PENENTUAN CADANGAN PROSPEKTIF PADA PEMBAYARAN PREMI KONTINU

SKRIPSI

Oleh:
DWI PENI ARIS MADYANSARI
0310940013-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008

PENENTUAN CADANGAN PROSPEKTIF PADA PEMBAYARAN PREMI KONTINU

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh:
DWI PENI ARIS MADYANSARI
0310940013-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

PENENTUAN CADANGAN PROSPEKTIF PADA PEMBAYARAN PREMI KONTINU

Oleh:
DWI PENI ARIS MADYANSARI
0310940013-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 4 Agustus 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Isnani Darti, S.Si, M.Si	**Drs. Imam Nurhadi P, MT**
NIP. 132 300 226	**NIP. 131 837 971**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Dwi Peni Aris Madyansari
NIM : 0310940013-94
Jurusan : Matematika
Penulis Skripsi berjudul : Penentuan Cadangan Prospektif Pada Pembayaran Premi Kontinu

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 4 Agustus 2008
Yang menyatakan,

(Dwi Peni Aris Madyansari)
NIM. 0310940013-94

PENENTUAN CADANGAN PROSPEKTIF PADA PEMBAYARAN PREMI KONTINU

ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas tentang penentuan cadangan prospektif untuk orang berusia *x*, dengan pembayaran premi kontinu. Cadangan prospektif merupakan besar cadangan yang berorientasi pada pengeluaran di waktu yang akan datang. Cadangan prospektif pada tahun $\text{ke}-t_1$ untuk asuransi jiwa diperoleh dengan menentukan ekspektasi dari prospektif *loss* pada tahun $\text{ke}-t_1$. Prospektif *loss* pada tahun $\text{ke}-t_1$ adalah nilai *loss* untuk t_1 tahun yang akan datang dengan $T(x) > t_1$, dimana $T(x)$ adalah *future lifetime*.

Kata kunci: cadangan prospektif, pembayaran premi kontinu, *prospective loss*

DETERMINING PROSPECTIVE RESERVE IN CONTINUOUSLY PAID PREMIUM

ABSTRACT

This research discuss about determining prospective reserve for x years old, with continuously paid premium. Prospective reserve is amount of reserve oriented on future expenses. Prospective reserve for life insurance in $\text{year} - t_1$ is obtained by determining expectation of prospective loss in $\text{year} - t_1$. Prospective loss in $\text{year} - t_1$ is loss value for t_1 year in the future with $T(x) > t_1$, where $T(x)$ is a future lifetime

Keywords : prospective reserve, continuously paid premium, prospective loss

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul "Penentuan Cadangan Prospektif Pada Pembayaran Premi Kontinu" sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains dalam bidang Matematika.

Penulisan skripsi ini juga tidak lepas dari bimbingan dan arahan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada

1. Isnani Darti, S.Si., M.Si dan Imam Nurhadi P.,MT selaku dosen pembimbing I dan II yang telah memberikan arahan, bimbingan, saran, motivasi, serta nasihat selama penulisan skripsi ini.
2. Dra. Endang Wahyu H., M.Si selaku dosen pembimbing akademik
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika dan
4. Dr. Wuryansari Muharini H., M.Si selaku Ketua Program Studi Matematika
5. Bapak, ibu dan adik atas doa, dukungan serta kasih sayang yang diberikan kepada penulis
6. Mbak Lia, Merta, serta seluruh sahabat Matematika 2003 dan teman-teman kos yang memberikan motivasi dan membantu penulis
7. Seluruh staf administrasi jurusan Matematika atas kerjasama yang telah diberikan
8. Semua pihak yang tidak bisa disebutkan satu per satu yang telah banyak membantu penulis dalam proses penyusunan skripsi hingga selesai.

Saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan penulis. Semoga skripsi ini dapat memberikan manfaat bagi penulis dan yang membacanya.

Malang, Agustus 2008

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

(x)	: orang berusia x tahun
$T(x)$	: *future lifetime* dari (x)
${}_tq_x$	: peluang (x) meninggal dalam waktu t tahun
${}_tp_x$	: peluang (x) akan hidup t tahun lagi
$\mu_x(t)$	: percepatan mortalitas (*force of mortality*)
$f_{T(x)}(t)$	: fungsi kepadatan peluang dari $T(x)$
$F_{T(x)}(t)$	: fungsi distribusi komulatif dari $T(x)$
b_t	: fungsi manfaat (*benefit funtion*)
v_t	: fungsi diskon (*discount function*)
δ	: percepatan pembungaan (*force interest*)
Z	: nilai tunai (*present value*)
$\bar{a}_x$	: *Actuarial Present Value* (APV) anuitas seumur hidup
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	: APV anuitas hidup berjangka n tahun
$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{\;\;1}$	: *pure endowment* (dana kehidupan)
$\bar{A}_x$	: APV asuransi seumur hidup
$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{1}$	: APV asuransi berjangka n tahun
$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}$	: APV asuransi *endowment*
L	: *loss*
$\bar{P}(\bar{A}_x)$	: premi bersih asuransi seumur hidup
$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{1})$	: premi bersih asuransi berjangka n tahun
$\bar{P}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})$	: premi bersih asuransi *endowment*
${}_{t_1}\bar{V}(\bar{A}_x)$	: cadangan prospektif untuk asuransi seumur hidup
${}_{t_1}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}^{1})$	: cadangan prospektif untuk asuransi berjangka n tahun
${}_{t_1}\bar{V}(\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert})$	: cadangan prospektif untuk asuransi *endowment*

BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Asuransi jiwa tidak akan lepas dari nilai peluang yang mendasar yaitu mengenai harapan hidup dan peluang kematian. Asuransi jiwa adalah suatu usaha yang menawarkan perlindungan atas hilangnya pendapatan yang akan menghasilkan santunan jika tertanggung mengalami kejadian terdefinisi (hidup, mati) pada waktu penerbitan polis. Polis asuransi menetapkan banyaknya santunan yang akan diterima oleh pemegang polis (tertanggung) dari perusahaan asuransi sebagai penanggung.

Perusahaan asuransi harus bisa memberikan perhitungan yang rasional, transparan, dan akurat dalam mengelola dana asuransi agar tidak ada pihak yang dirugikan sebagai penanggung maupun pemegang polis atau tertanggung. Besarnya santunan yang akan diberikan dihitung berdasarkan prinsip ekivalensi $E(L)=0$, dimana L merupakan nilai *loss* bagi perusahaan asuransi yaitu selisih antara nilai tunai santunan dengan nilai tunai pembayaran premi. Premi kontinu adalah premi yang dalam satu tahun dibayarkan k kali dengan $k \to \infty$, sedangkan premi diskrit adalah premi yang dibayarkan sekali dalam setahun. Nilai *loss* yang diperoleh nantinya digunakan untuk menghitung cadangan. Cadangan yang dimaksud disini bukanlah aset perusahaan (bagian dari kekayaan perusahaaan) melainkan kewajiban perusahaan kepada pemegang polis. Jadi cadangan suatu polis asuransi pada suatu waktu adalah rata-rata bagian pemegang polis dari dana cadangan pada waktu tersebut (Sembiring, 1986).

Di dalam matematika asuransi, secara teoritis metode yang bisa digunakan untuk menghitung cadangan premi adalah metode retrospektif dan metode prospektif. Perhitungan untuk cadangan retrospektif berorientasi pada pengeluaran diwaktu yang lalu sampai saat dilakukan perhitungan cadangan, sedangkan cadangan prospektif berorientasi pada waktu yang akan datang. Cadangan prospektif ditentukan untuk mengetahui besar dana yang harus disediakan perusahaan untuk waktu yang akan datang. Pada pembayaran premi kontinu, cadangan premi dihitung dengan menentukan nilai *loss* terlebih dulu.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang akan dibahas dalam skripsi ini adalah bagaimana menentukan cadangan prospektif menggunakan nilai *loss* pada asuransi dengan pembayaran premi kontinu?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penulisan skripsi ini adalah

1. *loss* bagi perusahaan asuransi adalah peubah acak kontinu
2. premi yang digunakan merupakan premi dengan jumlah konstan
3. cadangan dihitung untuk asuransi seumur hidup, berjangka, dan *endowment*

1.4. Tujuan

Berdasarkan rumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah menentukan cadangan prospektif menggunakan nilai *loss* pada asuransi dengan pembayaran premi kontinu.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Ruang sampel, kejadian

Ruang sampel adalah himpunan semua kemungkinan hasil suatu percobaan, sedangkan kejadian adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel (Walpole, 1995).

2.2. Peluang

Peluang bagi kejadian A adalah peluang semua titik contoh yang menyusun A dan dinotasikan $P(A)$, sedangkan peluang himpunan kosong $(\varnothing)$ adalah nol dan $P(S)$ adalah satu. S merupakan semua kejadian yang mungkin. Bila suatu percobaan mempunyai N hasil percobaan dan bila n diantara hasil percobaan itu menyusun hasil kejadian A, maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = \frac{n}{N} \tag{2.1}$$

(Walpole,1995).

2.3. Ekspektasi (Nilai Harapan)

Nilai harapan adalah jumlah seluruh hasil kali peluang dengan nilai yang diperolehnya (Sembiring, 1986). Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ maka nilai harapan X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \tag{2.2}$$

(Rukmigarsari, 2005).

2.4. *Future Lifetime*

Misal seseorang berusia x tahun disimbolkan dengan (x) dan X adalah peubah acak kontinu yang menyatakan usia (x) saat meninggal, maka *future lifetime* dari (x), $T(x)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$T(x) = X - x \tag{2.3}$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.5. Peluang Hidup

Misalkan $T(x)$ adalah peubah acak kontinu dengan fungsi distribusi peluang

$${}_t q_x = P\left(T(x) \le t\right),\ t \ge 0 \tag{2.4}$$

$${}_t p_x = 1 - {}_t q_x = P\left(T(x) > t\right),\ t \ge 0 \tag{2.5}$$

dengan ${}_t q_x$ adalah peluang (x) meninggal dalam waktu t tahun dan ${}_t p_x$ adalah peluang (x) akan hidup t tahun lagi (Bowers, dkk., 1997). Misalkan l_x adalah jumlah orang yang hidup pada usia x tahun, maka peluang (x) mencapai usia $x+t$ tahun adalah

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}, \tag{2.6}$$

dimana l_{x+t} adalah jumlah orang yang berusia $x+t$ tahun (Futami, 1993).

2.6. Percepatan Mortalitas (*force of mortality*)

Pada tabel mortalitas, jumlah orang berusia x tahun, l_x hanya menggambarkan keadaan untuk x bilangan bulat. Pada kenyataannya, misalnya $[0,\omega]$ dimungkinkan dilakukan fungsi diferensiasi dan x tidak harus bilangan bulat. Jumlah orang yang meninggal pada usia $x+\Delta t$ tahun adalah $l_x - l_{x+\Delta t}$, sehingga tingkat mortalitas selama satu tahun setiap selang waktu Δt dinyatakan sebagai

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{l_x \cdot \Delta t}. \tag{2.7}$$

Jika $\Delta t \to 0$, disebut percepatan mortalitas (*force of mortality*) dan dinotasikan $\mu_x(t)$ yang didefinisikan oleh

$$\mu_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{l_x - l_{x+\Delta t}}{l_x \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-1}{l_x}\left[\frac{l_{x+\Delta t} - l_x}{\Delta t}\right] = -\frac{1}{l_x}\frac{d}{dt}(l_x) \tag{2.8}$$

dimana $\mu_x(t)$ menyatakan tingkat penurunan jumlah orang yang berusia x tahun (l_x) selama satu tahun (Futami, 1993).

2.7. Fungsi Kepadatan Peluang Dari $T(x)$

Fungsi kepadatan peluang adalah suatu fungsi yang mendefinisikan peubah acak. Misalkan $T(x)$ adalah suatu peubah acak kontinu. Fungsi F dari himpunan bilangan real R kedalam selang tertutup $[0,1]$ yang didefinisikan oleh : $F_{T(x)}(t) = P(T(x) \leq t)$ untuk setiap t di R adalah fungsi distribusi komulatif dari $T(x)$. Jika $f_{T(x)}(t)$ adalah fungsi kepadatan peluang dari $T(x)$, maka fungsi distribusi komulatif $T(x)$ adalah

$$F_{T(x)}(t) = \int_0^t f_{T(x)}(t)\,dt \tag{2.9}$$

(Rukmigarsari, 2005).

Dari persamaan (2.4) diketahui bahwa $F_{T(x)}(t) = {}_tq_x$ dan berdasarkan persamaan (2.9), maka fungsi kepadatan peluang dari $T(x)$ adalah

$$\begin{aligned} f_{T(x)}(t) &= \frac{d}{dt}\left(F_{T(x)}(t)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left({}_tq_x\right) = \frac{d}{dt}\left[1 - {}_tp_x\right] = 0 - \frac{d}{dt}\left[{}_tp_x\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[-{}_tp_x\right] = \frac{d}{dt}\left[-\frac{l_{x+t}}{l_x}\right] \\ &= -\frac{l_x\left(\frac{d}{dt}(l_{x+t})\right)}{l_x^2} = \frac{-\frac{d}{dt}(l_{x+t})}{l_x}\frac{l_{x+t}}{l_{x+t}} \end{aligned}$$

$$f_{T(x)}(t)=\frac{l_{x+t}}{l_x}\left[\frac{-\frac{d}{dt}l_{x+t}}{l_{x+t}}\right]={}_t p_x\ \mu_{x+t}(t),\ t\geq 0 \quad (2.10)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.8. Percepatan Pembungaan (*force interest*)

Misalkan i adalah tingkat bunga dan $v=\frac{1}{1+i}$ adalah faktor diskon. Percepatan pembungaan, δ didefinisikan sebagai $v=e^{-\delta}$, sehingga diperoleh

$$\delta=-\ln v \quad (2.11)$$

(Futami, 1993).

2.9. *Actuarial Present Value*

Misalkan b_t adalah fungsi manfaat (*benefit funtion*), v_t adalah fungsi diskon (*discount function*) dan t adalah waktu. Didefinisikan nilai tunai sebagai

$$z_t=b_t\ v_t \quad (2.12)$$

dimana z_t adalah nilai tunai dari pembayaran santunan. Waktu mulai penerbitan polis sampai kematian peserta asuransi adalah peubah acak kontinu $T(x)=t=T$, sehingga nilai tunai dari pembayaran santunan merupakan peubah acak kontinu $z_t=Z$. Dari persamaan (2.12) didapatkan

$$Z=z_T=b_T\ v_T.$$

Ekspektasi dari peubah acak kontinu Z adalah *Actuarial Present Value* (APV), sehingga

$$APV=E(Z) \quad (2.13)$$

karena Z adalah fungsi dari $T(x)$. Persamaan (2.12) dapat dinyatakan sebagai

$$APV=E(Z)=\int_0^\infty z_T\ f_{T(x)}(t)\ dt \quad (2.14)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.10. Anuitas hidup

Anuitas adalah suatu pembayaran dalam jumlah tertentu, yang dilakukan setiap selang waktu dan lama waktu tertentu, secara berkelanjutan (Futami, 1993). Sementara itu menurut Bowers dkk (1997), anuitas hidup adalah suatu deretan pembayaran yang dilakukan secara kontinu atau setiap interval tertentu (misalkan bulanan, empat bulanan, tahunan) selama yang bersangkutan masih hidup. Deretan pembayaran ini dapat dilakukan secara berjangka, yaitu terbatas pada jangka waktu yang diberikan, atau dibayarkan seumur hidup.

2.10.1. Anuitas Seumur Hidup

Anuitas seumur hidup adalah anuitas yang pembayarannya dilakukan selama yang bersangkutan masih hidup, dinotasikan dengan $\bar{a}_x$ (Futami, 1993).

Misalkan nilai tunai, Z, dari anuitas hidup yang dibayarkan secara kontinu sebesar 1 setiap tahun adalah

$$Z = 1 \cdot \bar{a}_{\overline{T|}} = \frac{1-v^T}{\delta} \qquad ,T \geq 0\,,$$

dimana $\bar{a}_x$ adalah *actuarial present value* dari anuitas seumur hidup kontinu yang pembayarannya berhenti pada saat kematian (x). *Actuarial present value* dari anuitas seumur hidup kontinu dinyatakan oleh

$$\bar{a}_x = E[Z] = \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T|}}\, f_T(t)\,dt = \lim_{e\to\infty}\int_0^e \bar{a}_{\overline{T|}}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)\,dt$$

$$\bar{a}_x = \lim_{e\to\infty}\int_0^e \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)\,dt\,. \tag{2.15}$$

Misalkan $g(t) = \dfrac{1-v^t}{\delta}$ dan $dh(t) = {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)\,dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{-v^t \ln v}{\delta} = \dfrac{(-\ln v)v^t}{\delta} = \dfrac{\delta v^t}{\delta} = v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t) = -{}_t p_x$.

Dengan melakukan integral parsial pada persamaan (2.15) diperoleh

$$\bar{a}_x = \lim_{e\to\infty}\left[\left(\frac{1-v^t}{\delta}\left(-{}_t p_x\right)\right)_0^e - \int_0^e v^t \cdot \left(-{}_t p_x\right)dt\right]$$

$$= \lim_{e\to\infty}\left[\frac{1-v^e}{\delta}\left(-{}_e p_x\right) + \frac{1-v^0}{\delta}\left({}_0 p_x\right)\right] + \int_0^\infty v^t \cdot \left({}_t p_x\right)dt$$

$$= \left[\frac{1-v^\infty}{\delta}\left(-{}_\infty p_x\right) + 0\right] + \int_0^\infty v^t \cdot \left({}_t p_x\right)dt$$

$$= \int_0^\infty v^t \cdot {}_t p_x dt$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.10.2. Anuitas Hidup Berjangka

Anuitas hidup berjangka adalah suatu anuitas hidup dimana pembayarannya pada suatu jangka waktu tertentu (Futami, 1993). Misalkan nilai tunai (Z) dari anuitas hidup berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun yang dibayarkan secara kontinu sebesar 1 setiap tahun adalah

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} = \dfrac{1-v^T}{\delta}, & 0 \le T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} = \dfrac{1-v^n}{\delta}, & T \ge n \end{cases},$$

dan $\bar{a}_{x:\overline{n|}}$ adalah APV dari anuitas hidup kontinu yang berjangka selama n tahun. APV dari anuitas hidup kontinu yang berjangka n tahun dinyatakan dengan

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = E(Z) = \int_0^n \bar{a}_{\overline{T|}}\, {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n|}}\, {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)dt$$

$$\bar{a}_{x:\overline{n|}} = \int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\, {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)dt + \lim_{e\to\infty}\int_n^e \frac{1-v^n}{\delta}\, {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt. \qquad (2.16)$$

Misalkan $g(t)=\dfrac{1-v^t}{\delta}$ dan $dh(t)={}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\dfrac{dg}{dt}=\dfrac{-v^t\ln v}{\delta}=\dfrac{(-\ln v)v^t}{\delta}=\dfrac{\delta v^t}{\delta}=v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t)=-{}_tp_x$.

Dengan melakukan integral parsial pada persamaaan (2.16) diperoleh

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|}=\left[\frac{1-v^t}{\delta}(-{}_tp_x)\right]_0^n-\int_0^n v^t(-{}_tp_x)dt+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e {}_tp_x\mu_{x+t}(t)dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}(-{}_np_x)+\frac{1-v^0}{\delta}(-{}_tp_x)+\int_0^n v^t\,{}_tp_xdt+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e d(-{}_tp_x)$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}(-{}_np_x)+0+\int_0^n v^t\,{}_tp_xdt+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left(-{}_tp_x\right]_n^e\Big)$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}(-{}_np_x)+0+\int_0^n v^t\,{}_tp_xdt+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}({}_np_x-{}_ep_x)$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}(-{}_np_x)+\int_0^n v^t\,{}_tp_xdt+\frac{1-v^n}{\delta}({}_np_x-{}_\infty p_x)$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}(-{}_np_x)+\int_0^n v^t\,{}_tp_xdt+\frac{1-v^n}{\delta}({}_np_x-0)$$

$$=\int_0^n v^t\,{}_tp_xdt$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.11. *Pure Endowment* (Dana Kehidupan)

Pure endowment adalah suatu pembayaran dimana pembayaran akan dilakukan n tahun mendatang jika yang bersangkutan masih hidup (Sembiring, 1986). Jika pembayarannya sebesar 1 bagi orang berusia x tahun dengan fungsi manfaat (b_t)

sebesar $b_t = \begin{cases} 0 & ,t \le n \\ 1 & ,t > n \end{cases}$ dan fungsi diskon sebesar $v_t = v^n$, maka nilai tunai *pure endowment* adalah sebesar

$$Z = \begin{cases} 0 & ,T \le n \\ v^n & ,T > n \end{cases}$$

Pada ekspresi $Z = v^n {}_n p_x$, ${}_n p_x$ menunjukkan peluang (x) mencapai usia $x+n$ tahun. ${}_n p_x$ mempunyai nilai 1 jika tertanggung mencapai usia $x+n$ tahun dan bernilai nol untuk yang lain (Bowers, dkk., 1997). jika tertanggung tidak mencapai usia $x+n$ tahun , ${}_n p_x$ bernilai nol karena pada *pure endowment* pembayaran hanya akan dilakukan jika tertanggung mencapai usia $x+n$ tahun. *Actuarial present value* dari *pure endowment n* tahun untuk orang berusia *x* tahun dinotasikan dengan $\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\;\;1}$, ada juga yang menotasikan dengan ${}_n E_x$ (Futami, 1993). *Actuarial present value* dari *pure endowment n* tahun untuk orang berusia *x* tahun adalah

$$\bar{A}_{x:\overline{n|}}^{\;\;1} = E[Z] = v^n {}_n p_x \qquad (2.17)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.12. Asuransi Jiwa

Asuransi jiwa adalah usaha kerja sama dari sejumlah orang yang sepakat menanggung kesulitan keuangan bila terjadi musibah terhadap salah seorang anggotanya. Perusahaan yang besar dengan pemegang saham yang banyak akan mudah mengatasi santunan asuransi dari anggota yang tertimpa musibah. Dengan administrasi yang efisien dan investasi dana yang aman dengan tingkat bunga yang wajar, perusahaan asuransi akan berkembang dengan sehat dan merupakan usaha pengumpulan modal yang amat penting (Sembiring, 1986).

2.12.1. Asuransi Seumur Hidup

Asuransi seumur hidup adalah asuransi yang santunannya akan dibayarkan sewaktu-waktu bila kematian terjadi (Sembiring, 1986). Jika pembayarannya sebesar 1 bagi orang berusia *x* tahun dengan fungsi manfaat (b_t) sebesar $b_t = 1,\ t \ge 0$ dan fungsi diskon sebesar $v_t = v^t$, maka nilai tunai asuransi seumur hidup adalah sebesar

$$Z = v^t \qquad ,T \ge 0 .$$

Actuarial present value untuk asuransi seumur hidup dinotasikan dengan $\bar{A}_x$

$$\bar{A}_x = E[Z] = \int_0^\infty z_T\, f_{T(x)}(t)\,dt = \int_0^\infty v^t\ {}_t p_x \mu_{x+t}(t)\,dt \qquad (2.18)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.12.2. Asuransi Berjangka *n* Tahun

Asuransi berjangka merupakan bentuk asuransi yang paling sederhana. Pada polis asuransi berjangka ini uang pertanggungan akan dibayarkan bila si tertanggung mati dalam jangka waktu asuransi. Akan tetapi bila jangka waktu sudah habis, si tertanggung tidak mendapatkan apapun dari perusahaan asuransi (Sembiring, 1986). Jika pembayarannya sebesar 1 bagi orang berusia x tahun dengan fungsi manfaat (b_t) sebesar $b_t = \begin{cases} 1 & ,t \le n \\ 0 & ,t > n \end{cases}$ dan fungsi diskon sebesar $v_t = v^t$, maka nilai tunai asuransi berjangka n tahun adalah

$$Z = \begin{cases} v^T & ,T \le 0 \\ 0 & ,T > 0 \end{cases} .$$

Actuarial present value untuk asuransi berjangka n tahun dinotasikan dengan $\bar{A}^1_{x:\overline{n|}}$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = E[Z] = E[z_T]$$

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n|}} = \int_0^n z_T\, f_{T(x)}(t)\,dt = \int_0^n v^t\ {}_t p_x \mu_x(t)\,dt \qquad (2.19)$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.12.3. Asuransi *Endowment*

Asuransi *endowment* adalah gabungan dari asuransi berjangka dan dana kehidupan (*pure endowment*) sehingga meskipun sudah habis jangka waktu asuransi, pemegang polis tetap mendapatkan uang santunan (Sembiring, 1986). Jika pembayarannya sebesar 1 bagi orang berusia x tahun dengan fungsi manfaat (b_t) sebesar $b_t = 1 \quad ,t \geq 0$ dan fungsi diskon sebesar $v_t \begin{cases} v^t & ,t \leq n \\ v^n & ,t > n \end{cases}$, maka nilai tunai asuransi *endowment* n tahun adalah

$$Z = \begin{cases} v^t & ,T \leq n \\ v^n & ,T > n \end{cases}.$$

Actuarial present value untuk asuransi *endowment* n tahun dinotasikan dengan $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$.

Misalkan Z_1, Z_2, Z_3 berturut-turut menunjukkan peubah acak nilai tunai dari asuransi berjangka, *pure endowment* dan asuransi *endowment*, maka

$$Z_1 = \begin{cases} v^T & ,T \leq n \\ 0 & ,T > n \end{cases}$$

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & ,T \leq n \\ v^n & ,T > n \end{cases}$$

$$Z_3 = \begin{cases} v^T & ,T \leq n \\ v^n & ,T > n \end{cases}.$$

Oleh karena itu diperoleh

$$Z_3 = Z_1 + Z_2,$$

actuarial present value asuransi *endowment* n tahun adalah

$$E[Z_3] = E[Z_1] + E[Z_2]$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n z_T f_{T(x)}(t)\,dt + v^n \, {}_n p_x$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + \bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\;\;1} \tag{2.20}$$

(Bowers, dkk., 1997).

2.13. *Loss*

Loss bagi penanggung (perusahaan asuransi) merupakan selisih antara nilai tunai santunan dengan nilai tunai pembayaran premi (Gerber, 1997).

1. $L > 0$ jika nilai tunai santunan lebih besar dari nilai tunai pembayaran premi
2. $L = 0$ jika nilai tunai santunan sama dengan nilai tunai pembayaran premi
3. $L < 0$ jika nilai tunai santunan lebih kecil dari nilai tunai pembayaran premi

Prospective loss adalah nilai *loss* pada tahun yang akan datang. Nilai *prospective loss* pada tahun ke-t_1 adalah nilai tunai santunan pada t_1 tahun yang akan datang dikurangi dengan nilai tunai pembyaran premi pada t_1 tahun yang akan datang (Bowers, dkk., 1997).

2.14. Premi bersih

Suatu premi dikatakan premi bersih (*net premium*) jika memenuhi prinsip ekivalensi yaitu $E(L)=0$, yang berarti nilai harapan dari total *loss* (bagi perusahaan asuransi) adalah nol. Dengan kata lain, nilai harapan dari nilai tunai santunan masa depan (oleh perusahaan asuransi) sama dengan nilai harapan dari nilai tunai pembayaran premi (oleh tertanggung). Premi bersih dinotasikan dengan $\bar{P}$ (Gerber, 1997).

2.15. Cadangan Prospektif

Cadangan secara teori adalah besarnya uang yang ada pada perusahaan dalam jangka waktu pertanggungan. Cadangan prospektif adalah besar cadangan yang berorientasi pada pengeluaran di waktu yang akan datang. Dengan pengertian lain perhitungan cadangan didasarkan pada nilai sekarang dari pengeluaran di waktu yang akan datang dikurangi dengan nilai sekarang pendapatan di waktu yang akan datang, untuk tiap pemegang polis (Futami, 1993).

Di dalam simbol matematika, pernyataan ini dapat ditulis sebagai berikut.

$$ {}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)=\bar{A}_{x+t}-P\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t} \tag{2.21}$$

dimana

${}_t\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)$: cadangan akhir asuransi pada akhir tahun ke-t

$\bar{A}_{x+t}$: santunan yang akan datang pada usia $\left(x+t\right)$ tahun

$\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t}$: nilai tunai pada usia $\left(x+t\right)$ tahun sisa premi mendatang

(Bowers, dkk., 1997).

BAB III
PEMBAHASAN

3.1. Nilai *Loss* Untuk Beberapa Jenis Asuransi

3.1.1. Asuransi Seumur Hidup

Asuransi seumur hidup bagi orang berusia x dengan fungsi manfaat (b_t) sebesar 1 dan fungsi diskon (v_t) sebesar v^t nilai tunai santunannya dinyatakan sebagai

$$Z = b_t . v_v = 1 . v^t = v^t \, . \tag{3.1}$$

Pembayaran premi asuransi biasanya berupa anuitas. Anuitas seumur hidup yang dibayarkan secara kontinu sebesar 1 tiap tahun bagi orang berusia x, mempunyai nilai tunai sebesar

$$Z = 1 \cdot \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - v^T}{\delta} \qquad , T \geq 0 \, . \tag{3.2}$$

Nilai *loss* (L) untuk asuransi seumur hidup adalah nilai tunai santunan untuk asuransi seumur hidup dikurangi dengan nilai tunai pembayaran preminya. Nilai *loss* untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia x tahun, (x) adalah

$$L = v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right) \bar{a}_{\overline{T}|} \, , \tag{3.3}$$

dimana $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ adalah nilai premi bersih untuk asuransi seumur hidup.

3.1.2. Asuransi Berjangka *n* Tahun

Nilai tunai untuk asuransi berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) yang mempunyai fungsi manfaat $b_t = \begin{cases} 1 & , t \leq 0 \\ 0 & , t > 0 \end{cases}$ dan fungsi diskon (v_t) sebesar v^t diberikan oleh

$$Z = b_t \cdot v_t = \begin{cases} v^t & , t \leq 0 \\ 0 & , t > 0 \end{cases} . \tag{3.4}$$

Pembayaran premi asuransi berjangka n tahun berupa anuitas hidup berjangka n tahun. Anuitas hidup berjangka n tahun yang dibayarkan sebesar 1 tiap tahun mempunyai nilai tunai

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} = \dfrac{1-v^T}{\delta} & ,T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} = \dfrac{1-v^n}{\delta} & ,T \geq n \end{cases} , \tag{3.5}$$

sehingga nilai *loss*, (L) untuk asuransi berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah sebesar

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{T|}} & ,T < n \\ 0 - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{n|}} & ,T \geq n \ . \end{cases} \tag{3.6}$$

Nilai *loss* (L) untuk asuransi berjangka n tahun adalah nilai tunai santunan untuk asuransi berjangka n tahun dikurangi dengan nilai tunai pembayaran preminya. $\bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$ adalah nilai premi bersih untuk asuransi berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun.

3.1.3. Asuransi *Endowment*

Asuransi *endowment* merupakan gabungan antara *pure endowment* (dana kehidupan) dan asuransi berjangka. Asuransi *endowment* n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) mempunyai fungsi manfaat (b_t) sebesar 1, $t \geq 0$ dan fungsi diskon $v_t = \begin{cases} v^t & ,t \leq n \\ v^n & ,t > n \end{cases}$, sehingga nilai tunai santunannya sebesar

$$Z = \begin{cases} v^T & ,T \leq n \\ v^n & ,T > n \ . \end{cases} \tag{3.7}$$

Pembayaran premi asuransi berjangka berupa anuitas hidup berjangka. Anuitas hidup berjangka n tahun yang dibayarkan sebesar 1 tiap tahun mempunyai nilai tunai sebesar

$$Z = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T|}} = \dfrac{1-v^T}{\delta} & ,T < n \\ \bar{a}_{\overline{n|}} = \dfrac{1-v^n}{\delta} & ,T \geq n \end{cases}. \tag{3.8}$$

Dengan demikian diperoleh nilai *loss* untuk asuransi *endowment n* tahun bagi orang berusia x tahun sebesar

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{T|}} & ,T < n \\ v^n - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)\bar{a}_{\overline{n|}} & ,T \geq n \end{cases}. \tag{3.9}$$

Nilai *loss* (L) untuk asuransi *endowment n* tahun adalah nilai tunai santunan untuk asuransi *endowment n* tahun dikurangi dengan nilai tunai pembayaran preminya. $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n|}}\right)$ adalah nilai premi bersih untuk asuransi *endowment n* tahun bagi orang berusia x tahun.

3.2. Menentukan Nilai Premi Bersih

Premi bersih dihitung berdasarkan prinsip ekivalensi yaitu ekspektasi dari nilai *loss* sebesar nol atau $E(L) = 0$

3.2.1. Asuransi Seumur Hidup

Nilai *loss* untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia x tahun, (x) berdasarkan persamaan (3.3) adalah sebesar

$$L = v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T|}},$$

sehingga nilai harapan dari *loss* untuk asuransi seumur hidup adalah

$$E[L] = E\left[v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T|}}\right]$$

$$= E\left[v^t\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)E\left[\bar{a}_{\overline{T|}}\right].$$

$E\left[v^t\right] = \int_0^\infty v^t \, f_{T(x)}(t)dt$, dari persamaan (2.18) diperoleh

$$= \int_0^\infty v^t \; {}_tp_x \; \mu_{x+t}(t)\, dt = \bar{A}_x.$$

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]=\int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T}|}\, f_{T(x)}(t)dt$$

$$=\lim_{e\to\infty}\int_0^e \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt\ . \qquad (3.10)$$

Misalkan: $g(t)=\dfrac{1-v^t}{\delta}$ dan $dh(t)={}_t p_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\dfrac{dg}{dt}=\dfrac{-v^t\ln v}{\delta}=\dfrac{\delta v^t}{\delta}=v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t)=-{}_t p_x$.

Dengan melakukan integral parsial pada persamaan (3.10) diperoleh

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]=\lim_{e\to\infty}\left[\left(\frac{1-v^t}{\delta}(-{}_t p_x)\right)_0^e-\int_0^e v^t(-{}_t p_x)dt\right]$$

$$=\lim_{e\to\infty}\left[\frac{1-v^e}{\delta}(-{}_e p_x)+\frac{1-v^0}{\delta}({}_0 p_x)\right]+\int_0^\infty v^t({}_t p_x)dt$$

$$=\left[\frac{1-v^\infty}{\delta}(-{}_\infty p_x)+0\right]+\int_0^\infty v^t({}_t p_x)dt$$

$$=\int_0^\infty v^t({}_t p_x)dt$$

$$=\bar{a}_x\ .$$

Oleh karena itu,

$$E[L]=E\left[v^t-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T}|}\right]$$

$$=E\left[v^t\right]-\bar{P}(\bar{A}_x)E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\right]$$

$$=\bar{A}_x-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x\ .$$

Berdasarkan prinsip ekivalensi yaitu

$$E[L]=0$$

$$\bar{A}_x-\bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_x=0,$$

maka besarnya nilai premi untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia x tahun, (x) adalah $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)=\dfrac{\bar{A}_x}{\bar{a}_x}$. (3.11)

3.2.2. Asuransi Berjangka *n* Tahun

Berdasarkan persamaan (3.6) nilai harapandari *loss* untuk asuransi berjangka n tahun adalah

$$E[L]=\begin{cases} E\left[v^t-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{T}|}\right] & ,T<n \\ E\left[0-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{n}|}\right] & ,T\geq n \end{cases}$$

$$=E\left[v^t \middle| t<n\right]-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\middle|T<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\middle|T\geq n\right]\right).$$

$E\left[v^t \middle| t\leq n\right]=\int_0^n v^t\, f_{T(x)}(t)\; dt$ dari persamaan (2.19) diperoleh

$$=\int_0^n v^t\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt=\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}.$$

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\middle|T<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\middle|T\geq n\right]$$

$$=\int_0^n \bar{a}_{\overline{T}|}\ f_T(t)\ dt+\int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\ f_T(t)\ dt$$

$$=\int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt+\int_n^\infty \frac{1-v^n}{\delta}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)dt$$

$$=\int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt+\lim_{e\to\infty}\int_n^\infty \frac{1-v^n}{\delta}\ {}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)dt. \quad (3.12)$$

Misalkan $g(t)=\dfrac{1-v^t}{\delta}$ dan $dh(t)={}_tp_x\ \mu_{x+t}(t)\ dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\dfrac{dg}{dt}=\dfrac{-v^t\ln v}{\delta}=\dfrac{\delta v^t}{\delta}=v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t) = -{}_t p_x$. Dilakukan integral parsial pada persamaan (3.12), maka

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T|}} \middle| T < n\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{n|}} \middle| T \geq n\right]$$
$$= \left[\frac{1-v^t}{\delta}\left(-{}_t p_x\right)\right]_0^n - \int_0^n v^t\left(-{}_t p_x\right)\, dt + \frac{1-v^t}{\delta} \lim_{e\to\infty} \int_n^e {}_t p_x \ \mu_{x+t}(\mathrm{t})\ dt$$
$$= \frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_x\right) + \frac{1-v^0}{\delta}\left(-{}_t p_x\right) + \frac{1-v^t}{\delta} \lim_{e\to\infty} \int_n^e d\left(-{}_t p_x\right) + \int_0^n v^t\ {}_t p_x\ dt$$
$$= \frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_x\right) + 0 + \frac{1-v^t}{\delta} \lim_{e\to\infty}\left(-{}_t p_x\right]_n^e\Big) + \int_0^n v^t\ {}_t p_x\ dt$$
$$= \frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_x\right) + \left({}_n p_x - {}_\infty p_x\right) + \int_0^n v^t\ {}_t p_x\ dt$$
$$= \int_0^n v^t\ {}_t p_x\ dt$$
$$= \bar{a}_{\overline{x:n|}} \quad ,$$

sehingga

$$E[L] = E\left[v^t - \bar{P}\left(\bar{A}^1_{\overline{x:n|}}\right)\left(\bar{a}_{\overline{T|}} + \bar{a}_{\overline{n|}}\right)\right] \qquad ,t \leq n$$
$$= E\left[v^t \middle| t \leq n\right] - \bar{P}\left(\bar{A}^1_{\overline{x:n|}}\right) E\left[\bar{a}_{\overline{T|}} + \bar{a}_{\overline{n|}}\right] \qquad ,t \leq n$$
$$= \bar{A}^1_{\overline{x:n|}} - \bar{P}\left(\bar{A}^1_{\overline{x:n|}}\right)\bar{a}_{\overline{x:n|}}.$$

Berdasarkan prinsip ekivalensi yaitu

$$E[L] = 0,$$

maka $\bar{A}^1_{\overline{x:n|}} - \bar{P}\left(\bar{A}^1_{\overline{x:n|}}\right)\bar{a}_{\overline{x:n|}} = 0$

Besarnya nilai premi untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia x tahun, (x) adalah $\bar{P}\left(\bar{A}^1_{\overline{x:n|}}\right) = \dfrac{\bar{A}^1_{\overline{x:n|}}}{\bar{a}_{\overline{x:n|}}}$. (3.13)

3.2.3. Asuransi *Endowment*

Pada asuransi *endowment,* nilai harapan dari *loss* berdasarkan persamaan (3.9) adalah sebesar

$$E(L)=\begin{cases} E\left[v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{T}|}\,|T<n\right] \\ E\left[v^n - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{n}|}\,|T\geq n\right] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E[L] &= \left(E\left[v^t\,|T<n\right]+E\left[v^n\,|T\geq n\right]\right)- \\ &\quad \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\,|T<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\,|T\geq n\right]\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E\left[v^t\,|T<n\right]+E\left[v^n\,|T\geq n\right] &= \int_0^n v^t\, f_{T(x)}(t)\,dt+\int_n^\infty v^n\, f_{T(x)}(t)\,dt \\ &= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt+\int_n^\infty v^n\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt \\ &= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt+\left(\int_n^0 v^n\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt+\int_0^\infty v^n\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt\right) \\ &= \int_0^n v^t\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt+\left(\int_0^\infty v^n\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt-\int_0^n v^n\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt\right) \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+v^n\left(\int_0^\infty {}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt-\int_0^n {}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt\right) \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+v^n\left(\left[-{}_tp_x\right]_0^\infty-\left[-{}_tp_x\right]_0^n\right) \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+v^n\left(\left[-{}_\infty p_x+{}_0p_x\right]-\left[-{}_np_x+{}_0p_x\right]\right) \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+v^n\left(-{}_\infty p_x+{}_0p_x+{}_np_x-{}_0p_x\right) \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+v^n\left({}_np_x\right) \\ &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|}+\bar{A}_{x:\overline{n}|}^{\ \ 1} \\ &= \bar{A}_{x:\overline{n}|}. \end{aligned}$$

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\middle|T<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\middle|T\geq n\right]=\int_0^n \bar{a}_{\overline{T}|}\, f_{T(x)}(t)\,dt+\int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\, f_{T(x)}(t)\,dt$$

$$=\int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt+\int_n^\infty \frac{1-v^n}{\delta}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)dt$$

$$=\int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt+\lim_{e\to\infty}\int_n^e \frac{1-v^n}{\delta}\,{}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)dt\,. \qquad (3.14)$$

Dimisalkan $g(t)=\frac{1-v^t}{\delta}$ dan $dh(t)={}_tp_x\,\mu_{x+t}(t)\,dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\frac{dg}{dt}=\frac{-v^t\ln v}{\delta}=\frac{\delta v^t}{\delta}=v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t)=-{}_tp_x$.

Dengan melakukan integral parsial pada persamaan (3.14) diperoleh

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\middle|T<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\middle|T\geq n\right]$$

$$=\left[\frac{1-v^t}{\delta}\left(-{}_tp_x\right)\right]_0^n-\int_0^n v^t\left(-{}_tp_x\right)dt+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e {}_tp_x\,\mu_{x+t}(\mathrm{t})\,dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_np_x\right)+\frac{1-v^0}{\delta}\left(-{}_0p_x\right)+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e d\left(-{}_tp_x\right)+\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_np_x\right)+0+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left(-{}_tp_x\right]_n^e\Big)+\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_np_x\right)+0+\frac{1-v^n}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left({}_np_x-{}_ep_x\right)+\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_np_x\right)+\frac{1-v^n}{\delta}\left({}_np_x-{}_\infty p_x\right)+\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_np_x\right)+\frac{1-v^n}{\delta}\left({}_np_x-0\right)+\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt$$

$$=\int_0^n v^t\,{}_tp_x\,dt=\bar{a}_{x:\overline{n}|}\,,$$

maka

$$E[L]=E\left[v^t \middle| t<n\right]+E\left[v^n \middle| t\ge n\right]-$$

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T}|} \middle| t<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| t\ge n\right]\right)$$

$$=\bar{A}_{x:\overline{n}|}-\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Berdasarkan prinsip ekivalensi

$$E[L]=0,$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}-\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|}=0$$

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|}=\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x:\overline{n}|}.$$

Jadi besarnya nilai premi untuk asuransi *endowment* n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)=\dfrac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\bar{a}_{x:\overline{n}|}}$. (3.15)

3.3. *Prospective Loss* Untuk Menentukan Nilai Cadangan

3.3.1. Asuransi Seumur Hidup

Cadangan prospektif untuk asuransi seumur hidup dengan pembayaran premi kontinu sebesar $\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)$ bagi orang berusia x tahun, (x) yang hidup sampai t_1 tahun lagi didefinisikan sebagai nilai harapan dari *prospective loss* pada waktu t_1.

Untuk $T(x)>t_1$, *prospective loss* pada t_1 tahun yang akan datang untuk asuransi seumur hidup adalah sebesar

$${}_{t_1}L=v^{T(x)-t_1}-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \tag{3.16}$$

Cadangan prospektif sebagai nilai harapan dihitung menggunakan fungsi distribusi komulatif dari *future lifetime* pada waktu t_1 untuk (x) yang mencapai usia t_1 tahun lagi. Nilai cadangan propektif pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia x tahun , (x) adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_x\right) &= E\left[{}_{t_1}L \middle| T(x) > t_1\right] \\
&= E\left[v^{T(x)-t_1} - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| T(x) > t_1\right] \\
&= E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| T(x) > t_1\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| T(x) > t_1\right].
\end{aligned}
$$

Jika $T(x) - t_1 = T(x + t_1)$, maka

$$
\begin{aligned}
E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| T(x) > t_1\right] &= E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| \left(T(x) - t_1\right) > 0\right] \\
&= \int_0^\infty v^{T(x)-t_1} f_{T(x)-t_1}\ dt = \int_0^\infty v^t\ {}_t p_{x+t_1}\ \mu_{x+t}\left(t + t_1\right)\ dt \\
&= \bar{A}_{x+t_1}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| T(x) > t\right] &= E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| \left(T(x) - t_1\right) > 0\right] \\
&= \int_0^\infty \bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}}\ f_{T(x)-t_1}(t)\,dt \\
&= \lim_{e\to\infty}\int_0^e \bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}}\ {}_t p_{x+t_1}\ \mu_{x+t}\left(t + t_1\right)dt \\
&= \lim_{e\to\infty}\int_0^e \frac{1-v^t}{\delta}\ {}_t p_{x+t}\ \mu_{x+t}\left(t + t_1\right)dt \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

Dengan memisalkan : $g(t) = \dfrac{1-v^t}{\delta}$, $dh(t) = {}_t p_{x+t_1} \cdot \mu_{x+t}\left(t + t_1\right)dt$,

dari persamaan (2.11) diperoleh $\dfrac{dg}{dt} = \dfrac{-v^t \ln v}{\delta} = \dfrac{\delta v^t}{\delta} = v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t) = -{}_t p_{x+t_1}$.

Dilakukan integral parsial pada persamaan (3.17) diperoleh

$$
E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| T(x) > t_1\right] = E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| \left(T(x) - t_1\right) > 0\right]
$$

$$= \lim_{e\to\infty}\left[\left(\frac{1-v^t}{\delta}\left({}_t p_{x+t_1}\right)\right)_0^e - \int_0^e v^t \left(-{}_t p_{x+t_1}\right) dt\right]$$

$$= \lim_{e\to\infty}\left[\frac{1-v^e}{\delta}\left(-{}_e p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^0}{\delta}\left({}_0 p_{x+t_1}\right)\right]+\int_0^\infty v^t \left({}_t p_{x+t_1}\right) dt$$

$$=\left[\frac{1-v^\infty}{\delta}\left(-{}_\infty p_{x+t_1}\right)+0\right]+\int_0^\infty v^t \left({}_t p_{x+t_1}\right) dt$$

$$=\int_0^\infty v^t \; {}_t p_{x+t_1} \; dt$$

$$=\bar{a}_{x+t_1} \quad .$$

Nilai cadangan prospektif pada tahun ke $-t_1$ untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia *x* tahun , (x) adalah sebesar

$$_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)=E\left[{}_{t_1}L \middle| T(x)>t_1\right]$$

$$=E\left[v^{T(x)-t_1}-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| T(x)>t_1\right]$$

$$_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)=E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| T(x)>t_1\right]-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| T(x)>t_1\right]$$

$$_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_x\right)=\bar{A}_{x+t_1}-\bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{x+t_1} \quad . \qquad (3.18)$$

3.3.2. Asuransi Berjangka

Cadangan prospektif untuk asuransi berjangka *n* tahun bagi (x) dengan pembayaran premi kontinu sebesar $\bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}\right)$ didefinisikan sebagai nilai harapan dari prospektif *loss* pada tahun ke- t_1 jika (x) mencapai usia t_1 tahun lagi.

Untuk $T(x)>t_1$ prospektif *loss* untuk asuransi berjangka *n* tahun bagi orang berusia *x* tahun, (x) adalah

$$
{}_{t_1}L = \begin{cases} v^{T(x)-t_1} - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] \\ \qquad - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] \end{cases} \tag{3.19}
$$

Cadangan prospektif untuk asuransi berjangka n tahun dihitung menggunakan fungsi distribusi dari *future lifetime* pada waktu t_1. Nilai cadangan prospektif untuk asuransi berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right) &= E\left[{}_{t_1}L \middle| T(x) > t_1\right] \\
&= E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] - \\
&\quad \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right]\right).
\end{aligned}
$$

Jika $T(x) - t_1 = T(x+t_1)$, maka

$$
\begin{aligned}
E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] &= \int_0^n v^{T(x)-t_1} f_{T(x)-t_1}\, dt \\
&= \int_0^n v^t \, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1}|}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] \\
&= \int_0^n \bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|}\, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n}|}\, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt \\
&= \int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_x\left(t+t_1\right) dt + \lim_{e\to\infty} \int_n^\infty \frac{1-v^t}{\delta}\, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_x\left(t+t_1\right) dt .
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

Dengan melakukan integral parsial pada persamaan (3.20) dan memisalkan : $g(t) = \dfrac{1-v^t}{\delta}$, $dh(t) = {}_t p_{x+t_1} \cdot \mu_{x+t}\left(t+t_1\right)dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\frac{dg}{dt}=\frac{-v^t \ln v}{\delta}=\frac{\delta v^t}{\delta}=v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t)=-{}_t p_{x+t_1}$, maka

$$
\begin{aligned}
&E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\left|\left(T(x)-t_1\right)<n\right.\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\left|\left(T(x)-t_1\right)\geq n\right.\right]\\
&=\left[\frac{1-v^t}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)\right]_0^n-\int_0^n v^t\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)dt+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e {}_t p_{x+t_1}\ \mu_{x+t}\left(t+t_1\right)dt\\
&=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^0}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e d\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+\int_0^n v^t\,{}_t p_{x+t_1}\ dt\\
&=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+0+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left(-{}_t p_{x+t_1}\Big]_n^e\right)+\int_0^n v^t\,{}_t p_x\ dt\\
&=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_x p_{x+t_1}\right)+0+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left({}_n p_{x+t_1}-{}_e p_{x+t_1}\right)+\int_0^n v^t\,{}_t p_x\ dt\\
&=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_x p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^t}{\delta}\left({}_n p_{x+t_1}-{}_\infty p_{x+t_1}\right)+\int_0^n v^t\,{}_t p_x\ dt\\
&=\int_0^n v^t\,{}_t p_{x+t_1}\ dt\\
&=\bar{a}_{\overline{x+t_1:n-t_1}|}.
\end{aligned}
$$

Nilai cadangan prospektif untuk asuransi berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)&=E\left[{}_{t_1}L\left|T(x)>t_1\right.\right]\\
{}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)&=E\left[v^{T(x)-t_1}\left|\left(T(x)-t_1\right)<n\right.\right]-\\
&\quad\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|}\left|\left(T(x)-t_1\right)<n\right.\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\left|\left(T(x)-t_1\right)\geq n\right.\right]\right)
\end{aligned}
$$

Jadi nilai cadangan prospektif dari asuransi berjangka n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah sebesar

$${}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)=\bar{A}^1_{\overline{x+t_1:n-t_1}|}-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{x+t_1:n-t_1}|}. \qquad (3.21)$$

3.3.2. Asuransi *Endowment*

Cadangan prospektif untuk asuransi *endowment* n tahun dengan pembayaran premi kontinu sebesar $\bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)$ didefinisikan sebagai nilai harapan dari *prospective loss* pada waktu t_1 bagi orang berusia x tahun, (x) yang mencapai usia t_1 tahun lagi.

Untuk $T(x) > t_1$ *prospective loss* untuk asuransi *endowment* n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah

$$
{}_{t_1}L = \begin{cases} v^{T(x)-t_1} - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] \\ v^{n} \quad - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] \end{cases} \tag{3.22}
$$

Untuk (x) yang mencapai t_1 tahun lagi, cadangan prospektif dihitung menggunakan fungsi distribusi dari *future lifetime* pada waktu t_1. Cadangan prospektif untuk asuransi *endowment* n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah

$$
\begin{aligned}
{}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right) &= E\left[{}_{t_1}L \middle| T(x) > t_1\right] \\
&= E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[v^{n} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] - \\
&\quad \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right]\right).
\end{aligned}
$$

Jika $T(x) - t_1 = T(x+t_1)$, maka

$$
\begin{aligned}
&E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[v^{n} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] \\
&= \int_0^n v^{T(x)-t_1} f_{T(x)-t_1}\, dt + \int_n^\infty v^n f_{T(x)-t_1}\, dt \\
&= \int_0^n v^t\, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_{x+t}(t+t_1)\, dt + \int_n^\infty v^n\, {}_t p_{x+t_1}\, \mu_{x+t}(t+t_1)\, dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^n v^t \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \\
&\left[\int_n^0 v^n \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \int_0^\infty v^n \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt\right] \\
&= \int_0^n v^t \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_x\left(t+t_1\right) dt + \\
&\left[-\int_0^n v^n \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \int_0^\infty v^n \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt\right] \\
&= \int_0^n v^t \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \\
&v^n\left[-\int_0^n {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \int_0^\infty {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt\right] \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}} + v^n\left(-\left[-{}_t p_{x+t_1}\right]_0^n + \left[-{}_t p_{x+t_1}\right]_0^\infty\right) \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}} + v^n\left(-\left[-{}_n p_{x+t_1} + {}_0 p_{x+t_1}\right] + \left[-{}_\infty p_{x+t_1} + {}_0 p_{x+t_1}\right]\right) \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}} + v^n\left({}_n p_{x+t_1} - {}_0 p_{x+t_1} - {}_\infty p_{x+t_1} + {}_0 p_{x+t_1}\right) \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}} + v^n\left({}_n p_{x+t_1} + 0\right) \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}} + v^n\left({}_n p_{x+t_1}\right) \\
&= \bar{A}^{1}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}} + \bar{A}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}}^{\;\;\;\;\;\;\;\;\;1} \\
&= \bar{A}_{x+t_1:\overline{n-t_1|}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{n|}} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] \\
&= \int_0^n \bar{a}_{\overline{T(x)-t_1|}} \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt + \int_n^\infty \bar{a}_{\overline{n|}} \, {}_t p_{x+t_1} \; \mu_{x+t}\left(t+t_1\right) dt
\end{aligned}
$$

$$=\int_0^n \frac{1-v^t}{\delta}\, {}_t p_{x+t_1}\ \mu_{x+t}\left(t+t_1\right)\, dt + \lim_{e\to\infty}\int_n^\infty \frac{1-v^t}{\delta}\, {}_t p_{x+t_1}\ \mu_{x+t}\left(t+t_1\right)\, dt. \quad (3.23)$$

Misalkan : $g(t)=\dfrac{1-v^t}{\delta}$, $dh(t)={}_t p_{x+t_1}\cdot\mu_{x+t}\left(t+t_1\right)dt$. Dari persamaan (2.11) diperoleh $\dfrac{dg}{dt}=\dfrac{-v^t\ln v}{\delta}=\dfrac{\delta v^t}{\delta}=v^t$ dan dari persamaan (2.10) diperoleh $h(t)=-{}_t p_{x+t_1}$.

Jika dilakukan integral parsial pada persamaan (3.23), maka

$$E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\middle|\left(T(x)-t_1\right)<n\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\middle|\left(T(x)-t_1\right)\geq n\right]$$

$$=\left[\frac{1-v^t}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)\right]_0^n-\int_0^n v^t\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)\, dt+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e {}_t p_{x+t_1}\ \mu_{x+t}\left(t+t_1\right)\, dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^0}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\int_n^e d\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+\int_0^n v^t\, {}_t p_{x+t_1}\ dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_t p_{x+t_1}\right)+0+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left(-{}_t p_{x+t_1}\Big]_n^e\right)+\int_0^n v^t\, {}_t p_{x+t_1}\ dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_x p_{x+t_1}\right)+0+\frac{1-v^t}{\delta}\lim_{e\to\infty}\left({}_n p_{x+t_1}-{}_e p_{x+t_1}\right)+\int_0^n v^t\, {}_t p_{x+t_1}\ dt$$

$$=\frac{1-v^n}{\delta}\left(-{}_x p_{x+t_1}\right)+\frac{1-v^t}{\delta}\left({}_n p_{x+t_1}-{}_\infty p_{x+t_1}\right)+\int_0^n v^t\, {}_t p_{x+t_1}\ dt$$

$$=\int_0^n v^t\, {}_t p_{x+t_1}\ dt$$

$$=\bar{a}_{x+t_1:\overline{n-t_1}|}.$$

Nilai cadangan prospektif untuk asuransi *endowment* n tahun bagi orang berusia x tahun, (x) adalah sebesar

$$ {}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right) = E\left[{}_{t_1}L \middle| T(x) > t_1\right] $$
$$ = E\left[v^{T(x)-t_1} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[v^{n} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right] - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right) $$
$$ \left(E\left[\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) < n\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{n}|} \middle| \left(T(x)-t_1\right) \geq n\right]\right) $$
$$ {}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right) = \bar{A}_{x+t_1:\overline{n-t_1}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{x+t_1:\overline{n-t_1}|}. \tag{3.24} $$

3.4. Contoh Kasus

Sebuah kontrak asuransi mempunyai nilai santunan sebesar Rp 10.000.000,- bagi orang berusia x tahun. Jika percepatan pembungaan, δ, sebesar 6% dan jumlah orang berusia x tahun, $l_x = 100 - x$ untuk $0 \leq x \leq 100$, hitung nilai premi bagi orang berusia 35 tahun dan nilai cadangan pada tahun ke-t_1 untuk tiga jenis asuransi berikut.

a. Asuransi seumur hidup
b. Asuransi berjangka 25 tahun
c. Asuransi *endowment* 25 tahun

Penyelesaian untuk studi kasus di atas dapat dijelaskan seperti uraian berikut.
Jumlah orang berusia x tahun adalah $l_x = 100 - x$, $0 \leq x \leq 100$.
Dari persamaan (2.6) diperoleh peluang orang berusia x tahun hidup sampai t tahun lagi adalah

$ {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{100-(x+t)}{100-x} $ dan untuk $x = 35$, maka peluang hidupnya adalah

$$ {}_t p_{35} = \frac{l_{35+t}}{l_{35}} = \frac{100-(35+t)}{100-35} = \frac{65-t}{65}. $$

Dari persamaan (2.10), fungsi kepadatan peluang dari $T(35)$ adalah

$$ f_{T(35)}(t) = \frac{d}{dt}\left[-{}_t p_{35}\right] = \frac{d}{dt}\left[-\frac{65-t}{65}\right] = \frac{1}{65}. $$

Berdasarkan persamaan (2.6), peluang orang berusia 35 tahun hidup sampai t tahun lagi pada t_1 tahun yang akan datang adalah

$$ {}_{t}p_{35+t_1} = \frac{l_{(35+t_1)+t}}{l_{35+t_1}} = \frac{100-(35+t_1+t)}{100-(35+t_1)} = \frac{(65-t_1)-t}{(65-t_1)}. $$

Fungsi kepadatan peluang $T(35)-t_1$ menurut persamaan (2.10) adalah

$$ f_{T(35)-t_1}(t) = \frac{d}{dt}\left[-{}_{t}p_{35+t_1}\right] = \frac{d}{dt}\left[-\frac{(65-t_1)-t}{(65-t_1)}\right] = \frac{1}{(65-t_1)}. $$

a. Asuransi Seumur Hidup

Nilai *loss*, (L) untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun menurut persamaan (3.3) adalah $L = (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})\ v^t - \bar{P}(\bar{A}_{35})\bar{a}_{\overline{T}|} \quad , t > 0$ yaitu nilai tunai santunan untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun dikurangi dengan nilai tunai pembayaran preminya. Nilai harapan dari nilai *loss* untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun adalah

$$ E[L] = E\left[(\text{Rp } 10.000.000,\text{-})\ v^t \,|t>0\right] - \bar{P}(\bar{A}_{35})E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\,|t>0\right] $$

$$ = \bar{A}_{35} - \bar{P}(\bar{A}_{35})\bar{a}_{35} $$

$$ \bar{A}_{35} = \int_0^{65} (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})\ v^t f_{T(35)}(t)\,dt $$

$$ = (\text{Rp } 10.000.000,\text{-}) \int_0^{65} v^t f_{T(35)}(t)\,dt = \text{Rp } 2.512.200,\text{-}\ . $$

$$ \bar{a}_{35} = \int_0^{65} \frac{1-v^t}{\delta} f_{T(35)}(t)\,dt = 12,47967\ . $$

Berdasarkan prinsip ekivalensi, maka nilai premi bersih untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun adalah sebesar

$$ \bar{P}(\bar{A}_{35}) = \frac{\bar{A}_{35}}{\bar{a}_{35}} = \frac{\text{Rp } 2.512.200,\text{-}}{12,47967} = \text{Rp } 201.303,\text{-}\ . $$

Cadangan prospektif untuk asuransi seumur hidup pada tahun ke$-t_1$ dihitung dengan menentukan prospektif *loss* untuk tahun ke$-t_1$ mendatang lebih dulu. *Prospective loss* pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun adalah

$$_{t_1}L = (\text{Rp } 10.000.000\text{,-})v^{T(x)-t_1} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{\overline{T(x)-t_1}|} \qquad ,T(x) > t_1 .$$

Cadangan prospektif untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun pada tahun ke$-t_1$ adalah nilai harapan dari *prospective loss* pada tahun ke$-t_1$ bagi orang berusia 35 tahun yaitu sebesar

$$_{t_1}\bar{V}(\bar{A}_x) = E\left[{}_{t_1}L \middle| T(x) > t_1\right] = \bar{A}_{x+t_1} - \bar{P}(\bar{A}_x)\bar{a}_{x+t_1} ,$$

dimana $\bar{A}_{35+t_1}$ adalah *actuarial present value* untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun pada t_1 tahun yang akan datang. $\bar{a}_{35+t_1}$ adalah *actuarial present value* dari anuitas seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun pada t_1 tahun yang akan datang.

$$\bar{A}_{35+t_1} = \int_0^{65-t_1} (\text{Rp } 10.000.000\text{,-})v^t f_{T(35)-t_1}(t)\,dt$$

$$= (\text{Rp } 10.000.000\text{,-}) \int_0^{65-t_1} v^t \frac{1}{65-t_1}(t)dt .$$

$$\bar{a}_{\overline{35+t_1}|} = \int_0^{65+t_1} \frac{1-v^t}{\delta} f_{T(35)-t_1}(t)\,dt = \int_0^{65+t_1} \frac{1-v^t}{\delta}\frac{1}{65-t_1}dt$$

$$= \frac{1}{65-t_1}\int_0^{65-t_1} \frac{1-v^t}{\delta}dt .$$

Cadangan prospektif pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun, $_{t_1}\bar{V}(\bar{A}_{35})$ dengan nilai premi bersih sebesar Rp 201.303,- dapat dilihat pada Tabel (3.1).

Tabel 3.1. Cadangan prospektif untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun

Tahun ke- t_1	$\bar{A}_{35+t_1}$	$\bar{a}_{35+t_1}$	${}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_{35}\right)$
5	Rp 2.701.878,-	12, 1635	Rp 253.328,-
10	Rp 2.918.536,-	11,8025	Rp 542.657,-
15	Rp 3.167.376,-	11,3877	Rp 875.031,-
20	Rp 3.454.794,-	10,9087	Rp 1.258.840,-
25	Rp 3.788.675,-	10,3522	Rp 1.704.776,-

Tabel 3.1 menunjukkan nilai cadangan prospektif pada tahun ke $-t_1$ untuk asuransi seumur hidup bagi orang berusia 35 tahun. Cadangan prospektif untuk tahun ke $-t_1$ mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya tahun. Hal ini berarti bahwa uang yang harus disediakan oleh perusahaan asuransi sebanding dengan jangka waktu pembayaran santunan.

b. Asuransi Berjangka 25 Tahun

Menurut persamaan (3.5), nilai *loss* untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun adalah

$$L=\begin{cases}\left(\text{Rp } 10.000.000,\text{-}\right)v^t-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{35:\overline{25}|}\right)\bar{a}_{\overline{T}|} & ,T<25\\ 0-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{35:\overline{25}|}\right)\bar{a}_{35:\overline{25}|} & ,T\geq 25\end{cases}.$$

Nilai harapan dari nilai *loss* untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun adalah

$$\begin{aligned}E\left[L\right]&=E\left[\left(\text{Rp } 10.00.000,\text{-}\right)v^t\left|t<25\right.\right]-\\&\quad\bar{P}\left(\bar{A}^1_{35:\overline{25}|}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T}|}\left|t<25\right.\right]+E\left[\bar{a}_{\overline{25}|}\left|t>25\right.\right]\right)\\&=\bar{A}^1_{35:\overline{25}|}-\bar{P}\left(\bar{A}^1_{35:\overline{25}|}\right)\bar{a}_{35:\overline{25}|}.\end{aligned}$$

$$\bar{A}^1_{35:\overline{25}|}=\int_0^{25}v^t f_{T(35)}\left(t\right)dt==\text{Rp } 1.991.974,\text{-}.$$

$$\bar{a}_{35:\overline{25|}} = \int_0^{25} \frac{1-v^t}{\delta} f_{T(35)}(t)\,dt + \int_{25}^{65} \frac{1-v^{25}}{\delta} f_{T(35)}(t)\,dt = 11{,}0581 .$$

Nilai premi untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun berdasarkan prinsip ekivalen , $E(L)=0$ adalah

$$\bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{35:\overline{25|}}\right) = \frac{\bar{A}^{1}_{35:\overline{25|}}}{\bar{a}_{35:\overline{25|}}} = \frac{\text{Rp } 1.991.974,-}{\text{Rp } 11{,}0581} = \text{Rp } 180.137,- .$$

Prospective loss pada tahun ke $-t_1$ untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun adalah

$$ {}_{t_1}L = \begin{cases} (\text{Rp } 10.000.000,-)v^{T(35)-t_1} - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}}\right)\bar{a}_{\overline{T(35)-t_1|}} & , \\ & \left(T(35)-t_1\right) < \left(25-t_1\right) \\ 0 \quad - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}}\right)\bar{a}_{\overline{25|}} & ,\left(T(35)-t_1\right) \geq \left(25-t_1\right) \end{cases} $$

Cadangan prospektif untuk asuransi berjangka 25 tahun pada tahun ke $-t_1$ adalah ekspektasi dari *prospective loss* pada tahun ke $-t_1$ bagi orang berusia 35 tahun yaitu sebesar

$$ {}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^{1}_{35:\overline{25|}}\right) = E\left[{}_{t_1}L \middle| \left(T(35)-t_1\right) < \left(25-t_1\right)\right] $$
$$ = \bar{A}^{1}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}} - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{35:\overline{25|}}\right)\bar{a}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}} .$$

dimana $\bar{A}^{1}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}}$ adalah *actuarial present value* untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun pada t_1 tahun yang akan datang. $\bar{a}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}}$ adalah *actuarial present value* dari anuitas hidup berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun untuk t_1 tahun yang akan datang.

$$\bar{A}^{1}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}} = \int_0^{25-t_1} v^t f_{T(35)-t_1}(t)\,dt = \int_0^{25-t_1} v^t \frac{1}{65-t_1}\,dt .$$

$$\bar{a}_{\overline{35+t_1:25-t_1|}} = \int_0^{25-t_1} \frac{1-v^t}{\delta} f_{T(35)-t_1}(t)\,dt + \int_{25-t_1}^{65-t_1} \frac{1-v^{25-t_1}}{\delta} f_{T(35)-t_1}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{25-t_1} \frac{1-v^t}{\delta} \frac{1}{65-t_1}\,dt + \frac{1-v^{25-t_1}}{\delta} \int_{25-t_1}^{65-t_1} \frac{1}{65-t_1}\,dt \;.$$

Cadangan prospektif pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun, ${}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^1_{35:\overline{25|}}\right)$ dengan nilai premi sebesar Rp 180.137,- dapat dilihat pada Tabel (3.2).

Tabel 3.2. Cadangan prospektif untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun

Tahun ke-t_1	$\bar{A}^1_{35+t_1:\overline{25-t_1|}}$	$\bar{a}_{35+t_1:\overline{25-t_1|}}$	${}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}^1_{35:\overline{25|}}\right)$
5	Rp 1.941.127,-	10, 0848	Rp 124.144,-
10	Rp 1.798.274,-	8,7414	Rp 223.335,-
15	Rp 1.503.961,-	6,8426	Rp 271.138,-
20	Rp 959.932,-	4,0917	Rp 222.734,-
25	Rp 0,-	0	Rp 0,-

Tabel 3.2 menunjukkan nilai cadangan prospektif pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun. Cadangan prospektif untuk tahun ke$-t_1$ mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya tahun sampai pada tahun ke-15, namun mengalami penurunan dari tahun ke-15 sampai tahun ke-20. Pada tahun ke-25 nilai cadangan prospektif adalah nol. Hal ini disebabkan pada tahun ke-25 jangka waktu asuransi sudah habis. Pada asuransi berjangka, jika jangka waktu asuransi sudah habis maka peserta asuransi tidak mendapatkan santunan. Dengan kata lain, perusahaan asuransi tidak mempunyai kewajiban untuk membayar santunan kepada peserta sehingga cadangan prospektif bernilai nol.

c. Asuransi *Endowment* 25 Tahun

Pada asuransi *endowment* 25 tahun, nilai *loss* untuk orang berusia 35 tahun adalah

$$L = \begin{cases} (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25|}}\right)\bar{a}_{\overline{T|}} & ,T < 25 \\ (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^{25} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25|}}\right)\bar{a}_{\overline{25|}} & ,T \geq 25. \end{cases}$$

Nilai harapan dari nilai *loss* untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun adalah

$$\begin{aligned} E[L] = {} & E\left[(\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^t \,|\, t < 25\right] + \\ & E\left[(\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^{25} \,|\, t \geq 25\right] - \\ & \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25|}}\right)\left(E\left[\bar{a}_{\overline{T|}} \,|\, t < 25\right] + E\left[\bar{a}_{\overline{25|}} \,|\, t > 25\right]\right) \\ = {} & \bar{A}_{\overline{35:25|}} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25|}}\right)\bar{a}_{\overline{35:25|}} \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{\overline{35:25|}} = {} & \int_0^{25} (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^t f_{T(35)}(t)\,dt \\ & + \int_{25}^{65} (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^t f_{T(35)}(t)\,dt \\ = {} & \text{Rp } 3.365.083,\text{-} \ . \end{aligned}$$

$$\bar{a}_{\overline{35:25|}} = \int_0^{25} \frac{1-v^t}{\delta} f_{T(35)}(t)\,dt + \int_{25}^{65} \frac{1-v^{25}}{\delta} f_{T(35)}(t)\,dt = 11{,}0581 .$$

Nilai premi bersih untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun berdasarkan prinsip ekivalensi , $E(L) = 0$ adalah sebesar

$$\bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25|}}\right) = \frac{\bar{A}_{\overline{35:25|}}}{\bar{a}_{\overline{35:25|}}} = \frac{\text{Rp } 3.365.083,\text{-}}{11{,}0581} = \text{Rp } 304.409,\text{-} .$$

Prospective loss pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun adalah sebesar

$$ {}_{t_1}L = \begin{cases} (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^{T(35)-t_1} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25}|}\right)\bar{a}_{\overline{T(35)-t_1}|} & , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (T(35)-t_1) < (25-t_1) \\ (\text{Rp } 10.000.000,\text{-})v^{25-t_1} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25}|}\right)\bar{a}_{\overline{25-t_1}|} & , \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (T(35)-t_1) \geq (25-t_1)\ . \end{cases} $$

Cadangan prospektif untuk asuransi *endowment* 25 tahun pada tahun ke$-t_1$ adalah nilai harapan dari *prospective loss* pada tahun ke$-t_1$ sebesar

$$ {}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_{\overline{35:25}|}\right) = E\left[{}_{t_1}L \middle| (T(35)-t_1) < (25-t_1) \right] $$
$$ = \bar{A}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|} - \bar{P}\left(\bar{A}_{\overline{35:25}|}\right)\bar{a}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|}\ . $$

dimana $\bar{A}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|}$ adalah *actuarial present value* untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun pada t_1 tahun yang akan datang dan $\bar{a}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|}$ adalah *actuarial present value* dari anuitas hidup berjangka 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun untuk t_1 tahun yang akan datang.

$$ \bar{A}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|} = \int_0^{25-t_1} v^t f_{T(35)-t_1}(t)\,dt + \int_{25-t_1}^{65-t_1} v^{25-t_1} f_{T(35)-t_1}(t)\,dt $$
$$ = \int_0^{25-t_1} v^t \frac{1}{65-t_1}\,dt + v^{25-t_1}\int_{25-t_1}^{65-t_1} \frac{1}{65-t_1}\,dt $$

$$ \bar{A}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|} = \frac{1}{65-t_1}\int_0^{25-t_1} v^t\,dt + \frac{v^{25-t_1}}{65-t_1}\int_{25-t_1}^{65-t_1} dt\ . $$

$$ \bar{a}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|} = \int_0^{25-t_1} \frac{1-v^t}{\delta} f_{T(35)-t_1}(t)\,dt + \int_{25-t_1}^{65-t_1} \frac{1-v^{25-t_1}}{\delta} f_{T(35)-t_1}(t)\,dt $$
$$ = \int_0^{25-t_1} \frac{1-v^t}{\delta}\frac{1}{65-t_1}\,dt + \frac{1-v^{25-t_1}}{\delta}\int_{25-t_1}^{65-t_1} \frac{1}{65-t_1}\,dt $$

$$\bar{a}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|} = \frac{1}{65-t_1}\int_0^{25-t_1}\frac{1-v^t}{\delta}dt + \frac{1-v^{25-t_1}}{(65-t_1)\delta}\int_{25-t_1}^{65-t_1} dt \quad .$$

Cadangan prospektif pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun, ${}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_{\overline{35:25}|}\right)$ dengan premi bersih sebesar Rp 304.409,- dapat dilihat pada Tabel (3.3).

Tabel 3.3. Cadangan prospektif untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun

Tahun ke- t_1	$\bar{A}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|}$	$\bar{a}_{\overline{35+t_1:25-t_1}|}$	${}_{t_1}\bar{V}\left(\bar{A}_{\overline{35:25}|}\right)$
5	Rp 3.949.088,-	10, 0848	Rp 880.268,-
10	Rp 4.755.144,-	8,7414	Rp 2.095.128,-
15	Rp 5.894.454,-	6,8426	Rp 3.812.258,-
20	Rp 7.544.983,-	4,0917	Rp 6.299.881,-
25	Rp 10.000.000,-	0	Rp 10.000.000,-

Tabel 3.3 menunjukkan nilai cadangan prospektif pada tahun ke$-t_1$ untuk asuransi *endowment* 25 tahun bagi orang berusia 35 tahun. Cadangan prospektif untuk tahun ke$-t_1$ mengalami peningkatan seiring dengan bertambahnya tahun sehingga uang yang harus disediakan oleh perusahaan asuransi juga semakin meningkat. Pada tahun ke-25, cadangan prospektifnya bernilai Rp 10.000.000,- atau sama dengan nilai santunannya. Pada asuransi *endowment*, peserta asuransi tetap mendapatkan santunan sesuai dengan nilai santunan yang ada dalam kontrak polis meskipun jangka waktu asuransi sudah habis. Dengan kata lain, jika peserta asuransi masih hidup sampai jangka waktu asuransi habis maka perusahaan asuransi mempunyai kewajiban untuk membayar santunan kepada peserta sesuai dengan nilai santunan yang ada dalam kontrak polis.

BAB IV
KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan tentang penentuan cadangan prospektif untuk orang berusia *x*, dengan pembayaran premi kontinu pada asuransi jiwa maka dapat diperoleh kesimpulan bahwa nilai *loss* (*L*) untuk asuransi seumur hidup, asuransi berjangka *n* tahun dan asuransi *endowment* masing-masing adalah $L = v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_x\right)\bar{a}_{\overline{T}|}, T > 0$,

$$L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{T}|} & ,T < n \\ 0 - \bar{P}\left(\bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{n}|} & ,T \geq n \end{cases} \text{ dan } L = \begin{cases} v^t - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{T}|} & ,T < n \\ v^n - \bar{P}\left(\bar{A}_{x:\overline{n}|}\right)\bar{a}_{\overline{n}|} & ,T \geq n \end{cases}.$$

Nilai cadangan prospektif pada tahun $\text{ke}-t_1$ merupakan ekspektasi dari *prospective loss* pada tahun $\text{ke}-t_1$. *Prospective loss* pada tahun $\text{ke}-t_1$ adalah nilai *loss* pada t_1 tahun yang akan datang dengan $T(x) > t_1$ dimana $T(x)$ merupakan *future lifetime*. Perhitungan cadangan prospektif menunjukkan bahwa nilai cadangannya semakin besar sesuai jangka waktu pembayaran santunan untuk jenis asuransi seumur hidup dan asuransi *endowment*. Pada akhir jangka waktu asuransi *endowment* nilai cadangan prospektif sama dengan nilai santunannya. Cadangan prospektif untuk asuransi berjangka *n* tahun bernilai nol pada akhir jangka waktu polis (akhir tahun polis).

DAFTAR PUSTAKA

Bowers,N.L., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones, C.J. Nesbit. 1997. *Actuarial Mathematics.* The Society of Actuaries, New York.

Futami,T. 1993. Matematika Asuransi Jiwa, Bagian 1. Gatot Herlianto. Incorporated Foundation Oriental Life Insurance Cultural Development Center. Jepang

Gerber,H.U. 1997. *Life Insurance mathematics*, Springer, Third Edition. Swiss

Rukmigarsari,E. 2005. Statistika Matematika. Universitas Islam Malang. Malang

Sembiring,R.K. 1986. Asuransi I. Karunika, Universitas Terbuka. Jakarta

Walpole,R.E. 1995. Pengantar Statistika. PT.Gramedia, Jakarta