UJI PLANARITAS SUATU GRAF

SKRIPSI

oleh :

LUSIANA EVIANTI

0310940035-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2008

UJI PLANARITAS SUATU GRAF

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
LUSIANA EVIANTI
0310940035-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJ AYA
MALANG

2008

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

UJI PLANARITAS SUATU GRAF

Oleh :
LUSIANA EVIANTI
0310940035-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 5 Agustus 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Marsudi, MS	**Dr. Marjono, M.Phil**
NIP. 131 759 585	**NIP. 131 785 254**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

UJI PLANARITAS SUATU GRAF

SKRIPSI

oleh :

LUSIANA EVIANTI

0310940035-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

MALANG

2008

UJI PLANARITAS SUATU GRAF

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :
LUSIANA EVIANTI
0310940035-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG

2008

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

UJI PLANARITAS SUATU GRAF

Oleh :
LUSIANA EVIANTI
0310940035-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 5 Agustus 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Drs. Marsudi, MS	**Dr. Marjono, M.Phil**
NIP. 131 759 585	**NIP. 131 785 254**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	**: LUSIANA EVIANTI**
NIM	**: 0310940035-94**
Jurusan	**: MATEMATIKA**
Penulis Skripsi berjudul	**: UJI PLANARITAS SUATU GRAF**

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di dalam isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 5 Agustus 2008
Yang menyatakan,

(Lusiana Evianti)
NIM. 0310940035

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

UJI PLANARITAS SUATU GRAF

ABSTRAK

Graf tak berarah $G = (V, E)$ disebut graf *planar* jika graf tersebut dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga sisi-sisinya tidak ada yang berpotongan. Untuk mengetahui suatu graf *planar* atau tidak, digunakan Teorema Kuratowski, yaitu dengan mengetahui ada tidaknya subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5 pada suatu graf G. Dalam pembuktian Teorema Kuratowski akan digunakan dasar dua lemma dan konsep himpunan bridge B dalam suatu *cycle* C. Untuk menguji planaritas suatu graf, akan digunakan algoritma *Demoucron, Malgrange* dan *Pertuiset*, yaitu dengan menentukan $F(B, \tilde{G}_i)$ untuk tiap *bridge* B pada G_i dengan $1 \le i \le k \le q \le p \le 1$. Jika $\left|F(B, \tilde{G}_i)\right| = 0$ maka G adalah graf *nonplanar*, untuk $\left|F(B, \tilde{G}_i)\right| = 0$ dengan $\tilde{H}_i = \tilde{G}_i$ adalah G *admissible* dan $E(G) = E(G_i) = \varnothing$, maka G adalah graf *planar*.

Kata kunci: Graf *planar, cycle, bridge*, subdivisi

PLANARITY TESTING A GRAPH

ABSTRACT

Undirected graph $G = (V, E)$ is a planar graph if G can be drawn in the plane such that no two of its edges intersect. Kuratowski Theorem can be used to determine a planar or non planar graph.graph, that is deciding whether a given graph G contains Subdivision of $K_{3,3}$ atau K_5. In Providing Kuratowski Theorem, we need to establish two lemmas and set B of bridges of the cycle C. For planarity test a graph, will be used Algorithm *Demoucron, Malgrange* and *Pertuiset*, that is, determining $F(B, \tilde{G}_i)$ for each bridge B of G_i, for $1 \le i \le k \le q \le p \le 1$. If $|F(B, \tilde{G}_i)| \ge 0$ then G is nonplanar graph, for $|F(B, \tilde{G}_i)| \ge 0$ with $\tilde{H}_i \subset \tilde{G}_i$ is G *admissible* and $E(G) \subset E(G_i) \subset \ldots$, then G is planar graph.

Key words: Planar graph, cycle, bridge, subdivision

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat serta hidayah-Nya yang telah dilimpahkan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan penulisan Skripsi dengan judul **"UJI PLANARITAS SUATU GRAF"** sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika.

Penulis menyadari bahwa penulisan Skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bantuan baik yang bersifat moral maupun spiritual dari berbagai pihak. Untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Drs. Marsudi, MS selaku pembimbing I dan Dr. Marjono, M.Phil, selaku pembimbing II atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dukungan, waktu dan segala sesuatu yang telah diberikan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika.
3. Dra. Ari Andari, MS., Drs. Hery Subagio, M.Kes dan Drs. Moch. Aruman Imron, MSi., selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan untuk perbaikan Skripsi ini.
4. Staf Jurusan Matematika dan staf pengajaran Fakultas MIPA atas bantuannya untuk kelancaran administrasi.
5. Nenek tercinta, Bapak-Ibu di Jombang, Mbak Bi'ah, Mbak Hanik dan teman-temanku seperjuangan OPSHID di Malang, terimakasih atas doa, pengorbanan, motivasi, saran, perhatian dan kasih sayang yang selalu diberikan.
6. Seluruh pihak yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang ikut membantu.

Semoga Alloh SWT membalas segala kebaikan yang telah diberikan dalam membantu penyusunan Skripsi ini. Penulis menyadari bahwa Skripsi ini jauh dari kesempurnaan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat penulis harapkan dengan segala kelapangan dada.

Malang, 5 Agustus 2008

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL.....i
HALAMAN PENGESAHAN.....iii
HALAMAN PERNYATAAN.....v
ABSTRAK.....vii
ABSTRACT.....ix
KATA PENGANTAR.....xi
DAFTAR ISI.....xiii
DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL.....xv
DAFTAR GAMBAR.....xvii

BAB I PENDAHULUAN
1.1 Latar Belakang.....1
1.2 Rumusan Masalah.....2
1.3 Batasan Masalah.....2
1.4 Tujuan.....2
1.5 Manfaat.....2

BAB II TINJAUAN PUSTAKA
2.1 Konsep Dasar Graf.....3
2.2 Jenis-jenis Graf.....5
2.3 *Cut verteks*, *Cut edge*, *Block*, *face* pada suatu graf, *edge disjoint path*, *Internally disjoint path* dan *cycle* pada *plane graph*.....9
2.4 Operasi-operasi Pada Graf.....11
2.5 *Bridge*.....13

BAB III PEMBAHASAN
3.1 Karakteristik Graf *Planar*.....19
3.2 Algoritma Uji Planaritas Suatu Graf.....29
3.3 Contoh Kasus.....33

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN
4.1 Kesimpulan.....45
4.2 Saran.....45

DAFTAR PUSTAKA.....47

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

DAFTAR NOTASI DAN SIMBOL

$G = (V(G), E(G))$	: Graf G dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$.
$\tilde{G}$	: *Plane graph* dari graf G.
$p(G)$	: *Order* dari graf G.
$q(G)$	: *Size* dari graf G.
B	: *Bridge*.
C	: *Cycle*.
W	: *Walk*.
P	: *Path*.
F	: Himpunan *face*.
P^{-1}	: Invers dari path P.
$\cong$	: Isomorfik.
$\sim$	: Relasi ekuivalensi.
int C	: *Interior* C.
ext C	: *Exterior* C.
$F(G)$	: Himpunan *face* dalam graf G.
$\deg v_i$	: Derajat dari titik v_i dalam graf G.
$b(f)$	: Batas dari *face* f.
(v_i, v_j) – *path* P	: Suatu *path* P yang dimulai dari titik v_i dan diakhiri titik v_j.
$E(G) - E(H)$	: Himpunan sisi dalam graf G dikurangi Himpunan sisi dalam graf H.
$G - E(H)$	: Graf G dikurangi himpunan sisi dalam graf H.
$G - v$	: Penghapusan titik v dari graf G.
$G - e$	: Penghapusan sisi e dari graf G.
$G_i \cap G_j$	: Irisan graf G_1 dan G_2.
$G_i \cup G_j$	: Gabungan G_1 dan G_2.
$H \subseteq G$	: H subgraf G.
$F(B, \tilde{H})$	: Himpunan *face* dari $\tilde{H}$ dengan B adalah *drawable*.

(v_i, v_j) ? *bagian* P : Subbarisan yang dimulai dari titik v_i dan diakhiri titik v_j dari path P.

☞ : Akhir dari suatu bukti.

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1.1 Graf dengan v_1 dan v_2 adalah titik dan *e* adalah sisi.....3
Gambar 2.1.2 Graf sederhana (a) dan Graf Ganda (b).....4
Gambar 2.1.3 Graf *G*.....5
Gambar 2.2.1 Graf-graf Isomorfik.....6
Gambar 2.2.2 Graf *2-connected* (a) dan graf *3-connected* (b) ...6
Gambar 2.2.3(a) Sebuah subgraf G' dari graf dalam Gambar 2.2.3(b) 7
Gambar 2.2.3(b) Sebuah graf *G*. Salah satu subgrafnya ditunjukkan pada Gambar 2.2.3(a) 7
Gambar 2.2.4 Graf G, H, dan H_1 homeomorfik 8
Gambar 2.2.5 Graf planar *G*, dan graf bidang *H* 8
Gambar 2.2.6 Graf Kuratowski pertama (a), dan graf Kuratowski kedua (b) dan (c) dimana keduanya isomorfik.....9
Gambar 2.3.1 Graf *G* (a), dan *cut verteks* dari graf *G* (b), dan *block* dari *G* (c).....10
Gambar 2.3.2 Graf dengan 5 *face* dengan f_1 sebagai *exterior face*.....11
Gambar 2.3.3 *Edge disjoint* dan *internally disjoint (u,v)-path*...11
Gambar 2.4.1 Gabungan, irisan, penghapusan titik *v* dan penghapusan sisi *e* pada graf *G*.....13
Gambar 2.5.1 *bridge* dari *Cycle C*.....14
Gambar 2.5.2 *Bridge B* dengan *3* titik dan *3 path*.....15
Gambar 2.5.3 Kurva Jordan.....16
Gambar 2.5.4 *B* dan *B'* adalah *skew* (a) *B* dan *B' equivalent 3-bridge* (b) 18
Gambar 2.5.5 Pemindahan *inner bridge B*.....18
Gambar 3.1.1 Graf *G* dengan *cut verteks {u,v}* (a), Subgraf G_1 dan G_2 dari graf *G* (b) dan Subgraf H_1 dan H_2 dari hasil penghubungan *u* dan *v* dalam Gambar 3.1.1b (c).....20
Gambar 3.1.2 *Plane graph* dari *G* dengan H_1 dan H_2 *planar*.....21
Gambar 3.1.3 Graf $K_{3,3}$ (a) dan graf K_5 (b).....22
Gambar 3.1.4 Graf $K_{3,3}$ yang memuat *cycle* C.....23

Gambar 3.1.5 Graf K_5 yang memuat *cycle C* 23
Gambar 3.1.6 Graf *H* sederhana dan *2-connected*, dengan *outer bridge 3-bridge* (a) dan *2-bridge* (b)..... 25
Gambar 3.1.7 Graf Subdivisi dari $K_{3,3}$ (a) yang isomorfik dengan $K_{3,3}$ (b)..... 26
Gambar 3.1.8 Graf yang memuat Subdivisi dari $K_{3,3}$ (a) subdivisi dari $K_{3,3}$ (b).....27
Gambar 3.1.9 Graf Subdivisi dari K_5 (a) yang isomorfik dengan K_5 (b).....28
Gambar 3.1.10 Graf yang memuat Subdivisi dari $K_{3,3}$ (a) subdivisi dari $K_{3,3}$ yang isomorfik dengan $K_{3,3}$ (b) 29
Gambar 3.1.11 Graf Petersen G_1, G_2 dan G_3 29
Gambar 3.2.1 Graf G (a), *G-admissible* (b), dan *G-inadmissible*..... 30
Gambar 3.2.2 Diagram alir Algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset* 32
Gambar 3.3.1 Graf *G* dengan 8 titik dan 16 sisi 33
Gambar 3.3.2 *Plane graph* $\tilde{G}_1$ 33
Gambar 3.3.3 *Plane graph* $\tilde{G}_2$ 34
Gambar 3.3.4 *Plane graph* $\tilde{G}_3$ 34
Gambar 3.3.5 *Plane graph* $\tilde{G}_4$ 35
Gambar 3.3.6 *Plane graph* $\tilde{G}_5$ 35
Gambar 3.3.7 *Plane graph* $\tilde{G}_6$ 36
Gambar 3.3.8 *Plane graph* $\tilde{G}_7$ 36
Gambar 3.3.9 *Plane graph* $\tilde{G}_8$ 37
Gambar 3.3.10 *Plane graph* $\tilde{G}_9$ 37
Gambar 3.3.11 Graf *H* dengan 10 titik dan 19 sisi.....38
Gambar 3.3.12 *Plane graph* $\tilde{H}_1$ 38
Gambar 3.3.13 *Plane graph* $\tilde{H}_2$ 39
Gambar 3.3.14 *Plane graph* $\tilde{H}_3$ 39

Gambar 3.3.15 *Plane graph* $\tilde{H}_4$ 40
Gambar 3.3.16 *Plane graph* $\tilde{H}_5$ 40
Gambar 3.3.17 Beberapa variasi subgraf G.....42
Gambar 3.3.18 Penghapusan beberapa sisi untuk memperoleh suatu subgraf yang merupakan subdivisi dari graf $K_{3,3}$ 42

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf merupakan salah satu bidang matematika, yang diperkenalkan pertama kali oleh ahli matematika asal Swiss, Leonardo Euler (1736). Ide besarnya muncul sebagai upaya menyelesaikan masalah jembatan konigsberg, akan tetapi dalam pengembangannya sempat terhenti sekitar 194 tahun dan baru bangkit kembali ketika Kuratowski (1930) menemukan kriteria untuk menentukan suatu graf menjadi planar.

Planaritas adalah salah satu bagian penting dari teori graf. Graf tak berarah *G=(V,E)* disebut graf planar jika graf tersebut dapat digambar pada bidang datar sedemikian sehingga sisi-sisinya tidak ada yang berpotongan. Sebuah graf non planar tidak bisa digambarkan tanpa perpotongan sisi. Sebuah graf planar yang telah digambar pada sebuah bidang disebut juga dengan graf bidang (*plane graph*). Graf planar ini mempunyai sifat menarik yang dapat digali sehingga hasilnya dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari.

Pada kenyataannya, banyak permasalahan yang dimodelkan dengan graf planar, misalnya pada masalah perancangan sirkuit listrik (*electrical circuits*). Misalkan diberikan suatu papan sirkuit listrik, dengan beberapa titik yang ditempatkan. Pasangan-pasangan titik tersebut harus dihubungkan oleh kabel listrik. Ini harus dikerjakan sedemikian hingga tidak ada dua dari kabel-kabel tadi saling melintasi. kondisi tersebut dapat dimodelkan dengan graf, dengan *verteks* mewakili titik dan *edg*e mewakili kabel listrik yang menghubungkan pasangan-pasangan titik. Contoh masalah lain yang cukup terkenal adalah tentang penyediaan fasilitas listrik, air dan telepon kepada tiga buah rumah. Dalam penggambaran graf pada bidang datar, apakah mungkin menghubungkan tiap fasilitas ke tiap rumah tanpa menyebabkan ada saluran yang saling melintasi. Walaupun pada kenyataannya bisa jadi penghubungan ketiga fasilitas tersebut dilakukan lewat udara sehingga memungkinkan tidak ada saluran yang saling melintasi. Situasi ini juga dapat dimodelkan dengan graf planar.

Untuk mengetahui suatu graf tak berarah merupakan graf planar atau tidak, dapat ditentukan dengan menggunakan Teorema

Kuratowski. Walau secara matematis karakterisasi geometrik ini baik, namun secara praktis sulit untuk dipakai, sebab sulit menentukan apakah suatu graf tertentu memuat graf subdivisi dari graf $K_{3,3}$ atau K_5. Sebagai alternatif lain akan digunakan suatu algoritma untuk menguji planaritas suatu graf, yang diperkenalkan oleh *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset* pada tahun 1964.

1.1 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang, maka dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membuktikan planaritas suatu graf yang dikemukakan oleh Teorema Kuratowski.
2. Bagaimana menguji planaritas suatu graf dengan algoritma *Demoucron*, *Malgrange*, dan *Pertuiset.*

1.2 Batasan Masalah

Untuk memfokuskan pembahasan, maka dibuat batasan-batasan sebagai berikut :

1. Graf yang akan dikaji adalah graf yang *finite* (berhingga), dimana jumlah titik dan sisinya berhingga, sederhana, terhubung dan tak berarah.
2. Penggambaran graf planar pada suatu bidang.

1.3 Tujuan

Tujuan penulisan skripsi ini adalah :

1. Membuktikan planaritas suatu graf yang dikemukakan oleh Teorema Kuratowski.
2. Menguji planaritas suatu graf dengan algoritma *Demoucron*, *Malgrange*, dan *Pertuiset.*

1.4 Manfaat

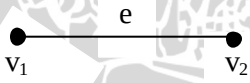
Dari penulisan Skripsi ini secara khusus dapat menambah pengetahuan lebih tentang teori graf, terutama mengetahui karakteristik graf planar dan menguji planaritas suatu graf dengan menggunakan algoritma. Secara umum skripsi ini dapat diterapkan pada penyelesaian masalah yang berhubungan dengan planaritas suatu graf.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Definisi 2.1.1
Suatu graf G terdiri dari himpunan tidak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik atau simpul (*verteks*) dan himpunan dari elemen-elemen yang disebut garis atau sisi (*edge*).
Graf G adalah pasangan himpunan $(V(G), E(G))$ yang dinotasikan dalam bentuk $G = (V(G), E(G))$ dengan :
$V(G)$ adalah himpunan titik yang tidak kosong yang jumlahnya berhingga
$E(G)$ adalah himpunan sisi yang dapat merupakan himpunan kosong
(Chartrand dan Ortrud, 1993)

Contoh 2.1.1



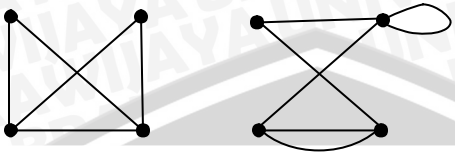
Gambar 2.1.1. Graf dengan v_1 dan v_2 adalah titik dan e adalah sisi

Definisi 2.1.2
Suatu graf G dikatakan berhingga jika $V(G)$ dan $E(G)$ merupakan himpunan berhingga (Bondy dan Murty, 1976)

Definisi 2.1.3
Graf trivial adalah graf yang hanya memiliki satu titik dan tidak memiliki sisi, sedangkan graf yang bukan graf trivial disebut graf nontrivial (Suryanto, 1986).

Definisi 2.1.4
Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak mempunyai garis paralel atau *loop* (suatu sisi yang menghubungkan suatu titik dengan dirinya sendiri) (Chartrand dan Ortrud, 1993).

Contoh 2.1.2



(a) (b)

Gambar 2.1.2. Graf sederhana (a) dan Graf Ganda (b)

Definisi 2.1.5

Misalkan $e ? \{u,v\}$ adalah sebuah sisi (*edge*) dalam G, yaitu u dan v adalah titik-titik ujung dari e, maka titik (*verteks*) u dikatakan *adjacent* (berelasi) terhadap titik v dan sisi e dikatakan *incident* (terhubung) pada u dan pada v (Lipschuitz dan Lipson, 2002).

Contoh 2.1.3

Pada Gambar 2.1.3, titik c dan g adalah dua titik yang *adjacent,* dan sisi-sisi e_2, e_8, e_3 dan e_{11} adalah sisi-sisi yang *incident* dengan titik c.

Definisi 2.1.6

Derajat sebuah titik v_i pada sebuah graf G, dinotasikan dengan $\deg v_i$, adalah jumlah sisi yang *incident* pada v_i (Harary, 1994).

Definisi 2.1.7

Jalan (w*alk*) dalam graf G adalah suatu barisan titik dan sisi yang disusun bergantian, $W ? v_0 e_1 v_1 e_2 ... e_k v_k$ dengan $k ? 0$, sedemikian hingga sisi $e_i ? v_{i?1} v_i$ untuk $1 ? i ? k$. titik v_0 dan v_k masing-masing disebut *origin* dan *terminus*, sedang titik-titik lainnya disebut *internal verteks*. Bagian (*section*) dari *walk* $W ? v_0 e_1 v_1 e_2 ... e_k v_k$ adalah *walk* yang merupakan subbarisan $v_i e_{i?1} v_{i?1} ... e_j v_j$ dari W, dan subbarisan tersebut disebut $(v_i, v_j) ?$ *section* dari W (Bondy dan Murty, 1976).

Definisi 2.1.8

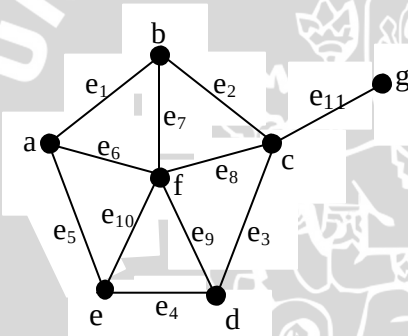
Lintasan (*path*), dinotasikan dengan P, adalah *walk* yang semua titik $v_0 v_1 v_2 ... v_k$ berbeda. Sedangkan *walk* yang semua titik $v_k ... v_2 v_1 v_0$

berbeda, dinotasikan dengan P^{-1} (invers dari *path P*). (Chartrand dan Ortrud, 1993).

Definisi 2.1.9
Jejak (*trail*) adalah *walk* dengan semua sisi berbeda (tidak ada sisi yang diulang) (Chartrand dan Ortrud, 1993)

Definisi 2.1.10
Jejak (*trail)* tertutup disebut sirkuit (*circuit),* sedangkan siklus (*cycle*), dinotasikan dengan *C*, adalah suatu *trail* tertutup yang memiliki *origin* dan *internal verteks* berbeda (Bondy dan Murty, 1976).

Contoh 2.1.4



Gambar 2.1.3. Graf *G*

Jalan (*walk*) dari titik a-c: a e_6 f e_7 b e_7 f e_8 c e_3 d e_3 c
Lintasan (*path*) dari titik a-g: a e_5 e e_{10} f e_8 c e_{11} g
Jejak (*trail*) dari titik a-b: a e_6 f e_8 c e_3 d e_9 f e_7 b.
Sirkuit (*circuit*) dari titik a-a: a e_6 f e_{10} e e_4 d e_3 c e_8 f e_7 b e_1 a
Siklus (*cycle*) dari titik a-a: a e_1 b e_2 c e_3 d e_4 e e_5 a

Definisi 2.1.11
Order dari graf *G* adalah banyaknya titik pada suatu graf, dinotasikan dengan $p(G)$, sedangkan banyaknya sisi pada suatu graf dinamakan *size* dari graf *G* , dinotasikan dengan $q(G)$ (Chartrand dan Ortrud, 1993).

2.2 Jenis-jenis graf

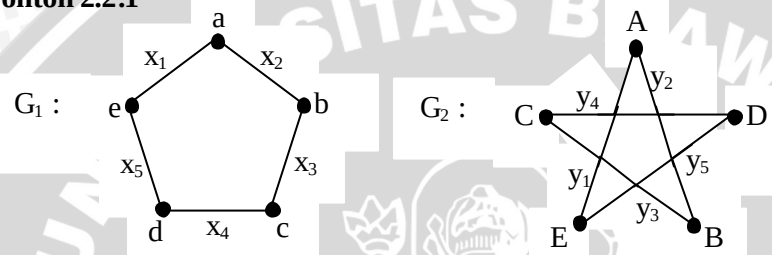
1. Graf isomorfik

Graf G_1 dan G_2 adalah isomorfik (dinotasikan $G_1 \cong G_2$) jika terdapat fungsi satu-satu dan pada, *f* dari *verteks-verteks* di G_1 ke *verteks-verteks* G_2 dan fungsi satu-satu dan pada, *g* dari sisi-sisi G_1

ke sisi-sisi G_2. Sehingga sebuah sisi *e incident* dengan *f(v)* dan *f(w)* di G_2. Pasangan fungsi *f* dan *g* disebut isomorfisma dari G_1 ke G_2.

Sebuah isomorfisma untuk graf G_1 dan G_2 pada Gambar 2.2.1 didefinisikan sebagai : $f(a) = A, f(b) = B, f(c) = C, f(d) = D, f(e) = E$. dan $g(x_i) = y_i$ untuk i ? *1,2,...5.*
(Johnsonbaugh, 1997).

Contoh 2.2.1



Gambar 2.2.1. Graf-graf Isomorfik

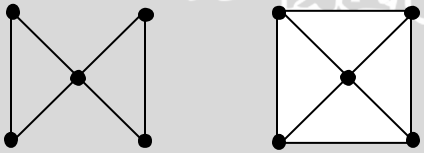
2. Graf terhubung (*connected Graph*) dan graf *n-connected*.

Sebuah graf *G* dikatakan terhubung (*connected*) jika terdapat sebuah *path* antara sembarang dua titik-nya. Jika tidak demikian, maka graf *G* disebut graf tak terhubung (*disconnected*) (Lipschuitz dan Lipson, 2002).

Suatu graf disebut *n-connected* jika jumlah banyak sisi minimal dari *G* yang apabila dihapus akan menghasilkan graf tak terhubung adalah *n* (Bondy dan Murty, 1976).

Pada Gambar 2.2.2 adalah contoh graf *connected* sekaligus graf graf *2-connected* dan *3-connected*,

Contoh 2.2.2



Gambar 2.2.2. Graf *2-connected* (a) dan graf *3-connected* (b).

3. Graf bagian (*Subgraph*).

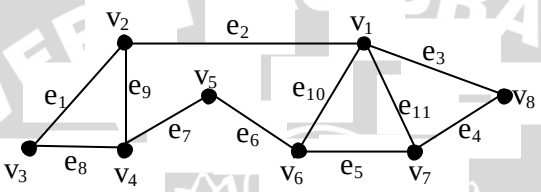
Misalkan *G=(V,E)* adalah sebuah graf, kita sebut *H=(V',E')* *subgraph* dari *G*, ditulis *H* ? *G*, jika

(a). *V'* ? *V* dan *E'* ? *E*

(b). Untuk setiap sisi *e'* ? *E'*, jika *e' incident* pada *v'* dan *w'*, maka *v',w'* ? *V'* (Johnsonbaugh, 1997).

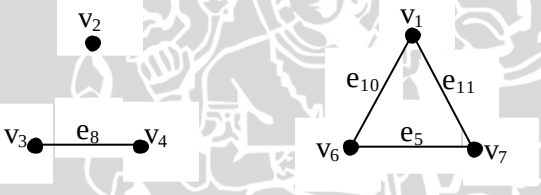
Contoh 2.2.3

G:



Gambar 2.2.3(a). Sebuah graf *G*

G':

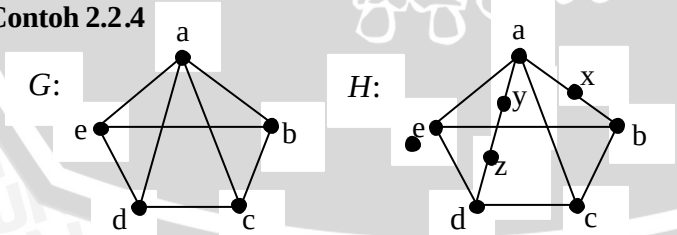


Gambar 2.2.3(b). Sebuah *subgraph* G' dari graf dalam Gambar 2.2.3(a).

4. Graf subdivisi (*subdivision*).

Suatu graf *H* disebut graf subdivisi (*subdivision*) dari *G*, jika graf *H* didapat dengan cara menambahkan (menyisipkan) beberapa titik berderajat dua pada beberapa sisi *G* (Sutarno, dkk. 2005).

Contoh 2.2.4



Gambar 2.2.4. *H* adalah graf subdivisi dari graf *G*

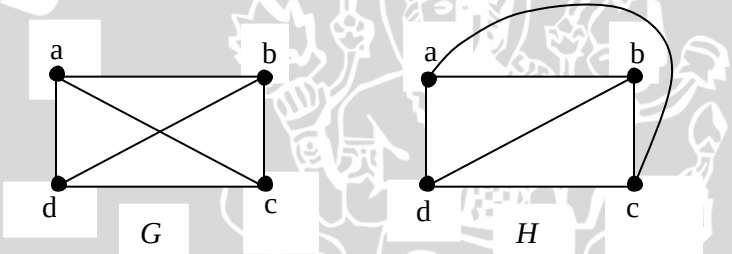
5. Graf bidang (*plane graph*) dan Graf sebidang (*planar graph*).

Graf bidang (*plane graph*) atau sering pula disebut pajangan (*embedding*) *G* adalah suatu graf yang digambar pada bidang datar sedemikian sehingga tidak ada sisi yang berpotongan. (Harary, 1969).

Suatu graf *G* disebut *planar*, jika *G* dapat digambarkan pada bidang datar sedemikian hingga sisi-sisinya tidak ada yang saling berpotongan dan tidak demikian disebut *nonplanar* (Bondy dan Murty, 1976).

Graf bidang pasti graf *planar*, tetapi sebaliknya tidak berlaku. Sebagai contoh, graf *G* pada Gambar 2.2.5 adalah graf *planar*, karena dapat digambar seperti graf *H*, tetapi graf *G* bukan graf bidang karena sisi-sisi *ac* dan *bd* dari *G* digambar saling "berpotongan". (Sutarno, dkk. 2005).

Contoh 2.2.5



Gambar 2.2.5. Graf *planar G*, dan graf bidang *H*

Lemma 2.2.1
Jika *G nonplanar*, maka setiap subdivisi dari *G* adalah *nonplanar*.

Bukti: Pembuktian dengan kontradiksi
Misal *G* graf *nonplanar*, dan andaikan setiap subdivisi dari *G* adalah planar. Ini berarti setiap subdivisi dari *G* tidak memuat graf $K_{3,3}$ atau K_5. Karena graf $K_{3,3}$ dan K_5 adalah graf *nonplanar*, atau bisa dikatakan setiap subdivisi dari *G* tidak memuat graf *nonplanar* sebagai suatu *subgraph*, sehingga *G* merupakan graf *planar* (bertentangan dengan hipotesis bahwa *G* graf *nonplanar*). Jadi pengandaian salah, dan yang benar Jika *G nonplanar*, maka setiap subdivisi dari *G* adalah *nonplanar.*☞ .

Lemma 2.2.2
Jika *G planar*, maka setiap *subgraph* dari *G* adalah *planar*.

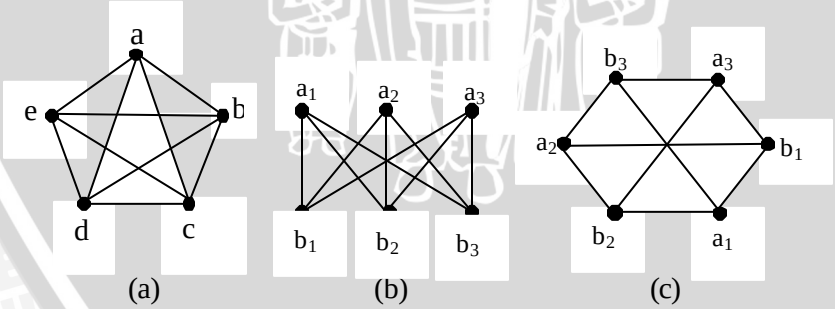
Bukti: Pembuktian dengan kontradiksi
Misal *G* adalah graf *planar*, dan andaikan setiap *subgraph* dari G adalah *nonplanar*, maka *subgraph* tersebut harus memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5 . Karena $K_{3,3}$ dan K_5 adalah graf *nonplanar*, berarti *subgraph* tersebut memuat subdivisi yang *nonplanar*. Menurut Lemma 2.2.2, *G* adalah graf *nonplanar* (bertentangan dengan hipotesis bahwa *G* adalah *nonplanar*). Jadi pengandaian salah, dan yang benar jika *G planar*, maka setiap *subgraph* dari *G* adalah *planar*.☞

6. Graf Kuratowski.

Dikenal dua buah graf *nonplanar* yang khusus, yaitu graf kuratowski, setelah matematikawan Polandia, *Kasimir Kuratowski*, menemukan sifatnya yang unik, yattu :

a. Graf kuratowski pertama, yaitu graf lengkap yang mempunyai 5 buah titik (K_5), merupakan graf *nonplanar* (Gambar 2.2.6(a)).
b. Graf kuratowski kedua, yaitu graf terhubung teratur dengan 6 buah titik dan 9 buah sisi ($K_{3,3}$), merupakan graf *nonplanar* (Gambar 2.2.6(b) dan Gambar 2.2.6(c)).Diperlihatkan dua buah representasi geometriknya, yang mudah dilihat bahwa keduanya isomorfik. (Munir, 2001).

Contoh 2.2.6



(a) (b) (c)

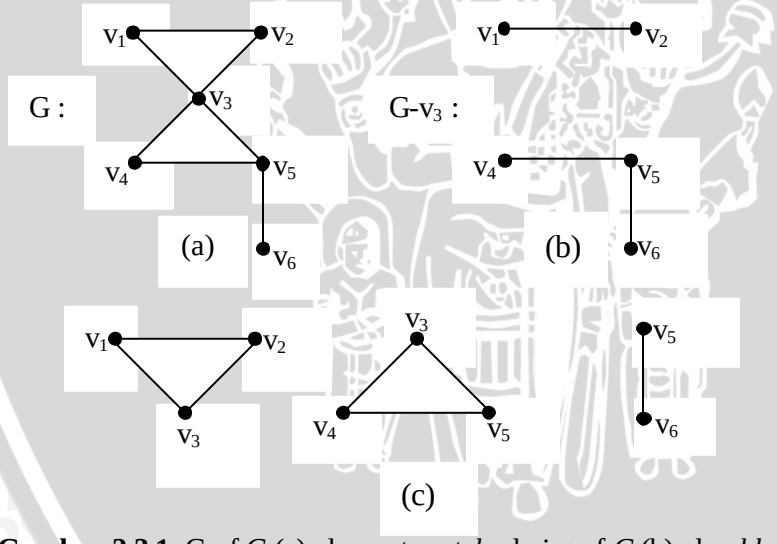
Gambar 2.2.6. Graf Kuratowski pertama (a), dan graf Kuratowski kedua (b) dan (c) dimana keduanya isomorfik.

2.3 *Cut verteks, Cut edge, block, face* pada suatu graf, *edge disjoint path, internally disjoint path* dan *Cycle* pada *plane graph*

Definisi 2.3.1
Titik potong (*cut verteks*) adalah suatu titik yang jika diambil dari suatu graf terhubung akan menyebabkan graf menjadi tak terhubung. *k-cut verteks* adalah suatu titik potong dari *k* elemen. Sisi potong *(cut edge)* adalah suatu sisi yang jika diambil dari graf terhubung menyebabkan graf menjadi tak terhubung. *Block* adalah maksimal subgraph yang tidak mempunyai titik potong (Bondy dan Murty, 1976).

Gambar 2.3.1 menjelaskan tentang contoh graf *G* yang mempunyai 2-*cut verteks*, yaitu v_3 dan v_5, dan salahsatu *cut verteks*-nya ditunjukkan pada Gambar 2.3.1(b), dan graf *G* mempunyai *3 block* (lihat Gambar 2.3.1(c)).

Contoh 2.3.1

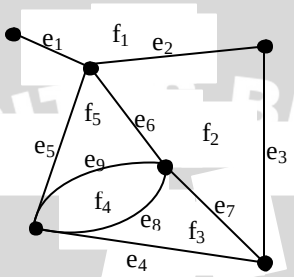


Gambar 2.3.1. Graf *G* (a), dan *cut verteks* dari graf *G* (b), dan *block* dari *G* (c).

Definisi 2.3.2
Jika suatu graf terhubung planar *G* digambarkan dalam bidang, maka bidang akan terbagi menjadi daerah-daerah yang bersebelahan yang

disebut muka (*face*). Tiap graf tepat memiliki satu *face* tak terbatas yang disebut *exterior face*. Suatu *face f* dikatakan *incident* dengan titik dan sisi di dalam batasnya. Batas dari suatu *face f* pada *plane graph G* dinotasikan dengan $b(f)$ (Bondy dan Murty, 1976).

Contoh 2.3.2

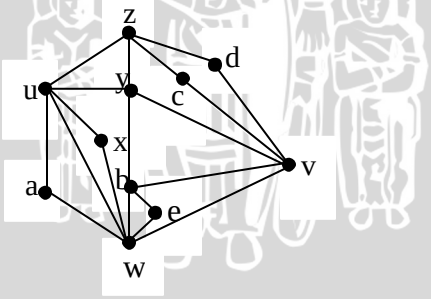


Gambar 2.3.2. Graf dengan 5 *face* dengan f_1 sebagai *exterior face*

Definisi 2.3.3

Dua *(u,v)-path* P_1 dan P_2 pada suatu graf *G* disebut *edge disjoint*, jika path P_1 dan P_2 tidak mempunyai sisi yang bersekutu. *path* P_1 dan P_2 disebut *internally disjoint* jika $V(P_1) \cap V(P_2) = \{u,v\}$. Contoh Graf *G* (Gambar 2.3.3), *u, z, d, v* dan *u, y, z, c, v* adalah *edge disjoint (u,v)-path*, sedangkan titik *u, w, v* dan *u, z, d, v* adalah *internally disjoint (u,v)-path* (Chartrand dan Ortrud,1993).

Contoh 2.3.3



Gambar 2.3.3. *Edge disjoint* dan *internally disjoint (u,v)-path*

Definisi 2.3.4

Misalkan *C* suatu *cycle* dalam *plane graph*. Untuk sebarang dua titik dari *C*, sebut *u* dan *v*. $C\{u,v\}$ adalah $\{u,v\}$*-path* yang diorientasikan

searah jarum jam. $C(u,v]$, $C[u,v)$ dan $C[u,v]$ masing-masing merupakan *path* dari $C[u,v] - u$, $C[u,v] - v$ dan $C[u,v] - [u,v]$ (Bondy dan Murty, 1976).

2.4 Operasi-operasi pada graf

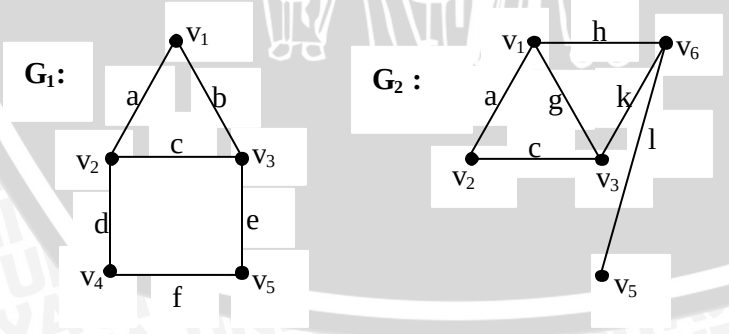
Definisi 2.4.1
Misalkan $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ di mana V_1 dan V_2 saling asing, Gabungan (*union*) dari G_1 dan G_2, $G = G_1 \cup G_2) = (V, E)$ didefinisikan sebagai graf dengan himpunan titik $V = V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E = E_1 \cup E_2$ (Suryanto, 1986).

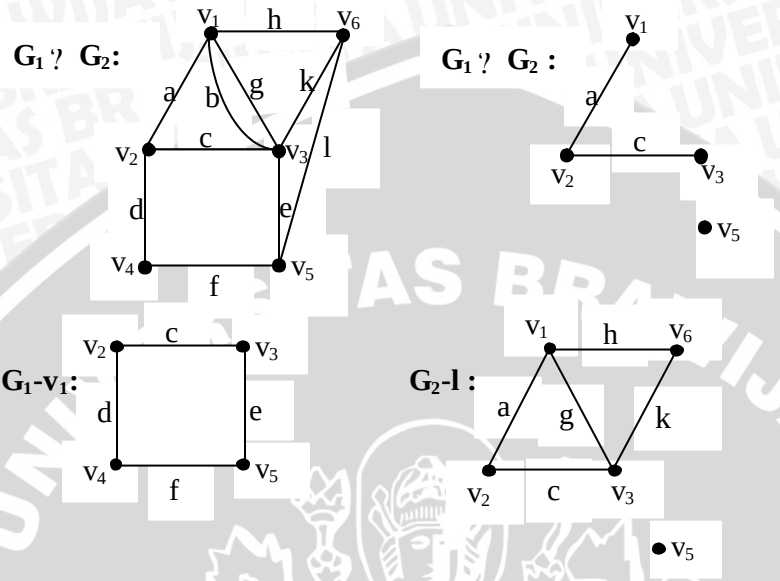
Definisi 2.4.2
Irisan (*intersection*) $G_1 \cap G_2$ pada graf G_1 dan G_2 adalah Graf G yang himpunan titik dan sisinya merupakan himpunan titik dan sisi dari graf G_1 dan G_2 (Deo, 1990).

Definisi 2.4.3
Jika *v* adalah suatu titik dari graf *G*, maka *G-v* menyatakan graf yang diperoleh dari *G* setelah *v* dan semua sisi yang *incident* dengan *v* dihapus dari *G* (Suryanto, 1986).

Definisi 2.4.4
Jika *e* adalah suatu sisi dari graf *G*, maka *G-e* menyatakan graf yang diperoleh dari *G* setelah *e* dihapus dari *G* (Suryanto, 1986).

Contoh 2.4.1.





Gambar 2.4.1. Gabungan $G_1 \cup G_2$, irisan $G_1 \cap G_2$, penghapusan titik *v* dan penghapusan sisi *e* pada graf *G*

2.5 Bridge

Definisi 2.5.1

Misalkan *H subgraph* dari graf *G*, suatu relasi ~ pada *E(G)-E(H)* adalah suatu relasi ekuivalensi dengan kondisi bahwa ada $e_1 \sim e_2$ jika terdapat suatu *walk W* sedemikian hingga :

(i) Sisi awal dan sisi akhir dari *W* adalah e_1 dan e_2.

(ii) *W* adalah *internally disjoint* dari *H* (berarti tidak ada *internal verteks* dari *W* yang merupakan *verteks* dari *H*).

(Bondy dan Murty, 1976).

Definisi 2.5.2

Misalkan *H* subgraph dari graf *G*. Suatu subgraph pada *G-E(H)* yang diperoleh dari kelas ekuivalensi di bawah relasi ekuivalensi ~ disebut jembatan (*bridge)* dari *H* dalam *G*. Suatu *bridge B* dengan *k* titik disebut *k-bridge,* dengan *k* banyaknya titik dalam $V(B) \cap V(H)$.

Dua buah *k-bridge* dengan titik-titik yang sama merupakan *equivalent k-bridge* (Bondy dan Murty, 1976).

Definisi 2.5.3

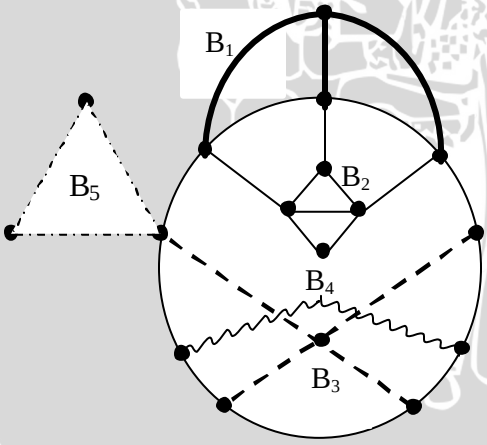
Titik dari suatu *k-bridge* dengan $k \geq 2$ akan membagi *cycle C* ke dalam *edge disjoint path*, disebut *segment* dari *bridge B*. Dua *bridge* saling meniadakan (*avoid*) satu sama lainnya jika semua titik dari satu *bridge* berada dalam satu *segment* dari *bridge* lainnya, jika tidak mereka saling tumpang tindih (*overlap*) (Bondy dan Murty, 1976).

Definisi 2.5.4

Dua *bridge B* dan *B'* adalah *skew* jika terdapat empat titik berbeda *u, v, u'* dan *v'* dari *cycle C* sedemikian hingga *u* dan *v* adalah titik-titik dari *B, u'* dan *v'* adalah titik-titik dari *B'* dan keempat titik muncul dalam urutan *u, u', v, v'* pada *C* (Bondy dan Murty, 1976).

Pada Gambar 2.5.1 menunjukkan suatu variasi *bridge* dari suatu *cycle* dalam graf *G*. Sisi dari jenis *bridge-bridge* digambarkan oleh jenis garis yang berbeda.

Contoh 2.5.1



Gambar 2.5.1. *bridge* dari *Cycle C*

Keterangan gambar :

- Gambar B_1, B_2, B_3, B_4, dan B_5 *bridge* dari *cycle C*.
- B_1 dan B_2 saling tumpang tindih dan *equivalent 3-bridge*.

- B_2 dan B_3 saling meniadakan.
- B_3 dan B_4 *skew*, tapi B_1 dan B_2 tidak *skew*.

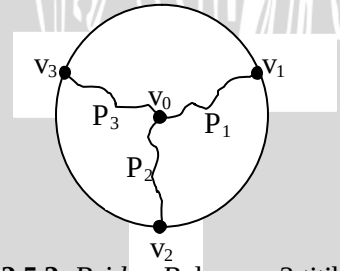
Teorema 2.5.1
Jika dua *bridge* saling tumpang tindih, maka keduanya *skew* atau keduanya *equivalent 3-bridge*.

Bukti:
Misalkan bahwa *bridge B* dan *B'* saling tumpang tindih, maka masing-masing paling tidak harus mempunyai dua titik. sekarang jika *B* atau *B' 2-bridge*, maka dapat ditunjukkan bahwa keduanya *skew*. Misalkan diasumsikan bahwa *B* dan *B'* paling sedikit mempunyai tiga titik. Ada dua kasus, yaitu:

Kasus 1. *B* dan *B'* bukan *equivalent bridge*, maka *B'* mempunyai titik *u'* diantara dua titik berurutan *u* dan *v* pada *B*. Jika *B* dan *B'* saling tumpang tindih, maka titik *v'* pada *B'* tidak berada di dalam *segment B* yang menghubungkan *u* dan *v*, ini menunjukkan bahwa *B* dan *B' skew*.

Kasus 2. *B* dan *B'* adalah *equivalent k-bridge*, $k \geq 3$. Jika $k \geq 4$, maka *B* dan *B'* skew. Jika $k = 3$, maka keduanya *equivalent 3-bridge*.☞

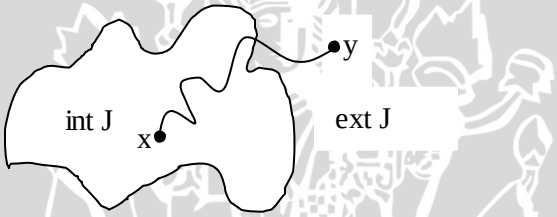
Teorema 2.5.2
Jika suatu *bridge B* mempunyai tiga titik v_1, v_2, dan v_3 dan *C* suatu *cycle*, maka terdapat suatu titik v_0 dalam *V(B)-V(C)* dan tiga *path* P_1, P_2, dan P_3 dalam *B* yang menghubungkan v_0 ke v_1, v_2, dan v_3 sedemikian hingga untuk $i \neq j$, P_i dan P_j hanya mempunyai titik yang bersekutu v_0.



Gambar 2.5.2. *Bridge B* dengan *3* titik dan *3 path*

Bukti:
Misalkan P adalah suatu (v_1,v_2)-*path* dalam B, *internally disjoint* dari C. P harus mempunyai *internal verteks* v, karena jika tidak *bridge* B hanya P, dan tidak memuat titik ketiga v_3. misal Q adalah suatu (v_3,v)-*path* dalam B, *internally disjoint* dari C, dan misalkan v_0 adalah titik pertama dari Q pada P. Dinotasikan oleh P_1 yaitu (v_0,v_1)-bagian dari P^{-1}, oleh P_2 (v_0,v_2)-*section* dari P, dan oleh P_3 (v_0,v_3)-*section* dari Q^{-1}, sehingga P_1,P_2,P_3 memenuhi persyaratan yang diminta.☞

Teorema 2.5.3 (Teorema Kurva Jordan)
Misalkan J adalah sebuah kurva tertutup sederhana pada bidang datar D dan titik x terletak di *interior* J, titik y terletak di *eksterior* J. Jika dibuat sebuah kurva yang menghubungkan titik x dan y pada bidang D, maka kurva tersebut pasti memotong kurva J. Untuk lebih jelasnya diberikan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.5.3. Kurva Jordan

Definisi 2.5.5
Misalkan G *plane graph* dan C suatu *cycle* dalam G, maka C adalah kurva Jordan dalam bidang dan tiap sisi pada $E(G)$-$E(C)$ termuat dalam satu diantara dua wilayah, *int* C dan *ext* C. Suatu *bridge* yang berada di dalam *int* C disebut *inner bridge* dan *bridge* yang berada dalam *ext* C disebut *outer bridge* (Bondy dan Murty, 1976).

Contoh 2.5.2
Pada Gambar 2.5.1. B_2, B_3 dan B_4 adalah *inner bridge*, sedangkan B_1 dan B_5 adalah *outer bridge*.

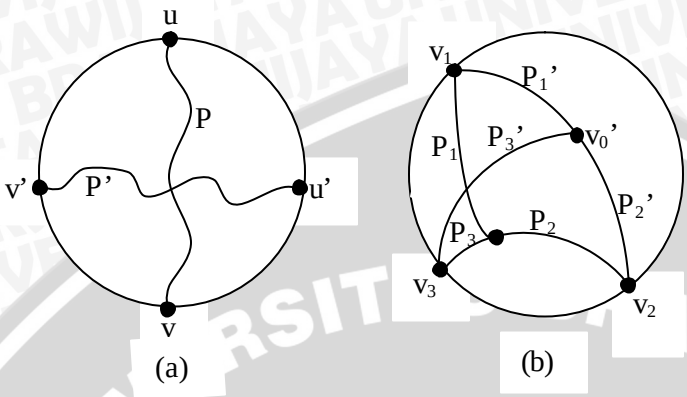
Teorema 2.5.4
Inner (outer) bridge saling meniadakan satu sama lainnya.

Bukti: Pembuktian dengan kontradiksi.
Misalkan *B* dan *B'* adalah 2 *inner bridge* yang saling tumpang tindih, maka dengan Teorema 2.5.1, keduanya harus *skew* atau *equivalent 3-bridge*.

Kasus 1. *B* dan *B'* adalah *skew*. Dari Definisi 25.4, terdapat titik berbeda *u* dan *v* dalam *B* dan *u'* dan *v'* dalam *B'*, muncul dalam urutan *u, u', v, v'* pada *C*. Misalkan *P* adalah *(u.v)-Path* dalam *B* dan P' adalah *(u',v')-path* dalam *B'*, keduanya *internally disjoint* dari *C*. dua path *P* dan *P'* tidak mempunyai *internal verteks* yang bersekutu karena keduanya termasuk dalam *bridge* yang berbeda. Pada saat yang bersamaan, *P* dan *P'* juga harus termuat dalam *Int C* karena *B* dan *B'* adalah *inner bridge*. dengan Teorema kurva Jordan, *G* tidak mungkin menjadi *plane graph*, bertentangan dengan hipotesis (lihat Gambar 2.5.4(a)).

Kasus 2. *B* dan *B*' *equivalent 3-bridge*. Misalkan himpunan sekutu dari titik adalah $\{v_1, v_2, v_3\}$, maka dengan Teorema 2.5.2, terdapat titik v_0 dalam *B* dan 3 *path* P_1, P_2, P_3 yang menghubungkan v_0 ke v_1, v_2 dan v_3 sehingga untuk $i \neq j$, P_i dan P_j hanya memiliki titik sekutu v_0. Analog, *B'* mempunyai suatu titik v_0' dan 3 *path* P_1', P_2', dan P_3' menghubungkan v_0' ke v_1, v_2 dan v_3, sehingga untuk $i \neq j$, P_i' dan P_j' hanya memiliki titik sekutu v_0' (lihat Gambar 2.5.4(b)).

Sekarang path P_1', P_2' dan P_3' membagi *Int C* ke dalam 3 *face* dan v_0' harus berada dalam satu diantara 3 *face* tersebut. jika hanya 2 dari titik v_1, v_2 dan v_3 berada dalam batas *face* yang memuat v_0', dapat diasumsikan bahwa v_3 tidak berada dalam *face* ini. dengan Teorema kurva Jordan, *Path* P_3' pasti melintasi P_1, P_2 atau *C*. Tetapi jika *B* dan *B'* adalah 2 *inner bridge* berbeda, ini jelas tidak mungkin. ☞

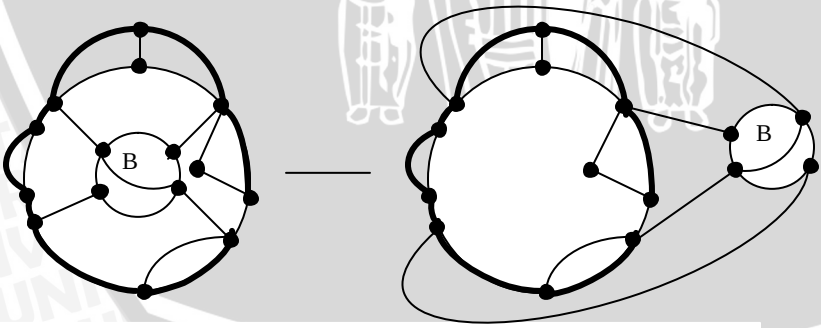


Gambar 2.5.4. *B* dan *B'* adalah *skew* (a) *B* dan *B' equivalent 3-bridge* (b)

Teorema 2.5.5
Suatu *inner bridge* yang saling meniadakan setiap *outer bridge* dapat dipindahkan (digambarkan kembali sehingga menjadi suatu *outer bridge*).

Bukti:
Misalkan *B* adalah *inner bridge* yang saling meniadakan (*avoid*) setiap *outer bridge*, maka titik dari *B* ke *C* semua berada pada batas dari beberapa *face* pada *G* termuat dalam *ext C*, *B* sekarang dapat digambarkan dalam *face* tersebut.☞

Untuk lebih jelasnya diberikan gambar sebagai berikut :



Gambar 2.5.5. Pemindahan *inner bridge B*

BAB III
PEMBAHASAN

Pada pembahasan skripsi ini akan disajikan aspek-aspek teoritis dari graf *planar* dan membuktikan karakteristik graf *planar* yang dikemukakan oleh Kuratowski pada tahun 1930. Terdapat karakteristik sederhana tentang graf *planar* yang dikenal dengan Teorema Kuratowski, dan untuk menguji planaritas suatu graf akan digunakan algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset.*

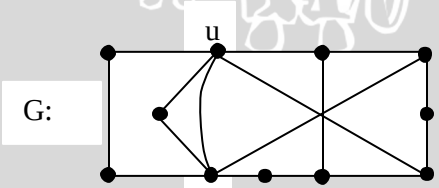
Kajian teoritis yang digunakan dalam pembahasan skripsi ini banyak merujuk pada buku karya Bondy dan Murty (1976) dengan judul "Graph Theory With Application".

3.1 Karakteristik Graf *Planar*

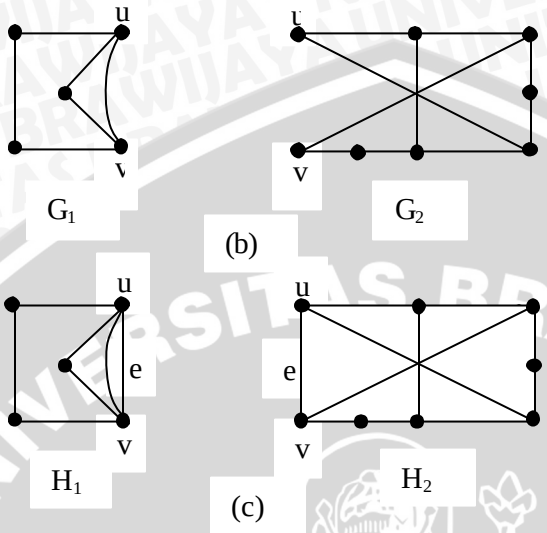
Suatu karakteristik sederhana yang sangat terkenal tentang graf *planar* dikemukakan oleh Kuratowski (1930), dikenal dengan Teorema Kuratowski. Teorema kuratowski ini menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu suatu graf menjadi *planar*.

Untuk membuktikan Teorema Kuratowski, terlebih dahulu akan diberikan dua buah lemma. Namun sebelumnya akan dijelaskan pula bahwa suatu graf G yang merupakan graf dengan 2-*cut verteks* $\{u,v\}$, maka terdapat *edge disjoint* pada subgraph G_1 dan G_2 sedemikian hingga $V(G_1) \cap V(G_2) = \{u,v\}$ dan $G_1 \cup G_2 = G$. Dalam kedua subgraph G_1 dan G_2, penghubungan u dan v oleh suatu sisi baru e menghasilkan graf H_1 dan H_2, sehingga $G=(H_1 \cup H_2)-e$ dan $q(H_i) = q(G)$ untuk $i = 1,2$.

Gambar 3.1.1 menjelaskan keterangan yang telah diberikan di atas.



(a)

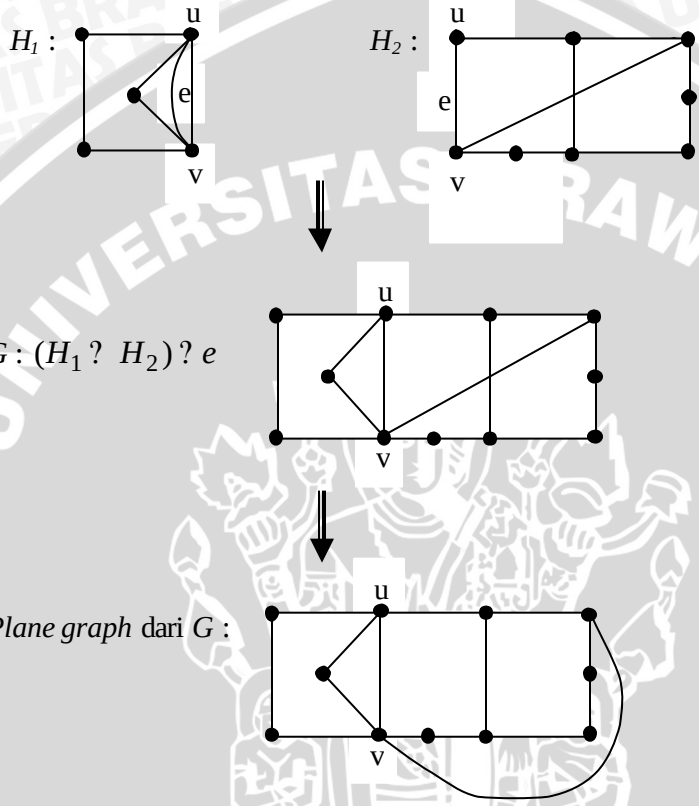


Gambar 3.1.1. Graf *G* dengan *cut verteks {u,v}* (a), G_1 dan G_2 *Subgraph* dari graf *G* (b), H_1 dan H_2 *Subgraph* dari *G* dengan hasil penambahan sisi $e = uv$ dalam G_1 dan G_2 (c)

Lemma 3.1.1
Jika *G* graf *nonplanar* dan H_1 dan H_2 *Subgraph* dari *G*, maka H_1 atau H_2 *nonplanar*.

Bukti: Pembuktian dengan kontradiksi.
Misalkan *G* graf *nonplanar* dan H_1 dan H_2 *Subgraph* dari *G*, dan andaikan H_1 dan H_2 *planar*. Misalkan $\tilde{H}_1$ adalah *plane graph* dari graf H_1 dan misal *f* suatu *face* dari $\tilde{H}_1$ yang *incident* dengan *e*. Jika $\tilde{H}_2$ adalah *plane graph* dari graf H_2 dalam *face f* sedemikian hingga $\tilde{H}_1$ dan $\tilde{H}_2$ hanya memiliki titik *u* dan *v* dan bersekutu dengan *edge e*, maka $(\tilde{H}_1 \cup \tilde{H}_2)$-*e plane graph* dari graf *G*. Ini berarti *G* graf *planar*. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis bahwa *G* graf *nonplanar*. Jadi pengandaian salah, dan yang benar H_1 atau H_2 *nonplanar* (Lihat Gambar 3.1.2).☞

Illustrasi gambar dari Lemma 3.1.1:



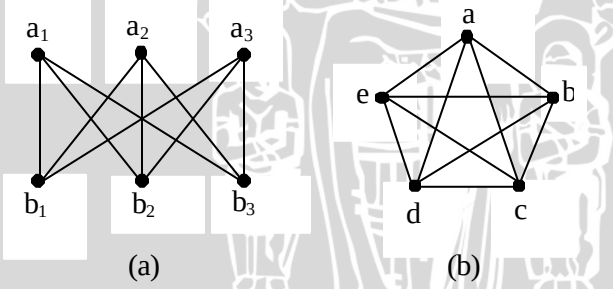
Gambar 3.1.2. *Plane graph* dari G dengan H_1 dan H_2 planar

Lemma 3.1.2
Misalkan G graf terhubung *nonplanar* yang tidak memuat subdivisi dari K_5 atau $K_{3,3}$ dan mempunyai sisi sesedikit mungkin, maka G adalah graf sederhana dan *3-connected*.

Bukti: Pembuktian dengan kontradiksi.
Misalkan G memenuhi hipotesis dari Lemma 3.1.2, maka jelas G graf *nonplanar* minimal sehingga harus merupakan *block* sederhana.

Jika G bukan graf *3-connected*, misalkan $\{u, v\}$ adalah *2-cut verteks* dari G dan misal H_1 dan H_2 graf yang diperoleh dari pendefinisian seperti yang diberikan di atas. Dengan Lemma 3.1.1, H_1 atau H_2 adalah *nonplanar*, sebut H_1 *nonplanar*. Karena $q(H_1) \geq q(G)$, maka H_1 harus memuat suatu subgraph K yang merupakan subdivisi dari K_5 atau $K_{3,3}$, selanjutnya $K \subseteq G$, sehingga sisi e didalam K. Misal P suatu *(u,v)-path* dalam $H_2 - e$, maka G memuat subgraph $\{K - P\} + e$ yang merupakan subdivisi dari K. Oleh karena itu, G memuat subdivisi dari K_5 atau $K_{3,3}$. Hal ini kontradiksi dengan hipotesis. Jadi pengandaian salah dan Lemma 3.1.2 terbukti. ☞

Selanjutnya untuk menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu bagi suatu graf menjadi *planar* akan digunakan Teorema Kuratowski (Teorema 3.1.1). Namun sebelum membicarakan Teorema Kuratowski lebih lanjut, perlu ditunjukkan bahwa graf bipartit komplit $K_{3,3}$ dan graf komplit K_5 adalah graf-graf yang *nonplanar*. Untuk menunjukkan bahwa graf $K_{3,3}$ atau graf K_5 *nonplanar* akan digunakan Teorema Kurva Jordan (Teorema 2.5.3). Lebih jelasnya akan diperlihatkan pada Gambar 3.1.3 dan Gambar 3.1.4.

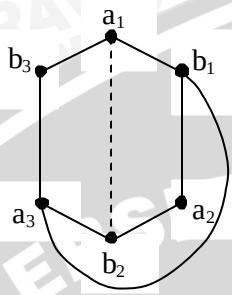


Gambar 3.1.3. Graf $K_{3,3}$ (a) dan graf K_5 (b)

? Akan ditunjukkan $K_{3,3}$ adalah graf *nonplanar*

Pandang graf $K_{3,3}$ pada Gambar 3.1.3(a). Graf tersebut memuat *cycle* $C = a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 a_1$. Sisi a_1b_2 dari $K_{3,3}$ dapat digambar "di dalam" atau 'di luar' *cycle C*.

Andaikata Sisi a_1b_2 digambar "di dalam" *cycle C*, maka sisi b_1a_3 dari $K_{3,3}$ harus digambar "di luar" *cycle C* (lihat Gambar 3.4).



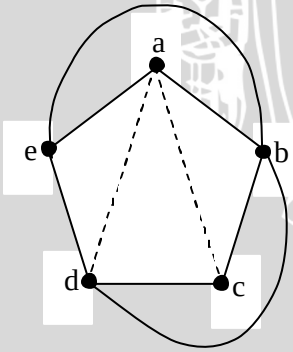
Gambar 3.1.4. Graf $K_{3,3}$ yang memuat *cycle C*

Selanjutnya pada *cycle* $C = a_1\, b_1\, a_2\, b_2\, a_3\, b_3\, a_1$ pada Gambar 3.1.4, titik a_2 terletak "di dalam" *cycle C* demikian juga titik b_3 terletak "di dalam" *cycle C*. Maka, berdasarkan Teorema kurva Jordan, sisi b_3a_2 akan memotong sisi a_1b_2 dari $K_{3,3}$. Dengan demikian $K_{3,3}$ adalah graf *nonplanar*.

? Akan ditunjukkan K_5 adalah graf *nonplanar*:

Pandang graf K_5 pada Gambar 3.1.3(b). Graf tersebut memuat *cycle* $C = a\ b\ c\ d\ e\ a$. Sisi-sisi *ad* dan *ac* dapat digambar "di dalam" atau "di luar" *cycle* C.

Andaikata *ad* dan *ac* digambar "di dalam" *cycle* C, maka sisi *be* dan *bd* dari K_5 harus di gambar "di luar" *cycle* C (lihat Gambar 3.1.5).



Gambar 3.1.5. Graf K_5 yang memuat *cycle C*

Selanjutnya, pada *cycle* $C = a\ b\ c\ d\ e\ a$ pada Gambar 3.1.5, titik *c* terletak "di dalam" *cycle C*, demikian juga titik *e* terletak "di dalam" *cycle* C. Maka, berdasarkan teorema Kurva Jordan, sisi *ce*

akan memotong sisi ad dari K_5 . Dengan demikian K_5 juga merupakan graf *nonplanar*.

Karena $K_{3,3}$ dan K_5 adalah graf-graf *nonplanar* yang memuat *subgraph* yang isomorfik dengan subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5, dan berlaku sebaliknya untuk graf *planar.* Maka di bawah ini akan disajikan temuan Kuratowski dalam teorema berikut.

Teorema 3.1.1 (Teorema Kuratowski)
Suatu graf adalah *planar* jika dan hanya jika tidak memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5.

Bukti:

?? ? Pembuktian dengan kontradiksi.

Misalkan G adalah graf *planar*, dan andaikan G memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5. Maka, harus dibuktikan bahwa G *nonplanar.* Diketahui K_5 dan $K_{3,3}$ adalah graf *nonplanar*, maka menurut Lemma 2.2.2, subdivisi dari K_5 dan $K_{3,3}$ adalah *nonplanar*. Dengan kata lain, G memuat subgraph *nonplanar*. Menurut Lemma 2.2.1, G adalah graf *nonplanar*. (kontradiksi dengan hipotesis bahwa G adalah graf *planar*). Jadi pengandaian salah, dan yang benar G tidak memuat subdivisi dari K_5 atau $K_{3,3}$ (syarat perlu dari teorema di atas telah terbukti).

Setelah ini akan dibuktikan syarat cukup suatu graf menjadi planar dengan kontradiksi.

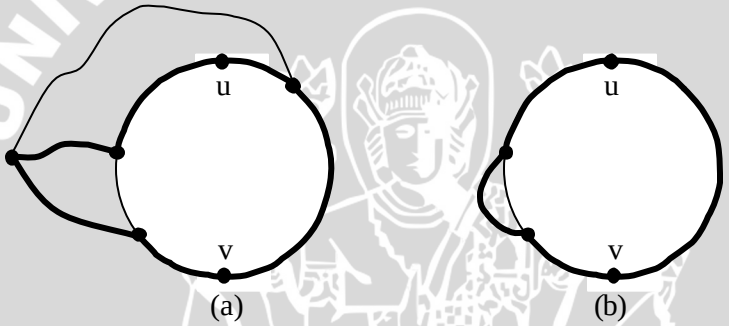
?? ? Pembuktian dengan kontradiksi.

Pilih suatu graf *nonplanar* G yang tidak memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5, dan mempunyai sisi sesedikit mungkin. Dari Lemma 3.1.2. G sederhana dan *3-connected*, G harus merupakan graf *nonplanar* minimal.

Misalkan uv suatu sisi dari G dan misal H *plane graph* dari $G ? uv$. Jika G adalah *3-connected* dan H adalah *2-connected*, maka u dan v termuat bersama dalam suatu *cycle* dalam H. Pilih *cycle* dalam H

yang memuat *u* dan *v* sedemikian hingga banyaknya sisi dalam *int C* sebanyak mungkin.

Karena *H* graf sedehana dan *2-connected*, maka tiap *bridge* dari *C* dalam *H* paling tidak harus mempunyai dua titik. Sekarang semua *outer bridge* dari *C* harus *2-bridge* yang saling tumpang tindih *uv*, karena jika beberapa *outer bridge* dengan *k-bridge* untuk *k* ? *3* atau suatu *2-bridge* yang saling meniadakan *uv*, maka akan terdapat *cycle C'* yang memuat *u* dan *v*, dengan sisi dalam *int C'* lebih banyak daripada *C*. Ini kontradiksi dengan pengambilan *C*. Untuk dua kasus yang diberikan akan diilustrasikan pada Gambar 3.1.6 (Dengan *C'* digambar dengan garis tebal).



Gambar 3.1.6. Graf *H* sederhana dan *2-connected*, dengan *outer bridge 3-bridge* (a) dan *2-bridge* (b).

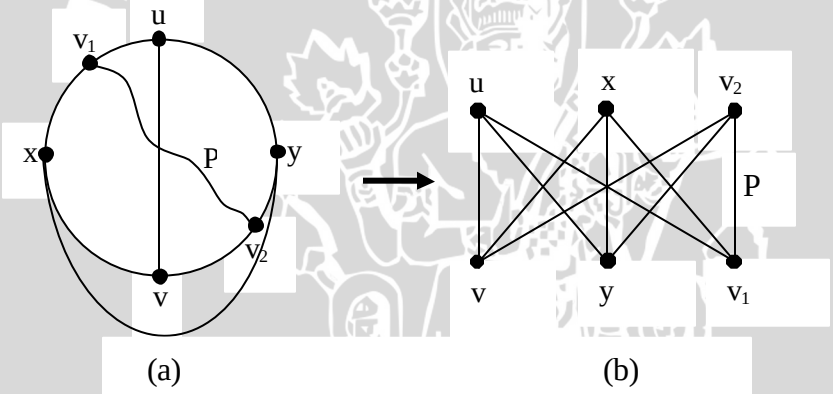
Kenyataannya semua *outer bridge* dari *C* dalam *H* harus *edge* tunggal. Jika suatu *2-bridge* dengan titik x dan *y* mempunyai suatu titik ketiga, maka himpunan *{x,y}* akan menjadi suatu *2-cut verteks* dari *G*, kontradiksi dengan kenyataan bahwa *G* adalah *3-connected*.

Dengan Teorema 2.5.4, tidak ada dua *inner bridge* yang saling tumpang tindih. Akan tetapi, beberapa *inner bridge* yang *skew* ke *uv* harus saling tumpang tindih dengan beberapa *outer bridge*. sebaliknya, dengan Teorema 2.5.5, semua *bridge* dapat dipindahkan, lalu sisi *uv* dapat digambarkan dalam *int C* untuk mendapatkan suatu *plane graph G*. Karena *G nonplanar*, maka ini tidak mungkin. Akan tetapi, terdapat *inner bridge B* yang *skew* ke *uv* dan *skew* ke beberapa *outer bridge xy*.

Dua kasus sekarang muncul, tergantung apakah *bridge B* mempunyai satu titik yang berbeda dari *u, v, x* dan *y* atau tidak.

Kasus 1:
Bridge B mempunyai titik berbeda dari *u, v, x* dan *y*. Ditentukan *B* mempunyai titik v_1 dalam *C(x,u)* (lihat Gambar 3.1.7(a)), sehingga dipunyai dua subkasus, tergantung apakah *B* mempunyai titik dalam *C(y,v)* atau tidak.

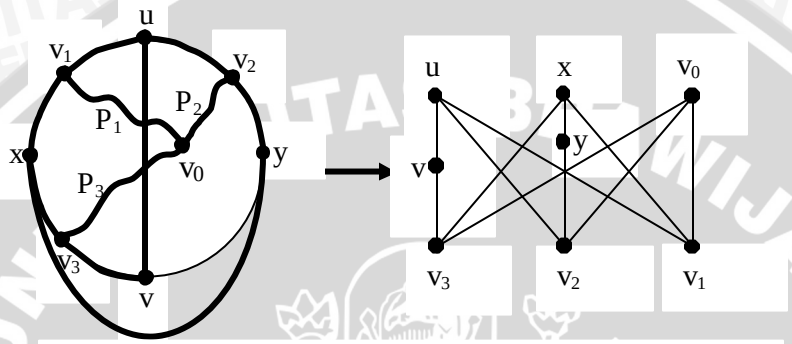
Kasus 1a:
B mempunyai titik v_2 dalam *C(y,v)*. Pada kasus ini terdapat (v_1,v_2)-*path P* dalam *B* yang *internally disjoint* dari *C*. Tetapi, selanjutnya $?C ? P?? ?uv, xy?$ adalah suatu subdivisi dari $K_{3,3}$ dalam *G*. Hal ini kontradiksi (Lihat Gambar 3.1.7(a)).



Gambar 3.1.7. Graf Subdivisi dari $K_{3,3}$ (a) yang isomorfik dengan $K_{3,3}$ (b)

Kasus 1b:
B tidak mempunyai titik dalam *C(y,v)*. Jika *B skew* ke *uv* dan ke *xy*, maka *B* harus mempunyai titik v_2 dalam *C(u,y]* dan v_3 dalam *[v,x)*. Oleh karena itu, *B* mempunyai tiga tiitk v_1, v_2 dan v_3. Dengan Teorema 2.5.2, terdapat suatu titik v_0 dalam *V(B)\V(C)* dan tiga *path* P_1, P_2 dan P_3 dalam *B* yang menghubungkan v_0 ke v_1, v_2 dan v_3, sedemikian hingga untuk $i ? j$. *Pi* dan *Pj* hanya mempunyai titik yang bersekutu v_0, tetapi sekarang $(C ? P_1 ? P_2 ? P_3) ? ?uv, xy?$, memuat suatu subdivisi dari $K_{3,3}$. Hal ini kontradiksi.

Kasus ini diilustrasikan dalam Gambar 3.1.8(a), di mana subdivisi dari $K_{3,3}$ diindikasikan dengan garis tebal. Untuk lebih jelasnya, subdivisi dari $K_{3,3}$ akan digambarkan kembali dalam Gambar 3.1.8(b).

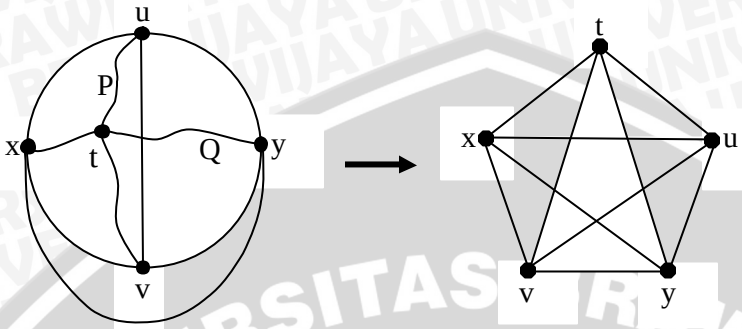


Gambar 3.1.8. Graf yang memuat Subdivisi dari $K_{3,3}$ (a) subdivisi dari $K_{3,3}$ (b)

Kasus 2:
B mempunyai titik yang lain dari *u*, *v*, *x* dan *y*. Jika *B* adalah *skew ke xy* dan *uv*, maka *u*, *v*, *x* dan *y* semua harus menjadi titik dari *B*. Akan tetapi, terdapat suatu *(u,v)-path P* dan suatu *(x,y)-path Q* dalam *B* sedemikian hingga *P* dan *Q* *internally disjoint* dari *C* serta $|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$.

Sehingga dipunyai dua subkasus, tergantung apakah *P* dan *Q* mempunyai satu atau lebih titik yang bersekutu.

Kasus 2a:
$|V(P) \cap V(Q)| \geq 1$. Dalam kasus ini $(C \cup P \cup Q) \cup \{uv, xy\}$ adalah subdivisi dari K_5 dalam *G*. Hal ini kontradiksi.(lihat Gambar 3.1.9(a))



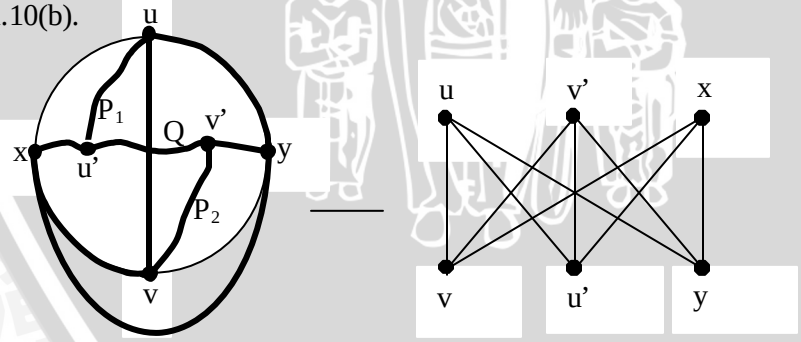
(a) (b)

Gambar 3.1.9. Graf Subdivisi dari K_5 (a) yang isomorfik dengan K_5 (b)

Kasus 2b:

$|V(P) \cap V(Q)| \geq 2$. Misalkan *u'* dan *v'* titik pertama dan terakhir dari *P* dan *Q*, dan misalkan P_1 dan P_2 merupakan *(u,u')* dan *(v,v')* bagian dari *P*. $(C \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3) \cup \{uv, xy\}$ memuat suatu subdivisi dari $K_{3,3}$ dalam *G*. Hal ini kontradiksi.

Kasus ini diilustrasikan dalam Gambar 3.1.10(a), di mana subdivisi dari $K_{3,3}$ diindikasikan dengan garis tebal. Untuk lebih jelasnya, subdivisi dari $K_{3,3}$ akan digambarkan kembali dalam Gambar 3.1.10(b).

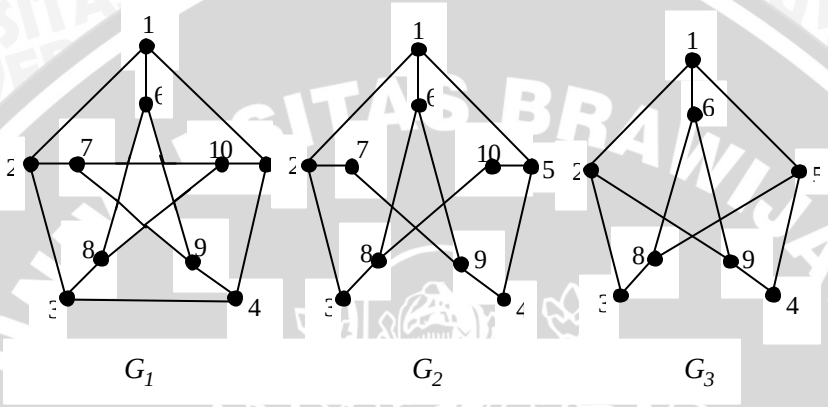


(a) (b)

Gambar 3.1.10. Graf yang memuat Subdivisi dari $K_{3,3}$ (a) subdivisi dari $K_{3,3}$ yang isomorfik dengan $K_{3,3}$ (b)

Karena semua kasus yang mungkin adalah kontradiksi, sehingga pembuktian syarat cukup suatu graf menjadi *planar* telah terbukti. ☞

Sebagai aplikasi dari Teorema Kuratowski, maka di bawah ini akan diberikan contoh graf Petersen yang merupakan graf *nonplanar*.



Gambar 3.1.11. Graf Petersen G_1, G_2 dan G_3

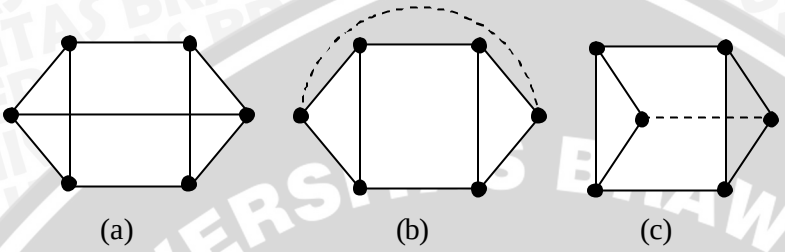
Graf G_1 adalah graf *nonplanar*, karena memuat subdivisi G_2 dari graf G_3 yang merupakan graf isomorfik dengan graf $K_{3,3}$

3.2 Algoritma Uji planaritas suatu graf

Metode *trial* dan *error* seringkali cukup untuk menentukan apakah graf dengan *order* relatif kecil adalah *planar*. akan tetapi, metode tersebut kurang praktis untuk graf dengan *order* relatif besar. Oleh karena itu, akan lebih menguntungkan jika diberikan suatu algoritma untuk mengetahui planaritas suatu graf. Disini akan dibicarakan suatu algoritma yang diberikan oleh *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset* pada tahun 1964.

Misalkan H suatu subgraph *planar* dari graf G dan $\tilde{H}$ *plane graph* dari H. $\tilde{H}$ adalah *G-admissible* jika G *planar* dan terdapat *plane graph* $\tilde{G}$ dari G sedemikian hingga $\tilde{H}$? $\tilde{G}$.

Pada Gambar 3.2.1, diperlihatkan dua gambar *plane graph* dari subgraph *planar* dari graf G, yang pertama adalah graf *G-admissible* (Gambar 3.2.1(b)) dan Gambar 3.2.1(c) bukan *G-admissible*.



Gambar 3.2.1. Graf G (a), *G-admissible* (b), dan *G-inadmissible*

Jika *B* suatu *bridge* dari *H* dalam *G*, maka *B* dikatakan *drawable* dalam suatu *face f* pada $\tilde{H}$, jika semua titik dari *B* ke *H* dimuat dalam batas *f*, $F(B, \tilde{H})$ adalah himpunan *face f* dari $\tilde{H}$ dengan *B* adalah *drawable*.

Teorema berikut ini menyediakan syarat perlu untuk *G* menjadi *planar*.

Teorema 3.2.1

Jika $\tilde{H}$ adalah *G-admissible*, maka untuk tiap *bridge B* dari *H*, $F(B, \tilde{H})$? ? .

Bukti:

Jika $\tilde{H}$ adalah *G-admissible*, maka dengan definisi terdapat suatu *plane graph* $\tilde{G}$ yang berkorespondensi ke suatu *bridge B* dari *H* yang harus dibatasi oleh satu *face* dari $\tilde{H}$. Oleh karena itu, $F(B, \tilde{H})$? ? . ☞

Diberikan suatu graf *G*, algoritmanya menentukan suatu barisan naik $G_1, G_2, \ldots$ dari subgraph *planar* pada *G*, dan berhubungan dengan *plane graph* $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots$ Jika *G planar*, maka tiap $\tilde{G}$ adalah *G-admissible* dan barisan $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots \tilde{G}_{q?\,p?\,1}$ berakhir pada *plane graph*

dari G, Pada tiap tahap, syarat perlu dalam Teorema 3.2.1. digunakan untuk menguji planaritas graf G.

Algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset* :

1. Ambil G_1 suatu *cycle* dalam G. Cari *plane graph* $\tilde{G}_1$ dari G_1. pilih i = 1.
2. Jika $E(G) ? E(G_i) ? ?$, stop. Jika tidak, tentukan semua *bridge* dari G_i dalam G.
3. Jika terdapat suatu *bridge* B sedemikian hingga $F(B, \tilde{G}_i) ? ?$, stop. Dengan Teorema 3.2.1, G adalah *nonplanar*. Jika terdapat suatu *bridge* B sedemikian hingga $\left|F(B,\tilde{G}_i)\right| ? 1$, maka ambil $\{f\} = F(B,\tilde{G}_i)$. Jika tidak, ambil B menjadi suatu *bridge* dan f suatu *face* sedemikian hingga $f ? F(B,\tilde{G})$.
4. Pilih suatu *path* $P_i ? B$ yang menghubungkan dua titik dari B ke G_i. Susun $G_{i?1} ? G_i ? P_i$ dan diperoleh *plane graph* $\tilde{\tilde{G}}_{i?1}$ dari $G_{i?1}$ dengan menggambarkan P_i dalam *face* f pada $\tilde{\tilde{G}}_i$. Gantikan i dengan $i+1$ dan kembali ke langkah 2.

Diagram alir dari algoritma di atas bisa dilihat pada Gambar 3.2.2, dan dari diagram alir tersebut dapat diketahui operasi uji planaritas suatu graf, yaitu:

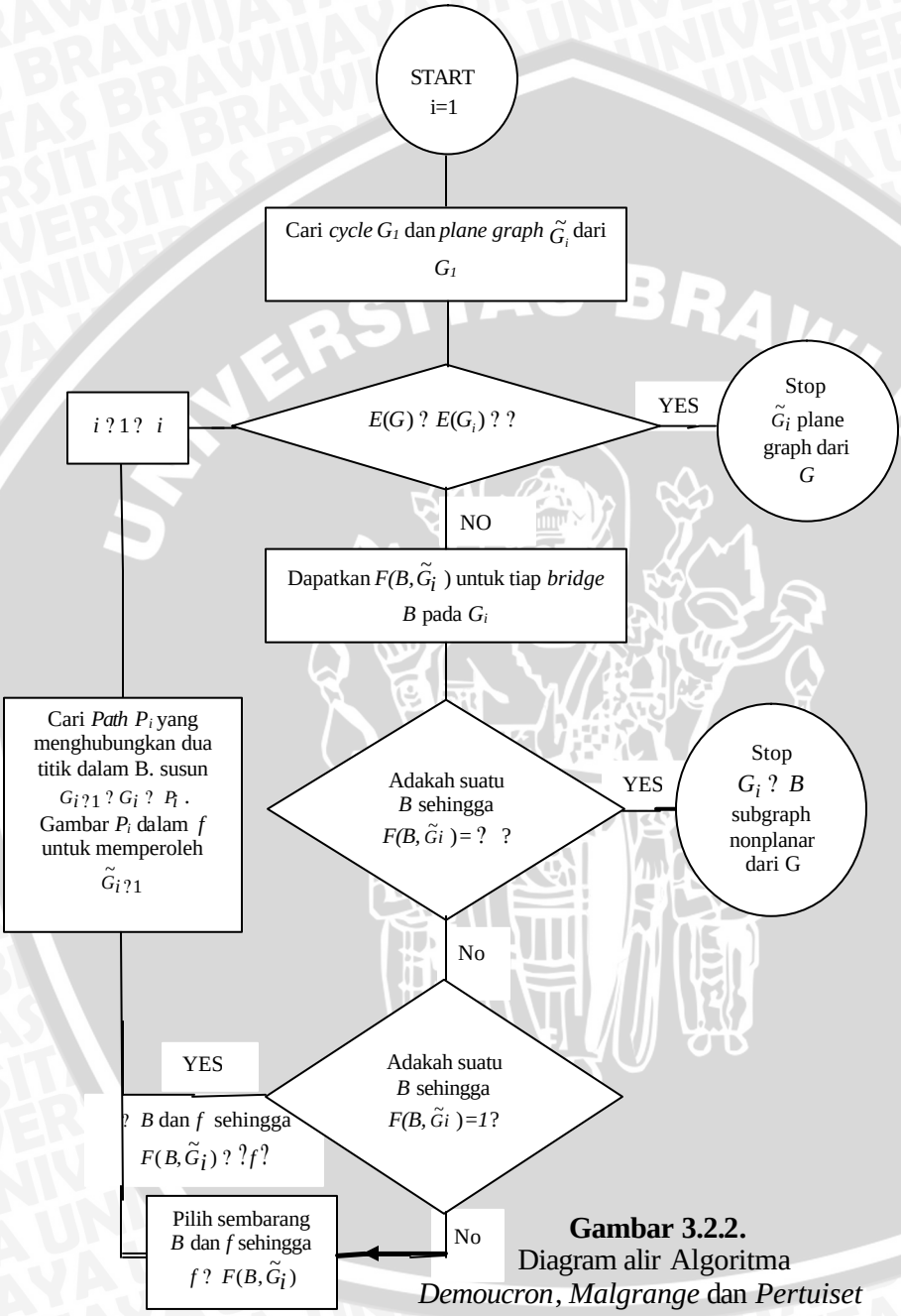
(i) Tentukan suatu cycle G_1 dalam *block* G.

(ii) Tentukan semua *bridge* dari G_i dalam G dan semua titik dari B ke G_i.

(iii) Tentukan $b?f?$ untuk tiap *face* f pada $\tilde{\tilde{G}}_i$.

(iv) Tentukan $F(B,\tilde{\tilde{G}}_i)$ untuk tiap *bridge* B pada G_i.

(v) Dapatkan suatu path P_i dalam beberapa *bridge* B pada G_i diantara dua titik pada $V(B,G_i)$.



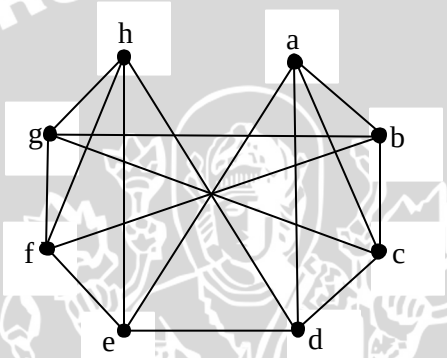
Gambar 3.2.2.
Diagram alir Algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset*

3.3 Contoh kasus

Untuk memperjelas implementasi dari algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset*, dibawah ini akan diberikan dua contoh graf yang nantinya akan di uji apakah graf yang dimaksud merupakan graf *planar* atau graf *nonplanar*.

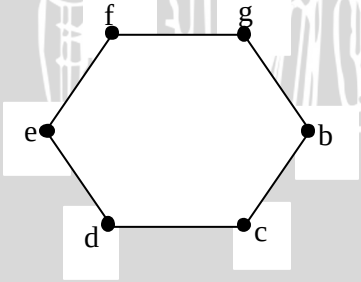
Contoh 3.3.1

Dengan menggunakan algoritma *Demoucron, Malgrange* dan *Pertuiset*, tentukan planaritas graf berikut !



Gambar 3.3.1. Graf *G* dengan 8 titik dan 16 sisi

Dari graf tersebut, pilih *cycle* G_1 ? *bcdefgb* dan gambar *plane graph* $\tilde{G}_1$.



Gambar 3.3.2. *Plane graph* $\tilde{G}_1$

1. Untuk $i = 1$.

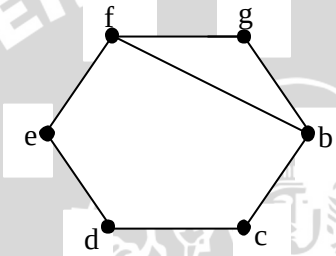
   $E(G) ? E(G_1) ? ?$

   $B_1 ? \langle ?ab,ac,ad,ae? \rangle$, $B_2 ? \langle ?dh,eh,fh,gh? \rangle$,

   $B_3 ? \langle ?cg? \rangle$, $B_4 ? \langle ?bf? \rangle$

   $|F(B_i, \tilde{G}_1)| ? 2 \quad ?i ? 1,2,3,4?$

   Ambil $B ? \langle ?bf? \rangle$, maka diperoleh *path* P_1 yang menghubungkan titik *b* dan *f*. Dengan menambahkan P_1 ke $\tilde{G}_1$ diperoleh $\tilde{G}_2$.



Gambar 3.3.3. *Plane graph* $\tilde{G}_2$

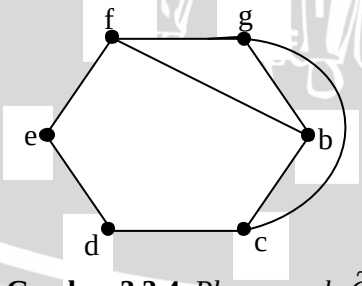
2. Untuk $i = 2$.

   $E(G) ? E(G_2) ? ?$

   $B_5 ? \langle ?ab,ac,ad,ae? \rangle$, $B_6 ? \langle ?dh,eh,fh,gh? \rangle$, $B_7 ? \langle ?cg? \rangle$

   $|F(B_5, \tilde{G}_2)| ? 2$, $|F(B_i, \tilde{G}_2)| ? 1, ?i ? 6,7?$

   Ambil $B ? \langle ?cg? \rangle$, maka diperoleh P_2 yang menghubungkan titik *c* dan *g*. Dengan menambahkan P_2 ke $\tilde{G}_2$ diperoleh $\tilde{G}_3$.



Gambar 3.3.4. *Plane graph* $\tilde{G}_3$

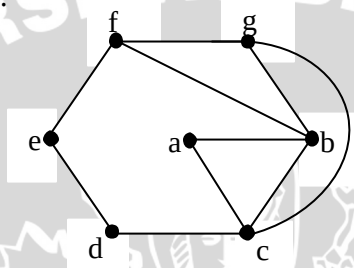
3. Untuk $i = 3$

$E(G) ? E(G_3) ? ?$

$B_8 ? \langle ?ab,ac,ad,ae? \rangle, B_9 ? \langle ?dh,eh,fh,gh? \rangle$

$\left|F(B_i,\tilde{G}_3)\right| ? 1,?i ? 8,9?,$

Ambil $B = \langle ?ab,ac? \rangle$ maka diperoleh P_3 yang menghubungkan titik *a* dan *b* juga titik *a* dan *c*. Dengan menambahkan P_3 ke $\tilde{G}_3$ diperoleh $\tilde{G}_4$.



Gambar 3.3.5. *Plane graph* $\tilde{G}_4$

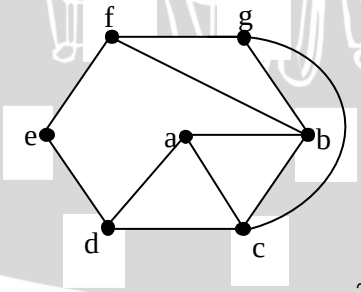
4. Untuk $i = 4$

$E(G) ? E(G_4) ? ?$

$B_{10} ? \langle ?ad? \rangle , B_{11} ? \langle ?ae? \rangle , B_{12} ? \langle ?dh,eh,fh,gh? \rangle$

$\left|F(B_i,\tilde{G}_4)\right| ? 1,?i ? 10,11,12?$

Ambil $B ? \langle ?bf? \rangle$, maka diperoleh P_4 yang menghubungkan titik *b* dan *f*. Dengan menambahkan P_4 ke $\tilde{G}_4$ diperoleh $\tilde{G}_5$.



Gambar 3.3.6. *Plane graph* $\tilde{G}_5$

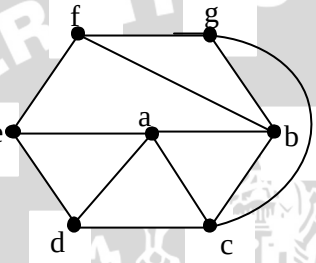
5. Untuk $i = 5$

$E(G) ? E(G_5) ? ?$

$B_{13} ? \langle ?ae? \rangle$, $B_{14} ? \langle ?dh, eh, fh, gh? \rangle$

$\left| F(B_i, \tilde{G}_5) \right| ? 1, ?i ? 13,14?$

Ambil $B ? \langle ?ae? \rangle$, maka diperoleh P_5 yang menghubungkan titik *a* dan *e*. Dengan menambahkan P_5 ke $\tilde{G}_5$ diperoleh $\tilde{G}_6$.



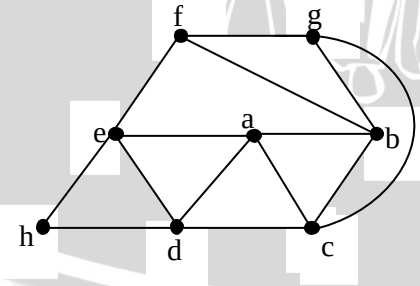
Gambar 3.3.7. *Plane graph* $\tilde{G}_6$

6. Untuk $i = 6$

$E(G) ? E(G_6) ? ?$

$B_{15} ? \langle ?dh, eh, fh, gh? \rangle$, $\left| F(B_{15}, \tilde{G}_6) \right| ? 1$

Untuk $B ? \langle \{ dh, eh \} \rangle$, maka diperoleh P_6 yang menghubungkan titik *d* dan *h* juga titik *e* dan *h*. Dengan menambahkan P_6 ke $\tilde{G}_6$ diperoleh $\tilde{G}_7$.



Gambar 3.3.8. *Plane graph* $\tilde{G}_7$

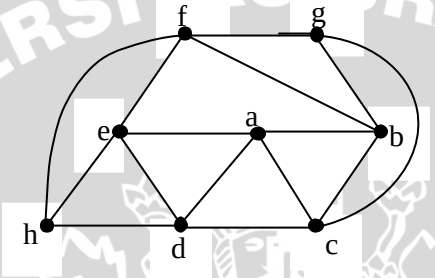
7. Untuk $i = 7$

$E(G) ? E(G_7) ? ?$

$B_{16} ? \langle ?fh? \rangle$, $B_{17} ? \langle ?gh? \rangle$

$\left| F(B_i, \tilde{G}_7) \right| ? 1, ?i ? 16,17?$

Untuk $B_{16} ? \langle ?fh? \rangle$, maka diperoleh P_7 yang menghubungkan titik *f* dan *h*. Dengan menambahkan P_7 ke $\tilde{G}_7$ diperoleh $\tilde{G}_8$.



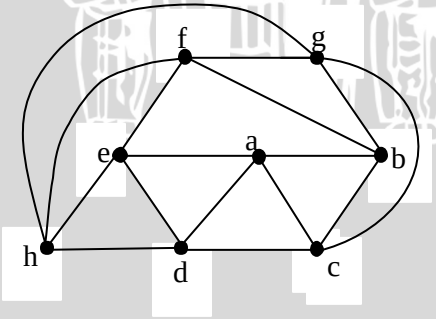
Gambar 3.3.9. *Plane graph* $\tilde{G}_8$

8. Untuk $i = 8$

$E(G) ? E(G_8) ? ?$

$B_{18} ? \langle ?gh? \rangle$, $\left| F(B_{18}, \tilde{G}_8) \right| ? 1$

Ambil $B ? \langle ?gh? \rangle$, maka diperoleh P_8 yang menghubungkan titik *g* dan *h*. Dengan menambahkan P_8 ke $\tilde{G}_8$ diperoleh $\tilde{G}_9$.



Gambar 3.3.10. *Plane graph* $\tilde{G}_9$

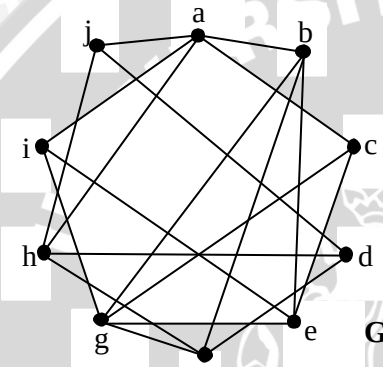
9. Untuk i = 9

   $E(G) ? E(G_9) ? ?$. Stop. $\tilde{G}_9$ adalah *plane graph* dari G.

   Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa G adalah graf *planar*.

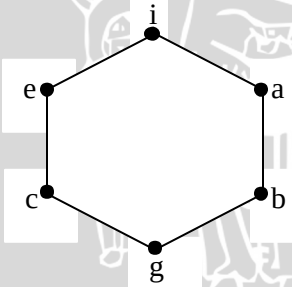
Contoh 3.3.2

Tentukan planaritas dari Graf H di bawah ini !



Gambar 3.3.11. Graf H dengan 10 titik dan 19 sisi

Dari graf tersebut, pilih *cycle* H_1 ? *abgceia* dan gambar *plane graph* $\tilde{H}_1$.



Gambar 3.3.12. *Plane graph* $\tilde{H}_1$

1. Untuk *i = 1*.

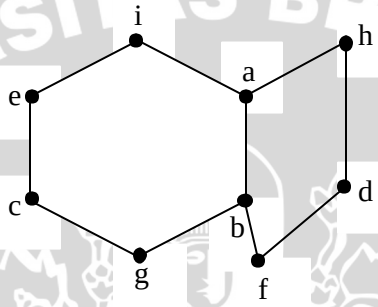
   $E(H) ? E(H_1) ? ?$

   $B_1 ? \langle ?aj,ah,dh,dj,hj,bf,df,fg,fh? \rangle$, $B_2 ? \langle ?ac? \rangle$,

$B_3 = \langle be \rangle$, $B_4 = \langle eg \rangle$, $B_5 = \langle gi \rangle$

$|F(B_i, \tilde{H}_1)| = 2, i = 1,2,3,4,5$

Ambil $B = \langle ah, dh, df, bf \rangle$, maka diperoleh P_1 yang menghubungkan titik a dan h, titik d dan h, titik d dan f, juga titik b dan f. Dengan menambahkan P_1 ke $\tilde{H}_1$ diperoleh $\tilde{H}_2$.



Gambar 3.3.13. *Plane graph* $\tilde{H}_2$

2. Untuk $i = 2$.

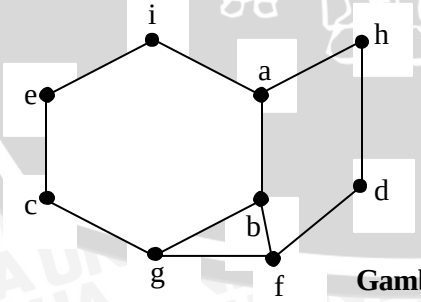
$E(H) = E(H_2) = \{\}$

$B_6 = \langle aj, dj, hj \rangle$, $B_7 = \langle fh \rangle$, $B_8 = \langle fg \rangle$,

$B_9 = \langle ac \rangle$, $B_{10} = \langle be \rangle$, $B_{11} = \langle eg \rangle$, $B_{12} = \langle gi \rangle$

$|F(B_i, \tilde{H}_2)| = 2, i = 6,7,9,10,11,12$, $|F(B_8, \tilde{H}_2)| = 1$

Untuk $B = \langle fg \rangle$, maka diperoleh P_2 yang menghubungkan titik f dan g. Dengan menambahkan P_2 ke $\tilde{H}_2$ diperoleh $\tilde{H}_3$.



Gambar 3.3.14. *Plane graph* $\tilde{H}_3$

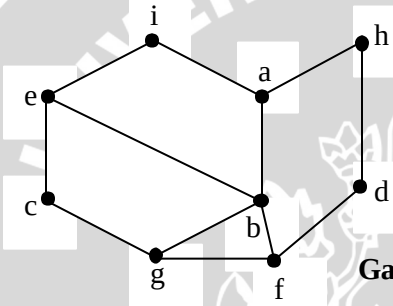
3. Untuk $i = 3$.

$E(H) ? E(H_3) ? ?$

$B_{13} ? \langle ?aj,dj,hj.? \rangle$, $B_{14} ? \langle ?fh.? \rangle$, $B_{15} ? \langle ?ac.? \rangle$, $B_{16} ? \langle ?be.? \rangle$, $B_{17} ? \langle ?eg.? \rangle$, $B_{18} ? \langle ?gi.? \rangle$

$|F(B_i, \tilde{H}_3)| ? 2, ?i ? 13,14,15,17,18?.$, $|F(B_{16}, \tilde{H}_3)| ? 1,$

Untuk $B ? \langle ?be.? \rangle$, maka diperoleh P_3 yang menghubungkan titik b dan e. Dengan menambahkan P_3 ke $\tilde{H}_3$ diperoleh $\tilde{H}_4$.



Gambar 3.3.15. *Plane graph* $\tilde{H}_4$

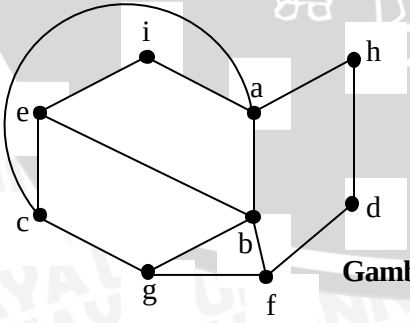
4. Untuk $i = 4$.

$E(H) ? E(H_4) ? ?$

$B_{19} ? \langle ?aj,dj,hj.? \rangle$, $B_{20} ? \langle ?eg.? \rangle$, $B_{21} ? \langle ?fh.? \rangle$, $B_{22} ? \langle ?ac.? \rangle$, $B_{23} ? \langle ?gi.? \rangle$

$|F(B_i, \tilde{H}_4)| ? 2, ?i ? 19,20,21?.$, $|F(B_i, \tilde{H}_4)| ? 1, ?i ? 22,23?$

Untuk $B ? \langle ?ac.? \rangle$, maka diperoleh P_4 yang menghubungkan titik a dan c. Dengan menambahkan P_4 ke $\tilde{H}_4$ diperole $\tilde{H}_5$.



Gambar 3.3.16. *Plane graph* $\tilde{H}_5$

5. Untuk $i = 5$.

$E(H) ? E(H_5) ? ?$

$B_{24} ? \langle ?aj,dj,hj,? \rangle$, $B_{25} ? \langle ?eg? \rangle$, $B_{26} ? \langle ?fh? \rangle$, $B_{27} ? \langle ?gi? \rangle$

$\left|F(B_{25},\tilde{H}_5)\right| ? 1$, $\left|F(B_i,\tilde{H}_5)\right| ? 2, ?i ? 24,26?$, $\left|F(B_{27},\tilde{H}_5)\right| ? 0$

Karena terdapat *bridge* $B ? \langle ?gi? \rangle$ sedemikian sehingga $\left|F(B,\tilde{H}_5)\right| ? 0$. Stop

Dengan Teorema 3.2.1, *H* adalah *nonplanar*.

Jadi, graf *H nonplanar.*

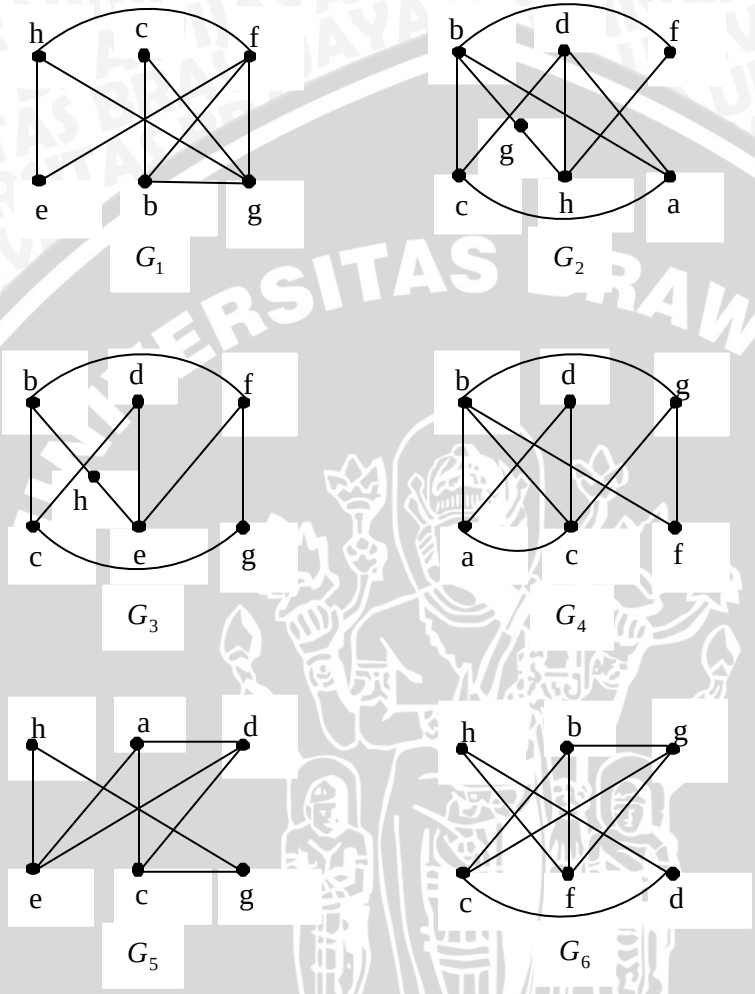
Untuk mengetahui kebenaran dari jawaban pada Contoh 3.3.1 dan 3.3.2 di atas, akan dilakukan pengecekan dengan menggunakan Teorema Kuratowski, yaitu:

Contoh 3.3.1:

Untuk menunjukkan suatu graf merupakan graf *planar* atau graf *nonplanar*, akan dicari suatu *subgraph* yang memuat subdivisi dari graf $K_{3,3}$ atau K_5 .

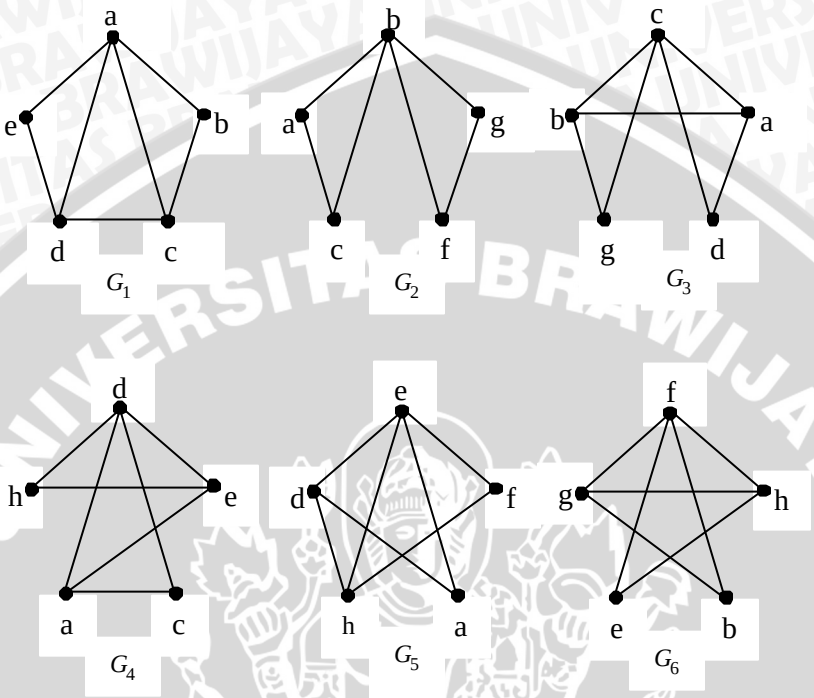
Dapat dilihat graf *G* pada Gambar 3.3.1, bahwa semua titiknya berderajat empat $?deg\, v_i ?? 4, ?i ? 1,2,...,8?$, maka dipastikan Graf tersebut tidak memuat *subgraph* $K_{3,3}$. Karena pada graf $K_{3,3}$, setiap himpunan titik $V(G)$ dapat dibagi ke dalam dua subhimpunan V_1 dan V_2 sedemikian sehingga tiap titik dari V_1 *adjacent* dengan tiap titik dari V_2 , dimana masing-masing jumlah titik dari V_1 dan V_2 adalah tiga titik sehingga masing-masing titik pada V_1 dan V_2 berderajat tiga.

Agar lebih jelas bahwa Gambar 3.3.1 tidak memuat *subgraph* yang merupakan graf subdivisi dari graf $K_{3,3}$, akan diperlihatkan beberapa *subgraph* dari *G* pada Gambar 3.3.17.



Gambar 3.3.17. Beberapa variasi *subgraph G* yang tidak memuat graf subdivisi dari graf $K_{3,3}$.

Selanjutnya akan dibentuk suatu *subgraph* yang merupakan subdivisi dari graf K_5 dengan lima titik sebarang yang didalamnya terdapat sebuah sisi diantara setiap pasang titik yang berbeda. Untuk beberapa variasi *subgraph* dapat dilihat pada Gambar 3.3.18, yaitu:



Gambar 3.3.18. Beberapa variasi *subgraph G* yang tidak memuat graf subdivisi dari graf K_5.

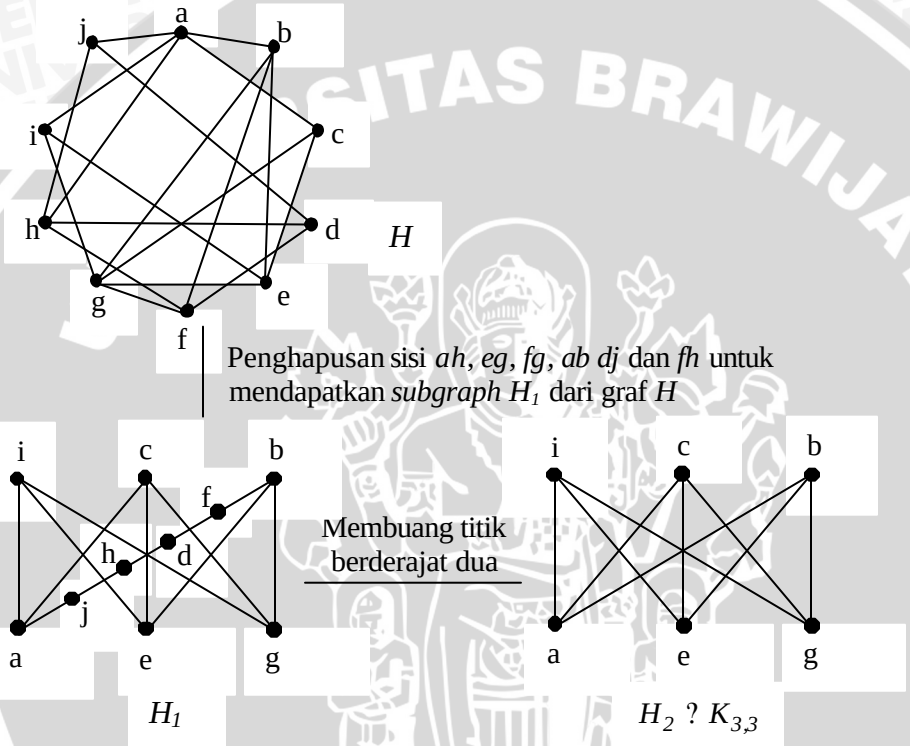
Dari Gambar 3.3.17 dan gambar 3.3.18, terlihat bahwa tidak ada satupun *subgraph* dari *G* yang memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5. Sehingga dikatakan *G* merupakan graf *planar*.

Contoh 3.3.2:

Dengan Teorema Kuratowski, akan ditunjukkan graf *H* pada Gambar 3.3.11 adalah graf *nonplanar*. Untuk itu akan dicari *subgraph* yang memuat subdivisi dari graf $K_{3,3}$ atau K_5.

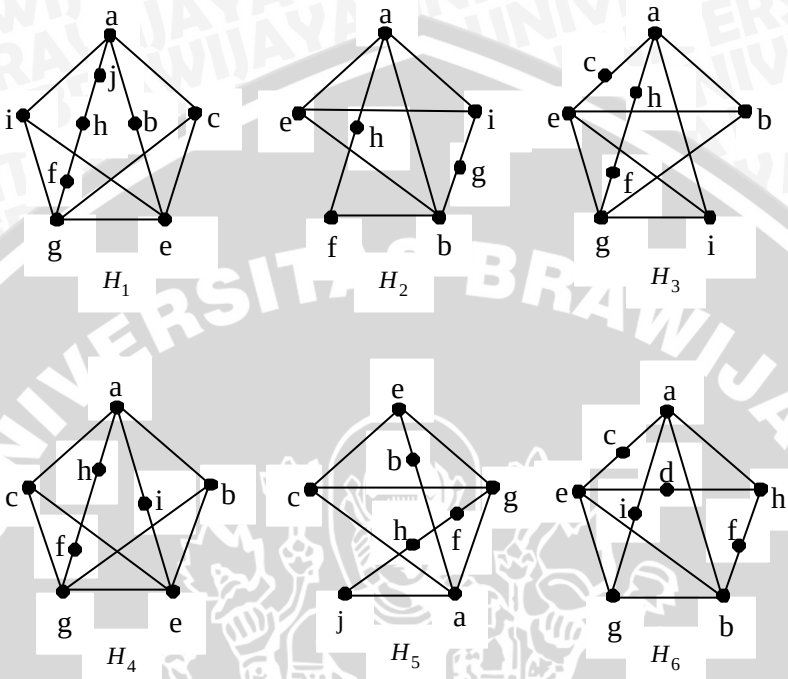
Pertama, akan dicari *subgraph* yang memuat subdivisi dari graf $K_{3,3}$. Dapat dilihat bahwa titik-titik *b*, *e*, *f*, *h* masing-masing mempunyai derajat empat, dan titik *a*, *g* masing-masing mempunyai derajat lima. Dalam $K_{3,3}$ setiap titik mempunyai derajat tiga,

sehingga kita dapat menghapus sisi *ah*, *eg*, *fg*, *ab* agar semua titik berderajat tiga. Jika kita menghapus dua sisi lagi, yaitu sisi *dj* dan *fh* maka akan didapatkan empat titik berderajat dua, yaitu titik *d*, *f*, *h* dan *j*. Sehingga akan diperoleh graf subdivisi yang memuat graf $K_{3,3}$ (Lihat Gambar 3.3.19).



Gambar 3.3.19. Penghapusan beberapa sisi untuk memperoleh suatu *subgraph* yang merupakan subdivisi dari graf $K_{3,3}$

Selanjutnya akan dicari suatu *subgraph* yang merupakan subdivisi dari graf K_5 dengan lima titik sebarang yang didalamnya terdapat sebuah sisi diantara setiap pasang titik yang berbeda. Untuk beberapa variasi *subgraph* dapat dilihat pada Gambar 3.3.20, yaitu:



Gambar 3.3.20. Beberapa variasi *subgraph H* yang tidak memuat graf subdivisi dari graf K_5.

Dari Gambar 3.3.20, dapat dilihat bahwa tak satupun dari beberapa subgraph di atas memuat graf K_5.

Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa graf *H* hanya memuat graf subdivisi dari graf $K_{3,3}$. Menurut Teorema Kuratowski, suatu graf adalah *planar* jika dan hanya jika tidak memuat subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5. Dengan demikian graf *H* adalah graf *nonplanar*.

BAB IV
KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dari pembahasan dalam Bab III, maka dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Teorema Kuratowski adalah salah satu metode yang digunakan untuk menunjukkan syarat cukup dan syarat perlu suatu graf menjadi *planar*. Dalam membuktikan Teorema Kuratowski diperlukan dua buah lemma, dan untuk membuktikan ada tidaknya graf subdivisi dari graf $K_{3,3}$ atau K_5 dalam suatu graf G digunakan konsep himpunan bridge B dalam suatu *cycle* C.
2. Untuk menguji planaritas suatu graf dengan algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset*, digunakan dasar teorema, yaitu, dengan menentukan $F(B,\tilde{G}_i)$ untuk tiap *bridge* B pada G_i dengan $1 \le i \le k \le q \le p \le 1$. Jika $|F(B,\tilde{G}_i)| \ge 0$ maka G adalah graf *nonplanar*, Untuk $|F(B,\tilde{G}_i)| \ge 0$ dengan $\tilde{H}_i \subset \tilde{G}_i$ adalah $G \supset$ *admissible* dan $E(G) \supset E(G_i) \subset \subset$, maka G adalah graf *planar*. Algoritma ini juga bisa digunakan untuk mendapatkan graf bidang (*plane graph*) dari suatu graf.

4.2 Saran

Pada penulisan skripsi ini hanya meneliti karakteristik graf *planar* dengan Teorema Kuratowski dan melakukan uji planaritas suatu graf dengan menggunakan algoritma *Demoucron*, *Malgrange* dan *Pertuiset*. Pada penulisan selanjutnya, untuk mencari karakteristik graf *planar* dapat diketahui dengan menggunakan kriteria planaritas graf menurut Teorema Wagner (1937), dan untuk menguji planaritas suatu graf bisa dengan menggunakan algoritma *Hopcroft* dan *Tarjan* (1974).

DAFTAR PUSTAKA

Bondy, J.A and Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory With Applications*. North Holland. New york.

Chartrand, G, and Lesniak, L. 1979. *Graphs and Digraphs 2nd ed*, Monterey. California.

Chartrand, G, and Oeilermann, O.R. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory*. Mcgraw-hill International. Singapore.

Johnsonbaugh, R. 1998. *Discrete Mathematics 4nd ed*. Prentice-Hall. Upper Saddle River. New Jersey.

Deo, N. 1990. *Graph Theory With Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice-Hall of India Private Limited. New Delhi.

Harary, F. 1969. *Graph Theory*. Addison Wesley Publishing Company. Menlo Park. California.

Lipschutz, S. and Lipson, M.L, 2002. *Discrete Mathematics 2*. Mcgraw-Hill, Singapore.

Munir, R. 2001. *Buku Teks Ilmu Komputer Matematika Diskrit*. Penerbit Informatika. Bandung.

Sutarno, Heri dkk. 2005. *Matematika Diskrit*. Penerbit Universitas Negeri Malang (UM Press). IKIP Malang.

Suryanto. 1986. *Pengantar Teori Graph*. Penerbit Universitas Terbuka. Jakarta.