EKSENTRIK *DIGRAPH* DAN BARISAN ITERASI EKSENTRIK *DIGRAPH*

SKRIPSI

oleh :

WAHYU RISKA NUR V.

0410940058-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008

EKSENTRIK *DIGRAPH* DAN
BARISAN ITERASI EKSENTRIK *DIGRAPH*

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :
WAHYU RISKA NUR V.
0410940058-94

PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

EKSENTRIK *DIGRAPH* DAN
BARISAN ITERASI EKSENTRIK *DIGRAPH*

Oleh :
WAHYU RISKA NUR V.
0410940058-94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 29 Juli 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I	Pembimbing II
Prof. Dr. Agus Widodo	**Drs. Marsudi, MS**
NIP. 131 281 894	**NIP. 132 300 273**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M.Sc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : WAHYU RISKA NUR V
NIM : 0410940058
Jurusan : MATEMATIKA
Penulis Skripsi berjudul : EKSENTRIK *DIGRAPH* DAN BARISAN ITERASI EKSENTRIK *DIGRAPH*

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. **Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama - nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.**
2. **Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.**

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 29 Juli 2008
Yang menyatakan,

(Wahyu Riska Nur V)
NIM. 0410940058

EKSENTRIK *DIGRAPH* DAN BARISAN ITERASI EKSENTRIK *DIGRAPH*

ABSTRAK

Digraph adalah pasangan himpunan (V,A) di mana $V=V(D)$ adalah himpunan titik dalam *digraph* D dan $A=A(D)$ adalah himpunan rusuk dalam *digraph* D. Eksentrik *digraph* dari *digraph,* dinotasikan $ED(D)$ didefinisikan sebagai *digraph* yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan D atau $V(ED(D)) = V(D)$ di mana setiap rusuknya *adjacent* ke setiap titik eksentriknya. Pada skripsi ini dibahas bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph*, *digraph* lengkap, *digraph* multipartisi lengkap, dan sikel berarah, sehingga diketahui *period* dan *tail*-nya. Suatu eksentrik *digraph* dari *digraph* diperoleh dengan menghubungkan tiap titik dalam *digraph* dengan titik eksentriknya, barisan iterasi eksentrik *digraph* diperoleh jika terdapat suatu eksentrik *digraph* yang terulang dalam iterasi tersebut, sehingga dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dapat diketahui *period* dan *tail*-nya. Pada *digraph* lengkap K_n, $ED(K_n)= K_n$, *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph*-nya masing-masing adalah 1 dan 0. Pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ $ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})= K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph*-nya masing-masing adalah 2 dan 0. Pada sikel berarah C_n, $ED^2(C_n)= C_n$, *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph*-nya masing-masing adalah 2 dan 0.

Kata kunci : eksentrik *digraph*, barisan iterasi eksentrik *digraph*, *period, tail.*

THE ECCENTRIC DIGRAPH AND A SEQUENCE OF ITERATED ECCENTRIC DIGRAPHS

ABSTRACT

A directed graph (digraph) is a pair of set (V,A) where $V=V(D)$ is a vertex set in digraph D and $A=A(D)$ is an arc set in digraph D. The eccentric digraph of a digraph D can be denoted as $ED(D)$, defined as a digraph that has the same vertex set with D or $V(ED(D))=V(ED)$ where each of its arc adjacent to its eccentrix vertex. This minor thesis discuss how to determine the eccentric digraph and the sequence of iterated eccentric digraph of a digraph, a complete digraph, a complete multipartition digraph, and a directed cycle, so the period and the tail can be obtained. An eccentric digraph of a digraph can be obtained by connecting every vertexes in digraph with the eccentrix vertex. The sequence of iterated eccentric digraph can be obtained if there is a repetition of eccentric digraph in the iteration, so that the sequence of iterated eccentric digraph can be known the period and the tail. In a complete digraph K_n, $ED(K_n)= K_n$, the period and the tail of the sequence of iterated eccentric digraph are 1 and 0. In a complete multipartition digraph $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, then $ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})=K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, the period and the tail of the sequence of iterated eccentric digraph are 2 and 0. In a directed cycle C_n, then $ED(C_n)= C_n$, the period and the tail of the sequence of iterated eccentric digraph are 2 and 0.

Keywords : the eccentric digraph, a sequence of iterated eccentric digraph, *period, tail.*

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT karena berkat segala rahmat serta hidayah yang telah dilimpahkanNya penulis dapat menyelesaikan penulisan Skripsi ini dengan baik. Penulis menyadari bahwa penulisan Skripsi ini tidak dapat terealisasikan tanpa bantuan dari berbagai pihak, untuk itu penulis menyampaikan terima kasih yang sedalam-dalamnya kepada :

1. Prof. Dr. Agus Widodo pembimbing I atas segala pengarahan, motivasi, nasihat, dan dukungan selama penyusunan Skripsi ini.
2. Drs. Marsudi, MS selaku pembimbing II atas bimbingan, saran, kesabaran, dan dukungan yang selalu diberikan sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi ini.
3. Drs. Noor Hidayat, MSi., Dra. Endang Wahyu H., MSi. dan Drs. M. Aruman Imron, MSi. selaku dosen penguji atas segala masukan dan saran yang diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.
4. Dr. Agus Suryanto, MSc. selaku ketua jurusan Matematika Universitas Brawijaya.
5. Segenap bapak dan ibu dosen yang telah mendidik dan mengamalkan ilmunya kepada penulis.
6. Seluruh staf tata usaha jurusan Matematika Universitas Brawijaya.
7. Papa, Mama, Ibu, adik-adik, dan saudara yang selalu mengiringi penulis dengan doa, nasehat, perhatian, pengertian, motivasi, kasih sayang dan dukungan hingga terselesainya Skripsi ini.
8. Alyon, Mas Fafan, Aga, Indah, Tomy, Indri, Haris, Reny, Triky, Yeni, Mba ”QQ, Alpi, Hepy, Evy” serta teman- teman dari program studi Matematika angkatan 2003, 2004, 2005, dan 2006 atas dukungan dan semangat yang senantiasa diberikan.
9. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu.

Penulis menyadari bahwa masih terdapat banyak kekurangan dalam penulisan Skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun dari berbagai pihak untuk penulis.

Akhir kata, penulis berharap semoga Skripsi ini dapat memberikan manfaat dan sumbangan yang berarti di masa yang akan datang.

Malang, 29 Juli 2008
Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 ketika mendiskusikan persoalan jembatan Konigsberg. Publikasi dari persoalan tersebut dan usulan solusinya dinamakan teori graf. Pada permasalahan yang dialami oleh Euler, simpul mempresentasikan kota yang dihubungkan oleh jembatan, sedangkan sisi adalah jembatan yang menghubungkan antar lokasi (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Pada saat ini teori graf telah dapat memberikan kerangka dasar bagi banyak persoalan yang berhubungan dengan struktur dan hubungan antara suatu obyek diskrit dalam bentuk apapun. Topik yang dibahas pada teori graf banyak mendapat perhatian, karena model-modelnya sangat berguna untuk aplikasi yang luas, seperti masalah dalam jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, dan lain sebagainya.

Salah satu aplikasi dalam teori graf adalah menentukan kota terjauh (maksimal panjang lintasan) dari suatu kota ke kota lain. Pada suatu graf, tiap kota digambarkan dengan titik dan jalan dinyatakan dengan sisi. Jika sisi dari suatu graf mempunyai arah, maka graf disebut dengan graf berarah (*directed graph*). Graf berarah tersebut juga mempunyai aplikasi yang luas, misalnya untuk merepresentasikan beberapa model jaringan, merepresentasikan posisi yang sesuai dengan gambar pada beberapa tipe *game*, menggambarkan *finite state machines*, rute lalu lintas, masalah komunikasi, dan lain sebagainya. Jarak *(distance)* antara dua titik u dan v pada graf berarah (*digraph*) D yang dinotasikan $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari titik u ke titik v. Jika tidak ada lintasan yang menghubungkan u dan v, maka $d(u,v) = \infty$. Eksentrisitas titik v yang dinotasikan $e(v)$ adalah jarak terjauh (maksimal lintasan terpendek) dari v ke setiap titik pada *digraph* D. *Radius* dari *digraph* D yang dinotasikan $rad(D)$ adalah eksentrisitas minimum pada setiap titik di D, sedangkan *diameter* dari *digraph* D yang dinotasikan $diam(D)$ adalah eksentrisitas maksimum pada setiap titik di D. Titik u adalah titik eksentrik dari v jika jarak dari v ke u adalah sama dengan eksentrisitas dari *v* atau *d(v,u)=e(v)* (Buckley dan Harary, 1990). Sebuah titik dikatakan titik sentral dari *digraph D* jika eksentrisitasnya sama dengan *rad*(*D*), sedangkan sebuah titik dikatakan *titik peripheral* dari *digraph D* jika eksentrisitasnya sama dengan *diam*(*D*). Sentral dari *digraph D* yang dinotasikan dengan *cen(D)* adalah *subdigraph* yang terbentuk dari titik sentral - titik sentral dalam *digraph D*, sedangkan *periphery* dari *digraph D* yang dinotasikan dengan *per(D)* adalah *subdigraph* yang dibentuk oleh *titik peripheral - titik peripheral* dalam *digraph D* (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Eksentrik *digraph* diperkenalkan pertama kalinya oleh Fred Buckley dalam papernya, *The Eccentric Digraph of a Graph*. Buckley (2001) menyimpulkan bahwa hampir setiap graf G, eksentrik *digraph*-nya adalah $ED(G)=(\overline{G})^*$, dimana $(\overline{G})^*$ adalah graf komplemen dari *G* yang setiap sisinya diganti dengan dua rusuk (*arc*) yang simetri. Terinspirasi dari paper Fred Buckley, James Boland dan Mirka Miller mengamati struktur dan sifat eksentrik *digraph* dari *digraph*.

Eksentrik *digraph* dari *digraph D* yang dinotasikan dengan *ED*(*D*), didefinisikan sebagai graf berarah yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan *D* atau *V(ED(D)) = V(D)* dimana rusuknya menghubungkan dari titik *u* ke titik *v*, jika dan hanya jika *v* adalah titik eksentrik dari *u*.

Tahap pertama pada skripsi ini adalah menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph,* sehingga dapat diketahui perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph*. Tahap selanjutnya adalah menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari beberapa kelas *digraph*, sehingga dapat diketahui perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari beberapa kelas *digraph* tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dapat disusun rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph*.

2. Bagaimana perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* yaitu dengan menentukan *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.
3. Bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap, *digraph* multipartisi lengkap, dan sikel berarah.
4. Bagaimana perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari beberapa *digraph* yang diteliti yaitu dengan menentukan *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penulisan skripsi ini adalah :

1. *Digraph* yang akan diteliti adalah *digraph* (umum), *digraph* lengkap, *digraph* multipartisi lengkap, dan sikel berarah.
2. Perilaku yang akan diteliti dari barisan iterasi eksentrik *digraph* adalah menentukan *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph*.

1.4 Tujuan

Tujuan dari skripsi ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph*.
2. Meneliti perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* yaitu dengan menentukan *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.
3. Menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap, *digraph* multipartisi lengkap, dan sikel berarah.
4. Meneliti perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari beberapa *digraph* yang diteliti yaitu dengan menentukan *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.

BAB II
TINJUAN PUSTAKA

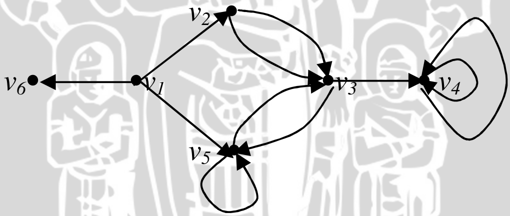
2.1 Konsep Dasar *Digraph*

Banyak konsep pada graf tidak berarah *G* yang dapat diterapkan pada graf berarah. Hal ini dikarenakan setiap sisi pada graf tidak berarah *G,* dapat direpresentasikan dengan rusuk pada graf berarah *D.*

Definisi 2.1.1

Graf berarah atau yang lebih dikenal dengan nama *directed graph* atau *digraph D* adalah pasangan himpunan (V, A) dimana $V=V(D)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen yang disebut titik (*vertex*) dan $A=A(D)$ adalah himpunan dari pasangan terurut (u, v) yang disebut dengan rusuk (*arc*), dimana (u,v) dan (v,u) adalah rusuk yang berbeda. Untuk selanjutnya, graf berarah *D* akan disebut *digraph D*, yang dinotasikan dengan $D=(V,A)$ (Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.1:



Gambar 2.1
Digraph D yang memuat *loop* dan rusuk paralel

Himpunan titik dan himpunan rusuk pada Gambar 2.1 adalah sebagai berikut.

a). $V(D) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$

b). $A(D) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}\}$

$= \{ (v_1,v_2), (v_2,v_3), (v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_4), (v_4,v_4), (v_5,v_3), (v_3,v_5), (v_5,v_5), (v_1,v_5), (v_1,v_6) \}$

Definisi 2.1.2

Rusuk (*arc*) yang menghubungkan suatu titik ke dirinya sendiri disebut *loop*. Dua rusuk dikatakan paralel jika keduanya mempunyai titik awal dan titik akhir yang sama (Siang, 2002).

Pada Gambar 2.1, rusuk $a_5 = (v_4,v_4)$, $a_6 = (v_4,v_4)$, $a_{10} = (v_1,v_5)$ adalah *loop* dan rusuk $a_2 = (v_2,v_3)$, $a_3 = (v_2,v_3)$ adalah rusuk paralel dengan titik awal v_2 dan titik akhir v_3.

Definisi 2.1.3

Sama halnya pada graf, *order* dari *digraph D* yang dinotasikan dengan $n(D)$ adalah banyaknya titik di D, yakni $n = |V|$. *Size* dari *digraph D* yang dinotasikan dengan $m(D)$ adalah banyaknya rusuk di D, yakni $m = |A|$. Sehingga, (n,m) pada *digraph* dinotasikan sebagai *digraph* dengan *order n* dan *size m* (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Contoh 2.1 adalah *digraph D* yang mempunyai *order* dan *size* masing-masing adalah 6 dan 11.

Definisi 2.1.4

Graf dasar dari *digraph D* (*Underlying graph*) adalah graf G yang diperoleh dengan mengganti semua rusuk (u,v) atau (v,u) dari *digraph D* dengan sisi uv (Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.2 :

Gambar 2.2 *Digraph* dan graf yang mendasarinya

2.2 Derajat (*Degree*) pada *Digraph*

Definisi 2.2.1

Misal u dan v titik pada *digraph D*. Jika $a=(u,v)$ adalah rusuk dari *digraph D* yang menghubungkan u dan v, maka u dikatakan *adjacent* ke v dan v *adjacent* dari u. Selanjutnya, a dikatakan *incident* dari u dan *incident* ke v, dimana u *incident* ke a dan v *incident* dari a (McHugh,1990).

Pada Gambar 2.1, titik v_1 *adjacent* ke titik v_2 *dan* v_2 *adjacent* dari v_1, titik v_3 *adjacent* ke dan *adjacent* dari v_5, dan v_5 adalah *adjacent* ke dan dari dirinya sendiri. Untuk $a_1=(v_1,v_2)$, a_1 dikatakan *incident* dari v_1 dan *incident* ke v_2.

Definisi 2.2.2

Derajat luar (*outdegree*) titik v pada *digraph D* yang dinotasikan *od v* adalah banyaknya titik-titik pada *digraph D* yang *adjacent* dari v. Derajat dalam (*indegree*) titik v pada *digraph D* yang dinotasikan *id v* adalah banyaknya titik-titik pada *digraph D* yang *adjacent* ke v. Derajat (*degree*) titik v pada *digraph D* yang dinotasikan *deg v* didefinisikan sebagai jumlah dari derajat luar (*outdegree*) dan derajat dalam (*indegree*) titik v, yang dapat dituliskan sebagai

$$\deg\ v = od\ v + id\ v\ .$$

Jika jumlah derajat luar dan derajat dalam dari suatu titik sama dengan 1, maka titik tersebut disebut titik pendan (Chartrand dan Zhang, 2005).

Teorema 1.

Diberikan suatu *digraph D* yang mempunyai *order p* dan *size q*, dengan $V(D)=\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. Maka

$$\sum_{i=1}^{p} od\ v_i = \sum_{i=1}^{p} id\ v_i = q$$

Bukti:

Ketika derajat luar-derajat luar titik pada D dijumlahkan, tiap rusuk dihitung satu kali. Karena tiap rusuk adalah *incident* dari tepat satu titik. Secara sama, ketika derajat dalam-derajat dalam titik pada D dijumlahkan, rusuknya dihitung satu kali karena tiap rusuk *incident* ke satu titik (Chartrand dan Zhang, 2005).

Pada Gambar 2.1, ditunjukkan bahwa

Titik	***Outdegree***	***Indegree***	***Degree***
v_1	3	0	3
v_2	2	1	3
v_3	2	3	5
v_4	2	3	5
v_5	2	3	5
v_6	0	1	1

dan v_6 adalah titik pendan karena jumlah derajat luar dan derajat dalamnya sama dengan 1. Jumlah derajat luar dari titik-titik pada *digraph D* adalah 11, demikian pula jumlah derajat dalam dari titik-titik pada *digraph D* adalah 11, sehingga *digraph D* mempunyai *size* 11.

Definisi 2.2.3

Digraph H dikatakan *subdigraph* dari *digraph D* jika setiap titik di *H* adalah titik di *D* dan setiap rusuk di *H* adalah rusuk di *D*, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(D)$ dan $A(H) \subseteq A(D)$ (Grimaldi, 1994).

Contoh 2.3 :

Gambar 2.3
Digraph D dan *subdigraph H* dari *digraph D.*

Definisi 2.2.4

Digraph H' dikatakan *subdigraph* yang merentang (*spanning subdigraph*) dari *D* jika *H'* merupakan *subdigraph* dari *D* dimana $V(H') = V(D)$ (Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.4 :

Gambar 2.4

Digraph D dan *spanning subdigraph H'* dari *digraph D.*

2.3 Koneksitas pada *Digraph*

Definisi 2.3.1

Walk berarah adalah barisan titik dan rusuk yang diawali dan diakhiri dengan titik. *Walk* berarah dengan panjang n dari v_o ke v_n dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v_o, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n \qquad (n \geq 0),$$

rusuk $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ dengan $i = 1, 2, \ldots, n$ adalah rusuk yang mempunyai titik ujung v_{i-1} dan v_i.

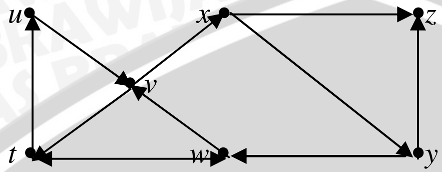
Path berarah dengan panjang n dari v_o ke v_n adalah *walk* dari v_o ke v_n yang semua rusuknya berbeda. *Path* berarah dari v_o ke v_n dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v_o, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, v_3, \ldots, v_{n-1}, a_n, v_n \qquad (n \geq 0),$$

dengan $a_i \neq a_j$ dan $i \neq j$. *Path* berarah sederhana dengan panjang n dari v_o ke v_n adalah *path* dari v_o ke v_n yang semua titiknya berbeda.

Sirkuit berarah dengan panjang n adalah *path* yang diawali dan diakhiri dengan titik yang sama, sehingga $v_o = v_n$. Sirkuit berarah sederhana dengan panjang n dari v_o ke v_n adalah sirkuit dari v_o ke v_n yang semua titiknya berbeda (Chartrand dan Zhang, 2005).

Contoh 2.5 :



Gambar 2.5 *Digraph D*

a). (*y, w, v, x, y, w, t*) adalah *walk* berarah dari *y* ke *t* dengan panjang 6.
b). (*t, u, v, x, y, w, v, t* adalah *path* yang diawali dan diakhiri dengan titik *t* dengan panjang 7. Karena titik awal dan titik akhirnya sama maka *path* tersebut adalah sirkuit , tetapi bukan sirkuit sederhana.

Semiwalk berarah adalah barisan titik dan rusuk yang diawali dan diakhiri dengan titik. *Semiwalk* berarah dengan panjang *n* dari v_o ke v_n dapat dituliskan sebagai berikut :

$$v_o, a_1, v_1, a_2, v_2, a_3, v_3, \ldots, v_{n\text{-}1}, a_n, v_n \qquad (n \geq 0),$$

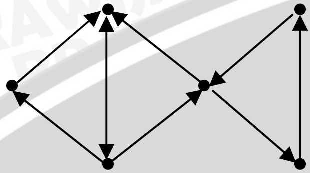
di mana rusuk $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ atau $e_i = (v_i, v_{i-1})$ untuk setiap i $(1 \leq i \leq n)$ adalah rusuk yang mempunyai titik ujung $v_{i\text{-}1}$ dan v_i. Jika rusuk-rusuk pada *semiwalk* v_0 ke v_n semuanya berbeda, maka *semiwalk* v_0 ke v_n adalah *semipath* v_0 ke v_{n}.. Berbeda dengan *walk* dan *path*, *semiwalk* dan *semipath* tidak memperhatikan arah rusuknya (Chartrand dan Oellermann, 1993).

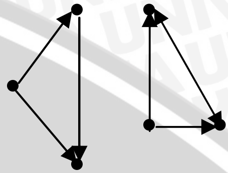
Pada Gambar 2.5, (*x, z, y, w, v, u*) adalah *semiwalk* *x* ke *u*. Karena rusuk-rusuk pada *semiwalk* *x* ke *u* semuanya berbeda, maka *semiwalk* adalah *semipath.*

Definisi 2.3.2

Digraph D dikatakan terhubung jika terdapat *u* dan *v* adalah titik dalam *digraph D,* maka terdapat suatu *walk u-v*. Komponen dari *digraph D* adalah *subdigraph* terhubung maksimal dari *D*. Jadi, setiap *digraph* terhubung hanya mempunyai satu komponen dan untuk *digraph* tidak terhubung mempunyai sedikitnya dua komponen (Grimaldi, 1994).

Contoh 2.6 :


(a)


(b)

Gambar 2.6
Digraph terhubung (a) dan *digraph* tidak terhubung (b) dengan dua komponen.

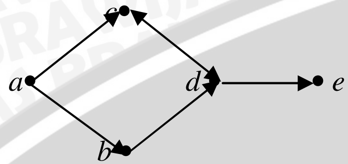
Digraph D dikatakan terhubung lemah jika untuk setiap pasangan titik-titik *u* dan *v*, *D* memuat *semipath u-v* (tentunya, jika *D* memuat *semipath u-v*, maka *D* memuat *semipath v-u*). *Digraph D* dikatakatan terhubung kuat (*strong*) jika untuk setiap pasangan titik-titik *u* dan *v*, *D* memuat kedua *path u-v* dan *path v-u* untuk setiap pasangan *u,v* adalah titik yang berbeda di *D*. *Digraph D* dikatakan *unilateral* jika untuk setiap pasangan titik-titik *u* dan *v*, *D* memuat salah satu *path u-v* atau *path v-u* atau keduanya (Chartrand dan Zhang, 2005).

Pada Gambar 2.5, adalah *digraph* yang tidak terhubung kuat, karena tidak terdapat *path z-y* dalam *digraph D* dan *digraph* tersebut adalah *unilateral*. Sedangkan pada Gambar 2.6, *digraph D* adalah *digraph* yang terhubung kuat.

Definisi 2.3.3

Jarak *(distance)* antara dua titik *u* dan *v* pada *digraph D* yang dinotasikan *d(u,v)* adalah panjang lintasan terpendek dari titik *u* ke titik *v*. Jika tidak ada lintasan yang menghubungkan *u* dan *v*, maka $d(u,v) = \infty$ (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Contoh 2.7:



Gambar 2.7
Digraph dengan $d(a,e) = 3$, dan $d(e,a) = \infty$.

Definisi 2.3.4

Eksentrisitas titik *v* dinotasikan *e(v)* adalah jarak maksimum dari *v* ke setiap titik dalam *digraph D*, secara matematis dapat dituliskan

$$e(v) = maks\{d(v,u) \mid u \in V(D)\}.$$

Radius dari *digraph D* yang dinotasikan *rad(D)* adalah eksentrisitas minimum dari semua titik di *D*, dapat dituliskan

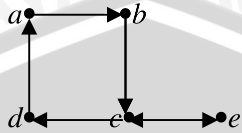
$$rad(D) = \min\{e(v) \mid v \in V(D)\},$$

sedangkan *diameter* dari *digraph D* yang dinotasikan *diam(D)* adalah eksentrisitas maksimum dari semua titik di *D*, dapat dituliskan

$$diam(D) = maks\{e(v) \mid v \in V(D)\}.$$

Titik *u* adalah titik eksentrik dari *v* jika jarak dari *v* ke *u* adalah sama dengan eksentrisitas dari *v* atau *d(v,u)=e(v)*. Sebuah titik dikatakan titik sentral dari *digraph D* jika eksentrisitasnya sama dengan *rad*(*D*), sedangkan sebuah titik dikatakan *titik peripheral* dari *digraph D* jika eksentrisitasnya sama dengan *diam*(*D*). Sentral dari *digraph D* yang dinotasikan *cen(D)* adalah *subdigraph* yang terbentuk dari titik sentral - titik sentral dari *digraph D*, dan *periphery* dari digraf *D* yang dinotasikan *per(D)* adalah *subdigraph* yang terbentuk dari *titik peripheral-titik peripheral* dari *digraph D* (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Contoh 2.8 :



Gambar 2.8 *Digraph D*

Berdasarkan Gambar 2.8, diketahui bahwa

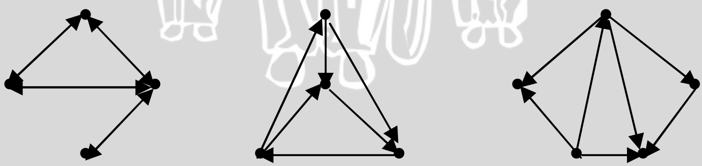
titik	***eksentrisitas***	***titik eksentrik***
a	*e(a)= 3*	*d,e*
b	*e(b)= 3*	*a*
c	*e(c)= 3*	*b*
d	*e(d)= 4*	*e*
e	*e(e)= 4*	*b*

sehingga *rad*(*D*) = 3, *diam*(*D*) = 4, dengan titik sentralnya adalah *a,b,c* dan *titik peripheral*-nya adalah *d, e*.

Definisi 2.3.5

Digraph D dikatakan simetris jika terdapat (*u,v*) suatu rusuk dalam *digraph D*, maka terdapat pula (*v,u*) suatu rusuk dalam *digraph D*. Jika *digraph D* simetris, maka *D* dapat diperoleh dari beberapa graf G dengan mengganti sisi *uv* dengan rusuk (*u,v*) dan (*v,u*), dan dapat ditulis dengan *D* = *G**. Sebuah *digraph* yang kedua titiknya dihubungkan oleh tepat 1 rusuk, disebut *tournament* (Chartrand dan Oellermann, 1993).

Contoh 2.9



(a) (b) (c)

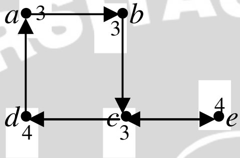
Gambar 2.9

Digraph yang simetris (a), *digraph* yang tidak simetris (b) dan *tournament* (c).

2.4 *Digraph* Berlabel

Digraph berlabel adalah suatu *digraph* tanpa rusuk paralel di mana rusuk-rusuk atau titik-titik dari sebuah *digraph* diberi nilai atau bilangan riil tak negatif dengan suatu data (Lipschutz dan Lipson, 2002).

Contoh 2.10 :



Gambar 2.10
Digraph D yang titik-titiknya dilabeli dengan eksentrisitasnya.

2.5 Representasi *Digraph* dalam Matriks

Definisi 2.5.1

Misal D adalah *digraph* yang terdiri dari n titik tanpa rusuk paralel, cara menyatakan suatu *digraph* dalam matriks *adjacency* yaitu dengan memperhatikan titik dalam *digraph* D beserta rusuk *adjacency*-nya. Matriks *adjacency* yang sesuai dengan *digraph* D adalah matriks bujur sangkar n x n , $A = (a_{ij})$ dengan

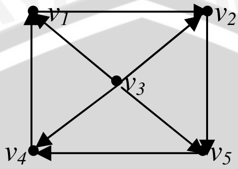
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika ada rusuk dari titik } v_i \text{ ke } v_j \\ 0 & \text{jika tidak ada rusuk dari titik } v_i \text{ ke } v_j \,. \end{cases}$$

Definisi 2.5.2

Misal D adalah *digraph* terhubung yang terdiri dari n titik tanpa rusuk paralel. Matriks jarak yang bersesuaian dengan *digraph* adalah matriks bujur sangkar n x n, $M= (m_{ij})$ dengan

$$m_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & \text{jarak dari } v_i \text{ ke } v_j \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

Contoh 2.11 :



Gambar 2.11 *Digraph D*

Digraph D pada Gambar 2.11 mempunyai himpunan titik

$$V(D)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

maka matriks *adjacency* dari *digraph D* adalah sebagai berikut,

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

dan matriks jarak dari *digraph D* adalah sebagai berikut.

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & 3 & 2 \\ 3 & 0 & \infty & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \infty & 0 & 3 \\ 2 & 3 & \infty & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Menurut Siang (2002), hal-hal yang perlu diperhatikan sehubungan dengan penggunaan matriks hubung untuk menyatakan *digraph*:

1. Banyaknya rusuk yang keluar dari titik v_i (*outdegree*) adalah banyaknya elemen 1 pada baris ke-*i* matriks hubungnya.

2. Banyaknya garis yang menuju titik v_i (*indegree*) adalah banyaknya elemen 1 pada kolom ke-i matriks hubungnya. Banyaknya keseluruhan rusuk dalam *digraph D* adalah banyaknya elemen 1 pada matriks hubungnya.
3. *Digraph* tidak mempunyai *loop* bila dan hanya bila semua elemen diagonal utamanya = 0. *Loop* pada suatu titik bersesuaian dengan $a_{ii} = 1$.

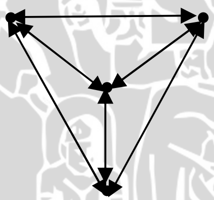
2.6 Jenis-jenis *Digraph*

Sama halnya pada graf, *digraph* juga mempunyai bentuk yang bermacam-macam.

1. *Digraph* Lengkap (*Complete Digraph*)

Digraph D adalah *digraph* lengkap dengan *n* titik jika setiap titiknya terhubung langsung dengan semua titik yang lain, yang dinotasikan dengan K_n (Chartrand dan Lesniak, 1996).

Contoh 2.12 :



Gambar 2.12 *Digraph* Lengkap K_4

2. *Digraph* Lintasan (*Path Digraph*)

Digraph yang setiap titiknya terhubung dengan satu lintasan disebut *digraph* lintasan (*path digraph*). *Digraph* lintasan dengan *n* titik dinotasikan P_n. Jika *digraph* lintasan mempunyai rusuk (u,v) dan rusuk (v,u), maka *digraph* lintasan adalah *digraph* lintasan yang simetri dan dinotasikan dengan P_n* (Golumbic, 1980).

Contoh 2.13 :

(a) (*b*)

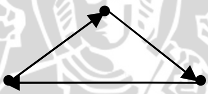
Gambar 2.13 *Digraph* Lintasan

Gambar 2.13 (a) adalah *digraph* lintasan P_3*.
Gambar 2.13 (b) adalah *digraph* lintasan P_3 .

3. Sikel Berarah (*Directed Cycle*)

Sebuah *digraph* yang terdiri dari satu lingkaran disebut sikel berarah *(directed cycle)*. Sikel berarah dengan n titik dinotasikan C_n (Golumbic,1980).

Contoh 2.14 :

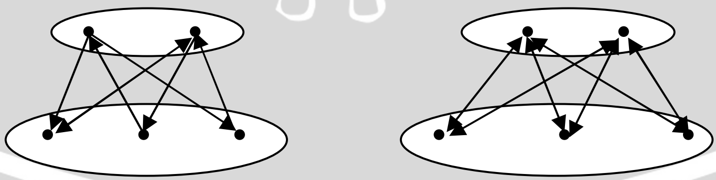


Gambar 2.14 Sikel Berarah C_3

4. *Digraph* Bipartisi Lengkap

Digraph D dikatakan *digraph* bipartisi jika himpunan titik-titik $V(D)$ dapat dipisah menjadi dua himpunan $V_1(D)$ dan $V_2(D)$, dan suatu titik di V_1 terhubung dengan suatu titik di V_2. Jika setiap pasang titik di V_1 dan V_2 terhubung langsung maka graf tersebut dinamakan *digraph* bipartisi lengkap. Jika $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$, *digraph* bipartisi lengkap dinotasikan $K_{m,n}$ (Golumbic,1980).

Contoh 2.15 :



(a) (*b*)

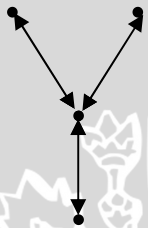
Gambar 2.15

Gambar 2.15 (a) adalah *digraph* bipartisi $K_{2,3}$.
Gambar 2.15 (b) adalah contoh *digraph* bipartisi lengkap $K_{2,3}$.

5. *Digraph Star*

Digraph Star adalah *digraph* bipartisi lengkap yang dinotasikan dengan $K_{1,n}$ atau $K_{n,1}$. Selanjutnya, *digraph star* $K_{1,n}$ atau $K_{n,1}$ akan dinotasikan dengan S_m, dengan $m = n + 1$ (Golumbic,1980).

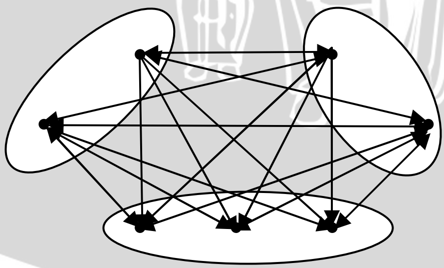
Contoh 2.16 :



Gambar 2.16 *Digraph Star* S_4.

6. *Digraph* Multipartisi Lengkap

Digraph D dikatakan *digraph* multipartisi lengkap jika himpunan titik-titik $V(D)$ dapat dipisah menjadi beberapa himpunan $V_1(D)$, $V_2(D)$, … , $V_n(D)$, dan setiap pasang titik di V_1, V_2, … ,V_n saling terhubung langsung. Jika $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$, … , $|V_k| = n_k$, *digraph* multipartisi lengkap dinotasikan $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, di mana $n_i > 1$ untuk i=1,2, … , k (McHugh, 1990).
Contoh 2.17 :



Gambar 2.17 *Digraph* Multipartisi Lengkap $K_{2,2,3}$

7. Gabungan *Digraph*

Misal ada dua *digraph* D_1 dan D_2 yang mempunyai himpunan titik $V(D_1)$ dan $V(D_2)$ saling asing begitu juga himpunan rusuk $A(D_1)$ dan $A(D_2)$, maka gabungan *digraph* dinotasikan $D_1 \cup D_2$ adalah *digraph* yang mempunyai himpunan titik $V(D_1 \cup D_2) = V(D_1) \cup V(D_2)$ dan himpunan rusuk $A(D_1 \cup D_2) = A(D_1) \cup A(D_2)$ (Chartrand dan Oellermann, 1996).

Contoh 2.18 :

Gambar 2.18 Gabungan 2 *digraph*

Pada Gambar 2.18, *digraph* $D = P_3 \cup K_2$ adalah gabungan *digraph* lintasan P_3 dan *digraph* lengkap K_2.

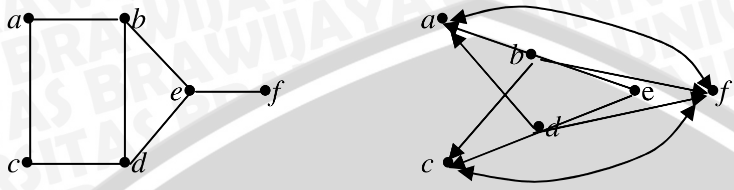
2.7 Eksentrik *Digraph*

Eksentrik *digraph* diperkenalkan pertama kalinya oleh Fred Buckley, dimana eksentrik *digraph* dari suatu graf maupun *digraph* dapat diperoleh dengan menghitung eksentrisitas dari tiap titik pada graf dan *digraph* tersebut sehingga diketahui titik eksentriknya.

Definisi 2.7.1

Eksentrik *digraph* $ED(G)$ dari graf G didefinisikan sebagai graf berarah yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan G atau $V(ED(G)) = V(G)$ dimana rusuknya menghubungkan titik u ke titik v, jika v adalah titik eksentrik dari u.

Contoh 2.19 :



G *ED*(*G*)

Gambar 2.19 Graf dan Eksentrik *digraph*-nya

Buckley (2001) menyimpulkan bahwa hampir setiap graf *G*, eksentrik *digraph*-nya adalah $ED(G) = \left(\overline{G}\right)^*$, dimana $\left(\overline{G}\right)^*$ adalah graf komplemen dari *G* yang setiap sisinya diganti dengan dua rusuk yang simetris.

Definisi 2.7.2

Eksentrik *digraph* dari *digraph D* yang dinotasikan *ED*(*D*) didefinisikan sebagai graf berarah yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan *D* atau $V(ED(D)) = V(D)$ di mana rusuknya menghubungkan titik *u* ke titik *v*, jika dan hanya jika *v* adalah titik eksentrik dari *u*.

Contoh 2.20

D *ED*(*D*)

Gambar 2.20 *Digraph D* dan eksentrik *digraph*-nya

BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Eksentrik *Digraph* dari *Digraph*

Dalam bagian ini akan dibahas bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph*, sehingga diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dan dapat diketahui *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.

3.1.1 Menentukan Eksentrik *Digraph* dari *Digraph*

Metode untuk menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph* *D,* yang pertama adalah dengan menentukan matriks jarak yang entri-entrinya menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam *digraph D.*

Misal diketahui suatu *digraph D* dengan himpunan titik

$$V(D) = \{u_1, u_{2,} ..., u_n\}$$

dan himpunan rusuk (*arc*)

$$A(D) = \{a_1, a_2, ..., a_m\}.$$

Langkah selanjutnya adalah menentukan eksentrisitas dari setiap titik dalam *digraph D* yaitu dengan menemukan jarak maksimal dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam matriks jarak yang telah diketahui sebelumnya, sehingga eksentrisitas dari setiap titik v_i dapat dituliskan sebagai berikut

$$e(v_i) = maks\{d(v_i, v_j) \mid v_j \in V(D)\}.$$

Berdasarkan eksentrisitas titik, jika jarak dari v_i ke v_j sama dengan eksentrisitas titik v_i yang dapat di tulis dengan $d(v_i, v_j)$ = e(v_i), maka titik v_j disebut sebagai titik eksentrik dari v_i.

Setelah diketahui titik eksentrik dari tiap titik dalam *digraph* *D,* maka dapat dibentuk suatu eksentrik *digraph* dari *digraph* tersebut yaitu dengan menghubungkan setiap titik dalam *digraph* *D* ke titik eksentriknya dengan suatu rusuk (*arc*). Eksentrik *digraph* dari *digraph D* dapat dinotasikan dengan *ED(D)* yang mempunyai himpunan titik yang sama dengan *D* atau *V(ED(D))* = *V(D)*.

3.1.2 Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph*

Eksentrik *digraph* dari *digraph D* yang dapat dinotasikan dengan *ED(D),* juga dapat ditentukan eksentrik *digraph*-nya dengan menentukan jarak dari setiap titik pada *ED(D)* ke setiap titik yang lain dalam *ED(D)* dan menyatakannya pada suatu matriks jarak *n* x *n* yang dinotasikan dengan $M=(m_{ij})$, di mana *n* adalah banyaknya titik pada *ED(D).*

Setelah diketahui matriks jarak dari eksentrik *digraph* *ED*(*D*)*,* dapat diketahui jarak maksimal dari setiap titik ke tiap titik yang lain dalam eksentrik *digraph ED*(*D*) tersebut*,* maka dapat diketahui eksentrisitas titik dan titik eksentriknya.

Selanjutnya, setiap titik pada *ED(D)* akan dihubungkan dengan rusuk yang *adjacent* ke titik eksentriknya (suatu titik yang tidak mempunyai derajat luar, maka titik tersebut tidak mempunyai titik eksentrik), sehingga terbentuklah eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph ED(D)* yang dapat ditulis sebagai $ED(ED(D))=ED^2(D)$. Demikian juga untuk menentukan eksentrik *digraph* baru dari suatu eksentrik *digraph* yang telah diketahui, dapat dilakukan cara yang sama dengan sebelumnya sehingga diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* berhingga sebagai berikut :

$$D, ED(D), ED^2(D), \cdots, ED^n(D) \ ,$$

di mana barisan iterasi eksentrik *digraph* berakhir jika terdapat bilangan bulat *s>0* dan $r \geq 0$, sedemikian hingga $ED^{s+r}(D) = ED^r(D)$. Berkaitan dengan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph D,* diperoleh Proposisi sebagai berikut.

Proposisi 1:

Misal diketahui barisan iterasi eksentrik *digraph* berhingga sebagai berikut :

$$D, ED(D), ED^2(D), \cdots, ED^n(D)$$

maka untuk setiap barisan iterasi eksentrik *digraph*, terdapat bilangan bulat *p>0* dan $t \geq 0$ sedemikian hingga

$$ED^{p+t}(G) = ED^{t}(G),$$

di mana *p* dan *t* masing-masing adalah *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph*, dan nilai *p* dinotasikan dengan *p(D)* sedangkan nilai *t* dinotasikan dengan *t(D)*.

Pada pernyataan sebelumnya, barisan iterasi eksentrik *digraph* akan berakhir pada eksentrik *digraph* ke *n,* jika terdapat bilangan bulat *r* dan *s* yang memenuhi $s>0$ dan $r \geq 0$ sedemikian hingga $ED^{s+1}(D) = ED^{r}(D)$, artinya *r* dapat juga dinyatakan sebagai *t* ($r=t$) dan ($s+r$) dapat dinyatakan sebagai $p + t$ ($s+r = p+t$). Suatu barisan iterasi eksentrik *digraph* yang tidak mempunyai *tail* ($t(D)=0$), *digraph* tersebut dapat dikatakan sebagai *digraph* yang *periodic.* Nilai *p* dapat dinotasikan dengan *p*(*D*) dan nilai *t* dinotasikan dengan *t*(*D*).

3.2 Algoritma Menentukan Eksentrik *Digraph* dan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph D*

Berdasarkan metode menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph D* sehingga diketahui perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph*-nya, dapat dibuat algoritma sebagai berikut.

Input : Matriks jarak dari *digraph D*.

Output : Matriks jarak dari barisan eksentrik *digraph* yang tidak terulang, nilai *period* yang dinotasikan *p(D),* dan nilai *tail* yang dinotasikan dengan *t(D).*

Langkah – langkah untuk menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* adalah sebagai berikut :

Langkah 1: Mencari panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam *digraph D*, dan menyatakannya dalam suatu martriks jarak *n* x *n,* $M = (m_{ij})$ dengan

$$m_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & \text{jarak dari } v_i \text{ ke } v_j \\ 0 & i = j, \end{cases}$$

dengan $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Langkah 2: Mencari jarak maksimal dari setiap titik dalam *digraph D* terhadap pasangannya, yang dapat ditulis sebagai

$$e(v_i) = \max\{d(v_i, v_j) \mid v_j \in V(D)\}.$$

Langkah 3: Menentukan titik eksentrik dari setiap titik pada *digraph D.*

Langkah 4: Menghubungkan tiap titik pada *digraph D* dengan setiap titik eksentriknya sehingga terbentuk eksentrik *digraph*.

Langkah 5: Menyusun matriks jarak dari eksentrik *digraph*.

Langkah 6: Memeriksa apakah terdapat matriks jarak dari eksentrik *digraph* sebelumnya yang sama dengan matriks jarak dari eksentrik *digraph* yang baru dihasilkan.

Apabila ya, maka iterasi akan dihentikan.

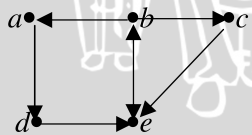
Apabila tidak, lakukan langkah 1 – 5.

Langkah 7: Menentukan nilai *period* dan *tail* dari barisan eksentrik *digraph* yang dihasilkan dari iterasi.

Langkah 8 : Selesai.

3.2 Implementasi Algoritma Menentukan Eksentrik *Digraph* dan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* pada suatu *Digraph*

Jika diketahui suatu *digraph D* pada Gambar 3.1. Tentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph D* tersebut.



Gambar 3.1 *Digraph D*

Penyelesaian :

Diketahui suatu *digraph D* pada Gambar 3.1 dengan himpunan titik

$$V(G) = \{a, b, c, d, e,\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(D) = \{(a,d),(b,a),(b,c),(b,e),(c,e),(d,e),(e,b)\}.$$

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph D,* mula-mula dicari panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam *digraph D*, dan menyatakannya dalam suatu martriks jarak *n* x *n*, $M = (m_{ij})$ dengan

$$m_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & \text{jarak dari } v_i \text{ ke } v_j \\ 0 & i = j, \end{cases}$$

dengan $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

- Matriks jarak yang bersesuain dengan *digraph D* pada Gambar 3.1 adalah sebagai berikut.

$$M = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Menentukan eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *digraph D.* Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *digraph D* disajikan dalam Tabel 3.1 berikut.

Tabel 3.1 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *digraph D*

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
a	*e(a)=4*	*c*
b	*e(b)=2*	*d*
c	*e(c)=4*	*d*
d	*e(d)=3*	*a, c*
e	*e(e)=3*	*d*

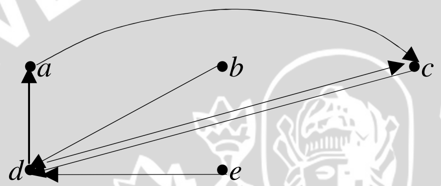
Sehingga, dapat pula diketahui bahwa :

$$Rad(D) = \min\{e(u) \mid u \in V(D)\} = e(b) = 2$$

$$Diam(D) = maks\{e(u) \mid u \in V(D) = \{e(a), e(c), e(d)\} = 4$$

Berdasarkan definisi,diketahui bahwa *digraph D* memiliki titik sentral yaitu titik *b ,* dan titik *peripheral* yaitu *a, c* dan *d.*

- Eksentrik *digraph* dari *digraph D* disajikan dalam Gambar 3.2 berikut,



Gambar 3.2 Eksentrik *Digraph* dari *Digraph D*, *ED(D)*

di mana eksentrik *digraph* dari *digraph D* mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik pada *digraph D* yaitu

$$V(ED(D)) = V(D) = \{a, b, c, d, e\},$$

dan himpunan rusuk (*arc*) yang menghubungkan titik-titik pada *digraph D* dengan titik eksentriknya yaitu

$$A(ED(D))=\{(a,c), (b,d), (c,d), (d,a), (d,c), (e,d)\}.$$

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph ED(D)* pada Gambar 3.2, dilakukan cara yang sama dengan menentukan eksentrik *digraph* pada *digraph D,* yaitu menentukan jarak dari tiap titik pada eksentrik *digraph ED(D)* ke tiap titik lain pada eksentrik *digraph ED(D)* dengan menyusun matriks jarak yang entri-entrinya menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda.

- Matriks jarak dari eksentrik *digraph ED*(*D*) pada Gambar 3.2, adalah matriks *n* x *n, M'*=(m_{ij})' sebagai berikut.

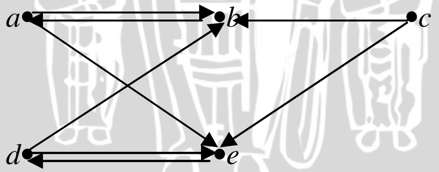
$$
M' = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & \infty & 1 & 2 & \infty \\
2 & 0 & 2 & 1 & \infty \\
2 & \infty & 0 & 1 & \infty \\
1 & \infty & 1 & 0 & \infty \\
2 & \infty & 2 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

- Dari matriks *M’*, Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *Gambar* 3.2 disajikan dalam Tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada eksentrik *digraph ED*(*D*)

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
a	$e(a)=\infty$	*b,e*
b	$e(b)=\infty$	*e*
c	$e(c)=\infty$	*b,e*
d	$e(d)=\infty$	*b,e*
e	$e(e)=\infty$	*b*

- Eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph ED*(*D*), yang dinotasikan $ED^2(D)$ disajikan dalam Gambar 3.3 berikut,



Gambar 3.3 Eksentrik *Digraph* dari eksentrik *digraph ED(D),* $ED(ED(D))=ED^2(D)$

di mana eksentrik *digraph* $ED^2(D)$ mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik pada eksentrik *digraph ED*(*D*) yaitu

$$V(ED \quad (D)) = V(D) = \{a, b, c, d, e\},$$

dan himpunan rusuk (*arc*) yang menghubungkan titik-titik pada *digraph D* dengan titik eksentriknya yaitu

$$A(ED^2(D)) = \{(a,b),(a,e),(b,e),(c,b),(c,e),(d,b),(d,e),(e,b)\}$$

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^2(D)$ pada Gambar 3.3, yaitu dengan menentukan jarak dari tiap titik pada eksentrik *digraph* $ED^2(D)$ ke tiap titik lain pada eksentrik *digraph* $ED^2(D)$ dengan menyusun matriks jarak yang entri-entrinya menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda.

- Matriks jarak dari eksentrik *digraph* $ED^2(D)$ pada Gambar 3.3 adalah matriks *n* x *n, M"*=(m_{ij})" sebagai berikut.

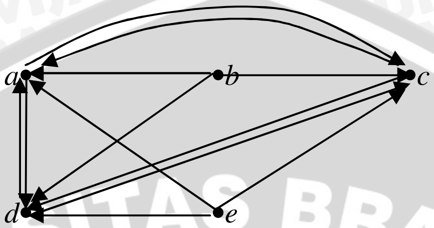
$$M'' = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 0 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & 0 & \infty & 1 \\ \infty & 1 & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Dari matriks *M"*, Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *Gambar* 3.3 disajikan dalam Tabel 3.3 berikut.

Tabel 3.3 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada eksentrik *digraph* $ED^2(D)$

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
a	$e(a)=\infty$	*c,d*
b	$e(b)=\infty$	*a,c,d*
c	$e(c)=\infty$	*a,d*
d	$e(d)=\infty$	*a,c*
e	$e(e)=\infty$	*a,c,d*

- Eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^2(D)$, yang dinotasikan $ED^3(D)$ disajikan dalam Gambar 3.4 berikut,



Gambar 3.4 Eksentrik *Digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^2(D)$, $ED(ED^2(D))=ED^3(D)$

di mana eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^2(D)$, yang dinotasikan $ED^3(D)$ mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik pada eksentrik *digraph* $ED^2(D)$ yaitu

$$V(ED^3(D)) = V(D) = \{a, b, c, d, e\},$$

dan himpunan rusuk (*arc*) yang menghubungkan titik-titik pada *digraph* D dengan titik eksentriknya yaitu

$$A(ED^3(D)) = \{(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,d)$$
$$(d,a),(d,c),(e,a),(e,c),(e,d)\}$$

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^3(D)$ pada Gambar 3.4, yaitu dengan menentukan jarak dari tiap titik pada eksentrik *digraph* $ED^3(D)$ ke tiap titik lain pada eksentrik *digraph* $ED^3(D)$ dengan menyusun matriks jarak yang entri-entrinya menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda.

- Matriks jarak dari eksentrik *digraph* $ED^3(D)$ pada Gambar 3.4 adalah matriks n x n, $M^{(3)}=(m_{ij})^{(3)}$ sebagai berikut.

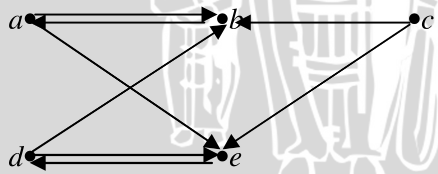
$$M^{(3)} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 & 1 & \infty \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 0 & 1 & \infty \\ 1 & \infty & 1 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Dari matriks $M^{(3)}$, Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *Gambar* 3.4 disajikan dalam Tabel 3.4 berikut.

Tabel 3.4 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada eksentrik *digraph* $ED^3(D)$

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
a	$e(a)=\infty$	*b,e*
b	$e(b)=\infty$	*e*
c	$e(c)=\infty$	*b,e*
d	$e(d)=\infty$	*b,e*
e	$e(e)=\infty$	*b*

- Eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^3(D)$, yang dinotasikan $ED^4(D)$ disajikan dalam Gambar 3.5 berikut,



Gambar 3.5 Eksentrik *Digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^3(D)$, $ED(ED^3(D))=ED^4(D)$

di mana eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED^3(D)$, yang dinotasikan $ED^4(D)$ mempunyai himpunan titik yang sama dengan himpunan titik pada eksentrik *digraph* $ED^3(D)$ yaitu

$$V(ED^4(D)) = V(D) = \{a, b, c, d, e\},$$

dan himpunan rusuk (*arc*) yang menghubungkan titik-titik pada *digraph D* dengan titik eksentriknya yaitu

$$A(ED^4(D)) = \{(a,b),(a,e),(b,e),(c,b),(c,e),(d,b),(d,e),(e,b)\}$$

Dari Gambar 3.3 dan Gambar 3.5, nampak bahwa himpunan rusuk pada $ED^2(D)$ sama dengan $ED^4(D)$, sehingga diketahui bahwa

$$ED^2(D) = ED^4(D) \qquad (3.1).$$

Karena telah tercapai $ED^3(D)$ yang sama dengan $ED(D)$, maka iterasi tersebut dihentikan. Sehingga diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph D* pada Gambar 3.1 adalah sebagai berikut

$$D, ED(D), ED^2(D), ED^3(D)$$

Berdasarkan Proposisi 1, terdapat bilangan bulat terkecil $p>0$ dan $t \geq 0$ sedemikian hingga $ED^t(G) = ED^{p+t}(G)$, maka dari Persamaan 3.1 dapat diketahui bahwa

$$t(D) = 2 \qquad (3.2)$$
$$p(D) + t(D) = 4 \qquad (3.3),$$

dengan mensubstitusikan Persamaan 3.2 ke 3.3, diperoleh

$$p(D) + t(D) = 4$$
$$p(D) + 2 = 4$$
$$p(D) = 2.$$

Sehingga, perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph D* mempunyai *period* 2 dan *tail* 2.

Hasil perhitungan secara analitik tersebut, sesuai dengan perhitungan menggunakan program *Delphi* untuk menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* pada Lampiran 2.

3.4 Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Lengkap

Dalam bagian ini akan dibahas bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap, sehingga diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap dan dapat diketahui *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.

3.4.1 Menentukan Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Lengkap

Digraph lengkap K_n adalah *digraph* yang mempunyai n titik, di mana setiap titiknya terhubung dengan semua titik yang lain. Misal *digraph* lengkap K_n mempunyai himpunan titik

$$V(K_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(K_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n(n-1)}\},$$

di mana derajat luar tiap titik sama dengan derajat dalamnya, yaitu $n - 1$. Banyaknya rusuk dari *digraph* lengkap K_n dapat dituliskan sebagai

$$|A(K_n)| = n(n-1).$$

Sehingga, panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam *digraph* lengkap K_n, dapat disajikan dalam matriks jarak n x n, $M=(m_{ij})$ berikut.

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pada matriks jarak M, nampak bahwa jarak maksimal dari setiap titik dalam *digraph* lengkap K_n ke semua titik yang berbeda dalam *digraph* lengkap K_n adalah 1, sehingga diperoleh eksentrisitas titik v_i untuk i = 1, 2, ... , n pada *digraph* lengkap K_n adalah

$$e(v_i) = 1 , \qquad \text{untuk } i = 1, 2, \ldots , n.$$

dan titik eksentrik dari titik-titik pada *digraph* lengkap K_n adalah

$$\text{titik eksentrik dari } v_i = v_j , \qquad \text{di mana } d(v_i, v_j) = e(v_i) = 1$$

$$\text{untuk } i \neq j = 1,2,\ldots,n .$$

Berdasarkan eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada *digraph* lengkap K_n, dapat diperoleh eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n, yang dinotasikan $ED(K_n)$ yaitu dengan menghubungkan tiap titik pada *digraph* lengkap K_n dengan titik eksentriknya.

Eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n adalah *digraph* dengan himpunan titik

$$V(ED(K_n)) = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(ED(K_n)) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n(n-1)}\},$$

di mana tiap titik pada *digraph* lengkap K_n *adjacent* ke setiap titik eksentriknya. Banyaknya rusuk pada eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap yang dinotasikan $ED(K_n)$ adalah sebagai berikut

$$|A(ED(K_n))| = n(n-1) .$$

Sehingga, panjang lintasan terpendek dari setiap titik ke semua titik yang berbeda dalam eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n, dapat disajikan dalam matriks jarak n x n, $M' = (m_{ij})'$ berikut.

$$M' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan banyaknya rusuk dan matriks jarak M yang sama dengan matriks jarak M', diketahui bahwa eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n, yang dinotasikan $ED(K_n)$ adalah sama dengan *digraph* lengkap K_n atau dapat dituliskan dengan

$$ED(K_n) = K_n \, .$$

3.4.2 Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Lengkap

Barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n dapat dicapai jika terdapat eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n. Untuk mengetahui adanya eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi menentukan eksentrik *digraph,* yaitu dengan memeriksa matriks jarak dari setiap eksentrik *digraph* dalam iterasi.

Nampak bahwa matriks jarak pada *digraph* lengkap K_n dan matriks jarak pada eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n adalah sama, artinya

$$ED(K_n) = K_n \qquad (3.4).$$

Karena $ED(K_n) = K_n$, maka diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n adalah sebagai berikut.

$$K_n$$

Berdasarkan Persamaan 3.4, misal K_n dapat dinotasikan sebagai $ED^0(K_n)$ dan $ED(K_n)$ dapat dinotasikan sebagai $ED^1(K_n)$, maka untuk $ED(K_n) = K_n$ dapat dituliskan sebagai

$$ED^1(K_n) = ED^0(K_n) \qquad (3.5).$$

Berdasarkan Proposisi 1, dapat diketahui bahwa

$$t(K_n) = 0 \qquad (3.6)$$
$$p(K_n) + t(K_n) = 1 \qquad (3.7).$$

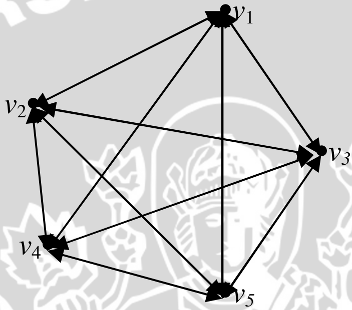
Dengan mensubstitusikan persamaan 3.6 ke 3.7, diperoleh

$$p(K_n) + t(K_n) = 1$$
$$p(K_n) + 0 = 1$$
$$p(K_n) = 1.$$

Sehingga, perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n mempunyai *period* 1 dan *tail* 0.

Contoh 3.1

Tentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 berikut. Tentukan pula *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.



Gambar 3.6 *Digraph* Lengkap K_5

Pada Gambar 3.6, *digraph* lengkap K_5 mempunyai himpunan titik

$$V(K_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(K_5) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}\}.$$

Matriks jarak 5x5 yang bersesuaian dengan *digraph* lengkap K_5 , $M=(m_{ij})$ berikut.

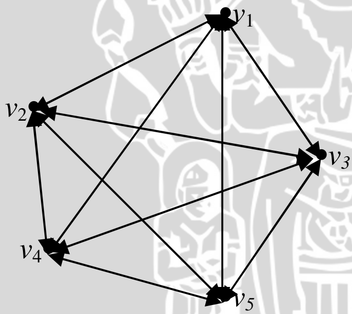
$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks jarak M dari *digraph* lengkap K_5, diperoleh eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik dalam *digraph* lengkap K_5 yang disajikan dalam Tabel 3.5 berikut.

Tabel 3.5 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *digraph* lengkap K_5

Titik	Eksentrisitas Titik	Titik Eksentrik
v_1	$e(v_1)=1$	v_2, v_3, v_4, v_5
v_2	$e(v_2)=1$	v_1, v_3, v_4, v_5
v_3	$e(v_3)=1$	v_1, v_2, v_4, v_5
v_4	$e(v_4)=1$	v_1, v_2, v_3, v_5
v_5	$e(v_5)=1$	v_1, v_2, v_3, v_4

Dengan menghubungkan tiap titik dalam *digraph* lengkap K_5 dengan titik eksentriknya, diperoleh eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 berikut.



Gambar 3.7 Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Lengkap K_5

Pada Gambar 3.7, eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5, yang dinotasikan $ED(K_5)$ mempunyai himpunan titik

$$V(ED(K_5)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\},$$

di mana $V(ED(K_5)) = V(K_5)$ dan himpunan rusuk

$$A(ED(K_5)) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}\}.$$

Matriks jarak 5x5 yang bersesuaian dengan eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 , $M' = (m_{ij})'$ berikut.

$$M' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nampak bahwa matriks jarak pada *digraph* lengkap K_5 dan matriks jarak pada eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 adalah sama, artinya

$$ED(K_5) = K_5 .$$

Karena $ED(K_5) = K_5$, maka diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 adalah sebagai berikut :

$$K_5$$

Jika K_5 dapat dinotasikan sebagai $ED^0(K_5)$ dan $ED(K_5)$ dapat dinotasikan sebagai $ED^1(K_5)$, maka untuk $ED(K_5) = K_5$ dapat dituliskan sebagai

$$ED^1(K_n) = ED^0(K_n)$$

Berdasarkan Proposisi 1, dapat diketahui bahwa

$$t(K_5) = 0$$
$$p(K_5) + t(K_5) = 1.$$

Sehingga, diperoleh $p(K_5) = 1$.

Jadi, perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 mempunyai *period* 1 dan *tail* 0.

Hasil perhitungan secara analitik tersebut, sesuai dengan perhitungan menggunakan program *Delphi* untuk menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_5 pada Lampiran 2.

3.5 Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Multipartisi Lengkap

Dalam bagian ini akan dibahas bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap, sehingga diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap dan dapat diketahui *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.

3.5.1 Menentukan Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Multipartisi Lengkap

Digraph multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah *digraph* yang mempunyai himpunan titik-titik $V(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ yang dapat dipisah menjadi beberapa himpunan V_1, V_2, … ,V_n dan setiap pasang titik di $V_1=V_1(D)$, $V_2=V_2(D)$, … , $V_n=V_n(D)$, saling terhubung. Jika $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$, … , $|V_k| = n_k$, di mana $n_i > 1$ untuk $i=1,2, \ldots , k$ maka himpunan titik pada *digraph* multipartisi lengkap dapat dituliskan dengan

$$V(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = \{ V_1, V_2, \ldots , V_n\}.$$

Misal *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, mempunyai himpunan titik

$$V(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})=\begin{cases} V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\} \\ V_2 = \{v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2}\} \\ \vdots \\ V_n = \{v_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, v_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+n_k}\} \end{cases}$$

dan himpunan rusuk

$$A(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) =$$

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1(0+n_2+\ldots+n_k)+n_2(n_1+0+\ldots+n_k)+\ldots+n_k(n_1+n_2+\ldots+0)}\}$$

Banyaknya rusuk dari *digraph* multipartisi lengkap dapat dituliskan sebagai berikut.

$$|A(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})| = n_1(0+n_2+\ldots+n_k)+n_2(n_1+0+\ldots+n_k)$$
$$+n_k(n_1+n_2+\ldots+0)$$

Panjang lintasan terpendek dari setiap titik ke semua titik yang berbeda dalam *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ dapat disajikan dalam matriks jarak *n* x *n, M*=(m_{ij}) sebagai berikut.

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ \vdots \\ v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+n_k} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & \ldots & v_{n_1} & \cdots & v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} & \cdots & v_{n_1+\ldots+n_k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pada matriks jarak *M,* nampak bahwa jarak maksimal dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah 2, sehingga diperoleh eksentrisitas titik v_i untuk i = 1, 2, ... , n_k pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah

$$e(v_i) = 2,$$

dan titik eksentrik pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah

titik eksentrik dari $v_i = v_j$,

untuk $v_i, v_j \in V_m$, di mana $i \neq j = 1,2,\ldots n_k$ dan $m = 1,2,\ldots,n$.

Berdasarkan eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ dapat diperoleh eksentrik digraf dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ yang dinotasikan dengan $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ yaitu dengan menghubungkan tiap titik pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ dengan titik eksentriknya.

Eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, yang dinotasikan dengan $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ adalah *digraph* dengan himpunan titik

$$V(ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))=\begin{cases} V_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_{n_1}\} \\ V_2 = \{v_{n_1+1}, \ldots, v_{n_1+n_2}\} \\ \vdots \\ V_n = \{v_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1}, \ldots, v_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+n_k}\} \end{cases}$$

dan himpunan rusuk

$$A(ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})) = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_1(n_1-1)+n_2(n_2-1)+\ldots+n_k(n_k-1)}\},$$

di mana tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ *adjacent* ke setiap titik eksentriknya. Banyaknya rusuk pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ yang dinotasikan $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ adalah sebagai berikut.

$$|A(ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))| = n_1(n_1-1) + n_2(n_2-1) + \cdots + n_k(n_k-1).$$

Panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, dapat disajikan dalam matriks jarak *n* x *n,* *M'*=(m_{ij})' berikut.

$$M' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ \vdots \\ v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+n_k} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & \cdots & v_{n_1} & \cdots & v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} & \cdots & v_{n_1+\ldots+n_k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & \infty & \infty & \infty \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan banyaknya rusuk pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, diketahui bahwa eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, yang dinotasikan $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ adalah gabungan dari n_k *digraph* lengkap atau dapat dituliskan dengan

$$ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \ldots \cup K_{n_k} .$$

3.5.2 Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Multipartisi Lengkap

Barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ dapat dicapai jika terdapat eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. Untuk mengetahui adanya eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi menentukan eksentrik *digraph,* yaitu dengan memeriksa matriks jarak dari setiap eksentrik *digraph* dalam iterasi.

Nampak bahwa matriks jarak *M* pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ tidak sama dengan matriks jarak *M'* pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap, yang dinotasikan dengan $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$. Sehingga iterasi perlu dilakukan kembali, yaitu dengan menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ yang dapat dituliskan,

$$ED(ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})) = ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}).$$

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, cukup diperhatikan matriks jarak *M'* yang menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik dalam eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$. Dari matriks jarak *M'*, diketahui bahwa eksentrisitas titik v_i untuk i = 1, 2, ... , n_k pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah

$$e(v_i) = \infty,$$

dan titik eksentrik pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah

titik eksentrik dari $v_i = v_j$,

untuk $v_i \in V_m$, di mana $v_j = \{V(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) - V_m, V_m \in V(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})\}$ untuk $i \neq j = 1,2,\ldots n_k$ dan $m = 1,2,\ldots,n$.

Berdasarkan eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ dapat diperoleh eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, yang dinotasikan $ED(ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))$, di mana

$$ED(ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))=ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}).$$

Eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ yang dinotasikan dengan $ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ adalah *digraph* dengan himpunan titik

$$V(ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))=\begin{cases} V_1=\{v_1,v_2,\ldots,v_{n_1}\} \\ V_2=\{v_{n_1+1},\ldots,v_{n_1+n_2}\} \\ \vdots \\ V_n=\{v_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+1},\ldots,v_{n_1+n_2+\ldots+n_{k-1}+n_k}\}, \end{cases}$$

dan himpunan rusuk

$$A(ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))=$$
$$\{a_1,a_2,\ldots,a_{n_1(0+n_2+\ldots+n_k)+n_2(n_1+0+\ldots+n_k)+\ldots+n_k(n_1+n_2+\ldots+0)}\}$$

di mana tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ *adjacent* ke setiap titik eksentriknya. Banyaknya rusuk pada eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ adalah sebagai berikut.

$$|A(ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}))|=n_1(0+n_2+\ldots+n_k)+n_2(n_1+0+\ldots+n_k)$$
$$+n_k(n_1+n_2+\ldots+0)$$

Panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, dapat disajikan dalam matriks jarak n x n, $M''=(m_{ij})$ " berikut.

$$M''=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n_1} \\ \vdots \\ v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} \\ \vdots \\ v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+n_k} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & \cdots & v_{n_1} & \cdots & v_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} & \cdots & v_{n_1+\ldots+n_k} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nampak bahwa matriks jarak matriks jarak *M"* pada eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph ED*($K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$) dan matriks jarak *M* pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah sama, artinya

$$ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = K_{n_1,n_2,\ldots,n_k} \qquad (3.8).$$

Berdasarkan Persamaan 3.8, diketahui bahwa eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph ED*($K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$), yang dinotasikan ED^2($K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$) sama dengan *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, sehingga dapat dituliskan dengan

$$ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}.$$

Karena $ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, maka diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ adalah sebagai berikut

$$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}).$$

Berdasarkan Persamaan 3.8, misal $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ dapat dinotasikan sebagai $ED^0(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, maka untuk persamaan 3.8 dapat dituliskan sebagai

$$ED^2(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = ED^0(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) \qquad (3.9).$$

Berdasarkan Proposisi 1, dapat diketahui bahwa

$$t(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 0 \qquad (3.10)$$
$$p(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) + t(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 2 \qquad (3.11).$$

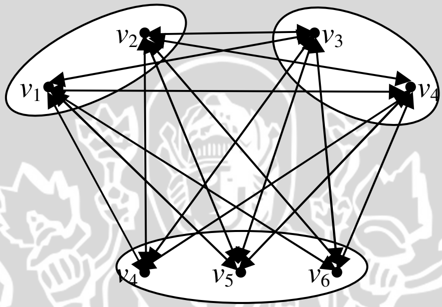
Dengan mensubstitusikan persamaan 3.10 ke 3.11, diperoleh

$$p(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) + t(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 2$$
$$p(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) + 0 = 2$$
$$p(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}) = 2.$$

Sehingga, diketahui bahwa perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ mempunyai *period* 2 dan *tail* 0.

Contoh 3.2

Tentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ berikut. Tentukan pula *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.



Gambar 3.8 *Digraph* Multipartisi Lengkap $K_{2,2,3}$

Pada Gambar 3.8, *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ mempunyai himpunan titik

$$V(K_{2,2,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(K_{2,2,3}) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{32}\}.$$

Matriks jarak 7x7 yang bersesuaian dengan *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$, $M=(m_{ij})$ berikut.

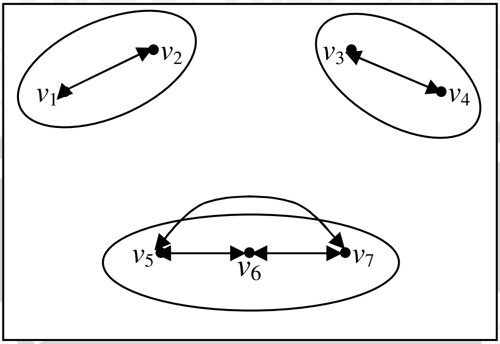
$$
M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Berdasarkan matriks jarak M dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$, diperoleh eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik dalam *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ yang disajikan dalam Tabel 3.6 berikut.

Tabel 3.6 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
v_1	$e(v_1)=2$	v_2
v_2	$e(v_2)=2$	v_1
v_3	$e(v_3)=2$	v_4
v_4	$e(v_4)=2$	v_3
v_5	$e(v_5)=2$	v_6,v_7
v_6	$e(v_6)=2$	v_5,v_7
v_7	$e(v_7)=2$	v_5,v_6

Dengan menghubungkan tiap titik dalam *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ dengan titik eksentriknya, diperoleh eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ berikut.



Gambar 3.9 Eksentrik *Digraph* dari
Digraph Multipartisi Lengkap $K_{2,2,3}$

Pada Gambar 3.9, eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$, yang dinotasikan $ED(K_{2,2,3})$ mempunyai himpunan titik

$$V(ED(K_{2,2,3})) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\},$$

di mana $V(ED(K_{2,2,3})) = V(K_{2,2,3})$ dan himpunan rusuk

$$A(ED(K_{2,2,3})) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}\}.$$

Matriks jarak 7x7 yang bersesuaian dengan eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$, $M'=(m_{ij})'$ sebagai berikut.

$$M' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

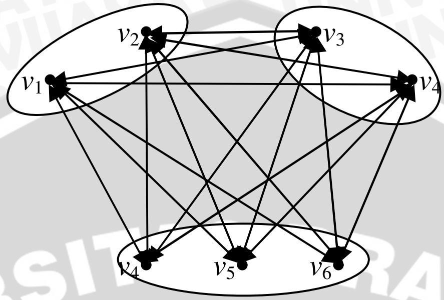
Nampak bahwa matriks jarak *M* pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ tidak sama dengan matriks jarak *M'* pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$. Sehingga iterasi perlu dilakukan kembali, yaitu dengan menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$.

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$, cukup diperhatikan matriks jarak *M'* yang menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik dalam eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$. Dari matriks jarak *M'*, diperoleh eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ yang disajikan dalam Tabel 3.7 berikut.

Tabel 3.7 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
v_1	$e(v_1)=\infty$	v_3, v_4, v_5, v_6, v_7
v_2	$e(v_2)=\infty$	v_3, v_4, v_5, v_6, v_7
v_3	$e(v_3)=\infty$	v_1, v_2, v_5, v_6, v_7
v_4	$e(v_4)=\infty$	v_1, v_2, v_5, v_6, v_7
v_5	$e(v_5)=\infty$	v_1, v_2, v_3, v_4
v_6	$e(v_6)=\infty$	v_1, v_2, v_3, v_4
v_7	$e(v_7)=\infty$	v_1, v_2, v_3, v_4

Dengan menghubungkan tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $ED(K_{2,2,3})$ dengan titik eksentriknya, diperoleh eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$ yang dinotasikan dengan $ED^2(K_{2,2,3})$ sebagai berikut.



Gambar 3.10 Eksentrik *Digraph* dari
Eksentrik *Digraph* $ED(K_{2,2,3})$

Pada Gambar 3.10, eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$ mempunyai himpunan titik

$$V(ED^2(K_{2,2,3})) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\},$$

di mana $V(ED^2(K_{2,2,3})) = V(ED(K_{2,2,3}))$ dan himpunan rusuk

$$A(K_{2,2,3}) = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{32}\}.$$

Matriks jarak 7x7 yang bersesuaian dengan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$, $M" = (m_{ij})"$ yaitu

$$M" = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nampak bahwa matriks jarak *M* pada *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ dan matriks jarak *M"* pada eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(K_{2,2,3})$ adalah sama, artinya

$$ED^2(K_{2,2,3}) = K_{2,2,3}$$

Karena $ED^2(K_{2,2,3}) = K_{2,2,3}$, maka diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ adalah sebagai berikut :

$$K_{2,2,3}, ED(K_{2,2,3}),$$

Jika $K_{2,2,3}$ dapat dinotasikan sebagai $ED^0(K_{2,2,3})$, maka untuk $ED^2(K_{2,2,3}) = K_{2,2,3}$ dapat dituliskan sebagai

$$ED^2(K_{2,2,3}) = ED^0(K_{2,2,3})$$

Berdasarkan proposisi 1, dapat diketahui bahwa

$$t(K_5) = 0$$
$$p(K_5) + t(K_5) = 2.$$

Sehingga, diperoleh $p(K_5) = 2$.

Jadi, dapat diketahui bahwa perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ mempunyai *period* yaitu 2 dan *tail* 0.

Hasil perhitungan secara analitik tersebut, sesuai dengan perhitungan menggunakan program *Delphi* untuk menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{2,2,3}$ pada Lampiran 2.

3.6 Eksentrik *Digraph* dari Sikel Berarah

Dalam bagian ini akan dibahas bagaimana menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah, sehingga dapat diketahui *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah tersebut.

3.6.1 Menentukan Eksentrik *Digraph* dari Sikel Berarah

Sikel berarah C_n adalah *digraph* yang mempunyai n titik dalam satu lingkaran, dengan rusuk-rusuk dalam sikel berarah adalah searah dan tertutup. Misal sikel berarah C_n mempunyai himpunan titik

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(C_n) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

dimana derajat luar tiap titik sama dengan derajat masuknya, yaitu 1. Banyaknya rusuk dari sikel berarah C_n dapat dituliskan sebagai

$$|A(C_n)| = n.$$

Sehingga, panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam sikel berarah C_n, dapat disajikan dalam matriks jarak *n* x *n, M*=(m_{ij}) berikut.

$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n-2 & n-1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pada matriks hubung *M,* nampak bahwa jarak maksimal dari setiap titik dalam sikel berarah C_n ke semua titik yang berbeda dalam sikel berarah C_n adalah $n - 1$, sehingga diperoleh eksentrisitas titik v_i untuk i = 1, 2, ... , n pada sikel berarah C_n adalah

$$e(v_i) = n - 1,$$

dan titik eksentrik pada sikel berarah C_n adalah

$$\text{titik eksentrik dari } v_i = \begin{cases} v_n, & \text{untuk } i = 1 \\ v_j, & \text{untuk } i=2,3,\ldots,n \\ & j=i-1. \end{cases}$$

Berdasarkan eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada sikel berarah C_n, dapat diperoleh eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n, yang dinotasikan dengan $ED(C_n)$ yaitu dengan menghubungkan tiap titik pada sikel berarah C_n dengan titik eksentriknya.

Eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n, yang dinotasikan dengan $ED(C_n)$ adalah sikel berarah C_n dengan himpunan titik

$$V(ED(C_n)) = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(ED(C_n)) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

di mana setiap titik dalam eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n *adjacent* ke setiap titik eksentriknya. Banyaknya rusuk pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah, $ED(C_n)$ adalah sebagai berikut

$$|A(ED(C_n))| = n.$$

Sehingga, panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n, dapat disajikan dalam matriks hubung n x n, $M' = (m_{ij})'$ berikut.

$$M' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & n-1 & \cdots & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 4 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & n-1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks jarak M dan dengan matriks jarak M', dimana $M'=M^T$ sehingga diketahui bahwa eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n, yang dinotasikan $ED(C_n)$ adalah sikel berarah yang arah rusuknya berlawanan dengan arah rusuk pada sikel berarah C_n.

3.6.2 Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari Sikel Berarah

Barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n dapat dicapai jika terdapat eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi menentukan eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n. Untuk mengetahui adanya eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi menentukan eksentrik *digraph,* yaitu dengan memeriksa matriks jarak dari setiap eksentrik *digraph* dalam iterasi.

Nampak bahwa matriks jarak M pada sikel berarah C_n tidak sama dengan matriks jarak M' pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n. Sehingga iterasi perlu dilakukan kembali, untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$ yang dapat dituliskan,

$$ED(ED(C_n)) = ED^2(C_n).$$

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$, cukup diperhatikan matriks jarak M' yang menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik dalam eksentrik *digraph* $ED(C_n)$. Dari matriks jarak M', diketahui bahwa eksentrisitas titik v_i untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n, $ED(C_n)$adalah

$$e(v_i) = n - 1,$$

dan titik eksentrik pada eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$adalah

$$\text{titik eksentrik dari } v_i = \begin{cases} v_j, & \text{untuk } i=1,2,3,\ldots,n-1 \\ & j=i+1 \\ v_1, & \text{untuk } i = n. \end{cases}$$

Berdasarkan eksentrisitas titik $e(v_i)$ dan titik eksentrik pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah $ED(C_n)$ dapat diperoleh eksentrik *digraph* dari $ED(C_n)$yang dinotasikan dengan $ED(ED(C_n)$, di mana

$$ED(ED(C_n))=ED^2(C_n).$$

Eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$ yang dinotasikan dengan $ED^2(C_n)$ adalah *digraph* dengan himpunan titik

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(ED(C_n)) = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

di mana tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$ *adjacent* ke setiap titik eksentriknya dalam eksentrik *digraph* $ED(C_n)$. Banyaknya rusuk pada eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$ adalah sebagai berikut.

$$|A(ED^2(C_n))| = n$$

Panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$, dapat disajikan dalam matriks jarak n x n, $M''=(m_{ij})$" berikut.

$$M'' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n-2 & n-1 & 0 & \cdots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nampak bahwa matriks jarak *M"* pada eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$ dan matriks jarak M pada sikel berarah $ED(C_n)$ adalah sama, artinya

$$ED^2(C_n) = C_n \qquad (3.12).$$

Berdasarkan Persamaan 3.12, diketahui bahwa eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_n)$, yang dinotasikan $ED^2(C_n)$ sama dengan sikel berarah C_n, sehingga dapat dituliskan dengan

$$ED^2(C_n) = C_n.$$

Karena $ED^2(C_n) = C_n$, maka diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n adalah sebagai berikut

$$C_n, ED(C_n), .$$

Berdasarkan Persamaan 3.12, misal C_n dapat dinotasikan sebagai $ED^0(C_n)$, maka untuk Persamaan 3.12 dapat dituliskan sebagai

$$ED^2(C_n) = ED^0(C_n) \qquad (3.13).$$

Berdasarkan Proposisi 1, dapat diketahui bahwa

$$t(C_n) = 0 \qquad (3.14)$$
$$p(C_n) + t(C_n) = 2 \qquad (3.15).$$

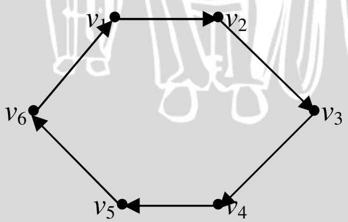
Dengan mensubstitusikan persamaan 3.14 ke 3.15, diperoleh

$$p(C_n) + t(C_n) = 2$$
$$p(C_n) + 0 = 2$$
$$p(C_n) = 2.$$

Sehingga, dapat diketahui bahwa perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n adalah mempunyai *period* yaitu 2 dan *tail* yaitu 0.

Contoh 3.3

Tentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6 berikut. Tentukan pula *period* dan *tail* dari barisan iterasi eksentrik *digraph* tersebut.



Gambar 3.11 Sikel Berarah C_6

Pada Gambar 3.11, sikel berarah C_6 mempunyai himpunan titik

$$V(C_6) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

dan himpunan rusuk

$$A(C_6) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}\,.$$

Matriks jarak 6x6 yang bersesuaian dengan sikel berarah C_6, $M=(m_{ij})$ yaitu.

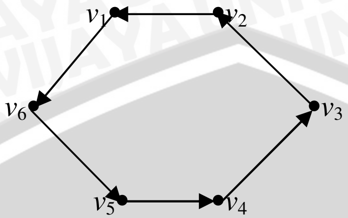
$$M = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_5 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Berdasarkan matriks jarak M dari sikel berarah C_6, diperoleh eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik dalam sikel berarah C_6 yang disajikan dalam Tabel 3.8 berikut.

Tabel 3.8 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada sikel berarah C_6

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
v_1	$e(v_1)=5$	v_6
v_2	$e(v_2)=5$	v_1
v_3	$e(v_3)=5$	v_2
v_4	$e(v_4)=5$	v_3
v_5	$e(v_5)=5$	v_4
v_6	$e(v_6)=5$	v_5

Dengan menghubungkan tiap titik dalam sikel berarah C_6 dengan titik eksentriknya, diperoleh eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6 berikut.



Gambar 3.12 Eksentrik *Digraph* dari Sikel Berarah C_6

Pada Gambar 3.12, eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6, yang dinotasikan $ED(C_6)$ mempunyai himpunan titik

$$V(ED(C_6)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

di mana $V(ED(C_6)) = V(C_6)$ dan himpunan rusuk

$$A(ED(C_6)) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}.$$

Matriks jarak 6x6 yang bersesuaian dengan eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6, $M' = (m_{ij})'$ yaitu :

$$M' = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

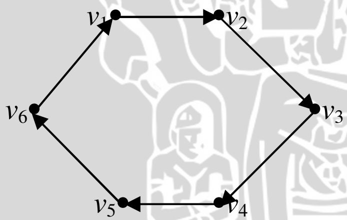
Sesuai dengan Sifat 3.6, nampak bahwa matriks jarak M pada sikel berarah C_6 tidak sama dengan matriks jarak M' pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6, di mana $M' = M^T$. Sehingga iterasi perlu dilakukan kembali, yaitu dengan menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_6)$.

Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_6)$, cukup diperhatikan matriks jarak M' yang menyatakan panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik dalam eksentrik *digraph* $ED(C_6)$. Dari matriks jarak *M'*, diperoleh eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari C_6 yang disajikan dalam Tabel 3.9 berikut.

Tabel 3.9 Eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari tiap titik pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6

Titik	**Eksentrisitas Titik**	**Titik Eksentrik**
v_1	$e(v_1)=5$	v_2
v_2	$e(v_2)=5$	v_3
v_3	$e(v_3)=5$	v_4
v_4	$e(v_4)=5$	v_5
v_5	$e(v_5)=5$	v_6
v_6	$e(v_6)=5$	v_1

Dengan menghubungkan tiap titik dalam eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6, $ED(C_6)$ dengan titik eksentriknya, diperoleh eksentrik *digraph* dari eksentrik *digraph* $ED(C_6)$ yang dinotasikan dengan $ED^2(C_6)$ sebagai berikut.



Gambar 3.13 Eksentrik *Digraph* dari Eksentrik *Digraph* $ED(C_6)$

Pada Gambar 3.13, eksentrik *digraph* dari eksentrik digraph $ED(C_6)$, yang dinotasikan $ED^2(C_6)$ mempunyai himpunan titik

$$V(ED^2(C_6)) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\},$$

di mana $V(ED^2(C_6)) = V(ED(C_6))$ dan himpunan rusuk

$$A(ED^2(C_6)) = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}.$$

Matriks jarak 6x6 yang bersesuaian dengan eksentrik *digraph* dari dari eksentrik digraph $ED(C_6)$, yang dinotasikan $ED^2(C_6)$, M"=(m_{ij})" yaitu:

$$M''=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nampak bahwa matriks jarak M pada sikel berarah C_6 dan matriks jarak pada eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6 adalah sama, artinya

$$ED^2(C_6) = C_6 .$$

Karena $ED^2(C_6) = C_6$, maka diperoleh barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6 adalah sebagai berikut :

$$C_6, ED(C_6)$$

Jika C_6 dapat dinotasikan sebagai $ED^0(C_6)$, maka untuk $ED^2(C_6) = C_6$ dapat dituliskan sebagai

$$ED^2(C_6) = ED^0(C_6)$$

Berdasarkan Proposisi 1, dapat diketahui bahwa

$$t(C_6) = 0$$
$$p(C_6) + t(C_6) = 2.$$

Sehingga, diperoleh $p(C_6) = 2$.

Jadi, dapat diketahui bahwa perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6 mempunyai *period* yaitu 2 dan *tail* 0.

Hasil perhitungan secara analitik tersebut, sesuai dengan perhitungan menggunakan program *Delphi* untuk menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_6 pada Lampiran 2.

BAB IV
PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Dari pembahasan skripsi ini dapat disimpulkan hal-hal berikut.

1. Untuk menentukan eksentrik *digraph* dari *digraph*, mula-mula dicari panjang lintasan terpendek dari setiap pasangan titik yang berbeda dalam *digraph* dan menyusunnya dalam matriks jarak. Sehingga diperoleh eksentrisitas titik dan titik eksentrik dari setiap titik pada *digraph.* Dengan menghubungkan setiap titik pada *digraph* dengan titik eksentriknya, maka akan diperoleh eksentrik *digraph dari digraph.*
2. Untuk menentukan barisan iterasi eksentrik *digraph*, yaitu dengan menemukan eksentrik *digraph* yang sama dalam iterasi eksentrik *digraph.*
3. Perilaku dari barisan iterasi eksentrik *digraph* yaitu terdapat bilangan bulat terkecil $p>0$ dan $t \geq 0$ sedemikian hingga $ED^{p+t}(G) = ED^{t}(G)$, di mana $p = p(D)$ dan $t=t(D)$ adalah nilai *period* dan *tail*.
4. Eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n adalah *digraph* lengkap K_n. Barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* lengkap K_n yaitu:

   $$K_n,$$

   di mana barisan iterasi eksentrik *digraph* lengkap K_n mempunyai *period* 1 dan *tail* 0.
5. Eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, yang dinotasikan $ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, adalah gabungan dari *digraph* lengkap sebanyak n_k. Barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ yaitu:

   $$K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}, ED(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}),$$

di mana barisan iterasi eksentrik *digraph* dari *digraph* multipartisi lengkap $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ mempunyai *period* yaitu 2 dan *tail* 0.

6. Eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n, yang dinotasikan $ED(C_n)$ adalah sikel berarah yang arahnya berlawanan dengan arah sikel berarah C_n. Barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah C_n yaitu:

$$C_n,\ ED(C_n),$$

di mana barisan iterasi eksentrik *digraph* dari sikel berarah mempunyai *period* 2 dan *tail* 0.

4.2 Saran

Penelitian untuk menentukan eksentrik *digraph* dalam skripsi ini masih dapat dikembangkan pada beberapa jenis *digraph* yang lain, dimungkinkan pula untuk mencari eksentrik *digraph* dari *digraph* terboboti dan *digraph* yang digabungkan dengan *digraph* lain.

DAFTAR PUSTAKA

Boland, J., F. Buckley dan M. Miller. 2001. *Eccentric digraphs*, Discrete Mathematics, Vol.286, No.1–2 (2004), 25–29. http://www.etsu.edu/math/boland/papers/eccentric.ps, tanggal akses : 29 April 2008.

Boland, J. dan M. Miller. 2001. *The eccentric digraph of a digraph*, Proceedings of the 12th Australasian Workshop of Combinatorial Algorithms (AWOCA 2001), 66–70. http://www.etsu.edu/math/boland/papers/mirka.ps, tanggal akses : 20 April 2008.

Buckley, F. dan F. Harary. 1990. *Distance in Graphs.* Addison-Wesley. Redwood City, CA.

Chartrand, G. dan L.Lesniak 1996. *Graphs and Digraphs. 3rd edition.* Chapmand and Hill, Inc. London.

Chartrand, G. dan O.R. Oellermann. 1993. *Applied and Algorithmic Graph Theory.* McGraw-Hill,Inc. Singapore.

Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. McGraw-Hill,Inc. Singapore.

Gimbert, J., N. Lopez, M.Miller, J. Ryan. 2004. *Characterization of Eccentric Digraph*, Discrete Mathematics, Vol.306(2006), 210-219. http://rapidshare.com/files/104521407/Joan.pdf, tanggal akses : 4 Mei 2008.

Gimbert, J., F. Ruskey, M.Miller, J. Ryan. 2005. *Iterations of eccentric digraphs*, http://webhome.cs.uvic.ca/~ruskey/Publications/Eccentric/Eccentric.pdf, tanggal akses : 9 April 2008.

Gimbert, J., dan N. Lopez. 2005. *On TheBehaviour of Sequences of Iterated Eccentric Digraphs.* http://www.mac.cie.uva.es/~revilla/vjmda/files/038.pdf, tanggal akses : 21 April 2008.

Golumbic, M.C. 1980. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs.* Academic Press,Inc. United State of America.

Grimaldi, R.P. 1994. *Discrete and Combinatorial Mathematics An Applied Introduction.* Addison-Wesley Publishing Company,Inc. Redwood City, CA.

Lipschutz, S. dan M.L. Lipson. 2002. *Seri Penyelesaian Soal Schaum : Matematika Diskrit. Edisi Pertama.* Salemba Teknika. Jakarta.

McHugh, J.A. 1990. *Algorithmic Graph Theory.* Prentice-Hall,Inc. United States of America.

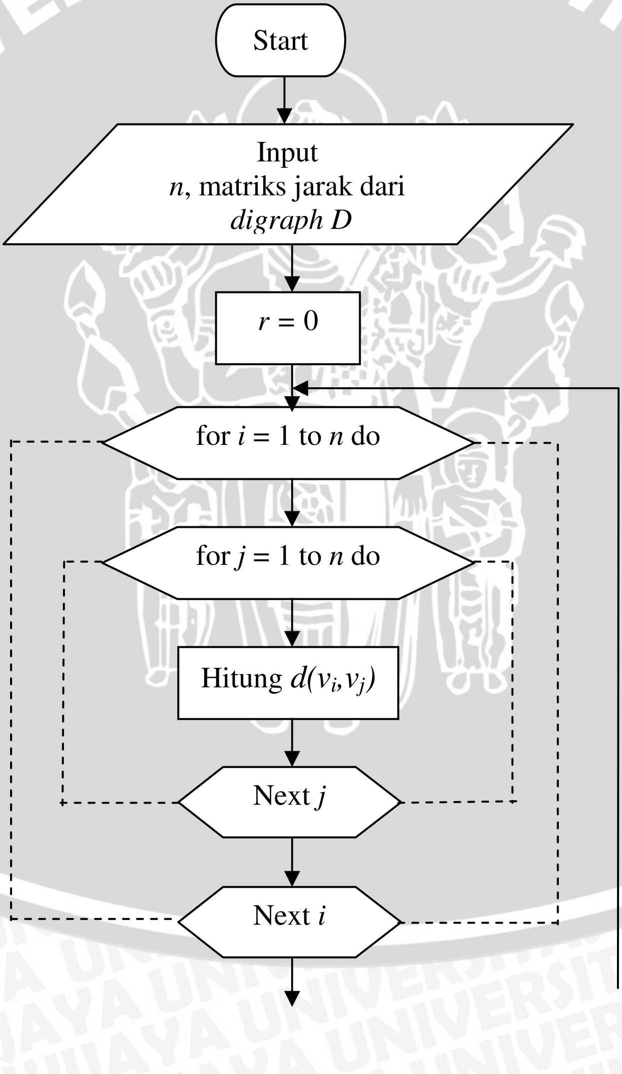
Nugroho, K.W. 2002. *Eksentrik Digraf dari Graf Star, Graf Double Star, dan Graf Komplit Bipartit.* http://www.informatika.org/~rinaldi/Matdis/2006-2007/Makalah/Makalah0607-60.pdf, tanggal akses : 28 Maret 2008.

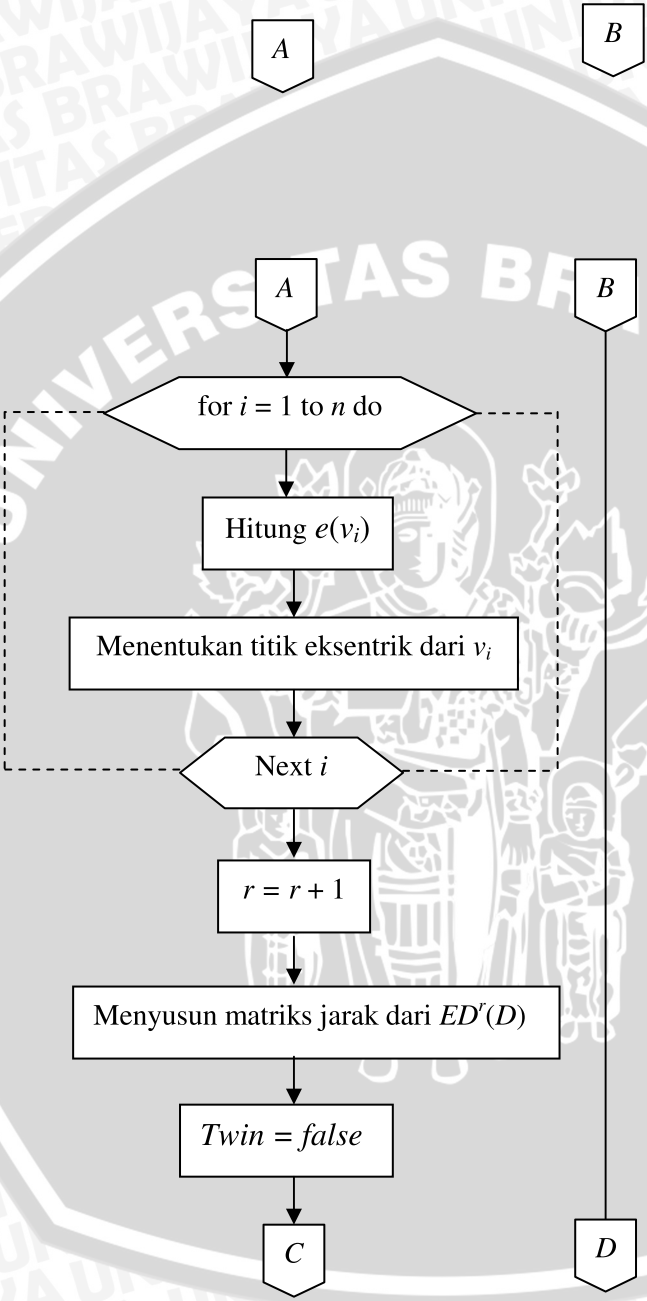
Paugh, R.J. 1989. *Discrete Mathematics. Revised Edition*, Mac-Millan Publishing Company. New York.

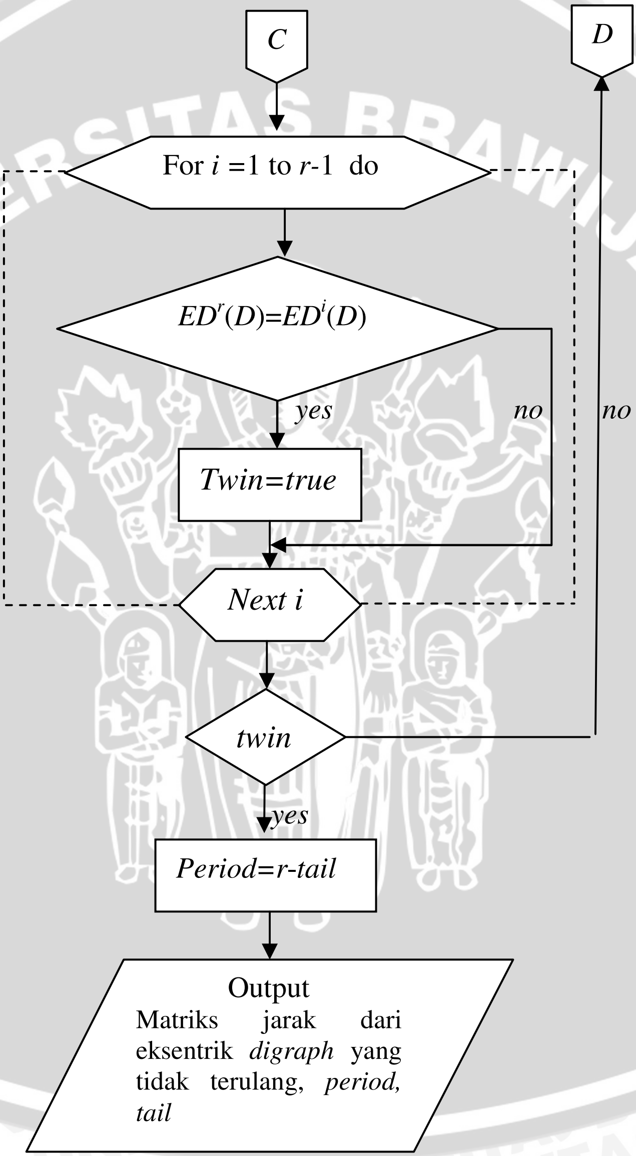
Siang, J.J. 2002. *Matematika Diskrit dan Aplikasinya dalam Ilmu Komputer.* Penerbit Andi. Yogyakarta.

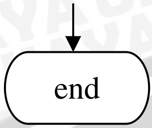
LAMPIRAN

Lampiran 1. Flowchart dari algoritma menentukan eksentrik *digraph* dan barisan iterasi eksentrik *digraph*.




A
B
A
B
for i = 1 to n do
Hitung $e(v_i)$
Menentukan titik eksentrik dari v_i
Next i
$r = r + 1$
Menyusun matriks jarak dari $ED^r(D)$
Twin = *false*
C
D


C
D
For i =1 to r-1 do
ED^r(D)=ED^i(D)
yes
no
no
Twin=true
Next i
twin
yes
Period=r-tail
Output
Matriks jarak dari eksentrik digraph yang tidak terulang, period, tail



Lampiran 2. *Listing Program*

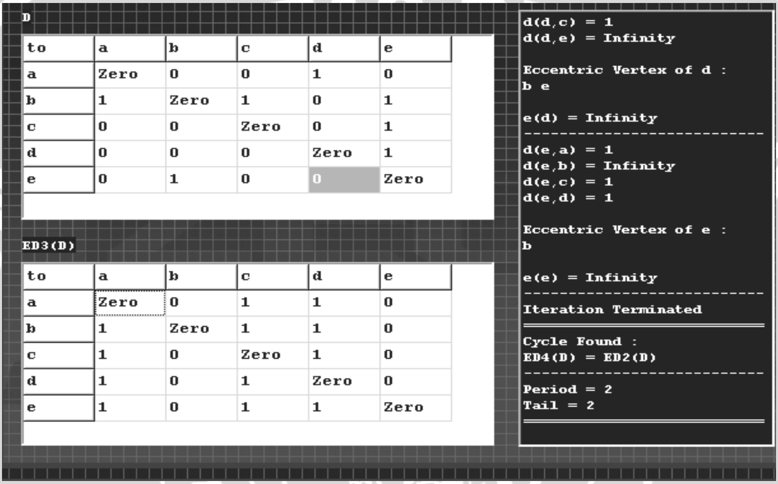
```
begin
{membersihkan hasil perhitungan sebelumnya}
l:=0;
for i:=1 to 25 do
    for j:=1 to 25 do
        for k:=0 to 20 do
            begin
            d[i,j,k]:=0;
            a[i,j,k]:=0;
            end;
{membaca matriks untuk Graf}
if Operation='G' then
   begin
   for i:=1 to nVer do
       for j:=i+1 to nVer do
           begin
           Matrix.Cells[j,i]:=Matrix.Cells[i,j];
                  d[i,j,l]:=StrtoInt(Matrix.Cells[j,i]);
                  a[i,j,l]:=d[i,j,l];
           d[j,i,l]:=d[i,j,l];
           a[j,i,l]:=d[j,i,l];
           end;
{mencari lintasan terpendek}
   for i:=1 to nVer-1 do
       for j:=i+1 to nVer do
           if d[i,j,l]<>0 then
              for k:=1 to nVer do
                  begin
                  if (k<>i) and (k<>j) and (d[k,i,l]<>0) and
                                    ((d[k,j,l]>d[k,i,l]+d[i,j,l]) or (d[k,j,l]=0))
                           then
                     begin
                     d[k,j,l]:=d[k,i,l]+d[i,j,l];
```

```
                d[j,k,l]:=d[k,j,l];
                end
              else if (k<>i) and (k<>j) and (d[j,k,l]<>0) and
                             ((d[i,k,l]>d[i,j,l]+d[j,k,l]) or (d[i,k,l]=0))
                  then
                begin
                d[i,k,l]:=d[i,j,l]+d[j,k,l];
                d[k,i,l]:=d[i,k,l];
                end;
              end;
  end;

{membaca matriks dari digraph}
if Operation='D' then
  for i:=1 to nVer do
     for j:=1 to nVer do
        if i<>j then
          begin
          d[i,j,l]:=StrtoInt(Matrix.Cells[j,i]);
          a[i,j,l]:=d[i,j,l];
          end;
repeat
if Burst then
  if l>0 then Operation:='D';    {untuk graf, }
{Mencari lintasan terpendek untuk digraph}
for i:=1 to nVer do
   for j:=1 to nVer do
      if (i<>j) and (d[i,j,l]<>0) then
        for k:=1 to nVer do
          begin
          if (k<>i) and (k<>j) and (d[k,i,l]<>0) and
             ((d[k,j,l]>d[k,i,l]+d[i,j,l]) or (d[k,j,l]=0)) then
             d[k,j,l]:=d[k,i,l]+d[i,j,l]
          else if (k<>i) and (k<>j) and (d[j,k,l]<>0) and
             ((d[i,k,l]>d[i,j,l]+d[j,k,l]) or (d[i,k,l]=0)) then
             d[i,k,l]:=d[i,j,l]+d[j,k,l];
          end;
{mencari eksentrisitas  titik}
for i:=1 to nVer do
   begin
```

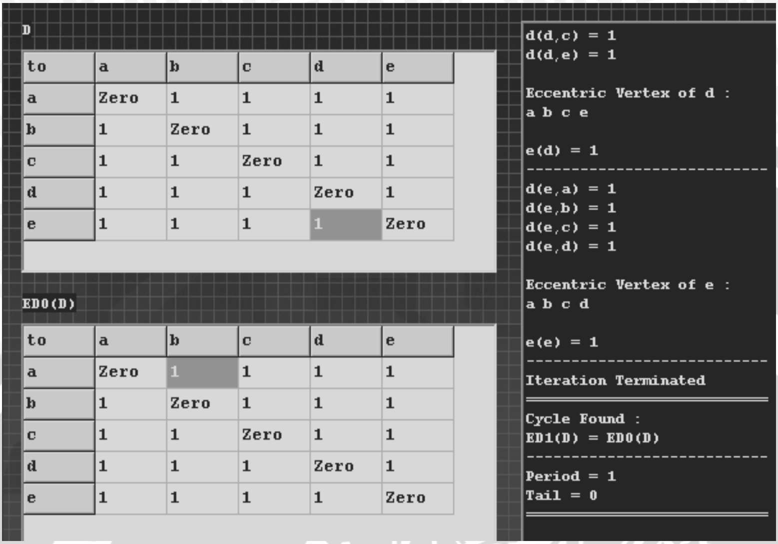
```
    Max:=0;
    for j:=1 to nVer do
      if i<>j then
      begin
      if (d[i,j,l]=0) and (Operation='D') then
         d[i,j,l]:=1000000;
      else
      if Max<d[i,j,l] then
         Max:=d[i,j,l]
      end;
    for j:=1 to nVer do
      if Max=d[i,j,l] then
         begin
         d[i,j,l+1]:=1;
         a[i,j,l+1]:=1;
         end;
    end;
{memeriksa apakah eksentrik digraph dari graf dan digraph adalah suatu
digraph}
k:=-1;
repeat
     k:=k+1;
     Twin:=true;
     for i:=1 to nVer do
        for j:=1 to nVer do
           if (i<>j) and (a[i,j,l+1]<>a[i,j,k]) then
              Twin:=false;
until (k=l) or (Twin);{mencari period dan tail}
l:=l+1;
if Burst then
  if Twin then
     begin
     Period:=l-k;
     Tail:=k;
          end;
until (Twin and Burst) or ((not Burst) and (l=1));
{output}
for i:=1 to nVer do
   for j:=1 to nVer do
      if i<>j then
```

```
            if Burst then
              Result.Cells[j,i]:=InttoStr(a[i,j,l-1])
            else Result.Cells[j,i]:=InttoStr(a[i,j,l]);

end;
```

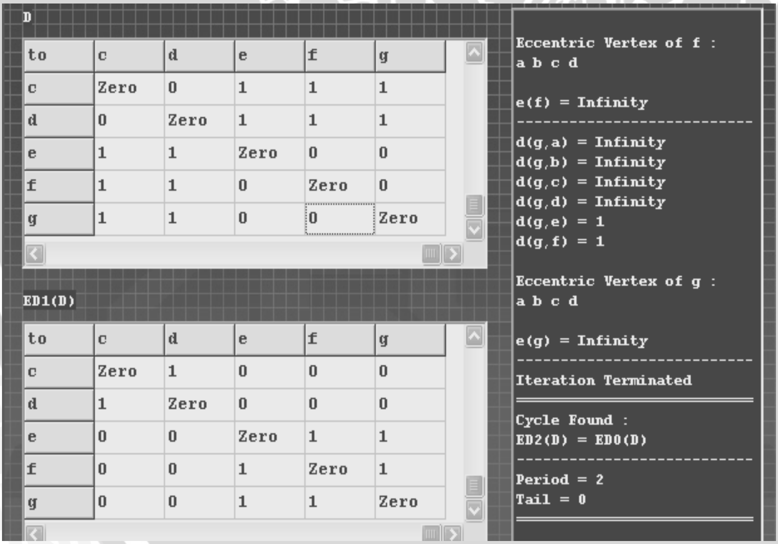
Tampilan Output untuk Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph D* pada Gambar 3.1



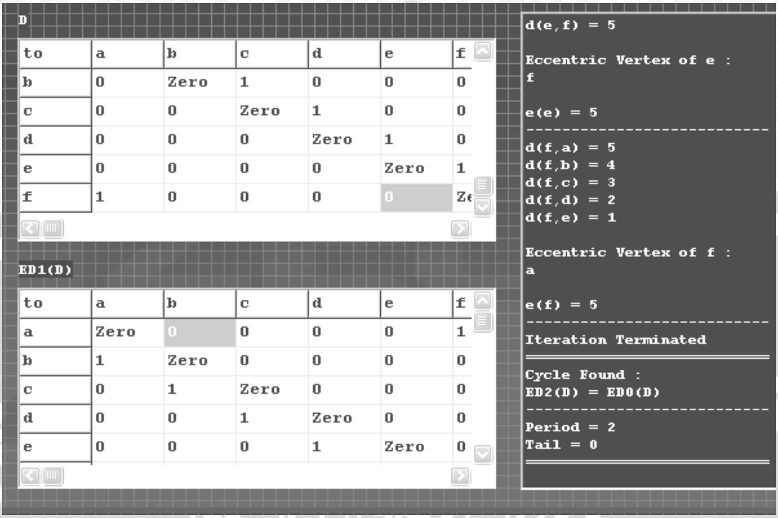
Tampilan Output untuk Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Lengkap K_5 pada Gambar 3.6



Tampilan Output untuk Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari *Digraph* Multipartisi Lengkap $K_{2,2,3}$ pada Gambar 3.8



Tampilan Output untuk Menentukan Barisan Iterasi Eksentrik *Digraph* dari Sikel Berarah C_6 pada Gambar 3.11


D
to a b c d e f
b 0 Zero 1 0 0 0
c 0 0 Zero 1 0 0
d 0 0 0 Zero 1 0
e 0 0 0 0 Zero 1
f 1 0 0 0 0 Ze
ED1(D)
to a b c d e f
a Zero 0 0 0 0 1
b 1 Zero 0 0 0 0
c 0 1 Zero 0 0 0
d 0 0 1 Zero 0 0
e 0 0 0 1 Zero 0
d(e,f) = 5
Eccentric Vertex of e :
f
e(e) = 5
d(f,a) = 5
d(f,b) = 4
d(f,c) = 3
d(f,d) = 2
d(f,e) = 1
Eccentric Vertex of f :
a
e(f) = 5
Iteration Terminated
Cycle Found :
ED2(D) = ED0(D)
Period = 2
Tail = 0

{Eksentrik Digraph dan Barisan Iterasi Eksentrik Digraph dari Digraph D pada Gambar 3.1}

Step #0
D

d(a,b) = 3
d(a,c) = 4
d(a,d) = 1
d(a,e) = 2

Eccentric Vertex of a : c
e(a) = 4

d(b,a) = 1
d(b,c) = 1
d(b,d) = 2
d(b,e) = 1

Eccentric Vertex of b : d
e(b) = 2

d(c,a) = 3
d(c,b) = 2
d(c,d) = 4
d(c,e) = 1

Eccentric Vertex of c : d
e(c) = 4

d(d,a) = 3
d(d,b) = 2
d(d,c) = 3
d(d,e) = 1

Eccentric Vertex of d : a c
e(d) = 3

d(e,a) = 2
d(e,b) = 1
d(e,c) = 2
d(e,d) = 3

Eccentric Vertex of e : d
e(e) = 3

Iteration Continued

Step #1
ED1(D)

d(a,b) = Infinity
d(a,c) = 1
d(a,d) = 2
d(a,e) = Infinity

Eccentric Vertex of a : b e
e(a) = Infinity

d(b,a) = 2
d(b,c) = 2
d(b,d) = 1
d(b,e) = Infinity

Eccentric Vertex of b : e
e(b) = Infinity

d(c,a) = 2
d(c,b) = Infinity
d(c,d) = 1
d(c,e) = Infinity

Eccentric Vertex of c : b e
e(c) = Infinity

d(d,a) = 1
d(d,b) = Infinity
d(d,c) = 1
d(d,e) = Infinity

Eccentric Vertex of d : b e
e(d) = Infinity

d(e,a) = 2
d(e,b) = Infinity
d(e,c) = 2
d(e,d) = 1

Eccentric Vertex of e : b
e(e) = Infinity

-Iteration Continued

Step #2
ED2(D)

d(a,b) = 1
d(a,c) = Infinity
d(a,d) = Infinity
d(a,e) = 1

Eccentric Vertex of a : c d
e(a) = Infinity

d(b,a) = Infinity
d(b,c) = Infinity
d(b,d) = Infinity
d(b,e) = 1

Eccentric Vertex of b : a c d
e(b) = Infinity

d(c,a) = Infinity
d(c,b) = 1
d(c,d) = Infinity
d(c,e) = 1

Eccentric Vertex of c :
a d
e(c) = Infinity

d(d,a) = Infinity
d(d,b) = 1
d(d,c) = Infinity
d(d,e) = 1

Eccentric Vertex of d :
a c
e(d) = Infinity

d(e,a) = Infinity
d(e,b) = 1
d(e,c) = Infinity
d(e,d) = Infinity

Eccentric Vertex of e :
a c d
e(e) = Infinity

Iteration Continued

Step #3
ED3(D)

d(a,b) = Infinity
d(a,c) = 1
d(a,d) = 1
d(a,e) = Infinity

Eccentric Vertex of a :
b e
e(a) = Infinity

-d(b,a) = 1
d(b,c) = 1
d(b,d) = 1
d(b,e) = Infinity

Eccentric Vertex of b :
e
e(b) = Infinity

d(c,a) = 1
d(c,b) = Infinity
d(c,d) = 1
d(c,e) = Infinity

Eccentric Vertex of c :
b e
e(c) = Infinity

d(d,a) = 1
d(d,b) = Infinity
d(d,c) = 1
d(d,e) = Infinity

Eccentric Vertex of d :
b e
e(d) = Infinity

d(e,a) = 1
d(e,b) = Infinity
d(e,c) = 1
d(e,d) = 1

Eccentric Vertex of e :
b
e(e) = Infinity

Iteration Terminated
================
===
Cycle Found :
ED4(D) = ED2(D)

Period = 2
Tail = 2

{Eksentrik Digraph dan Barisan Iterasi Eksentrik Digraph dari Digraph Lengkap K_5 pada Gambar 3.6}

Step #0
D

d(a,b) = 1
d(a,c) = 1
d(a,d) = 1
d(a,e) = 1

Eccentric Vertex of a :
b c d e
e(a) = 1

d(b,a) = 1
d(b,c) = 1
d(b,d) = 1
d(b,e) = 1

Eccentric Vertex of b :
a c d e
e(b) = 1

-d(c,a) = 1
d(c,b) = 1
d(c,d) = 1
d(c,e) = 1

Eccentric Vertex of c :
a b d e
e(c) = 1

-d(d,a) = 1
d(d,b) = 1
d(d,c) = 1
d(d,e) = 1

Eccentric Vertex of d :
a b c e
e(d) = 1

----
d(e,a) = 1
d(e,b) = 1
d(e,c) = 1
d(e,d) = 1

Eccentric Vertex of e :
a b c d

e(e) = 1

Iteration Terminated
=============================
Cycle Found :
ED1(D) = ED0(D)

Period = 1
Tail = 0

{Eksentrik Digraph dan Barisan Iterasi Eksentrik Digraph dari Digraph Multipartisi Lengkap $K_{2,2,3}$ pada Gambar 3.8}

Step #0
D
----
d(a,b) = 2
d(a,c) = 1
d(a,d) = 1
d(a,e) = 1
d(a,f) = 1
d(a,g) = 1

Eccentric Vertex of a :
b
e(a) = 2

---

d(b,a) = 2
d(b,c) = 1
d(b,d) = 1
d(b,e) = 1
d(b,f) = 1
d(b,g) = 1

Eccentric Vertex of b :
a
e(b) = 2

---

d(c,a) = 1
d(c,b) = 1
d(c,d) = 2
d(c,e) = 1
d(c,f) = 1
d(c,g) = 1

Eccentric Vertex of c :
d
e(c) = 2

---

d(d,a) = 1
d(d,b) = 1
d(d,c) = 2
d(d,e) = 1
d(d,f) = 1
d(d,g) = 1

Eccentric Vertex of d :
c
e(d) = 2

---

d(e,a) = 1
d(e,b) = 1
d(e,c) = 1
d(e,d) = 1
d(e,f) = 2
d(e,g) = 2

Eccentric Vertex of e :
f g
e(e) = 2

---

d(f,a) = 1
d(f,b) = 1
d(f,c) = 1
d(f,d) = 1
d(f,e) = 2
d(f,g) = 2

Eccentric Vertex of f :
e g
e(f) = 2

---

d(g,a) = 1
d(g,b) = 1
d(g,c) = 1
d(g,d) = 1
d(g,e) = 2
d(g,f) = 2

Eccentric Vertex of g :
e f
e(g) = 2

-Iteration Continued

Step #1
ED1(D)

---

d(a,b) = 1
d(a,c) = Infinity
d(a,d) = Infinity
d(a,e) = Infinity
d(a,f) = Infinity
d(a,g) = Infinity

Eccentric Vertex of a :
c d e f g
e(a) = Infinity

---

d(b,a) = 1
d(b,c) = Infinity
d(b,d) = Infinity
d(b,e) = Infinity
d(b,f) = Infinity
d(b,g) = Infinity

Eccentric Vertex of b :
c d e f g
e(b) = Infinity

---

d(c,a) = Infinity
d(c,b) = Infinity
d(c,d) = 1
d(c,e) = Infinity
d(c,f) = Infinity
d(c,g) = Infinity

Eccentric Vertex of c :
a b e f g
e(c) = Infinity

---

d(d,a) = Infinity
d(d,b) = Infinity
d(d,c) = 1
d(d,e) = Infinity
d(d,f) = Infinity
d(d,g) = Infinity

Eccentric Vertex of d :
a b e f g
e(d) = Infinity

---

d(e,a) = Infinity
d(e,b) = Infinity
d(e,c) = Infinity
d(e,d) = Infinity
d(e,f) = 1
d(e,g) = 1

Eccentric Vertex of e :
a b c d
e(e) = Infinity

---

d(f,a) = Infinity
d(f,b) = Infinity
d(f,c) = Infinity
d(f,d) = Infinity
d(f,e) = 1
d(f,g) = 1

Eccentric Vertex of f :
a b c d
e(f) = Infinity

---

d(g,a) = Infinity
d(g,b) = Infinity
d(g,c) = Infinity
d(g,d) = Infinity
d(g,e) = 1
d(g,f) = 1

Eccentric Vertex of g :
a b c d
e(g) = Infinity

Iteration Terminated

Cycle Found :
ED2(D) = ED0(D)

Period = 2
Tail = 0

{Eksentrik Digraph dan Barisan Iterasi Eksentrik Digraph dari Sikel Berarah C_6 pada Gambar 3.11}

Step #0
D

---

d(a,b) = 1
d(a,c) = 2
d(a,d) = 3
d(a,e) = 4
d(a,f) = 5

Eccentric Vertex of a :
f
e(a) = 5

---

d(b,a) = 5
d(b,c) = 1
d(b,d) = 2
d(b,e) = 3
d(b,f) = 4

Eccentric Vertex of b :
a
e(b) = 5

---

d(c,a) = 4
d(c,b) = 5
d(c,d) = 1
d(c,e) = 2
d(c,f) = 3

Eccentric Vertex of c : b
e(c) = 5

---

d(d,a) = 3
d(d,b) = 4
d(d,c) = 5
d(d,e) = 1
d(d,f) = 2

Eccentric Vertex of d : c
e(d) = 5

---

d(e,a) = 2
d(e,b) = 3
d(e,c) = 4
d(e,d) = 5
d(e,f) = 1

Eccentric Vertex of e : d
e(e) = 5

---

d(f,a) = 1
d(f,b) = 2
d(f,c) = 3
d(f,d) = 4
d(f,e) = 5

Eccentric Vertex of f : e
e(f) = 5

Iteration Continued

Step #1
ED1(D)

---

d(a,b) = 5
d(a,c) = 4
d(a,d) = 3
d(a,e) = 2
d(a,f) = 1

Eccentric Vertex of a : b
e(a) = 5

---

d(b,a) = 1
d(b,c) = 5
d(b,d) = 4
d(b,e) = 3
d(b,f) = 2

Eccentric Vertex of b : c
e(b) = 5

---

d(c,a) = 2
d(c,b) = 1
d(c,d) = 5
d(c,e) = 4
d(c,f) = 3

Eccentric Vertex of c : d
e(c) = 5

---

d(d,a) = 3
d(d,b) = 2
d(d,c) = 1
d(d,e) = 5
d(d,f) = 4

Eccentric Vertex of d : e
e(d) = 5

---

d(e,a) = 4
d(e,b) = 3
d(e,c) = 2
d(e,d) = 1
d(e,f) = 5

Eccentric Vertex of e : f
e(e) = 5

-
d(f,a) = 5
d(f,b) = 4
d(f,c) = 3
d(f,d) = 2
d(f,e) = 1

Eccentric Vertex of f : a
e(f) = 5

Iteration Terminated

Cycle Found : ED2(D) = ED0(D)

Period = 2
Tail = 0
