendekatan untuk (s, i, p) dan (t) pada t , dengan $t = a + h \cdot k$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Langkah 1 Bentuk $h = (b-a)/N$,

$$h = \frac{b-a}{N}$$

$$= \left[\frac{b-a}{N} \right]$$

Langkah 2 OUTPUT (s, i, p) .

Langkah 3 untuk $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ lakukan langkah 4-6

Langkah 4

$$k_1 = f(t_k, s_k, i_k, p_k)$$

$$k_2 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, s_k + \frac{h}{2}k_1, i_k + \frac{h}{2}k_1, p_k + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(t_k + \frac{h}{2}, s_k + \frac{h}{2}k_2, i_k + \frac{h}{2}k_2, p_k + \frac{h}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = f(t_k + h, s_k + hk_3, i_k + hk_3, p_k + hk_3)$$

$$s_{k+1} = s_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Langkah 5 Bentuk $t_{k+1} = t_k + h$.

Langkah 6 OUTPUT $(s_{k+1}, i_{k+1}, p_{k+1})$

Langkah 7 STOP.

Lampiran 3

Skema Numerik Metode Runge-Kutta Orde Empat

```
function [T,S,I,P]=husna(t,t1,s,i,p,n)
h=t1/n;
time=0:h:t1;
T=t;
S=s;
I=i;
P=p;
for j=1:n
    k1=h*f1(t,s,i,p);
    l1=h*f2(t,s,i,p);
    m1=h*f3(t,s,i,p);
    k2=h*f1(t+h/2,s+k1/2,i+l1/2,p+m1/2);
    l2=h*f2(t+h/2,s+k1/2,i+l1/2,p+m1/2);
    m2=h*f3(t+h/2,s+k1/2,i+l1/2,p+m1/2);
    k3=h*f1(t+h/2,s+k2/2,i+l2/2,p+m2/2);
    l3=h*f2(t+h/2,s+k2/2,i+l2/2,p+m2/2);
    m3=h*f3(t+h/2,s+k2/2,i+l2/2,p+m2/2);
    k4=h*f1(t+h,s+k3,i+l3,p+m3);
    l4=h*f2(t+h,s+k3,i+l3,p+m3);
    m4=h*f3(t+h,s+k3,i+l3,p+m3);
    s=s+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
    i=i+(l1+2*l2+2*l3+l4)/6;
    p=p+(m1+2*m2+2*m3+m4)/6;
    t=t+h;
    T=[T,t];
    S=[S,s];
    I=[I,i];
    P=[P,p];
end
fprintf('\n t      s      i      p      \n');
fprintf('-----\n');
fprintf('%4.4f  %8.10f  %10.10f  %12.10f\n',[T;S;I;P]);
figure(1);
subplot(2,2,1);
```

```

plot(T,S,'r');xlabel('t');ylabel('s');
grid on;
axis([0 t+0.5 min(S)-0.5 max(S)+0.5]);
subplot(2,2,2);
plot(T,I,'g');xlabel('t');ylabel('i');
grid on;
axis([0 t+0.5 min(I)-0.5 max(I)+0.5]);
subplot(2,2,3);
plot(T,P);xlabel('t');ylabel('p');
grid on;
axis([0 t+0.5 min(P)-0.5 max(P)+0.5]);

```

```

function ydot=f1(t,s,i,p)
ydot=s*(1-s-2*i-(0.5*p))/(0.5+s+5*i);
function ydot=f2(t,s,i,p)
ydot=i*((s-1)-(5*0.5*p))/(0.5+s+5*i);
function ydot=f3(t,s,i,p)
ydot=p*0.2*((s+5*(1-0.6)*i)/(0.5+s+5*i)-0.5);

```

