

**PERHITUNGAN BILANGAN GELOMBANG
MENGUNAKAN METODE ZERO CROSSING**

SKRIPSI

**Oleh:
LIA ULFA AGUSTIN
0310940031-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

**PERHITUNGAN BILANGAN GELOMBANG
MENGUNAKAN METODE ZERO CROSSING**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

LIA ULFA AGUSTIN

0310940031 – 94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI
PERHITUNGAN BILANGAN GELOMBANG
MENGGUNAKAN METODE *ZERO CROSSING*

Oleh :
LIA ULFA AGUSTIN
0310940031 – 94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
Pada tanggal 3 Desember 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Pembimbing I

Pembimbing II

Dr. Wuryansari M.K.,M.Si
NIP. 132 048 784

Dra. Trisilowati, M.Sc
NIP. 131 837 955

Mengetahui,
a.n. Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya
Sekretaris,

Dra. Ani Budi Astuti, M.Si
NIP. 131 993 385

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : LIA ULFA AGUSTIN
NIM : 0310940031 – 94
Jurusan : MATEMATIKA
Penulis tugas Akhir berjudul : PERHITUNGAN BILANGAN
GELOMBANG MENGGUNAKAN METODE ZERO
CROSSING

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 3 Desember 2007
Yang menyatakan,

(LIA ULFA AGUSTIN)
NIM. 0310940031 – 94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



PERHITUNGAN BILANGAN GELOMBANG MENGUNAKAN METODE ZERO CROSSING

ABSTRAK

Metode yang biasa digunakan dalam perhitungan bilangan gelombang lokal adalah metode transformasi *Hilbert*. Selain bersifat global, metode ini juga didasari oleh asumsi bahwa gelombang memiliki selubung yang bervariasi lambat. Dalam skripsi ini dikemukakan metode *zero crossing* sebagai alternatif dalam perhitungan bilangan gelombang. Metode ini bersifat lokal dan tidak memerlukan asumsi tersebut sehingga dapat digunakan secara lebih umum dalam perhitungan bilangan gelombang. Untuk mengkaji kinerja metode tersebut, perhitungan yang diperoleh dibandingkan dengan hasil perhitungan menggunakan metode transformasi *Hilbert*. Sebagai rujukan dalam menguji keakuratan kedua metode tersebut, digunakan bilangan gelombang eksak solusi *Soliton on Finite Background* (SFB). Dari hasil perbandingan yang diperoleh, hasil perhitungan menggunakan metode transformasi *Hilbert* menunjukkan penyimpangan yang signifikan di sekitar titik-titik ujung selang sedangkan metode *zero crossing* tidak menunjukkan fenomena tersebut.

Kata kunci : Bilangan gelombang lokal, *zero crossing*, transformasi *Hilbert*, *Soliton on Finite Background*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



WAVE NUMBER CALCULATION USING ZERO CROSSING METHOD

ABSTRACT

The common method often used to calculate local wave number is *Hilbert* transform method. This method is not only global method, but also needs an assumption that the envelope of waves have slowly varying property. In this final project, it is proposed *zero crossing* method as an alternative method to calculate wave number. This method is local method and does not need slowly varying assumption, therefore the method could be implemented more generally. To show the performance of this method, the result of *zero crossing* method is compared with the result of *Hilbert* transform. The exact wave number of *Soliton on Finite Background* (SFB) is used as a reference. It is found that for such a class of parameter of SFB, computation using *Hilbert* transform gives some significant discrepancies at the end of interval, but *zero crossing* method does not show those phenomena.

Keywords : local wave number, *zero crossing*, *Hilbert* transform, *Soliton on Finite Background*.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil a'lam, ucap syukur kehadiran Allah SWT yang telah memberikan segala nikmatnya kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad S.A.W, beserta keluarga dan para sahabat-sahabatnya.

Dalam penulisan skripsi ini, tidak mungkin penulis dapat menyelesaikan skripsi ini tanpa bantuan dan bimbingan dari berbagai pihak yang sangat berperan. Oleh karena itu, rasa terima kasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan kepada:

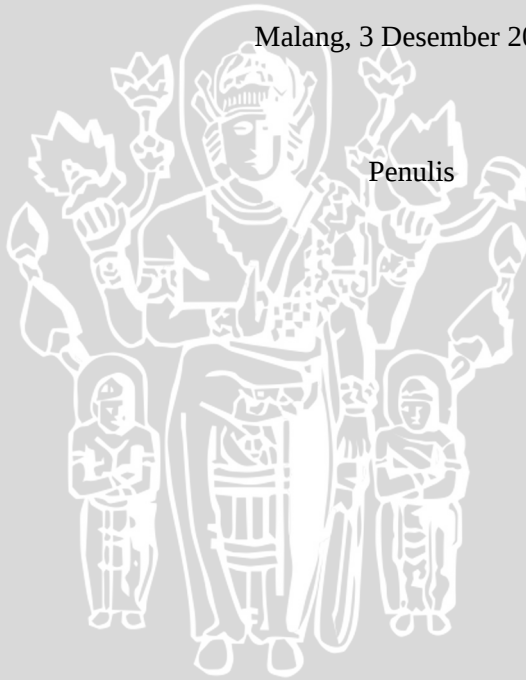
1. Dr. Wuryansari M.K., M.Si., selaku Pembimbing I sekaligus Ketua Program Studi Matematika. Terima kasih atas arahan, perhatian dan kesabaran ibu demi sempurnanya skripsi ini. Terima kasih juga atas motivasi dan waktu yang telah ibu berikan kepada penulis,
2. Dra. Trisilowati, M.Sc., selaku Pembimbing II dalam penulisan skripsi ini. Terima kasih atas saran, perhatian dan bimbingan yang telah ibu berikan kepada penulis,
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc., selaku Ketua Jurusan Matematika dan juga sebagai dosen penguji, serta Drs. Moch. Aruman Imron, MSi dan Syaiful Anam, SSi, MT., selaku dosen penguji. Terima kasih atas masukan dan saran demi sempurnanya skripsi ini,
4. Segenap staf pengajar Jurusan Matematika Unibraw dan staf karyawan tata usaha Matematika Unibraw yang banyak membantu selama penulis belajar disini,
5. Ibu, Bapak, mbak Dini dan adekku Ari yang telah memberikan semua kasih sayang, nasehat, dukungan, dan doanya sehingga penulis bisa menyelesaikan kuliahnya,
6. Tony yang sudah banyak membantu memberikan penjelasan, saran dan juga motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini,
7. Daana, Peni, Fero, dan Ziaul. Terima kasih atas persahabatan, kasih sayang dan keceriaan yang telah kalian berikan kepada penulis,
8. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2003, terima kasih atas semua dukungan dan semangatnya,

9. Saudara-saudaraku Ika, mbak Iis, Kharis, Lusi, mbak Mila, dek Ajeng. Terima kasih untuk kenangan dan kebersamaan yang sudah terjalin selama ini,
10. Semua pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu-persatu, yang sudah banyak membantu penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penulisan skripsi ini masih banyak kesalahan dan kekurangannya. Untuk itu saran dan kritik yang membangun, penulis harapkan untuk kesempurnaan skripsi ini. Semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca sekalian.

Malang, 3 Desember 2007

Penulis



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR SIMBOL	xix
 BAB I PENDAHULUAN	 1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	2
1.3. Tujuan.....	2
1.4. Manfaat.....	2
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	 3
2.1. Persamaan Diferensial	3
2.1.1. Persamaan Diferensial Biasa	3
2.1.2. Persamaan Diferensial Parsial	3
2.2. Bilangan Gelombang	4
2.3. Persamaan NonLinier Schrodinger (NLS).....	5
2.4. Solusi <i>Soliton on Finite Background</i> (SFB)	7
2.5. Metode Regula Falsi (Posisi Palsu)	12
2.6. Metode <i>Zero Crossing</i>	14
2.6. Metode transformasi <i>Hilbert</i>	15
 BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN	 17
3.1. <i>Signaling Problem</i>	17
3.2. Perhitungan Bilangan Gelombang	18
3.2.1. Maksimum Kuadrat Kecuraman gelombang	18
3.2.2. Perhitungan Bilangan Gelombang Menggunakan Metode <i>Zero Crossing</i> $k_{zcr}(x,t)$	23

3.2.3. Perhitungan Bilangan Gelombang Menggunakan Metode transformasi <i>Hilbert</i> $k_H(x,t)$	27
3.3. Perbandingan Hasil Perhitungan Bilangan Gelombang..	29
3.4. Studi Kasus	39
BAB IV KESIMPULAN	43
DAFTAR PUSTAKA	45



DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1.	Ilustrasi panjang gelombang..... 4
Gambar 2.2.	<i>Signal</i> spatial-SFB $\eta_{SFB}(\xi, \tau)$ (merah) dan selubungnya $2 A(\xi, \tau) $ (biru) berturut-turut dari atas ke bawah di kolom kiri untuk $\xi = -100$, $\xi = -35$, $\xi = -10$ dan di kolom kanan untuk $\xi = -5$, $\xi = 0$, $\xi = 5$, dan $\hat{v} = 1$, $\omega_0 = 2.5$, dan $M = 0.1$ 11
Gambar 2.3.	Ilustrasi metode regula falsi..... 13
Gambar 2.4.	Ilustrasi metode <i>zero crossing</i> 14
Gambar 3.1.	Ilustrasi <i>signaling problem</i> 18
Gambar 3.2.	Perbandingan nilai $s^2(x)$ dihitung dengan $\max_t [\eta(x, t)k(x, t)]^2$ (biru) dan $[\eta(x, t_{\max})k(x, t_{\max})]^2$ (merah)..... 20
Gambar 3.3.	(a) <i>Signal</i> SFB $\eta(x, t)$ di $x = -5$, dan (b) Kuadrat kecuraman <i>signal</i> SFB $[\eta_{SFB}(x, t)k_{SFB}(x, t)]^2$ untuk $x = -5$ 21
Gambar 3.4.	(a) <i>Signal</i> SFB $\eta(x, t)$ di $x = -0.1$, dan (b) Kuadrat kecuraman <i>signal</i> SFB $[\eta_{SFB}(x, t)k_{SFB}(x, t)]^2$ untuk $x = -0.1$ 22
Gambar 3.5.	Gambar profil gelombang $\eta_{SFB}(x, t)$ beserta bilangan gelombangnya jika dihitung menggunakan <i>zero crossing</i> di $t = -15$ 27
Gambar 3.6.	Perbandingan hasil perhitungan $k_{SFB}(x, t)$ (merah), $k_{zcr}(x, t)$ (biru), dan $k_H(x, t)$ (hitam), untuk (a) $t = -15$, (b) $t = 0$, dan (c) $t = 2.0$ 30
Gambar 3.7.	Profil gelombang $\eta_{SFB}(x, t)$ di sekitar $x = 0$ yaitu selang $x \in [-10, 10]$, pada saat $t = 0$ 31

Gambar 3.8.	Hasil perbandingan perhitungan $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam) di sekitar titik-titik ujung selang pada interval (a) $x \in [-30, -29]$, (b) $x \in [29, 30]$, dengan $\Delta x = 0.01$	32
Gambar 3.9.	Perbandingan hasil perhitungan (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman, untuk $\Delta x = 1$	34
Gambar 3.10.	Perbandingan hasil perhitungan (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman, untuk $\Delta x = 0.1$	35
Gambar 3.11.	Perbandingan hasil perhitungan (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman, untuk $\Delta x = 0.02$	36
Gambar 3.12.	Perbandingan hasil perhitungan (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman, untuk $\Delta x = 0.01$	37
Gambar 3.13.	Hasil perhitungan $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru) dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam) dibandingkan dengan $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah) di sekitar $x = 0$	38
Gambar 3.14.	Profil gelombang data elevasi simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang beserta bilangan gelombangnya dihitung dengan <i>zero crossing</i> di $t = 150$	41
Gambar 3.15.	Hasil perhitungan bilangan gelombang $k_{zcr}(x, t_{\max})$ dari data simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang di laboratorium hidrodinamika.....	42

DAFTAR TABEL

		Halaman
Tabel 3.1.	Perbandingan nilai kuadrat kecuraman s^2 jika dihitung dengan $\max_t [\eta(x, t)k(x, t)]^2$ dan $[\eta(x, t_{\max})k(x, t_{\max})]^2$	19
Tabel 3.2.	Rata-rata galat relatif hasil perhitungan $k_{zcr}(x, t_{\max})$ dan $k_H(x, t_{\max})$ relatif terhadap $k_{SFB}(x, t_{\max})$	39



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan
A	Tinggi selubung gelombang
C_0	Koefisien ketaklinieran persamaan KdV
M	Tinggi maksimum elevasi solusi spatial-SFB
V_g	Kecepatan perambatan gugus gelombang
g	Percepatan gravitasi
h	Kedalaman kolam pengujian
k	Bilangan gelombang
k_0	Bilangan gelombang monokromatik
$\bar{k}$	Rata-rata bilangan gelombang
k_H	Bilangan gelombang yang dihitung menggunakan metode <i>transformasi Hilbert</i>
k_{zcr}	Bilangan gelombang yang dihitung menggunakan metode <i>zero crossing</i>
k_{SFB}	Bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB
r_0	Amplitudo gelombang monokromatik solusi SFB
s^2	Maksimum kuadrat kecuraman gelombang
t	Variabel waktu
t^*	Suatu waktu tertentu
t_{lab}	Koordinat waktu di laboratorium
t_{max}	Waktu saat elevasi gelombang mencapai maksimum
x	Variabel posisi
x^*	Suatu posisi tertentu
x_{lab}	Koordinat posisi di laboratorium
x_L	Titik potong profil gelombang dengan sumbu x di sebelah kiri pada metode <i>zero crossing</i>
x_R	Titik potong profil gelombang dengan sumbu x di sebelah kanan pada metode <i>zero crossing</i>
Δt	Ukuran langkah waktu

Simbol	Keterangan
Δx	Ukuran langkah posisi
nt	Jumlah grid t
nx	Jumlah grid x
ϕ	Fase gelombang
Ω	Relasi dispersi
β	Koefisien suku dispersif persamaan spatial-NLS
$\tilde{\beta}$	Koefisien suku dispersif persamaan temporal-NLS
γ	Koefisien suku tak linier persamaan spatial-NLS
$\tilde{\gamma}$	Koefisien suku tak linier persamaan temporal-NLS
ξ	Koordinat posisi pada persamaan spatial-NLS
$\tilde{\xi}$	Koordinat posisi pada persamaan temporal-NLS
τ	Koordinat waktu untuk persamaan spatial-NLS
$\tilde{\tau}$	Koordinat waktu untuk persamaan temporal-NLS
κ	Bilangan gelombang pemodulasi
$\hat{\kappa}$	Bilangan gelombang pemodulasi solusi temporal-SFB yang dinormalkan
σ	Parameter laju peningkatan kestabilan
ν	Frekuensi gelombang pemodulasi
$\hat{\nu}$	Frekuensi modulasi solusi spatial-SFB yang dinormalkan
ν_*	Parameter yang menormalkan ν
η	Elevasi permukaan gelombang
η_c	Kompleksifikasi dari η
λ	Panjang gelombang
ω	Frekuensi gelombang
ω_0	Frekuensi gelombang monokromatik
$\bar{\omega}$	Rata-rata frekuensi gelombang
ε	Parameter positif yang kecil dalam metode perturbasi
ε_{Zero}	Galat hasil perhitungan k_{zcr} relatif terhadap k_{SFB}
$\varepsilon_{Hilbert}$	Galat hasil perhitungan k_H relatif terhadap k_{SFB}

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Dalam pembahasan mengenai gelombang, seringkali perlu diketahui nilai bilangan gelombang. Salah satu kegunaan bilangan gelombang adalah untuk menghitung kecuraman gelombang lokal (Song dan Banner, 2002). Secara sederhana, untuk gelombang sinusoid, bilangan gelombang k dapat didefinisikan sebagai banyaknya gelombang yang terdapat dalam jarak sepanjang 2π radian. Dalam kenyataannya gelombang tidak selalu berbentuk sinusoid, namun secara umum bergantung pada ruang dan waktu. Dengan demikian bilangan gelombang juga merupakan fungsi terhadap ruang dan waktu sehingga disebut bilangan gelombang lokal $k(x, t)$.

Pada umumnya bilangan gelombang lokal tidak diketahui secara eksak namun dapat dihitung dengan menggunakan data elevasi gelombang $\eta(x, t)$. Metode yang biasa digunakan dalam perhitungan bilangan gelombang adalah metode transformasi *Hilbert* tetapi pada metode ini masih harus dilakukan proses pemfilteran untuk menghilangkan fluktuasi yang terlalu rapat. Metode ini juga bersifat global karena dalam perhitungannya perlu dilakukan pengintegralan di seluruh domain posisi. Selain itu metode ini didasari oleh asumsi bahwa selubung gelombang bersifat *slowly varying*.

Dalam skripsi ini, dibahas suatu metode perhitungan bilangan gelombang lokal yang disebut metode *zero crossing*. Selain bersifat lokal metode ini juga tidak memerlukan proses pemfilteran dan asumsi *slowly varying*. Metode ini didasari oleh kenyataan bahwa pada suatu saat tertentu, di setiap posisi, profil gelombang dapat dihampiri oleh gelombang sinusoida. Untuk mengetahui kinerja dari metode tersebut, hasil perhitungan yang diperoleh akan dibandingkan dengan hasil perhitungan bilangan gelombang yang diperoleh dengan menggunakan metode transformasi *Hilbert*.

Sebagai rujukan dalam menguji keakuratan kedua metode tersebut, digunakan bilangan gelombang eksak yang diperoleh dari solusi *spatial-Soliton on Finite Background* (selanjutnya disingkat sebagai *spatial-SFB*). Solusi tersebut dipilih karena solusi tersebut

memperlihatkan fenomena perubahan bilangan gelombang yang menarik untuk nilai periode modulasi yang terletak pada suatu selang tertentu. Selain itu solusi tersebut juga memenuhi asumsi yang diperlukan dalam perhitungan bilangan gelombang menggunakan metode transformasi *Hilbert* yaitu selubung gelombang bersifat *slowly varying*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian tersebut, masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah mengkaji apakah metode *zero crossing* dapat digunakan sebagai suatu metode alternatif yang dapat digunakan dalam perhitungan bilangan gelombang. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, metode *zero crossing* akan diuji keakuratannya dengan menggunakan metode transformasi *Hilbert*. Setelah keakuratannya teruji, metode *zero crossing* dicoba untuk menghitung bilangan gelombang lokal dari data elevasi simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang.

1.3. Tujuan

Tujuan dari penulisan skripsi ini adalah mengkaji kinerja metode *zero crossing* sebagai suatu metode alternatif yang dapat digunakan dalam perhitungan bilangan gelombang lokal. Kemudian metode *zero crossing* tersebut akan diterapkan dalam perhitungan bilangan gelombang untuk sebarang data elevasi gelombang.

1.4. Manfaat

Hasil dari penelitian ini dapat digunakan sebagai suatu metode alternatif yang dapat digunakan dalam perhitungan bilangan gelombang lokal karena metode tersebut lebih sederhana dan mudah diperiksa kebenarannya, dan tidak memerlukan asumsi *slowly varying*. Dengan demikian metode *zero crossing* dapat digunakan secara lebih umum dalam perhitungan bilangan gelombang.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu atau lebih turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui. Order suatu persamaan diferensial adalah order turunan tertinggi yang muncul dalam persamaan diferensial tersebut (Boyce dan DiPrima, 1986).

Persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.1.1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat fungsi yang tidak diketahui bergantung hanya pada satu variabel bebas. Sebagai contoh,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + 5 \frac{d^2 x}{dt^2} + 3x = \sin t \quad (2.2)$$

adalah persamaan diferensial biasa. Pada contoh (2.1), x adalah variabel bebas, dan y adalah variabel tak bebas. Sedangkan dalam contoh (2.2) variabel bebasnya adalah t , dan x adalah variabel tak bebas.

2.1.2. Persamaan Diferensial Parsial

Jika variabel tak bebasnya bergantung pada dua atau lebih variabel bebas maka persamaan diferensial tersebut dinamakan persamaan diferensial parsial. Sebagai contoh,

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (2.3)$$

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

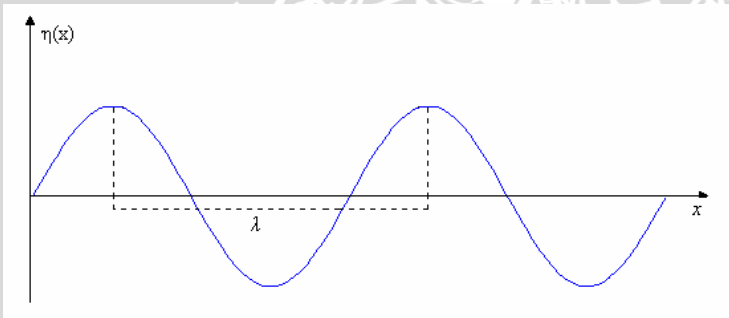
$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

adalah persamaan diferensial parsial. Pada persamaan (2.3) variabel bebasnya adalah x dan y , sedangkan pada persamaan (2.4) dan (2.5) variabel bebasnya adalah x dan t .

2.2. Bilangan Gelombang

Secara sederhana, panjang satu gelombang sinusoid adalah jarak yang mencakup satu bukit dan satu lembah gelombang. Pada Gambar 2.1, diilustrasikan bahwa λ menyatakan panjang satu gelombang, yang selanjutnya disebut panjang gelombang. Bilangan gelombang k adalah banyaknya gelombang yang terdapat dalam jarak sepanjang 2π radian. Dengan demikian bilangan gelombang dapat dirumuskan sebagai ,

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (2.6)$$



Gambar 2.1. Ilustrasi panjang gelombang

Dalam kenyataannya, gelombang tidak selalu berbentuk sinusoid, namun secara umum merupakan fungsi dari ruang dan waktu. Dalam hal yang demikian bilangan gelombang lokal $k(x,t)$ dapat didefinisikan sebagai

$$k(x,t) = \frac{\partial \phi}{\partial x} , \quad (2.7)$$

dengan $\phi(x,t)$ menyatakan fase gelombang (Debnath, 1994).

2.3. Persamaan Non Linier Schrödinger (NLS)

Tinggi permukaan gelombang panjang pada suatu lapisan fluida di atas dasar rata yang menjalar pada satu arah dimodelkan oleh Korteweg de Vries (KdV) melalui proses *uni-directionalisasi*. Model tersebut kemudian diperbaiki oleh van Groesen (1998) menjadi persamaan berikut

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + i\Omega(-i \frac{\partial}{\partial x})\eta = -C_0 \eta \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (2.8)$$

di mana $\omega = \Omega(k) = \sqrt{k \tanh(k)}$ menyatakan relasi dispersi yang menghubungkan antara frekuensi ω dengan bilangan gelombang k , C_0 merupakan suatu konstanta, dan $\eta(x,t)$ adalah elevasi gelombang dalam koordinat yang dinormalkan. Kaitan koordinat yang dinormalkan dengan koordinat fisis (laboratorium) adalah

$$\eta_{lab} = h\eta, \quad x_{lab} = hx, \quad t_{lab} = t\sqrt{\frac{h}{g}}, \quad k_{lab} = \frac{k}{h}, \quad \omega_{lab} = \omega\sqrt{\frac{g}{h}} \quad (2.9)$$

dengan h dan g berturut-turut menyatakan kedalaman air dan konstanta kecepatan gravitasi (Kusumawinahyu, 2006).

Dalam van Groesen, salah satu cara untuk menentukan solusi persamaan KdV (2.8) adalah dengan menggunakan metode perturbasi hingga orde ke tiga. Solusi khusus persamaan KdV (2.8) yang berbentuk evolusi selubung gelombang dimodelkan oleh persamaan Non Linier Schrodinger, seperti yang diungkapkan juga dalam (Debnath, 1994).

Pada metode perturbasi digunakan bentuk deret pangkat terhadap elevasi permukaan gelombang dengan menuliskan

$$\eta(x,t) = \varepsilon \eta_1(x,t) + \varepsilon^2 \eta_2(x,t) + \varepsilon^3 \eta_3(x,t) + \dots \quad (2.10)$$

di mana $\varepsilon > 0$, suatu konstanta. Untuk menyelesaikan persamaan KdV (2.8) yang tak linier, van Groesen mensubstitusikan solusi $\eta(x,t)$ di persamaan (2.10) ke persamaan KdV (2.8), sehingga diperoleh polinom dalam ε . Pada $O(\varepsilon)$ dihasilkan persamaan diferensial berikut

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial t} + i\Omega(-i \frac{\partial}{\partial x})\eta_1 = 0. \quad (2.11)$$

Misalkan diambil solusi persamaan (2.11) berbentuk

$$\eta_1(x, t) = A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c. , \quad (2.12)$$

di mana c.c. adalah singkatan untuk kompleks sekawan (*complex conjugate*) dan $A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})$ menyatakan amplitudo selubung paket gelombang $\eta_1(x, t)$, di mana $\tilde{\xi} = \varepsilon(x - V_g t)$, $\tilde{\tau} = \varepsilon^2 t$ dan $V_g = \Omega'(k_0)$. Frekuensi ω_0 terkait dengan bilangan gelombang k_0 melalui relasi dispersi $\omega_0 = \Omega(k_0)$. Diasumsikan bahwa $A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})$ berubah secara lambat terhadap ruang dan waktu (*slowly varying*). Dari koefisien $O(\varepsilon^2)$ dan $O(\varepsilon^3)$ diperoleh solusi

$$\eta_2(x, t) = \tilde{B}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) e^{2i(k_0 x - \omega_0 t)} + \tilde{C}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) + c.c. , \quad (2.13)$$

dengan

$$\tilde{B}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) = C_0 \frac{k_0 A^2(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})}{2\Omega(k_0) - \Omega(2k_0)} \quad (2.14)$$

$$\tilde{C}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) = C_0 \frac{|A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})|^2}{\Omega'(k_0) - \Omega'(0)} . \quad (2.15)$$

Selain itu diperoleh juga persamaan diferensial dalam bentuk $A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})$ yang dikenal sebagai persamaan Non Linier Schodinger

$$\frac{\partial A}{\partial \tilde{\tau}} + i\tilde{\beta} \frac{\partial^2 A}{\partial \tilde{\xi}^2} + i\tilde{\gamma} |A|^2 A = 0 , \quad (2.16)$$

dengan

$$\tilde{\beta} = -\frac{1}{2} \Omega''(k_0) \quad (2.17)$$

$$\tilde{\gamma} = C_0^2 k_0 (\sigma_0 + \sigma_2) , \quad (2.18)$$

dan

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega'(k_0) - \Omega'(0)} \quad (2.19)$$

$$\sigma_2 = \frac{k_0}{2\Omega(k_0) - \Omega(2k_0)} . \quad (2.20)$$

Dalam (Kusumawinahyu, 2006) persamaan (2.16) disebut sebagai persamaan temporal-Non Linier Schrodinger (temporal-NLS), karena persamaan tersebut menyatakan evolusi temporal

selubung profil yang diketahui bentuknya pada saat awal, $t = 0$. Dengan demikian diperoleh solusi $\eta(x, t)$ untuk persamaan KdV (2.12) yang dinyatakan dengan $A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})$ sebagai

$$\eta(x, t) = \varepsilon A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \varepsilon^2 (\tilde{B}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) e^{2i(k_0 x - \omega_0 t)} + \tilde{C}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})) + c.c., \quad (2.21)$$

dengan $A(\tilde{\xi}, \tilde{\tau})$ memenuhi persamaan (2.16).

Seperti yang diutarakan dalam Kusumawinahyu dan Andonowati, 2003; dari persamaan temporal-NLS dapat diturunkan persamaan spatial-Non Linier Schrodinger (spatial-NLS) dengan

melakukan transformasi $\xi = \varepsilon^2 x$ dan $\tau = \varepsilon \left(t - \frac{x}{V_g} \right)$, yaitu

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} + i\beta \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + i\gamma |A|^2 A = 0 \quad (2.22)$$

dengan $\beta = \tilde{\beta}/V_g^3$ dan $\gamma = \tilde{\gamma}/V_g$.

2.4. Solusi Soliton on Finite Background (SFB)

Persamaan NLS (2.16) memiliki banyak solusi, yang salah satu solusi eksaknya disebut *Soliton on Finite Background* (SFB) (Akhmediev dan Ankiewicz, 1997). Solusi SFB merupakan salah satu perluasan tak linier signal monokromatik beramplitudo r_0 yaitu

$r_0 e^{-i\tilde{\gamma} r_0^2 \tilde{\tau}}$ yang diganggu oleh suatu gelombang pemodulasi dengan bilangan gelombang κ yang kecil. Proses ini disebut ketakstabilan Benjamin-Feir (BF), sehingga signal yang demikian disebut dengan signal BF. Gangguan tersebut mengakibatkan ketakstabilan yang meningkat secara eksponensial dengan laju $\sigma(\kappa)$, dengan

$\sigma(\kappa) = \tilde{\beta} \kappa \sqrt{2\kappa_*^2 - \kappa^2}$ dan $\kappa_* = r_0 \sqrt{\tilde{\gamma}/\tilde{\beta}}$ (Huijsmans, dkk., 2005; Andonowati, dkk., 2006). Untuk membedakan dengan solusi SFB dari persamaan spatial-NLS, solusi SFB tersebut selanjutnya disebut temporal-SFB, yang dinyatakan sebagai

$$A_{temp}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) = A_{SFB}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) r_0 e^{-i\tilde{\gamma} r_0^2 \tilde{\tau}} \quad (2.23)$$

dengan

$$A_{\text{SFB}}(\tilde{\xi}, \tilde{\tau}) = \frac{(\hat{\kappa}^2 - 1) \cosh(\sigma(\kappa)\tilde{\tau}) + \sqrt{1 - \frac{\hat{\kappa}^2}{2}} \left[\cos(\kappa\tilde{\xi}) - i\sqrt{2}\hat{\kappa} \sinh(\sigma(\kappa)\tilde{\tau}) \right]}{\cosh(\sigma(\kappa)\tilde{\tau}) - \sqrt{1 - \frac{\hat{\kappa}^2}{2}} \cos(\kappa\tilde{\xi})} \quad (2.24)$$

dan $\hat{\kappa} = \kappa / \kappa_*$.

Analog dengan solusi temporal-SFB, dapat pula diperoleh solusi SFB untuk persamaan spatial-NLS yang selanjutnya disebut sebagai solusi spatial-SFB, yaitu

$$\begin{aligned} A(\xi, \tau) &= A_{\text{SFB}}(\xi, \tau) r_0 e^{-i\gamma r_0^2 \xi} \\ &= \frac{u(\xi, \tau) + v(\xi, \tau)i}{\cosh(\sigma(\nu)\xi) - \sqrt{1 - \frac{\hat{\nu}^2}{2}} \cos(\nu\tau)} r_0 e^{-i\gamma r_0^2 \xi}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

dengan

$$u(\xi, \tau) = (\hat{\nu}^2 - 1) \cosh(\sigma(\nu)\xi) + \sqrt{1 - \frac{\hat{\nu}^2}{2}} \cos(\nu\tau) \quad (2.26)$$

dan

$$v(\xi, \tau) = -\hat{\nu} \sqrt{2 - \hat{\nu}^2} \sinh(\sigma(\nu)\xi). \quad (2.27)$$

ν menyatakan frekuensi modulasi dan

$$\sigma(\nu) = \beta \nu \sqrt{2\nu_*^2 - \nu^2} = \gamma r_0^2 \hat{\nu} \sqrt{2 - \hat{\nu}^2} \quad (2.28)$$

menyatakan laju peningkatan kestabilan, dengan

$0 < \hat{\nu} < \sqrt{2}$, $\hat{\nu} = \frac{\nu}{\nu_*}$, dan $\nu_* = r_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$. Dengan demikian, elevasi

gugus gelombang yang bersesuaian dengan selubung $A_{\text{SFB}}(\xi, \tau)$ adalah

$$\begin{aligned} \eta_{\text{SFB}}(x, t) &= A(\xi, \tau) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + c.c. \\ &= 2 |A(\xi, \tau)| \cos[k_0 x - \omega_0 t + \arg(A(\xi, \tau))] \\ &= \frac{2r_0 \sqrt{u^2 + v^2}}{\cosh(\sigma(\nu)\xi) - \sqrt{1 - \frac{\hat{\nu}^2}{2}} \cos(\nu\tau)} \cos \phi(x, t), \end{aligned} \quad (2.29)$$

dengan

$$\phi(x,t) = k_0 x - \omega_0 t - \gamma r_0^2 \xi + \arctan \left(\frac{v(\xi, \tau)}{u(\xi, \tau)} \right). \quad (2.30)$$

Jika M menyatakan nilai maksimum $\eta(x,t)$ yang dicapai pada saat $\xi = 0$ dan $\tau = 0$, maka

$$\begin{aligned} M &= \eta_{SFB}(0,0) \\ &= \frac{2r_0 \sqrt{u^2(0,0) + v^2(0,0)}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}} \cos \phi(0,0). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Karena $v(0,0) = 0$ dan $\Phi(0,0) = 0$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} M &= \frac{2r_0 u(0,0)}{1 - \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}} = 2r_0 \frac{(\hat{v}^2 - 1) + \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}} = 2r_0 \left[\frac{\hat{v}^2}{1 - \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}} - 1 \right] \\ &= 2r_0 \left[\frac{\hat{v}^2}{1 - \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}} - 1 \right] \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}} \right) = 2r_0 \left[\frac{\hat{v}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}} \right)}{1 - \left(1 - \frac{\hat{v}^2}{2} \right)} - 1 \right] \\ &= 2r_0 \left[\frac{\hat{v}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}} \right)}{\frac{\hat{v}^2}{2}} - 1 \right] = 2r_0 \left[2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}} \right) - 1 \right] \\ &= 2r_0 \left(1 + 2\sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}} \right). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Persamaan (2.32) menyatakan hubungan antara M dan r_0 .

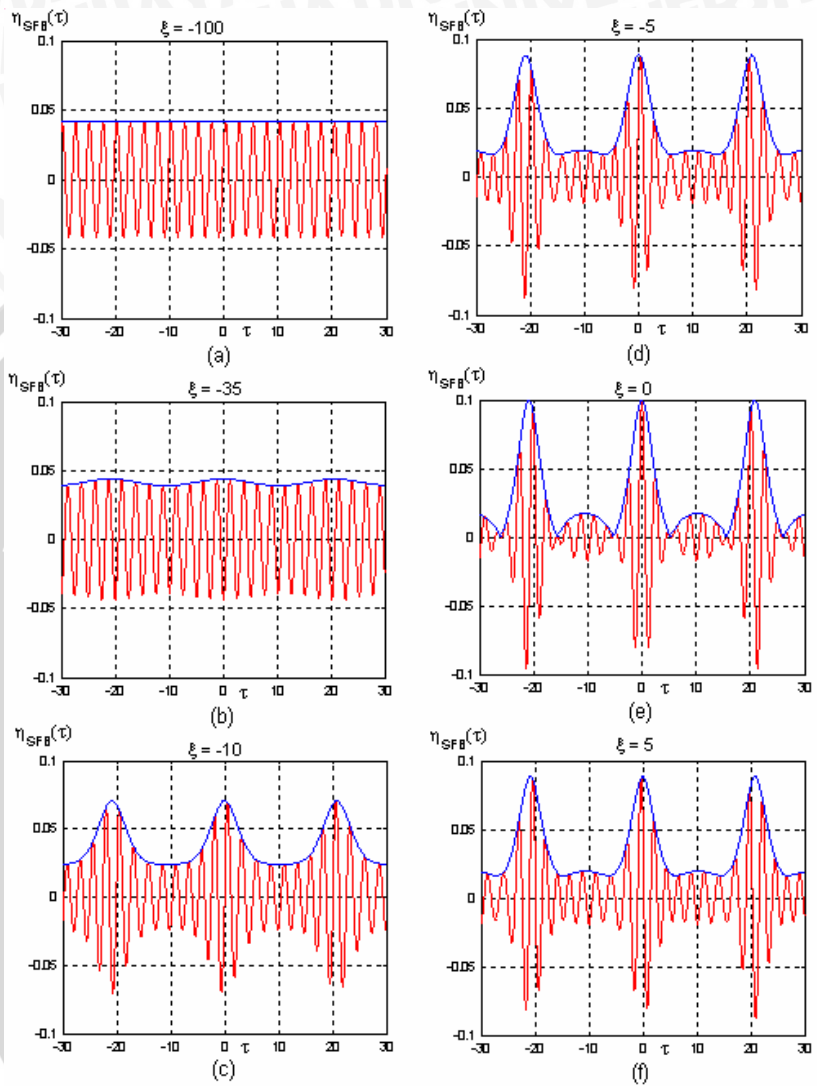
Pada Gambar 2.2 diberikan ilustrasi signal spatial-SFB dengan $\hat{v} = 1$, $\omega_0 = 2.5$, dan $M = 0.1$, sehingga r_0 dapat dicari dengan menggunakan rumus pada persamaan (2.32) yaitu,

$$M = 2r_0 \left(1 + 2\sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}} \right)$$

$$0.1 = 2r_0 \left(1 + 2\sqrt{1 - \frac{1}{2}}\right)$$

$$r_0 = 0.0207.$$

Pada Gambar 2.2 diperlihatkan bagaimana bentuk signal solusi spatial-SFB berubah dari posisi kejauhan. Dalam Gambar 2.2 tersebut diambil $\xi = -100$, sampai pada posisi sebelum puncak, kemudian di posisi puncak yaitu $\xi = 0$, dan di posisi $\xi = 5$. Di kejauhan (*background*), signal spatial-SFB berupa signal monokromatik dengan amplitudo $2r_0$ dan frekuensi ω_0 . Adanya modulasi mulai terlihat di posisi $\xi = -35$ yang makin meningkat di posisi $\xi = -10$. Pada posisi $\xi = -5$ selubung yang memodulasi makin tinggi dan di antara selubung yang tinggi mulai muncul satu modulasi baru yang makin terlihat jelas pada posisi $\xi = 0$. Pada posisi $\xi = 0$ terjadi fenomena menarik, yaitu *kesingularan fase* yang ditandai oleh signal yang puncak atau lembahnya terletak pada sumbu τ , yaitu di sekitar $\tau = -26.1$, $\tau = -15.6$, $\tau = -5.2$, $\tau = 5.2$, $\tau = 15.6$, dan $\tau = 26.1$. Dapat juga dilihat bahwa bentuk selubung signal di posisi $\xi = -5$ sama dengan bentuk selubung signal di posisi $\xi = 5$. Hal ini disebabkan oleh sifat simetri selubung solusi spatial-SFB terhadap $\xi = 0$.



Gambar 2.2. *Signal* spatial-SFB $\eta_{SFB}(\xi, \tau)$ (merah) dan selubungnya $2|A(\xi, \tau)|$ (biru) untuk (a) $\xi = -100$, (b) $\xi = -35$, (c) $\xi = -10$, (d) $\xi = -5$, (e) $\xi = 0$, dan (f) $\xi = 5$, dengan $\hat{\nu} = 1$, $\omega_0 = 2.5$, dan $M = 0.1$

Bilangan gelombang lokal solusi spatial-SFB $k(x,t)$ yang dinotasikan dengan $k_{SFB}(x,t)$, dapat dihitung secara eksak sebagai

$$\begin{aligned} k_{SFB}(x,t) &= \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \\ &= k_0 - \gamma r_0^2 - \frac{K^*}{u^2 + v^2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

dengan

$$K^* = a \cosh(\sigma \xi) + b \sinh(\sigma \xi) + c \sin(\nu \tau), \quad (2.34)$$

$$a = u \sigma \hat{v} \sqrt{2 - \hat{v}^2} \quad (2.35)$$

$$b = v \sigma (\hat{v}^2 - 1) \quad (2.36)$$

$$c = \frac{1}{V_g} v \nu \sqrt{1 - \frac{\hat{v}^2}{2}}. \quad (2.37)$$

(Kusumawinahyu, 2006).

2.5. Metode Regula Falsi (Posisi Palsu)

Metode regula falsi (posisi palsu) disebut juga metode interpolasi linier, yang digunakan untuk mencari akar-akar persamaan non linier melalui proses iterasi.

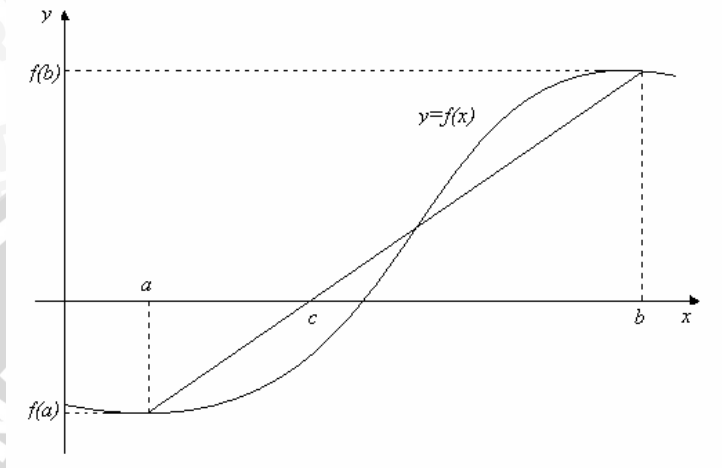
Mula-mula ditentukan suatu selang $[a,b]$ sehingga $f(a) \cdot f(b) < 0$. Dengan metode regula falsi dibuat suatu garis lurus yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$. Perpotongan garis tersebut dengan sumbu-x merupakan taksiran akar yang diperbaiki. Garis lurus tersebut menghampiri kurva $f(x)$ dan memberikan posisi palsu dari akar. Pada Gambar 2.3, persamaan garis lurus yang menghubungkan titik $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ adalah

$$\frac{0 - f(b)}{f(b) - f(a)} = \frac{c - b}{b - a}, \quad (2.38)$$

sehingga persamaan (2.38) menjadi,

$$c = b - f(b) \frac{(b - a)}{f(b) - f(a)}, \quad (2.39)$$

dengan c adalah hampiran akar.



Gambar 2.3. Ilustrasi metode regula falsi

Diberikan algoritma untuk menyelesaikan metode posisi palsu sebagai berikut.

Input : a, b, epsilon

Output : akar

Langkah-langkah:

Langkah 1 : Periksa untuk $f(a) * f(b)$. Jika $f(a) * f(b) > 0$ maka di antara $f(a)$ dan $f(b)$ tidak ada akar.

Langkah 2 : Jika $f(a) * f(b) \leq 0$ maka lakukan langkah berikut.

Langkah 3 : untuk $iterasi = 1$, misalkan $c_{lama} = a$. Hitung galat

$$\text{awal, galat} = \text{abs}\left(\frac{b-a}{b}\right).$$

Langkah 4 : jika $\text{galat} > \text{epsilon}$, lakukan langkah (5–9)

$$\text{Langkah 5 : hitung } c = b - f(b) \frac{(b-a)}{f(b) - f(a)}$$

Langkah 6 : Periksa nilai $f(a) * f(c)$.

Jika $f(a) * f(c) < 0$ maka

$$b = c$$

Jika sebaliknya maka

$$a = c$$

Langkah 7 : hitung galat yang baru,

$$galat = abs(\frac{c - c_{lama}}{c})$$

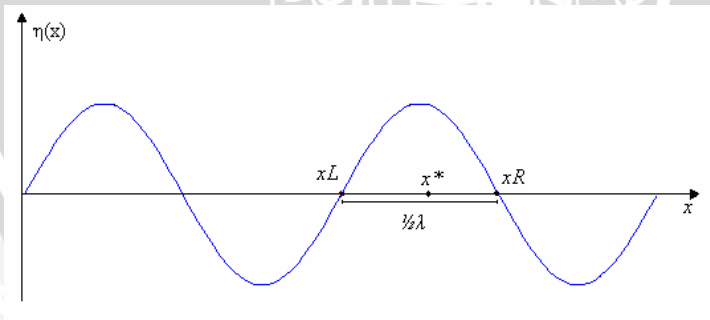
Langkah 8 : ganti $c_{lama} = c$,

Langkah 9 : $iterasi = iterasi + 1$

Langkah 10: diperoleh $akar = c$.

2.6. Metode Zero Crossing

Metode ini didasari oleh kenyataan bahwa di setiap posisi, profil gelombang dapat dihipotesiskan oleh gelombang sinusoidal. Dengan demikian panjang antara dua titik potong profil gelombang dengan sumbu x yang berdekatan dianggap sebagai panjang setengah gelombang. Secara rinci, metode ini dapat diuraikan sebagai berikut. Pada suatu saat tertentu $t = t^*$, bilangan gelombang di suatu posisi tertentu $x = x^*$ ditentukan dengan mencari x_L dan x_R di sekitar x^* , sedemikian sehingga $\eta(x_L, t^*) = \eta(x_R, t^*) = 0$ dan $x_L < x^* < x_R$. Kemudian, dengan menganggap bahwa $\eta(x, t^*)$ di sekitar x^* dapat didekati dengan gelombang sinusoidal maka $x_R - x_L$ dapat dipandang sebagai setengah panjang gelombang di x^* , yaitu $\lambda(x^*, t^*)/2$. Pada Gambar (2.4) diilustrasikan bahwa $x_L < x^* < x_R$ dan $x_R - x_L$ dipandang sebagai setengah panjang gelombang.



Gambar 2.4. Ilustrasi metode zero crossing

Oleh karena itu, $k(x^*, t^*)$ dapat dihitung sebagai

$$k(x^*, t^*) = \frac{2\pi}{\lambda(x^*, t^*)} = \frac{2\pi}{2(x_R - x_L)} = \frac{\pi}{x_R - x_L}. \quad (2.40)$$

Proses tersebut dilakukan di setiap posisi x , pada saat t , sehingga diperoleh $k(x, t)$ yang dinotasikan dengan $k_{zcr}(x, t)$ (Kusumawinahyu, 2006).

2.7. Metode Transformasi Hilbert

Metode transformasi *Hilbert* didasari oleh asumsi, bahwa profil gelombang pada setiap saat dapat dinyatakan sebagai perkalian antara selubung dan pembawanya. Andaikan pada suatu saat tertentu $t = t^*$ profil gelombang $\eta(x, t^*)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\eta(x, t^*) = A(x) \cos \phi(x), \quad (2.41)$$

dengan $A(x)$ menyatakan selubung gelombang yang bersifat *slowly varying*. Kompleksifikasi (*complexification*) dari $\eta(x, t^*)$, yaitu perluasan bentuk $\eta(x, t^*)$ ke dalam bentuk kompleks, didefinisikan sebagai

$$\eta_c(x, t^*) = \eta(x, t^*) + i\hbar(\eta(x, t^*)), \quad (2.42)$$

dengan $\hbar(\eta(x, t^*))$ adalah transformasi *Hilbert* dari $\eta(x, t^*)$. Transformasi *Hilbert* dari suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai

$$\begin{aligned} \hbar(f(x)) &= \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{f(\xi)}{x - \xi} d\xi \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

dengan PV menyatakan *Cauchy Principal Value*. Transformasi *Hilbert* pada suatu data mengakibatkan pergeseran fase sebesar $\frac{\pi}{2}$ pada data tersebut. Dengan demikian,

$$\hbar(\cos(x)) = \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x).$$

Karena $A(x)$ bersifat *slowly varying* maka $\eta_c(x, t^*)$ dapat ditulis

$$\eta_c(x, t^*) = A(x) \cos \phi(x) + iA(x) \sin \phi(x) = A(x) e^{i\phi(x)}, \quad (2.44)$$

sehingga $\phi(x)$ dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \arctan \left(\frac{\text{Im}(\eta_c)}{\text{Re}(\eta_c)} \right) \\ &= \arctan \left(\frac{\hbar(\eta(x, t^*))}{\eta(x, t^*)} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Berdasarkan definisi bilangan gelombang lokal dari solusi gelombang tak linier, $k(x, t^*)$ dapat dihitung sebagai

$$k(x, t^*) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}, \quad (2.46)$$

yang secara numerik dilakukan dengan menggunakan metode beda hingga orde dua. Proses tersebut dilakukan pada setiap saat t , sehingga diperoleh $k(x, t)$, yang dinotasikan dengan $k_H(x, t)$.

BAB III

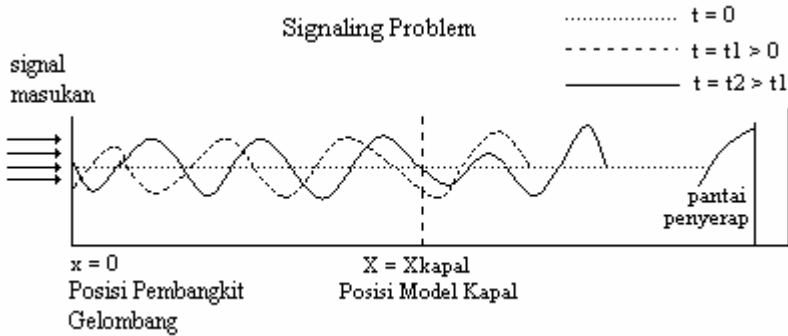
HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam bab ini dijelaskan prosedur yang dilakukan dalam perhitungan bilangan gelombang menggunakan metode *zero crossing*. Untuk mengetahui kinerja metode tersebut, hasil perhitungan yang diperoleh dibandingkan dengan hasil perhitungan menggunakan metode transformasi *Hilbert*. Sebagai rujukan dalam membandingkan kedua metode tersebut, digunakan bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB. Sebelum membahas perhitungan bilangan gelombang, dikemukakan terlebih dahulu maksimum kuadrat kecuraman gelombang sebagai salah satu kegunaan bilangan gelombang. Dimotivasi oleh pemanfaatannya, dalam skripsi ini pengujian kinerja nilai bilangan gelombang dilakukan di setiap posisi, namun hanya pada saat elevasi gelombang mencapai maksimum. Kemudian, setelah teruji keakuratannya, metode *zero crossing* ini diterapkan untuk menghitung bilangan gelombang dari data elevasi simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang.

3.1. Signaling Problem

Agar kapal yang berlayar di laut dapat bertahan pada situasi yang paling beresiko, model kapal perlu diuji dengan gelombang yang curam dan beramplitudo tinggi di kolam pengujian laboratorium Hidrodinamika. Di kolam pengujian, di salah satu sisi terdapat pembangkit gelombang dan di sisi lainnya terdapat penyerap sebagai pantai tiruan. Dalam kasus ini diasumsikan bahwa perambatan air hanya terjadi dalam satu dimensi saja, yaitu sepanjang arah sejajar dengan sumbu x , dan perambatannya hanya ke arah sumbu x positif.

Dalam penelitian ini dipandang situasi di mana pada saat awal, permukaan air di kolam pengujian dalam keadaan tenang. Kemudian di posisi pembangkit gelombang diberikan suatu signal masukan sehingga permukaan kolam yang semula tenang berubah seiring dengan merambatnya signal masukan sepanjang kolam percobaan. Penyelidikan mengenai perambatan signal di sepanjang kolam pengujian sejak permukaan air dalam keadaan tenang, disebut sebagai *signaling problem*. Pada Gambar 3.1 diilustrasikan mengenai *signaling problem*.



Gambar 3.1. Ilustrasi *signaling problem*

3.2. Perhitungan Bilangan Gelombang

3.2.1. Maksimum kuadrat kecuraman gelombang

Salah satu kegunaan bilangan gelombang adalah untuk menghitung kuadrat kecuraman gelombang seperti yang dikaji oleh (Song dan Banner, 2002). Dalam penelitiannya, Song dan Banner memaksimalkan kuadrat kecuraman gelombang terhadap posisi, di setiap waktu. Dalam penulisan skripsi ini, pengambilan nilai maksimum tidak dilakukan terhadap posisi di setiap waktu melainkan terhadap waktu di setiap posisi, karena data yang digunakan dalam tugas akhir ini berhubungan dengan *signaling problem*.

Sebelum membahas perhitungan gelombang, ditunjukkan terlebih dahulu bahwa perhitungan nilai maksimum kuadrat kecuraman terhadap waktu di setiap posisi cukup dilakukan dengan menghitung nilai tersebut pada saat elevasi gelombang mencapai maksimum di setiap posisi, yaitu

$$s^2(x) = \max_t [\eta(x, t) k(x, t)]^2 \approx [\eta(x, t_{\max}) k(x, t_{\max})]^2 \quad (3.1)$$

dengan

$$\eta(x, t_{\max}) = \max_t \eta(x, t), \quad \forall x. \quad (3.2)$$

Untuk menunjukkan hal tersebut, digunakan bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB $k_{SFB}(x, t)$, dengan mengambil parameter-parameter $\hat{\nu} = 1$, $\omega_0 = 2.5$, $M = 0.1$, domain posisi $-100 \leq x \leq 100$ dan domain waktu $-30 \leq t \leq 30$. Gambar 3.2 menunjukkan bahwa

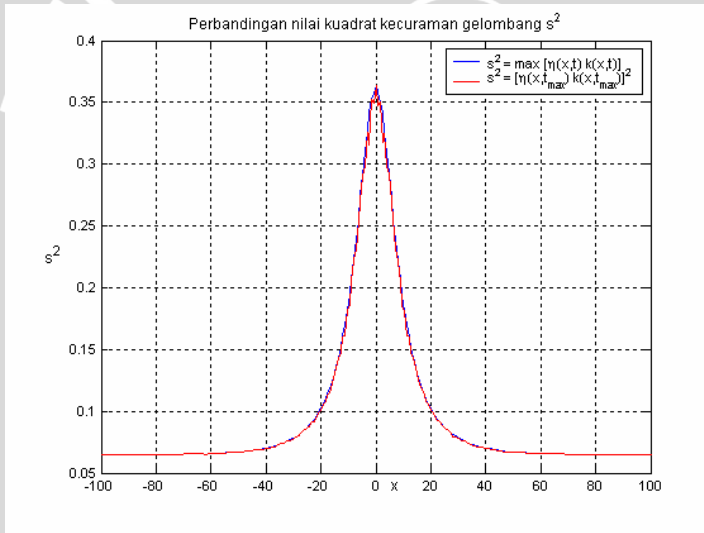
hasil perhitungan maksimum kuadrat kecuraman di setiap posisi, nilainya hampir sama dengan nilai kuadrat kecuraman pada saat gelombang mencapai nilai maksimumnya.

Untuk mengetahui lebih jelas, pada Tabel 3.1 diberikan perbandingan perhitungan nilai kuadrat kecuraman yang dihitung dengan $\max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2$ dan $[\eta(x,t_{\max})k(x,t_{\max})]^2$.

Tabel 3.1. Perbandingan nilai kuadrat kecuraman s^2 jika dihitung dengan $\max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2$ dan $[\eta(x,t_{\max})k(x,t_{\max})]^2$.

$s^2(x) = [\eta(x,t_{\max})k(x,t_{\max})]^2$				
x	$t_{\max}$	$\eta(x,t_{\max})$	$k(x,t_{\max})$	s^2
-5.0	-24.640	0.0871	5.9848	0.2717
-2.5	29.120	0.0962	6.0496	0.3385
-2.0	-9.840	0.0973	6.0187	0.3433
-0.1	-0.240	0.0990	6.0284	0.3559
0	0	0.1	6.0303	0.3636
0.1	0.240	0.0990	6.0284	0.3559
2.0	9.840	0.0973	6.0187	0.3433
2.4	-29.440	0.0953	6.0717	0.3348
3.8	19.200	0.0919	6.0863	0.3130
4.5	19.280	0.0901	6.0392	0.2961
$s^2(x) = \max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2$				
x	t^*	$\eta(x,t^*)$	$k(x,t^*)$	s^2
-5.0	-4.560	0.0866	6.1466	0.2836
-2.5	29.120	0.0962	6.0496	0.3385
-2.0	-9.840	0.0973	6.0187	0.3433
-0.1	-21.600	-0.0990	6.0315	0.3566
0	0	0.1	6.0303	0.3636
0.1	21.600	-0.0990	6.0315	0.3566
2.0	9.840	0.0973	6.0187	0.3433
2.4	12.080	-0.0967	6.0493	0.3423
3.8	19.200	0.0919	6.0863	0.3130
4.5	19.280	0.0901	6.0392	0.2961

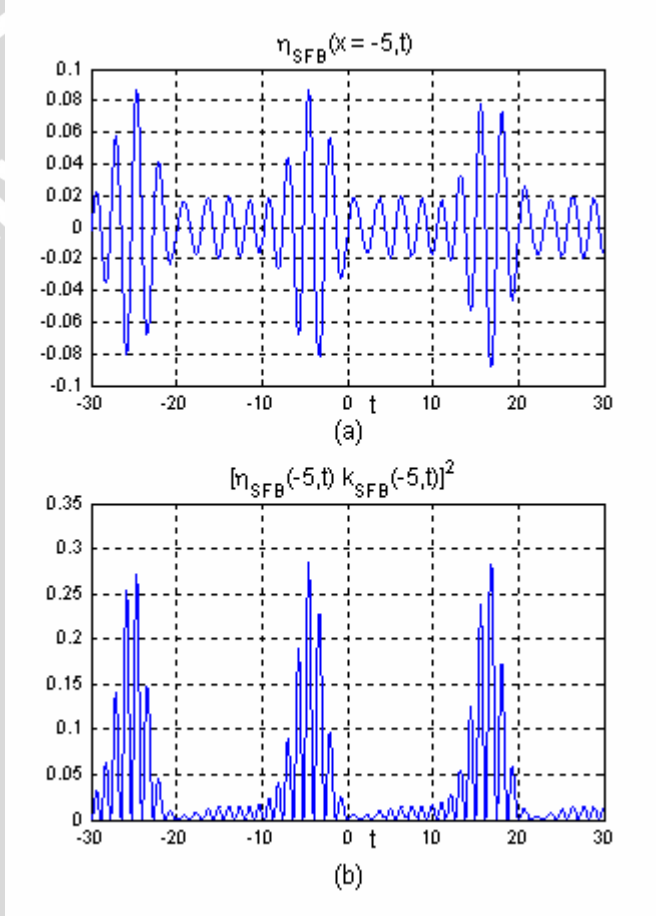
Misalkan $\max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2$ terjadi pada saat $t = t^*$, sehingga $\max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2 = [\eta(x,t^*)k(x,t^*)]^2$. Pada umumnya, di setiap posisi diperoleh nilai $t^* = t_{\max}$, sebagaimana pada beberapa posisi yang diambil sebagai contoh pada Tabel 3.1. Jika terjadi ketidaksesuaian antara nilai $\max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2$ dan nilai $[\eta(x,t_{\max})k(x,t_{\max})]^2$, maka hal itu terjadi karena selisih perhitungan yang disebabkan oleh ketelitian perhitungan numerik sehingga menyebabkan $t^* \neq t_{\max}$. Penjelasan secara grafis mengenai $t^* \neq t_{\max}$



Gambar 3.2. Perbandingan nilai $s^2(x)$ dihitung dengan $\max_t [\eta(x,t)k(x,t)]^2$ (biru) dan $[\eta(x,t_{\max})k(x,t_{\max})]^2$ (merah).

diberikan pada Gambar 3.3. Sebagai contoh diambil posisi $x = -5$. Pada Gambar 3.3.(a) dapat dilihat bahwa elevasi di posisi $x = -5$ mencapai maksimum pada saat $t_{\max} = -24.640$, dan pada Gambar 3.3.(b) dapat dilihat bahwa kuadrat kecuraman di posisi $x = -5$ mencapai maksimum pada saat $t^* = -4.560$. Dengan mengingat

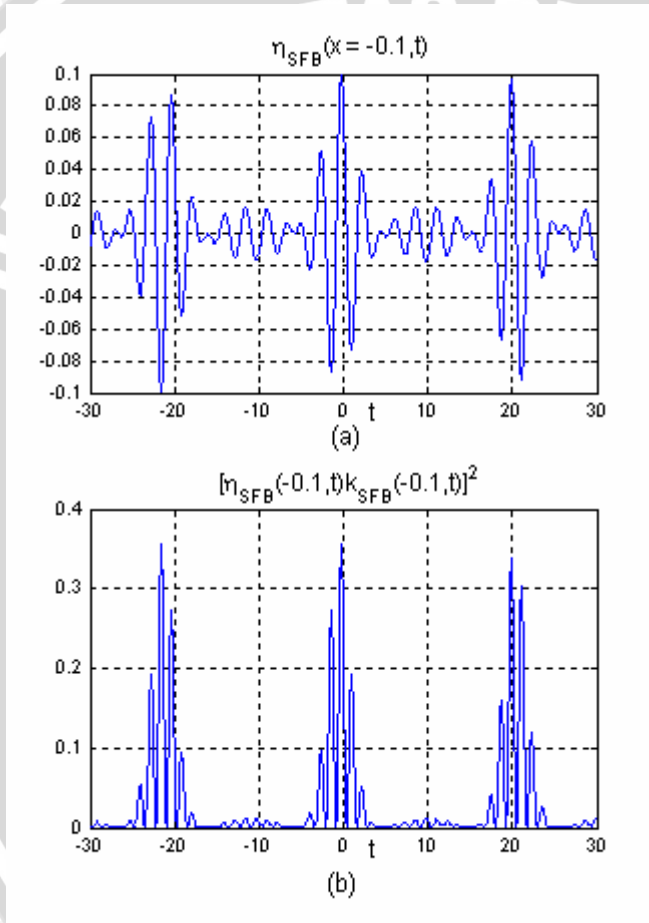
bahwa $\eta_{SFB}(x,t)$ periodik terhadap t , seharusnya $\eta_{SFB}(x=-5,t)$ juga mencapai maksimum pada saat $t = -4.560 = t^*$. Pada Tabel 3.1 dapat dilihat bahwa selisih antara nilai $\eta_{SFB}(x=-5, t_{\max})$ dan $\eta_{SFB}(x=-5, t^*)$ hanya 0.0005, yang disebabkan hanya pada ketelitian angka perhitungan. Demikian juga pada Gambar 3.3.(b),



Gambar 3.3. (a) *Signal* SFB $\eta(x,t)$ di $x = -5$, dan (b) Kuadrat kecuraman *signal* SFB $[\eta_{SFB}(x,t)k_{SFB}(x,t)]^2$ untuk $x = -5$.

bahwa kuadrat kecuraman di posisi $x = -5$ juga terjadi pada saat $t = -24.640 = t_{\max}$.

Sebagai contoh yang lain diambil posisi $x = -0.1$, yang diberikan pada Gambar 3.4. Pada Gambar 3.4.(a) dapat dilihat bahwa elevasi di posisi $x = -0.1$ mencapai maksimum pada saat $t_{\max} = -0.240$, dan pada Gambar 3.4.(b) dapat dilihat bahwa kuadrat



Gambar 3.4. (a) *Signal SFB* $\eta(x, t)$ di $x = -0.1$, dan (b) Kuadrat kecuraman *signal SFB* $[\eta_{SFB}(x, t)k_{SFB}(x, t)]^2$ untuk $x = -0.1$.

kecuraman di posisi $x = -0.1$ mencapai maksimum pada saat $t^* = -21.600$. Berbeda dengan penjelasan sebelumnya, di posisi $x = -0.1$, pada saat $t_{\max} = -0.240$ elevasinya bernilai positif. Sedangkan pada kuadrat kecuraman di posisi $x = -0.1$, elevasi pada saat $t^* = -21.600$ bernilai negatif. Pada kasus contoh ini, hanya perbedaan nilai positif dan negatif saja yang menyebabkan $t^* \neq t_{\max}$ sehingga terjadi ketidaksesuaian antara nilai $\max_t [\eta(x, t)k(x, t)]^2$ dan nilai $[\eta(x, t_{\max})k(x, t_{\max})]^2$.

3.2.2. Perhitungan Bilangan Gelombang Menggunakan Metode *Zero Crossing* $k_{zcr}(x, t)$

Pada perhitungan bilangan gelombang menggunakan metode *zero crossing*, perlu ditentukan titik potong profil gelombang pada sumbu- x yang dalam hal ini dilakukan dengan metode posisi palsu. Dalam penulisan skripsi ini hanya dilakukan satu iterasi saja dalam metode posisi palsu. Secara keseluruhan, algoritma metode *zero crossing* disajikan sebagai berikut.

Input : lebar domain x , lebar grid x (Δx), waktu t , lebar grid t (Δt), jumlah grid x (n), jumlah grid t (m), elevasi gelombang ($\eta(x, t)$).

Output : bilangan gelombang yang dihitung dengan *zero crossing* $k_{zcr}(x, t)$.

Langkah-langkah:

Untuk $t = t_j$ dengan $j = 1, 2, \dots, m$ lakukan langkah-langkah berikut.

Langkah 1 : Perhitungan bilangan gelombang di posisi pertama, yaitu $x = x_1$.

1.1. Jika $\eta(x_1, t_j) \neq 0$ maka di sebelah kiri x_1 tidak ada titik potong dengan sumbu x , sehingga dilakukan langkah berikut.

1.1.1. Menentukan posisi di mana $\eta(x, t_j)$ berubah tanda pertama kali, yaitu tentukan r sedemikian sehingga $\eta(x_{r-1}, t_j)\eta(x_r, t_j) < 0$. Namakan $r = r_{\text{first}}$.

- 1.1.2. Cari titik potong yang pertama dengan metode posisi palsu, namakan $x_{cross}(1)$.
 - 1.1.3. Hitung $L_1 = x_{cross}(1) - x_1$.
 - 1.1.4. Cari titik potong yang ke dua dengan metode posisi palsu, namakan $x_{cross}(2)$.
 - 1.1.5. Hitung $L = x_{cross}(2) - x_{cross}(1)$.
 - 1.1.6. Asumsikan bahwa $L_1 = L$, dan $k_{zcr}(x_1, t_j) = \frac{\pi}{L_1}$.
 - 1.2. Jika $\eta(x_1, t_j) = 0$ maka lakukan langkah (1.1.1 – 1.1.3) sehingga diperoleh $k_{zcr}(x_1, t_j) = \frac{\pi}{L_1}$.
 - 1.3. Diperoleh nilai bilangan gelombang pada posisi pertama, $k_{zcr}(x_1, t_j)$.
- Langkah 2 : Perhitungan bilangan gelombang di posisi tengah, yaitu $x = x_i$, di mana $i = 2, 3, \dots, n-1$.
- 2.1. Menentukan posisi-posisi di mana $\eta(x, t_j)$ berubah tanda, yaitu tentukan r sedemikian sehingga untuk $\eta(x_{r-1}, t_j)\eta(x_r, t_j) < 0$, namakan $r = r_right$ dan untuk $\eta(x_r, t_j)\eta(x_{r+1}, t_j) < 0$, namakan $r = r_left$.
 - 2.2. Untuk setiap x , amati sebelah kanannya. Jika tidak terdapat r_right maka lakukan langkah berikut.
 - 2.2.1. Amati sebelah kirinya. Jika tidak terdapat r_left juga maka anggap bilangan gelombang di x_i adalah $k_{zcr}(x_i, t_j) = 0$.
 - 2.2.2. Jika terdapat r_left maka lakukan langkah (2.2.3–2.2.7).
 - 2.2.3. Cari titik potong sebelah kiri dengan metode posisi palsu, namakan x_left .
 - 2.2.4. Hitung $L_1 = x_i - x_left$, untuk $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$.
 - 2.2.5. Cari titik potong di samping kiri x_left , namakan $xLeft$, dan $xRight = x_left$.

2.2.6. Hitung $L = x_{Right} - x_{Left}$.

2.2.7. Asumsikan bahwa $L_1 = L$, dan $k_{zcr}(x_i, t_j) = \frac{\pi}{L_1}$.

2.3. Jika terdapat r_right , maka lakukan langkah berikut.

2.3.1. Cari titik potong yang sebelah kanan dengan metode posisi palsu, namakan x_right .

2.3.2. Amati sebelah kirinya lagi. Jika tidak terdapat r_left maka lakukan langkah (2.3.3–2.3.6).

2.3.3. Hitung $L_1 = x_right - x_i$, untuk $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$.

2.3.4. Cari titik potong di samping kanan x_right , namakan x_{Right} , dan $x_{Left} = x_right$.

2.3.5. Hitung $L = x_{Right} - x_{Left}$.

2.3.6. Asumsikan bahwa $L_1 = L$, dan $k_{zcr}(x_i, t_j) = \frac{\pi}{L_1}$.

2.3.7. Jika terdapat r_left maka lakukan langkah (2.3.8–2.3.9)

2.3.8. Cari titik potong sebelah kiri dengan metode posisi palsu, namakan x_left .

2.3.9. Hitung bilangan gelombang di x dengan metode *zero crossing*

$$k_{zcr}(x_i, t_j) = \frac{\pi}{(x_right - x_left)}$$

2.4. Diperoleh nilai bilangan gelombang di setiap x , $k_{zcr}(x_i, t_j)$, untuk $i = 2, 3, \dots, n-1$.

Langkah 3 : Perhitungan bilangan gelombang di posisi terakhir, yaitu $x = x_n$.

3.1. Jika $\eta(x_n, t_j) \neq 0$ maka di sebelah kanan tidak ada titik potong, sehingga dilakukan langkah berikut.

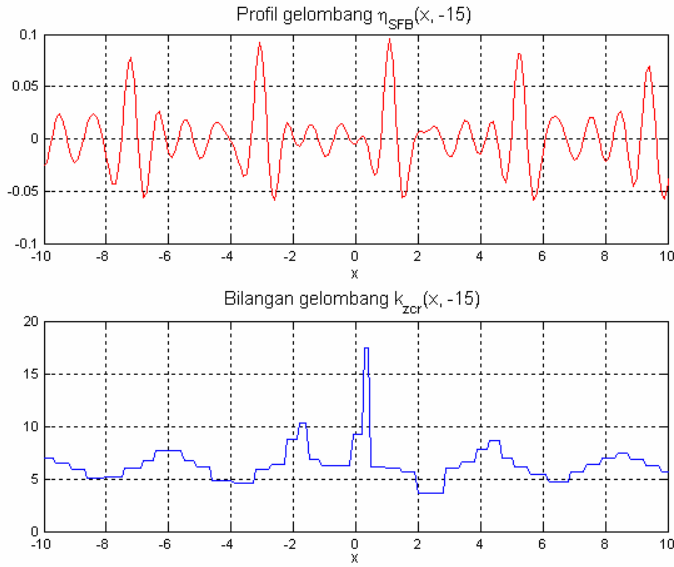
3.1.1. Menentukan posisi di mana $\eta(x, t)$ berubah tanda yang terakhir, yaitu tentukan r sedemikian sehingga $\eta(x_r, t_j)\eta(x_{r+1}, t_j) < 0$. Namakan $r = r_last$.

- 3.1.2. Cari titik potong yang terakhir dengan metode posisi palsu, namakan $x_{cross}(n)$.
- 3.1.3. Hitung $L_1 = x_n - x_{cross}(n)$.
- 3.1.4. Cari titik potong di sebelah kiri r_last dengan metode posisi palsu, namakan $x_{cross}(n-1)$.
- 3.1.5. hitung $L = x_{cross}(n) - x_{cross}(n-1)$.
- 3.1.6. Asumsikan bahwa $L_1 = L$, dan $k_{zcr}(x_n, t_j) = \frac{\pi}{L_1}$.
- 3.2. Jika $\eta(x_n, t_j) = 0$ maka lakukan langkah (3.1.1 – 3.1.3) sehingga diperoleh $k_{zcr}(x_n, t_j) = \frac{\pi}{L_1}$.
- 3.3. Diperoleh nilai bilangan gelombang pada posisi terakhir, $k_{zcr}(x_n, t_j)$

Langkah 4 : Selesai.

Pada metode *zero crossing*, untuk x yang tidak mempunyai x_left maka bilangan gelombang pada saat x tersebut dicari dengan membandingkan bilangan gelombang di samping kanannya. Demikian juga untuk setiap x yang tidak mempunyai x_right , maka bilangan gelombang di x tersebut dicari dengan membandingkan bilangan gelombang di samping kirinya.

Dari algoritma metode *zero crossing* tersebut diperoleh hasil perhitungan bilangan gelombang. Setiap satu *hump* mempunyai nilai bilangan gelombang yang sama. Sebagai contoh pada Gambar 3.5 diperlihatkan gambar profil gelombang beserta bilangan gelombangnya di sekitar $x = 0$ yaitu pada interval $-10 \leq x \leq 10$ dan pada saat $t = -15$.



Gambar 3.5. Gambar profil gelombang $\eta_{SFB}(x, t)$ beserta bilangan gelombangnya jika dihitung menggunakan *zero crossing* di $t = -15$.

Karena dalam kasus ini yang dibandingkan hanya pada saat elevasi gelombang mencapai maksimum di setiap posisi maka dicari terlebih dahulu $t_{\max}$ di setiap posisi sehingga diperoleh $k_{zcr}(x, t_{\max})$.

3.2.3. Perhitungan Bilangan Gelombang Menggunakan Metode Transformasi *Hilbert* $k_H(x, t)$

Metode yang biasa digunakan dalam perhitungan bilangan gelombang adalah metode transformasi *Hilbert*. Perhitungan bilangan gelombang dengan metode transformasi *Hilbert* dapat dihitung sebagai

$$k(x, t) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x}, \quad (3.3)$$

dengan

$$\phi(x) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(\eta_c)}{\text{Re}(\eta_c)} \right) = \arctan \left(\frac{\hbar(\eta(x, t^*))}{\eta(x, t^*)} \right). \quad (3.4)$$

Turunan ϕ terhadap x didekati secara numerik dengan menggunakan metode beda hingga orde dua. Oleh karena itu, $k(x, t)$ dapat dihitung dengan pendekatan beda pusat turunan pertama, yaitu

$$\frac{\partial \phi(x_i)}{\partial x} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{2\Delta x}, \quad (3.5)$$

untuk $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$, dengan kesalahan pemotongan orde dua.

Untuk $i = 1$, digunakan pendekatan beda maju turunan pertama dengan kesalahan pemotongan orde dua. Dengan menggunakan deret Taylor,

$$\phi(x_{i+1}) = \phi(x_i) + \Delta x \phi'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2!} \phi''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{3!} \phi'''(x_i) + \dots$$

$$\phi(x_{i+2}) = \phi(x_i) + 2\Delta x \phi'(x_i) + 4 \frac{\Delta x^2}{2!} \phi''(x_i) + 8 \frac{\Delta x^3}{3!} \phi'''(x_i) + \dots$$

Dari deret Taylor tersebut, $4\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i+2})$ akan menghasilkan

$$4\phi(x_2) - \phi(x_3) = 3\phi(x_1) + 2\Delta x \phi'(x_1) - 4 \frac{\Delta x^3}{3!} \phi'''(x_1) + \dots$$

Bila suku-suku orde 3 diabaikan diperoleh pendekatan beda maju untuk turunan pertama dengan kesalahan pemotongan orde dua yaitu,

$$\phi'(x_1) = \frac{-3\phi(x_1) + 4\phi(x_2) - \phi(x_3)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.6)$$

Hal yang serupa dilakukan untuk $i = n$, yaitu dengan melakukan pendekatan beda mundur turunan pertama dengan kesalahan pemotongan orde dua. Dengan menggunakan deret Taylor,

$$\phi(x_{n-1}) = \phi(x_n) + \Delta x \phi'(x_n) - \frac{\Delta x^2}{2!} \phi''(x_n) + \frac{\Delta x^3}{3!} \phi'''(x_n) - \dots$$

$$\phi(x_{n-2}) = \phi(x_n) - 2\Delta x \phi'(x_n) + 4 \frac{\Delta x^2}{2!} \phi''(x_n) - 8 \frac{\Delta x^3}{3!} \phi'''(x_n) + \dots$$

Dari deret Taylor tersebut, $-4\phi(x_{n-1}) + \phi(x_{n-2})$ akan menghasilkan

$$-4\phi(x_{n-1}) + \phi(x_{n-2}) = -3\phi(x_n) + 2\Delta x \phi'(x_n) - 4 \frac{\Delta x^3}{3!} \phi'''(x_n) + \dots$$

Bila suku-suku orde 3 diabaikan diperoleh pendekatan beda mundur turunan pertama dengan kesalahan pemotongan orde dua yaitu,

$$\phi'(x_n) = \frac{3\phi(x_n) - 4\phi(x_{n-1}) + \phi(x_{n-2})}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (3.7)$$

Dengan demikian diperoleh bilangan gelombang jika dihitung menggunakan metode transformasi *Hilbert* yaitu

$$k_H(x_1, t) = \frac{-3\phi(x_1) + 4\phi(x_2) - \phi(x_3)}{2\Delta x}, \quad (3.8)$$

$$k_H(x_i, t) = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{2\Delta x} \quad (3.9)$$

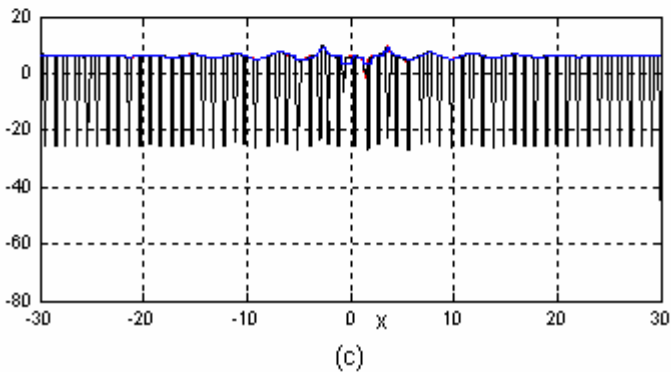
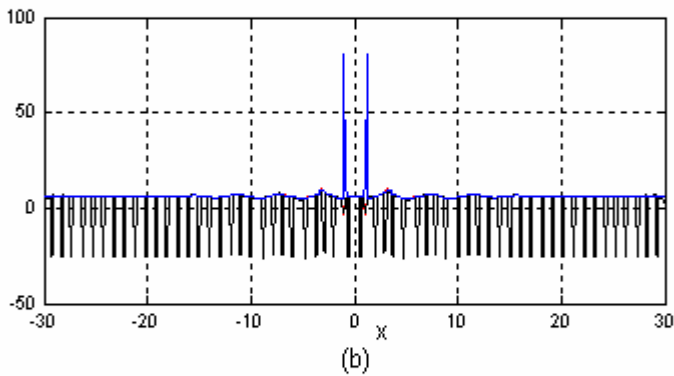
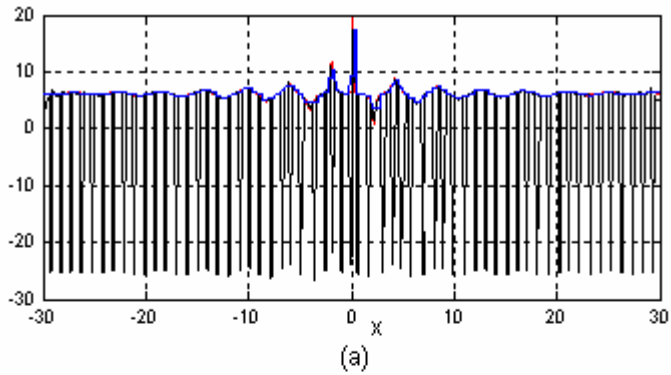
di mana $i = 2, 3, 4, \dots, n-1$, dan

$$k_H(x_n, t) = \frac{3\phi(x_n) - 4\phi(x_{n-1}) + \phi(x_{n-2})}{2\Delta x}. \quad (3.10)$$

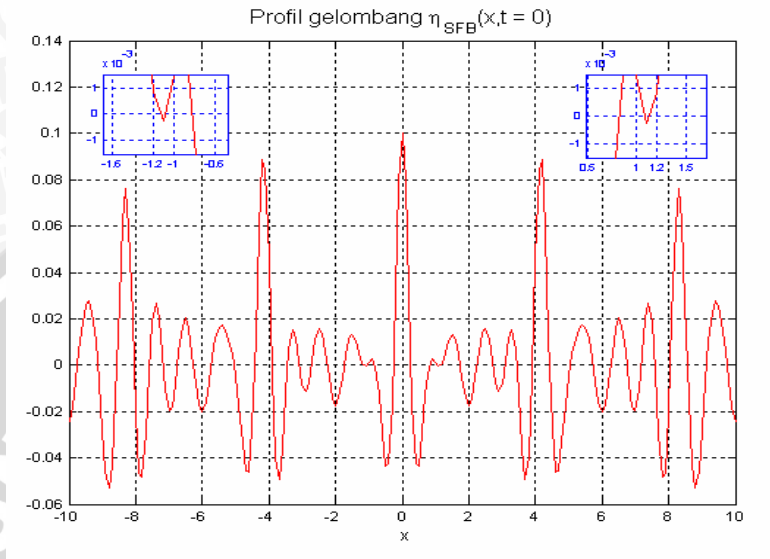
Karena dalam kasus ini yang dibandingkan hanya pada saat elevasi gelombang mencapai maksimum di setiap posisi maka dicari terlebih dahulu $t_{\max}$ di setiap posisi sehingga diperoleh $k_H(x, t_{\max})$.

3.3. Perbandingan Hasil Perhitungan Bilangan Gelombang

Untuk menguji keakuratan dan kinerja metode *zero crossing* jika dibandingkan dengan metode transformasi *Hilbert*, digunakan sebagai rujukkannya yaitu bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB dengan mengambil parameter $\hat{v} = 1$, $\omega_0 = 2.5$ dan $M = 0.1$. Pada Gambar 3.5 diberikan contoh hasil perbandingan perhitungan $k_{SFB}(x, t)$, $k_{zer}(x, t)$ dan $k_H(x, t_{\max})$ untuk nilai t tertentu, sebagai contoh diambil $t = -15$, $t = 0$ dan $t = 2.0$. Pada Gambar 3.6 tersebut, terlihat bahwa hasil perhitungan menggunakan metode *zero crossing* memberikan hasil yang lebih dekat dengan nilai bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB. Akan tetapi pada saat $t = 0$, terjadi ketidaksesuaian pada perhitungan bilangan gelombang menggunakan metode *zero crossing* di sekitar $x = 0$. Ketidaksesuaian tersebut dapat dijelaskan pada Gambar 3.7.



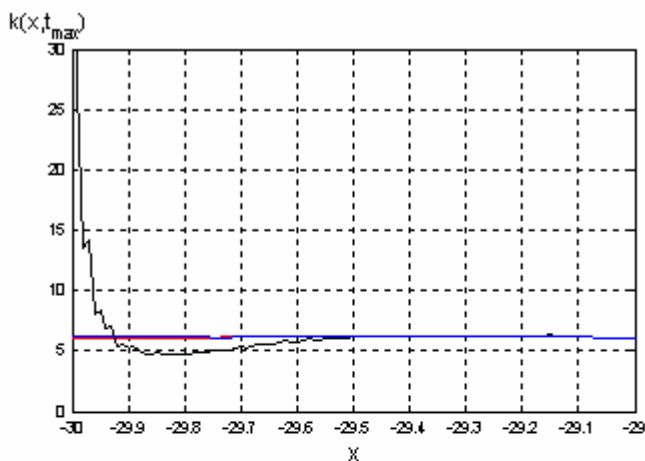
Gambar 3.6. Perbandingan hasil perhitungan $k_{SFB}(x,t)$ (merah), $k_{zcr}(x,t)$ (biru), dan $k_H(x,t)$ (hitam), untuk (a) $t = -15$, (b) $t = 0$, dan (c) $t = 2.0$.



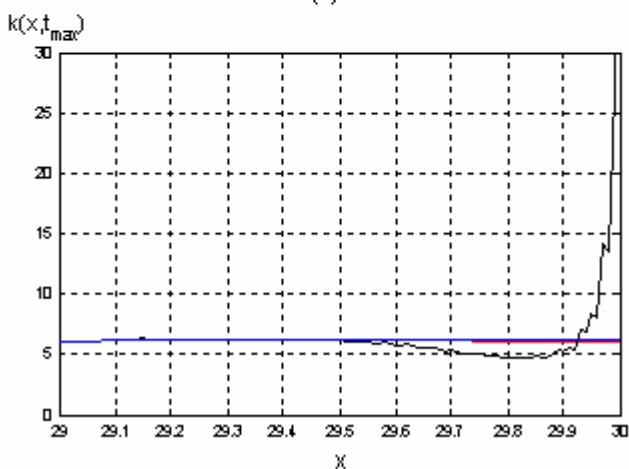
Gambar 3.7. Profil gelombang $\eta_{SFB}(x,t)$ di sekitar $x = 0$ yaitu selang $x \in [-10,10]$, pada saat $t = 0$.

Pada Gambar 3.7 tersebut dapat dilihat bahwa di sekitar $x = 0$, yaitu di posisi $x = -1.1$ terjadi kesingularan fase sehingga panjang gelombang sangat pendek. Hal ini mengakibatkan bilangan gelombang pada posisi tersebut bernilai tinggi. Karena solusi SFB berbentuk soliton yang simetri terhadap titik $x = 0$, maka hal yang serupa juga terjadi di posisi $x = 1.1$.

Dimotivasi oleh pemanfaatannya, maka dalam menguji keakuratan cukup dihitung pada saat gelombang mencapai maksimum di setiap posisi. Pada Gambar 3.8, diperlihatkan hasil perbandingan perhitungan bilangan gelombang $k(x,t_{\max})$ pada titik-titik ujung selang dengan mengambil $\Delta x = 0.01$. Hasil perhitungan $k(x,t_{\max})$ menggunakan transformasi *Hilbert* menunjukkan penyimpangan yang signifikan di sekitar titik-titik ujung selang.



(a)



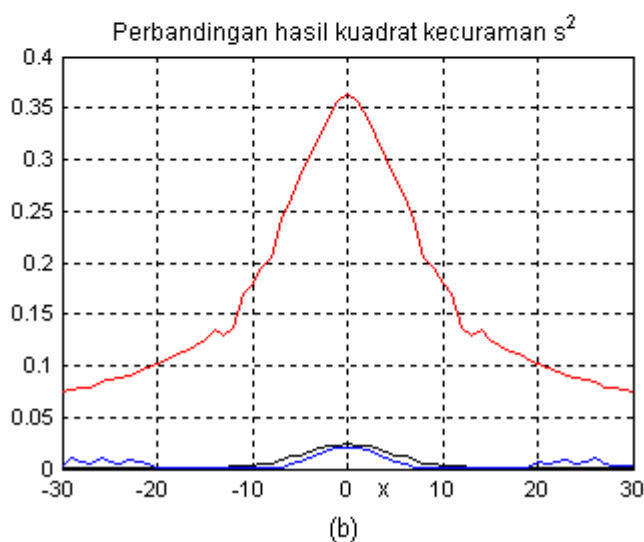
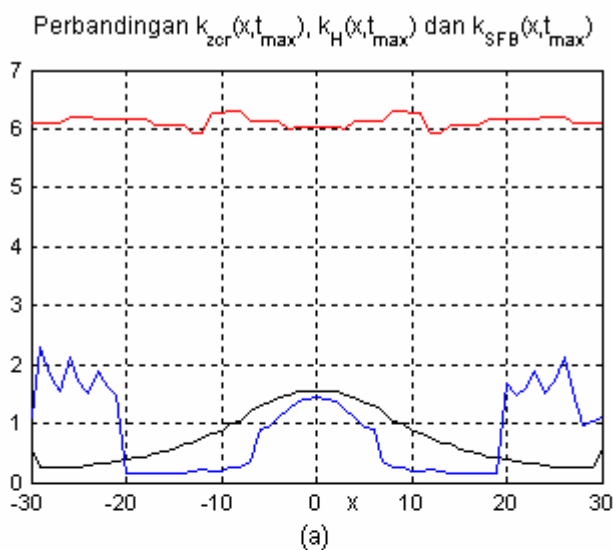
(b)

Gambar 3.8. Hasil perbandingan perhitungan $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam) di sekitar titik-titik ujung selang pada interval (a) $x \in [-30, -29]$, (b) $x \in [29, 30]$, dengan $\Delta x = 0.01$.

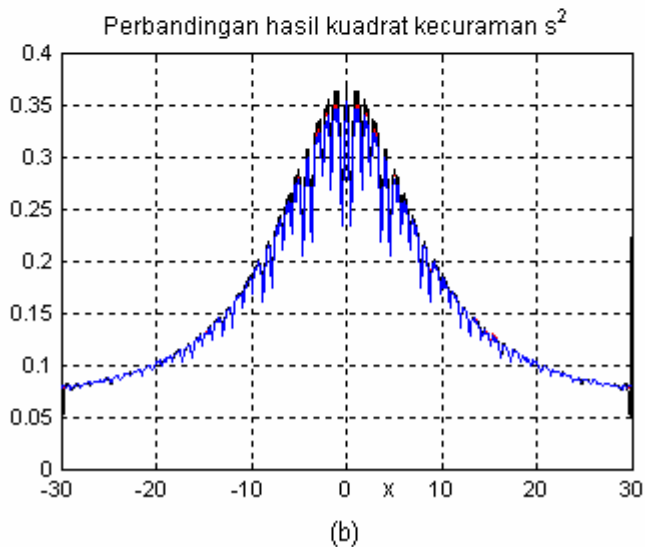
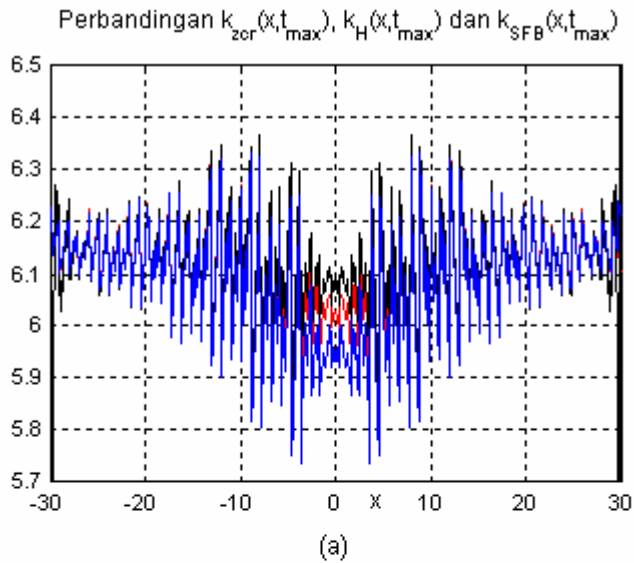
Untuk melihat pengaruh lebar grid terhadap keakuratan hasil perhitungan, berikut ini diperlihatkan hasil perbandingan perhitungan bilangan gelombang pada saat $t_{\max}$ dengan mengambil grid yang berbeda. Selain itu ditunjukkan pula hasil perhitungan kuadrat kecuramannya untuk masing-masing Δx .

Pada Gambar 3.9 untuk $\Delta x = 1$, perhitungan bilangan gelombang $k_{zcr}(x, t_{\max})$ dan $k_H(x, t_{\max})$ memberikan hasil yang dekat namun keduanya masih sangat berbeda dari nilai bilangan gelombang eksak $k_{SFB}(x, t_{\max})$. Selain itu juga terjadi penyimpangan di sekitar titik-titik ujung selang untuk hasil perhitungan menggunakan metode *zero crossing*. Akan tetapi pada Gambar 3.10 untuk $\Delta x = 0.1$, perbandingan hasil perhitungan bilangan gelombang $k_{zcr}(x, t_{\max})$ di sekitar titik-titik ujung selang lebih mendekati bilangan gelombang eksak $k_{SFB}(x, t_{\max})$ daripada bilangan gelombang $k_H(x, t_{\max})$. Demikian juga untuk $\Delta x = 0.02$, hasil perhitungan bilangan gelombang $k_{zcr}(x, t)$ hampir mendekati bilangan gelombang eksak $k_{SFB}(x, t_{\max})$ yang ditunjukkan pada Gambar 3.11. Keakuratan metode *zero crossing* ini semakin terlihat pada pengambilan $\Delta x = 0.01$ yang ditunjukkan pada Gambar 3.12.

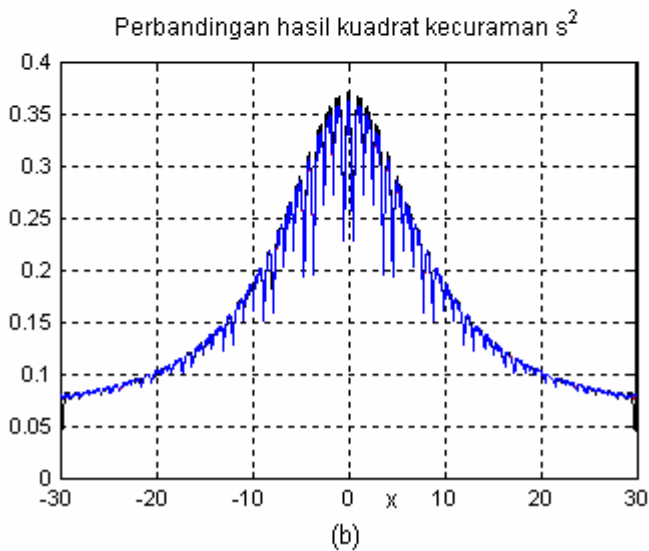
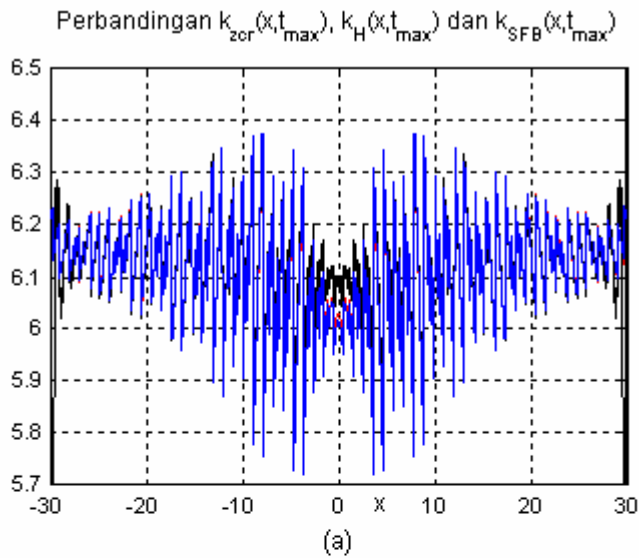
Pada Gambar 3.13 diperlihatkan perbesaran dari gambar hasil perhitungan bilangan gelombang untuk $\Delta x = 0.1$, $\Delta x = 0.02$ dan $\Delta x = 0.01$ dalam selang $[-10, 10]$. Gambar 3.13 menunjukkan keakuratan kedua metode tersebut. Pada pengambilan Δx yang semakin kecil, hasil perhitungan bilangan gelombang kedua metode tersebut hampir mendekati nilai bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB. Akan tetapi, di sekitar $x = 0$ hasil perhitungan menggunakan metode *zero crossing* lebih mendekati hasil bilangan gelombang eksak solusi spatial-SFB dibandingkan dengan metode transformasi *Hilbert*.



Gambar 3.9. Perbandingan hasil perhitungan untuk $\Delta x = 1$ (a) $k_{SFB}(x, t_{max})$ (merah), $k_{zer}(x, t_{max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman.

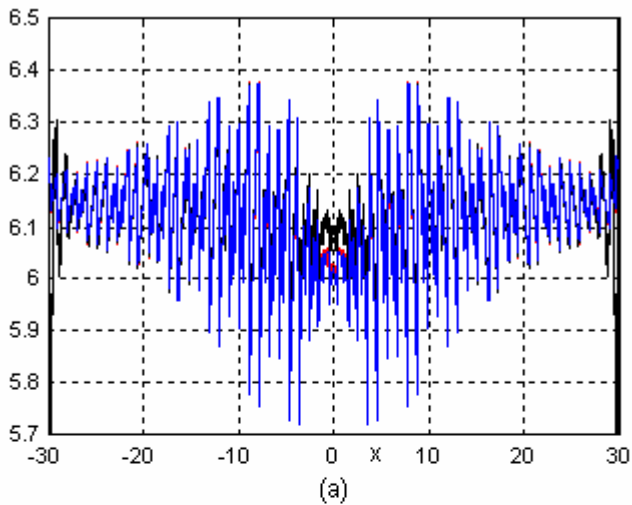


Gambar 3.10. Perbandingan hasil perhitungan untuk $\Delta x = 0.1$ (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman.

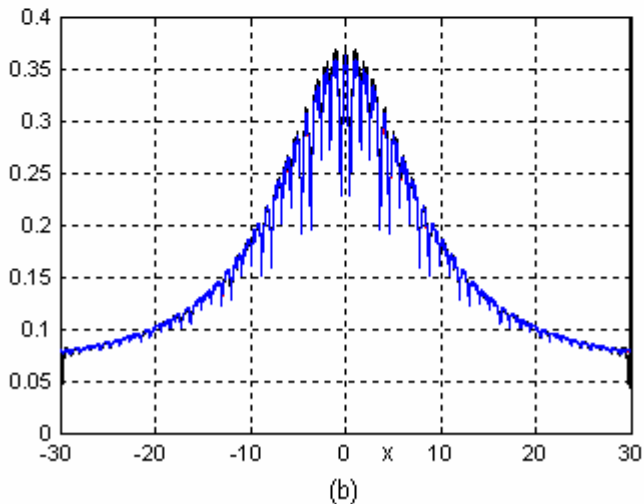


Gambar 3.11. Perbandingan hasil perhitungan untuk $\Delta x = 0.02$ (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman.

Perbandingan $k_{zcr}(x, t_{\max})$, $k_H(x, t_{\max})$ dan $k_{SFB}(x, t_{\max})$

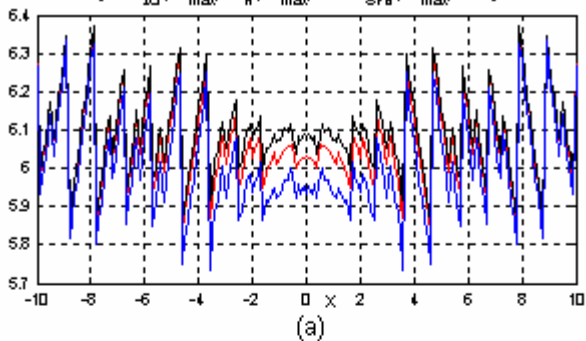


Perbandingan hasil kuadrat kecuraman s^2

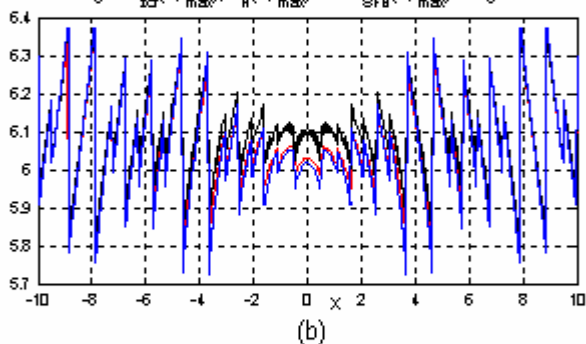


Gambar 3.12. Perbandingan hasil perhitungan untuk $\Delta x = 0.01$ (a) $k_{SFB}(x, t_{\max})$ (merah), $k_{zcr}(x, t_{\max})$ (biru), dan $k_H(x, t_{\max})$ (hitam), (b) kuadrat kecuraman.

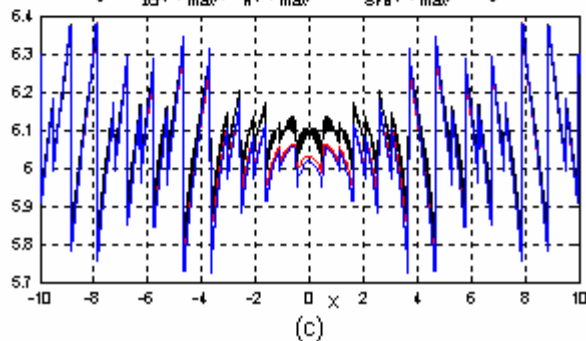
Perbandingan $k_{zcr}(x, t_{max})$, $k_H(x, t_{max})$ dan $k_{SFB}(x, t_{max})$ dengan $dx = 0.1$



Perbandingan $k_{zcr}(x, t_{max})$, $k_H(x, t_{max})$ dan $k_{SFB}(x, t_{max})$ dengan $dx = 0.02$



Perbandingan $k_{zcr}(x, t_{max})$, $k_H(x, t_{max})$ dan $k_{SFB}(x, t_{max})$ dengan $dx = 0.01$



Gambar 3.13. Hasil perhitungan $k_{zcr}(x, t_{max})$ (biru) dan $k_H(x, t_{max})$ (hitam) dibandingkan dengan $k_{SFB}(x, t_{max})$ (merah) di sekitar $x = 0$.

Perbandingan nilai rata-rata galat relatif hasil perhitungan dengan menggunakan metode *zero crossing* dan transformasi *Hilbert* jika dihitung dengan

$$\varepsilon_{Zero} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{k_{SFB}(x_i, t_{\max}) - k_{zcr}(x_i, t_{\max})}{k_{SFB}(x_i, t_{\max})} \right| \times 100\% \quad (3.11)$$

dan

$$\varepsilon_{Hilbert} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{k_{SFB}(x_i, t_{\max}) - k_H(x_i, t_{\max})}{k_{SFB}(x_i, t_{\max})} \right| \times 100\% , \quad (3.12)$$

dimana n adalah banyaknya data yang dihitung, diberikan pada Tabel 3.2.

Tabel 3.2. Rata-rata galat relatif hasil perhitungan $k_{zcr}(x, t_{\max})$ dan $k_H(x, t_{\max})$ relatif terhadap $k_{SFB}(x, t_{\max})$.

Δx	ε_{Zero}	$\varepsilon_{Hilbert}$
0.1	0.4614 %	0.2122 %
0.02	0.1649 %	0.2384 %
0.01	0.1627 %	0.2456 %

Pada Tabel 3.2 diperlihatkan perbandingan nilai rata-rata galat relatif bila titik-titik ujung diabaikan. Pada kasus SFB yang digunakan untuk menghitung galat relatif tersebut diperoleh kenyataan bahwa, semakin kecil Δx yang diambil maka galat relatif yang diperoleh pada perhitungan menggunakan metode *zero crossing* juga semakin kecil. Sedangkan pada perhitungan menggunakan metode transformasi *Hilbert* tidak berlaku hal yang serupa.

3.4. Studi Kasus

Dari subbab sebelumnya, diperoleh bahwa metode *zero crossing* mempunyai galat relatif yang lebih kecil dibandingkan dengan metode transformasi *Hilbert*. Selain itu metode *zero crossing* dapat digunakan untuk sebarang data yang lebih umum karena tidak memerlukan asumsi *slowly varying*. Oleh karena itu dalam subbab ini metode *zero crossing* akan diterapkan pada data sekunder yang

diperoleh dari simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang di laboratorium hidrodinamika. Simulasi tersebut dilakukan dengan menggunakan program paket HUBRIS yang dibuat oleh Westhuis (2001). Pada kasus ini, disimulasikan pembangkitan dan perambatan gelombang dalam interval $0 \leq x \leq 200$ dan $147,20 \leq t \leq 300$ dengan $\Delta x = 0,2$ dan $\Delta t = 0,1$. Contoh kasus yang digunakan adalah kasus pembangkitan gelombang bikromatik. Untuk kasus ini, signal masukan yang diberikan di pembangkit gelombang adalah

$$\begin{aligned}\eta(x=0,t) &= a \cos(\omega_1 t) + a \cos(\omega_2 t) \\ &= (2a \cos(\nu t)) \cos(\bar{\omega} t)\end{aligned}$$

dengan

$$a = 0.084,$$

$$\omega_1 = 3.431, \omega_2 = 3.132$$

$$\nu = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{3.431 - 3.132}{2} = 0.1495,$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{3.431 + 3.132}{2} = 3.2815.$$

Nilai bilangan gelombang di pembangkit ditentukan menggunakan relasi dispersi $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$, sehingga diperoleh

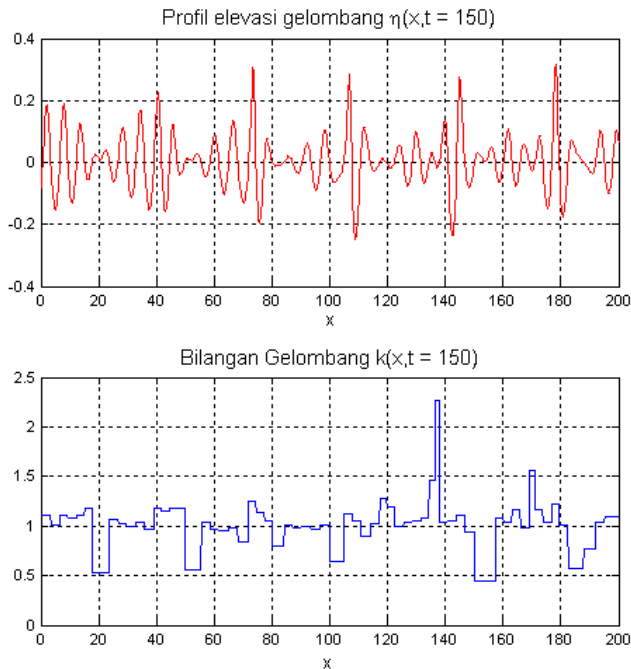
$$k_1 = 1,$$

$$k_2 = 1.200,$$

dan rata-rata bilangan gelombang,

$$\bar{k} = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{1.200 + 1}{2} = 1.100.$$

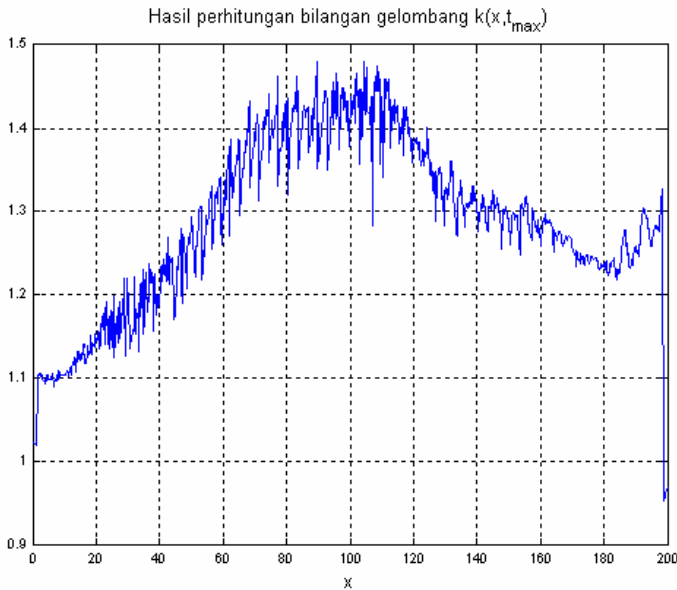
Bilangan gelombang $k(x,t)$ dari data simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang dapat dicari dengan menggunakan metode *zero crossing* sesuai dengan langkah-langkah algoritma metode *zero crossing* yang telah dibahas pada subbab sebelumnya.



Gambar 3.14. Profil gelombang data elevasi simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang beserta bilangan gelombangnya dihitung dengan *zero crossing* di $t = 150$.

Gambar 3.14 memperlihatkan hasil perhitungan bilangan gelombang untuk data elevasi simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang untuk $t = 150$. Karena metode *zero crossing* bersifat lokal maka jarak yang mencakup satu *hump* mempunyai bilangan gelombang yang sama, seperti ditunjukkan pada Gambar 3.14.

Dalam Gambar 3.14, terlihat bahwa pada $x = 137.2$ dan saat elevasi gelombang sangat rendah, terjadi kesusutatan fase sehingga panjang gelombang sangat pendek. Hal ini mengakibatkan bilangan gelombang pada posisi tersebut bernilai tinggi. Gambar 3.14 tersebut untuk menunjukkan bahwa metode *zero crossing* bersifat lokal.



Gambar 3.15. Hasil perhitungan bilangan gelombang $k_{zcr}(x, t_{\max})$ dari data simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang di laboratorium hidrodinamika.

Gambar 3.15 memperlihatkan hasil perhitungan bilangan gelombang dari data simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang di laboratorium hidrodinamika pada saat $t_{\max}$. Pada Gambar 3.15 terlihat bahwa nilai bilangan gelombang di sekitar pembangkit gelombang mendekati nilai rata-rata bilangan gelombang, $\bar{k}$, yaitu 1.1.

BAB IV

KESIMPULAN

Dalam skripsi ini telah dikemukakan suatu metode perhitungan bilangan gelombang yang disebut sebagai metode *zero crossing*. Dalam menguji keakuratan, nilai bilangan gelombang hanya dihitung pada saat gelombang mencapai maksimum di setiap posisi.

Dari hasil pembahasan yang diperoleh dengan menggunakan solusi SFB dan suatu parameter tertentu, $\hat{\nu} = 1$, $\omega_0 = 2.5$, $M = 0.1$, dapat disimpulkan bahwa di sekitar titik-titik ujung selang, hasil perhitungan menggunakan metode transformasi *Hilbert* memperlihatkan penyimpangan yang signifikan, sementara pada metode *zero crossing* tidak memperlihatkan fenomena tersebut. Sedangkan di tengah selang, hasil perhitungan menggunakan kedua metode tersebut memperlihatkan keakuratan yang hampir sama.

Berdasarkan hasil uji keakuratan yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa metode *zero crossing* dapat digunakan sebagai metode alternatif dalam perhitungan bilangan gelombang. Karena selain bersifat lokal, metode tersebut dapat digunakan secara lebih umum dalam perhitungan bilangan gelombang. Oleh karena itu metode *zero crossing* dapat diterapkan pada data simulasi numerik pembangkitan dan perambatan gelombang di laboratorium Hidrodinamika. Hal itu telah dilakukan pada skripsi ini sebagai studi kasus.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Akhmediev dan A. Ankiewicz, 1997. *Solitons, Nonlinear Pulses and Beams*. Chapman & Hall. Melbourne.
- Andonowati, Karjanto, N., dan van Groesen, E. 2006. Extreme Wave Phenomena in Down-streme Running Modulated Waves. *Technical Report LabMath-Indonesia*.
- Boyce, W dan Richard C. Diprima. 1986. *Elementary Diffrential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley & Sons, Inc. Canada
- Debnath, L. 1994. *Nonlinear Water Waves*. Academic Press, Inc. San Diego.
- Huijsmans, R. H. M., G. Klopman, N. Karjanto, dan Andonowati. 2005. Experiments on Extreme Wave Generation Using the Soliton on Finite Background. *Proceedings of Rogue Waves 2004, B rest*. France.
- van Groesen, E. 1998. Water Groups in Uni-directional Surface Wave models, *J. Eng. Math.*, 34, 215.
- Kusumawinahyu, W. M., dan Andonowati. 2003. Tinggi Maksimum Selubung Paket Gelombang Permukaan Bikromatik, *Proceedings ITB Sains & Tek.*, ISSN 0125-9350, Vol.35A, 51 – 63.
- Kusumawinahyu, W. M. 2006. *Penentuan Parameter-parameter Yang Menandai Gelombang Pecah (disertasi)*. ITB. Bandung.
- Song, J.B., dan M.L. Banner. 2002. On Determining the Onset and Strength of Breaking for Deep Water Waves, Part I: Unforced Irrotational Wave Groups. *J. physical Oceanography*, 2541 – 2558.

Westhuis, J. H. 2001. *The Numerical Simulation of Nonlinear Waves in a Hydrodynamic Model Test Basin*. PhD thesis, University of Twente, the Netherlands.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

