

**KEKONVERGENAN BARISAN HIMPUNAN ATAS
TOPOLOGI PADA RUANG KOLEKSI HIMPUNAN BAGIAN**

SKRIPSI

oleh :
HERMAN SYAH SURAKAMA
0001100194 – 94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

**KEKONVERGENAN BARISAN HIMPUNAN ATAS
TOPOLOGI PADA RUANG KOLEKSI HIMPUNAN BAGIAN**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

oleh :
HERMAN SYAH SURAKAMA
0001100194 – 94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

LEMBAR PENGESAHAN TUGAS AKHIR
KEKONVERGENAN BARISAN HIMPUNAN ATAS TOPOLOGI
PADA RUANG KOLEKSI HIMPUNAN BAGIAN

oleh:
HERMAN SYAH SURAKAMA
0001100194 – 94

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 19 Juli 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Drs. M. Muslikh, MSi
NIP. 131 871 740

Dr. Marjono, M.Phil
NIP. 131 785 254

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : Herman Syah Surakama
NIM : 0001100194 – 94
Jurusan : Matematika
Penulis Tugas Akhir berjudul : Kekonvergenan Barisan
Himpunan atas Topologi pada
Ruang Koleksi Himpunan
Bagian

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Tugas akhir yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Tugas Akhir ini.
2. Apabila dikemudian hari ternyata Tugas Akhir yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 19 Juli 2007

Yang menyatakan,

(Herman Syah Surakama)

0001100194 – 94

KEKONVERGENAN BARISAN HIMPUNAN ATAS TOPOLOGI PADA RUANG KOLEKSI HIMPUNAN BAGIAN

ABSTRAK

Pasangan (X, τ) disebut **ruang topologi** di mana X himpunan yang mendasarinya dan τ topologi pada X . Dalam ruang koleksi himpunan bagian, ruang topologi dapat dibangun melalui pendefinisian koleksi himpunan bagian. Pendefinisian ini didasarkan atas *upper topology* (topologi atas) dan *lower topology* (topologi bawah). Kedua topologi ini membangkitkan *Vietoris topology* (topologi Vietoris). Dengan dasar topologi tersebut, akan dibuktikan kekonvergenan barisan himpunan. Dengan menggunakan kriteria yang telah diperkenalkan oleh Kelley(1955) dapat dibuktikan kekonvergenan barisan himpunan dalam ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong atas topologi Vietoris.

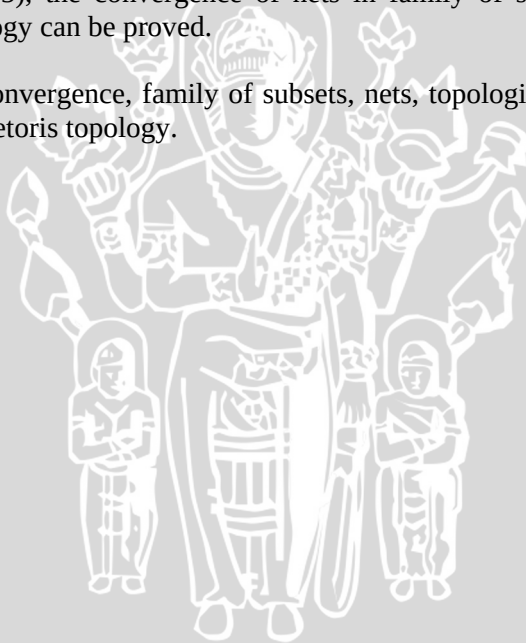
Kata kunci: Barisan himpunan, kekonvergenan, koleksi himpunan bagian, ruang topologi, topologi Vietoris.

THE CONVERGENCE OF NETS ON TOPOLOGY IN FAMILY OF SUBSETS

ABSTRACT

A couple (X, τ) is called topological space where X is the set and τ is topology on X . In family of subsets, a topological space is build through the definition of family of subsets. The definition based on upper topology and lower topology. The Vietoris topology is that generated by upper topology and lower topology together. Based on this topology, we will show the convergence of nets (sequences of sets). By using criterion which have been introduced by Kelley(1955), the convergence of nets in family of subsets on Vietoris topology can be proved.

Keywords: Convergence, family of subsets, nets, topological space, vietoris topology.



KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadiran Allah SWT, atas rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini dengan baik.

Tugas akhir dengan judul Kekonvergenan Barisan Himpunan atas Topologi pada Ruang Koleksi Himpunan Bagian diajukan untuk memenuhi syarat menyelesaikan studi di program studi Matematika, Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya.

Penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Drs. M. Muslikh, MSi. sebagai dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu dan sabar dalam membimbing penulis.
2. Dr. Marjono, M.Phil. sebagai dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktu dalam membimbing penulis.
3. Dra. Ari Andari, MS. sebagai pembimbing akademik yang telah meluangkan waktu dan sabar dalam membimbing penulis.
4. Dr. Dra. Wuryansari M. K., MSi. sebagai Ketua Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
5. Dr. Agus Suryanto, MSc. sebagai Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
6. Ayah, Ibu dan Kakak-kakak tercinta atas seluruh doa dan perhatian serta kesabarannya.
7. Sahabat-sahabat tercinta serta teman-teman yang telah banyak memberi dorongan dan bantuan.
8. Staf Jurusan Matematika yang telah banyak membantu keperluan administrasi.
9. Semua pihak yang tidak bisa saya sebutkan satu persatu atas bantuan yang diberikan sehingga tugas akhir ini dapat terselesaikan.

Penulis menyadari bahwa tugas akhir ini masih banyak kekurangan sehingga saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan. Semoga tugas akhir ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Malang, Juli 2007

Penulis

DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	ii
HALAMAN PERNYATAAN	iii
ABSTRAK	iv
ABSTRACT	v
KATA PENGANTAR	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR SIMBOL	viii
BAB I PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	1
1.3. Batasan Masalah.....	1
1.4. Tujuan Penulisan.....	1
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Himpunan (<i>set</i>).....	3
2.2. Ruang Topologi.....	4
2.3. Barisan Titik.....	9
2.4. Barisan Himpunan.....	10
2.5. Topologi pada Koleksi Himpunan	12
BAB III PEMBAHASAN	
3.1. Barisan Himpunan Bagian dalam Ruang Topologi.....	15
3.2. Kekonvergenan Barisan dalam Ruang Topologi $(\mathcal{F}_0(X), \tau_{\mathcal{F}})$..	22
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	
4.1. Kesimpulan	29
4.2. Saran	29
DAFTAR PUSTAKA	31

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Konsep kekonvergenan barisan himpunan barisan telah banyak diketahui, baik barisan himpunan bagian dari X dalam konteks X sebagai plain set maupun dalam konteks X yang di tunjang suatu topologi.

Telah banyak dikembangkan konsep topologi pada koleksi semua himpunan bagian yang tidak kosong antara lain topologi Vietoris, topologi bola tertutup dan topologi Fell.

Dalam hal ini penulis tertarik untuk mempelajari konsep kekonvergenan barisan himpunan yang ditinjau dalam ruang topologi dengan $\wp_0(X)$ sebagai himpunan yang mendasarinya yang dilengkapi oleh suatu topologi.

1.2 Rumusan Masalah

Dengan diberikan ruang topologi (X, τ) , akan dirumuskan masalah sebagai berikut:

- Bagaimana membangun topologi pada ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong.
- Bagaimana konsep kekonvergenan barisan himpunan dalam ruang koleksi semua himpunan bagian tidak kosong dari X atas topologi $\wp_0(X)$.

1.3 Batasan Masalah

Pada skripsi ini hanya dibahas konsep kekonvergenan barisan himpunan pada ruang koleksi himpunan bagian yang tertutup dan tidak kosong atas topologi Vietoris.

1.4 Tujuan Penulisan

- Mempelajari kontruksi suatu topologi pada ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong dari ruang topologi (X, τ) .
- Mempelajari konsep kekonvergenan barisan himpunan dalam ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong atas topologi Vietoris.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini diuraikan definisi, teorema dasar yang akan digunakan, disertai dengan bukti maupun tanpa bukti. Pembahasan ini menjadi teori dasar yang digunakan pada bab pembahasan.

2.1 Himpunan (*set*)

Definisi 2.1.1

Himpunan adalah suatu kumpulan dari obyek-obyek yang mempunyai sifat tertentu. Pada umumnya nama sebuah himpunan ditulis dengan huruf kapital. Himpunan A dikatakan himpunan berhingga (*finite*) jika A mempunyai anggota sebanyak berhingga. Himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, dinotasikan dengan ϕ . Jika x anggota himpunan A , ditulis $x \in A$ dan jika bukan anggota A ditulis $x \notin A$. A^c dinotasikan sebagai komplemen himpunan A , yaitu:

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$

(Deshpande, 1988).

Definisi 2.1.2

Diberikan himpunan B . Himpunan A dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari B jika setiap anggota A adalah anggota B , ditulis:

$$A \subseteq B$$

Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari sebarang himpunan.

(Deshpande, 1988).

Definisi 2.1.3

Diberikan himpunan $X \neq \phi$. Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan X adalah koleksi dari semua himpunan bagian dari himpunan X dan ditulis $\wp(X)$

atau

$$\wp(X) = \{A \mid A \subseteq X\}$$

(Deshpande, 1988).

Definisi 2.1.4

Diberikan himpunan – himpunan bagian $[A_1, A_2, \dots]$ dari X . Maka berlaku

$$\left(\bigcup A_i\right)^c = \bigcap A_i^c$$

$$\left(\bigcap A_i\right)^c = \bigcup A_i^c$$

Rumus di atas dikenal sebagai hukum D'Morgan.

(Deshpande, 1988).

2.2 Ruang Topologi

Definisi 2.2.1

Diberikan $X \neq \emptyset$ dan $\tau \subset \wp(X)$. τ dikatakan *topologi* untuk X jika memenuhi aksioma-aksioma di bawah ini:

1. $\emptyset \in \tau$ dan $X \in \tau$
2. Jika $G_i \in \tau, i = 1, 2, \dots, n$ maka $\bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$
3. Jika $G_i \in \tau$ dan $i \in I$ (I himpunan indeks berhingga atau tak berhingga) maka $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

Pasangan (X, τ) disebut **ruang topologi** di mana X himpunan yang mendasarinya dan τ topologi pada X .

(Wahyudin, 1987).

Pada suatu himpunan $X \neq \emptyset$ dapat berlaku lebih dari satu topologi. Dimisalkan τ_1 dan τ_2 ialah topologi pada X , maka τ_1 dikatakan lebih kasar (*coarser*) dari τ_2 bila $\tau_1 \subset \tau_2$.

(Kartono dan Nurwiyati, 1995).

Definisi 2.2.2

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi. Suatu himpunan $U_x \subset X$ adalah persekitaran (*Neighbourhoods*) dari $x \in X$ jika terdapat suatu himpunan $G \in \tau$ sedemikian sehingga $x \in G \subset U_x$.

(Sieradski, 1992).

Definisi 2.2.3

Diberikan ruang topologi (X, τ) , $A \subset X$. Maka menurut Sieradski (1992):

- i) $p \in X$ disebut titik interior A jika dan hanya jika $\exists U_p \in \tau \ni p \in U_p \subset A$
- ii) $l \in X$ disebut titik limit A jika dan hanya jika untuk setiap $U_l \in \tau$ berlaku $U_l \cap \{A \setminus \{l\}\} \neq \emptyset$

Himpunan semua titik interior dari A dinotasikan dengan A^0 . Himpunan semua titik limit dari A dinotasikan dengan A' .

Contoh 2.2.4

Diberikan $X = \{a, b, c\}$ dengan $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}$ dan $A = \{a\}$.

$U_a = \{\{a\}, \{a, b\}, X\}$, titik $a \in X$ adalah titik interior A karena $\exists U_a \in \tau \ni a \in U_a \subset A$. Misal titik $a \in X$ adalah titik limit A , maka untuk setiap $U_a \in \tau$ berlaku $U_a \cap \{A \setminus \{a\}\} \neq \emptyset$. Karena $\{a\} \cap \{A \setminus \{a\}\} = \emptyset$, sehingga titik $a \in X$ bukan titik limit A . Demikian juga titik $b \in X$ bukan titik limit dari A . Titik $c \in X$ adalah titik limit A karena berlaku $\{X\} \cap \{A \setminus \{c\}\} \neq \emptyset$.

Definisi 2.2.5

Diberikan ruang topologi (X, τ) , $A \subset X$. Maka menurut Sieradski (1992):

- i) A disebut himpunan terbuka jika $\forall x \in A$, x merupakan titik interior
- ii) A disebut himpunan tertutup jika x titik limit A mengakibatkan $x \in A$

Selanjutnya gabungan antara A dan A' disebut $\bar{A}$, yaitu $\bar{A} = A \cup A'$. A^0 merupakan himpunan bagian terbuka terbesar dari X dalam A . Sedangkan $\bar{A}$ merupakan himpunan bagian tertutup terkecil (*closure*) dari X atas A .

Anggota dari τ disebut himpunan terbuka dalam X . Himpunan $\emptyset$ dan himpunan X adalah himpunan terbuka sekaligus himpunan tertutup dalam ruang topologi (X, τ) . Himpunan $G \subset X$ disebut himpunan terbuka pada (X, τ) jika $G \in \tau$. Selanjutnya komplementnya $X \setminus G$ disebut himpunan tertutup pada (X, τ) . Jadi $F \subset X$ disebut himpunan tertutup jika $F^c \in \tau$.

Teorema 2.2.6

Diberikan ruang topologi (X, τ)

- (1) Irisan sebanyak berhingga atau tak berhingga (infinite) dari himpunan-himpunan tertutup merupakan himpunan tertutup.
- (2) Gabungan sebanyak berhingga himpunan-himpunan tertutup merupakan himpunan tertutup.

(Kartono dan Nurwiyati, 1995).

Bukti:

- (1) Misal $\{F_i\}$ adalah suatu koleksi himpunan dengan $F_i \subset X$ dan F_i tertutup $\forall i \in I$. Karena $\{F_i\}$ tertutup $\forall i \in I$ maka $F_i^c = G_i \in \tau \quad \forall i \in I$ sehingga

$$\begin{aligned} \bigcap_{i \in I} F_i &= \bigcap_{i \in I} (F_i^c)^c = \bigcap_{i \in I} G_i^c \\ &= \left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)^c \end{aligned}$$

Karena $G_i \in \tau, \forall i \in I$, $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$. Akibatnya $\left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)^c$

tertutup. Jadi $\bigcap_{i \in I} F_i = \left(\bigcup_{i \in I} G_i \right)^c$ tertutup.

- (2) Jika F_i tertutup untuk $i=1,2,3,\dots,n$ maka $F_i^c \in \tau$ dan $\bigcup_{i=1}^n F_i^c$ adalah tertutup karena

$$\bigcap_{i=1}^n F_i^c = \left(\bigcup_{i=1}^n F_i \right)^c \in \tau$$

Teorema 2.2.7

Suatu himpunan G adalah terbuka jika dan hanya jika G_x persekitaran untuk setiap $x \in G$.

(Sieradski, 1992).

Bukti:

($\Rightarrow$) Diambil $x \in G$. Pilih himpunan terbuka $G_1 = G$. Maka $x \in G_1 \subset G_x$. Jadi G_x merupakan persekitaran $\forall x \in G$.

($\Leftarrow$) Diketahui G_x persekitaran untuk setiap titik $x \in G$. Maka ada himpunan terbuka G_x sedemikian sehingga $x \in G_x \subset G$. Akan dibuktikan G terbuka. Dimisalkan $H = \bigcup_{x \in G} G_x$. Diambil $x \in G$ maka

ada $G_x \in \tau$ dan $x \in G_x$. Karena $G_x \subset H$ dan $x \in G_x$ maka $x \in H$. Didapat $G \subset H$. Diambil $x \in H$, terdapat $x \in G$ sedemikian hingga $x \in G_x$. Karena G persekitaran $x \in G$ maka $x \in G_x \subset G$, jadi $x \in G$. Sehingga $H \subset G$. Dapat disimpulkan

$$H = G = \bigcup_{x \in G} G_x$$

Karena G_x terbuka $\forall x \in G$ sedemikian hingga $\bigcup G_x$ terbuka, diperoleh $H = G = \bigcup_{x \in G} G_x$ terbuka.

Definisi 2.2.8

Jika Y ialah sebarang himpunan bagian pada ruang topologi (X, τ) , maka koleksi

$$\tau_Y = \{U = V \cap Y : V \in \tau\}$$

merupakan topologi pada Y . Selanjutnya (Y, τ_Y) disebut **subruang topologi** dari (X, τ) . Suatu himpunan terbuka di subruang (Y, τ_Y) dikatakan relatif terbuka terhadap X ; suatu himpunan tertutup di

subruang (Y, τ_Y) dikatakan relatif tertutup pada X ; dan suatu persekitaran di subruang (Y, τ_Y) dikatakan persekitaran relatif pada X .
(Sieradski, 1992).

Definisi 2.2.9

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi. Suatu sub-koleksi himpunan $\mathcal{B} \subset \tau$ merupakan basis untuk topologi τ jika setiap anggota dari τ merupakan union (gabungan) dari sebarang anggota-anggota dari $\mathcal{B}$.
(Soehakso).

Jadi jika $\mathcal{B}$ adalah basis untuk topologi τ dan $G \in \tau$ maka untuk setiap $x \in G$ terdapat $B_x \in \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $x \in B_x \subset G$.

Teorema 2.2.10

Jika $\mathcal{B}_1$ merupakan suatu basis untuk topologi τ pada X dan $\mathcal{B}_2$ koleksi dari semua himpunan terbuka pada (X, τ) di mana $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ maka $\mathcal{B}_2$ adalah juga basis untuk topologi τ .
(Soehakso).

Bukti:

Misal G adalah himpunan bagian terbuka dari X . Karena $\mathcal{B}_1$ merupakan suatu basis untuk topologi τ pada X maka G merupakan gabungan dari anggota-anggota $\mathcal{B}_1$. Yang berarti bahwa $G = \bigcup_{i \in I} B_i$, di mana $B_i \in \mathcal{B}_1$. Tetapi karena $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$ maka berlaku untuk setiap $B_i \in \mathcal{B}_1$ juga merupakan anggota dari $\mathcal{B}_2$. Yang berarti bahwa G merupakan gabungan dari anggota-anggota $\mathcal{B}_2$. Dengan demikian $\mathcal{B}_2$ merupakan basis untuk topologi τ pada X juga.

Berdasarkan **Teorema 2.2.10** ini, dapat diambil kesimpulan bahwa basis untuk suatu topologi adalah tidak tunggal.

Definisi 2.2.11

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi pada X dan $\mathcal{A} \subset \wp(X)$. Suatu koleksi himpunan $\mathcal{A} \subset \wp(X)$ merupakan sub-basis untuk topologi τ

jika setiap anggota τ (himpunan terbuka) merupakan gabungan dari irisan berhingga anggota-anggota $\mathcal{A}$.

(Soehakso).

Dengan kata lain, $\mathcal{A}$ merupakan sub-basis untuk topologi τ jika koleksi irisan berhingga dari anggota-anggota $\mathcal{A}$ merupakan basis untuk topologi τ .

Definisi 2.2.12

Diberikan himpunan X dan $A \subset X$. **Selimut** untuk A ialah koleksi himpunan bagian $\mathcal{G} = \{G_i \subset X : i \in I\}$ dari X sedemikian hingga $A \subset \bigcup \{G_i : i \in I\}$. **Sub-selimut** untuk A ialah sub-koleksi $\mathcal{V} \subset \mathcal{G}$ yang tetap merupakan selimut untuk A . Keluarga $\mathcal{G}$ dikatakan selimut terbuka untuk A jika setiap $G \in \mathcal{G}$ merupakan himpunan terbuka.

(McCluskey, 1997).

Definisi 2.2.13

Ruang topologi (X, τ) dikatakan **kompak** jika setiap selimut terbuka untuk X memiliki sub-selimut berhingga.

(McCluskey, 1997).

Definisi 2.2.14

Ruang topologi (X, τ) disebut ruang *Hausdorff* jika dan hanya jika untuk setiap dua titik x dan y yang berlainan di dalam X , terdapat persekitaran x dan y yang saling asing.

(Kelley, 1955).

2.3 Barisan Titik

Definisi 2.3.1

Diberikan (X, τ) adalah ruang topologi dan $\langle x_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan dalam X . Maka:

- i) x disebut titik limit dari $\langle x_n \rangle$ jika untuk setiap persekitaran U_x terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_m \in U_x$ untuk setiap $m \geq n$

- ii) x disebut *cluster point* $\langle x_n \rangle$ jika untuk setiap persekitaran U_x dan setiap $n \in \mathbb{N}$ maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $m \geq n$ dan $x_m \in U_x$

(Klein and Thompson, 1984).

Contoh 2.3.2

Diberikan barisan $\langle x_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh $x_n = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Maka $\langle x_n \rangle = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$. $x=1$ adalah titik limit dari $\langle x_n \rangle$ karena untuk setiap U_1 terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x_m \in U_1$ untuk setiap $m \geq n$.

$x=1$ adalah *cluster point* dari $\langle x_n \rangle$ karena untuk setiap U_1 dan setiap $n \in \mathbb{N}$ maka terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $m \geq n$ dan $x_m \in U_1$.

2.4 Barisan Himpunan

Definisi 2.4.1

Diberikan himpunan $X \neq \emptyset$ dan barisan himpunan $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $A_n \subset X, \forall n \in \mathbb{N}$ didefinisikan:

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

dan

$$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$$

Barisan $\langle A_n \rangle$ dikatakan konvergen ke himpunan A jika:

$$\limsup A_n = \liminf A_n = A$$

ditulis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$$

(Klein and Thompson, 1984).

Proposisi 2.4.2

Jika $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan himpunan bagian dari X , maka dengan menggunakan **Definisi 2.4.1** berlaku:

- $\liminf (A_n \cap B_n) = \liminf A_n \cap \liminf B_n$
- $\limsup (A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$
- $\liminf (X \setminus A_n) = X \setminus \limsup A_n$

$$\text{iv) } \limsup(X \setminus A_n) = X \setminus \liminf A_n$$

(Klein and Thompson, 1984).

Bukti:

i) Dengan menggunakan **Definisi 2.4.1** maka:

$$\begin{aligned} \liminf(A_n \cap B_n) &= \bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} (A_m \cap B_m) \\ &= \bigcup_{n \in N} [(\bigcap_{m \geq n} A_m) \cap (\bigcap_{m \geq n} B_m)] \\ &= (\bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} A_m) \cap (\bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} B_m) \\ &= \liminf A_n \cap \liminf B_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \limsup(A_n \cup B_n) &= \bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} (A_m \cup B_m) \\ &= \bigcap_{n \in N} [(\bigcup_{m \geq n} A_m) \cup (\bigcup_{m \geq n} B_m)] \\ &= (\bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} A_m) \cup (\bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} B_m) \\ &= \limsup A_n \cup \limsup B_n \end{aligned}$$

iii) Didefinisikan bahwa $A \setminus B = A \cap B^c$

$$\begin{aligned} \liminf(X \setminus A_n) &= \liminf(X \cap A_n^c) \\ &= \bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} (X \cap A_m^c) \\ &= (\bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} X) \cap (\bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} A_m^c) \end{aligned}$$

Karena irisan maupun union dari himpunan X adalah himpunan itu sendiri, maka:

$$\begin{aligned} \liminf(X \setminus A_n) &= X \cap (\bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} A_m)^c \\ &= X \cap (\limsup A_n)^c \\ &= X \setminus \limsup A_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iv) } \limsup(X \setminus A_n) &= \limsup(X \cap A_n^c) \\ &= \bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} (X \cap A_m^c) \\ &= (\bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} X) \cap (\bigcap_{n \in N} \bigcup_{m \geq n} A_m^c) \end{aligned}$$

Karena irisan maupun union dari himpunan X adalah himpunan itu sendiri, maka:

$$\begin{aligned} \limsup(X \setminus A_n) &= X \cap (\bigcup_{n \in N} \bigcap_{m \geq n} A_m)^c \\ &= X \cap (\liminf A_n)^c \\ &= X \setminus \liminf A_n \end{aligned}$$

Lemma 2.4.3

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan himpunan bagian dari X , maka $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

(Klein and Thompson, 1984).

Bukti:

$\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$. $x \in \liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$ maka $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m$. Misal $B_n \in \bigcap_{m \geq n} A_m$. Maka $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Maka ada $m \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $x \in B_n \quad \forall n \geq m$. Karena $B_n \in \bigcap_{m \geq n} A_m$ dan $x \in B_n \quad \forall n \geq m$ maka $x \in A_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain $x \in A_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ maka $x \in \bigcap_{m \geq n} A_m$. Misal $x \in \bigcap_{m \geq n} A_m = C_n \quad \forall n$. Maka

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m = \limsup A_n.$$

$x \in \limsup A_n$. Jadi

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n$$

2.5 Topologi pada Koleksi Himpunan

Diberikan ruang topologi (X, τ) dan $G \neq \emptyset$ dan $G \in \tau$. Pada koleksi himpunan $\wp_0(X) = \{U \subseteq X : U \neq \emptyset\}$ didefinisikan sub-koleksi

$$[\bullet, G] = \{U \in \wp_0(X) : U \subset G\}$$

$$\text{Dimisalkan } \mathcal{U} = \{[\bullet, G] : G \in \tau\}$$

Definisi 2.5.1

Diberikan ruang topologi (X, τ) . Suatu topologi $\tau_{\mathcal{U}}$ pada $\wp_0(X)$ yang dibangkitkan oleh sub-basis $\mathcal{U}$ disebut *upper topology* (topologi atas).

(Klein and Thompson, 1984).

Sub-koleksi $[\bullet, G]$ merupakan himpunan terbuka dalam $(\wp_0(X), \tau_{\mathcal{U}})$ sehingga komplemen dari $[\bullet, G]$ adalah

$$\begin{aligned}
\wp_0(X) \setminus [\bullet, G] &= \{U \in \wp_0(X) : U \not\subset G\} \\
&= \{U \in \wp_0(X) : U \cap (X \setminus G) \neq \emptyset\} \\
&= \{U \in \wp_0(X) : U \cap F \neq \emptyset, F \text{ tertutup dalam } X\}
\end{aligned}$$

$\wp_0(X) \setminus [\bullet, G]$ merupakan himpunan tertutup pada $(\wp_0(X), \tau_{\wp})$ selanjutnya dinotasikan sebagai

$$I_F = \{U \in \wp_0(X) : U \cap F \neq \emptyset\}$$

Dimisalkan F tertutup dalam (X, τ) . Pada koleksi $\wp_0(X)$ didefinisikan himpunan

$$[\bullet, F] = \{U \in \wp_0(X) : U \subset F\}$$

Komplemen dari $[\bullet, F]$ adalah himpunan

$$\begin{aligned}
\wp_0(X) \setminus [\bullet, F] &= \{U \in \wp_0(X) : U \not\subset F\} \\
&= \{U \in \wp_0(X) : U \cap (X \setminus F) \neq \emptyset\} \\
&= \{U \in \wp_0(X) : U \cap G \neq \emptyset, G \in \tau\}
\end{aligned}$$

selanjutnya dinotasikan sebagai

$$I_G = \{U \in \wp_0(X) : U \cap G \neq \emptyset, G \in \tau\}$$

Dimisalkan koleksi $\mathcal{L} = \{I_G : G \in \tau\}$

Definisi 2.5.2

Diberikan ruang topologi (X, τ) . Suatu topologi $\tau_{\mathcal{L}}$ pada $\wp_0(X)$ yang dibangkitkan oleh sub-basis $\mathcal{L}$ disebut *lower topology* (topologi bawah).

(Klein and Thompson, 1984).

Himpunan I_G merupakan himpunan terbuka dalam $(\wp_0(X), \tau_{\mathcal{L}})$ sehingga komplemen dari I_G adalah

$$\begin{aligned}
\wp_0(X) \setminus I_G &= \{U \in \wp_0(X) : U \cap (X \setminus F) = \emptyset\} \\
&= \{U \in \wp_0(X) : U \cap G = \emptyset, G \in \tau\}
\end{aligned}$$

merupakan himpunan tertutup dalam $(\wp_0(X), \tau_{\mathcal{L}})$

Definisi 2.5.3

Diberikan (X, τ) ruang topologi. Suatu topologi τ_v pada $\wp_0(X)$ yang dibangkitkan oleh $\mathcal{U}$ dan $\mathcal{L}$ disebut *Vietoris topology* (topologi Vietoris).

(Klein and Thompson, 1984).

Pencirian keanggotaan topologi τ_v sering ditampilkan melalui bentuk himpunan sebagai berikut:

Dimisalkan suatu koleksi berhingga dari himpunan terbuka dalam (X, τ) yaitu $\{G_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan $G_i \in \tau, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ maka

$$\mathcal{B}(G_1, G_2, G_3, \dots, G_n) = \{U \in \wp_0(X) : U \subset \cup G_i \text{ dan } U \cap G_i \neq \emptyset\}$$

merupakan sub-basis dari τ_v .

Tiga buah jenis topologi $\tau_s, \tau_{\mathcal{L}}, \tau_v$ didefinisikan pada koleksi $\wp_0(X)$. Sub-koleksi semua himpunan bagian tertutup dalam $\wp_0(X)$ yang dinotasikan sebagai $\mathcal{F}_0(X)$ atas topologi-topologi di atas merupakan sub-ruang topologi dari $\wp_0(X)$. Pada bab III akan dibahas kekonvergenan barisan himpunan dalam ruang topologi $(\mathcal{F}_0(X), \tau_v)$.

BAB III PEMBAHASAN

Sesuai dengan tujuan penulisan skripsi ini, maka pada bab III akan dipelajari barisan himpunan bagian dalam ruang topologi dan barisan himpunan bagian dalam ruang koleksi semua himpunan bagian tertutup tidak kosong yang dilengkapi oleh suatu topologi.

3.1 Barisan Himpunan Bagian dalam Ruang Topologi

Definisi 3.1.1

Diberikan ruang topologi (X, τ) dan barisan himpunan bagian dari X $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

- i) Titik $x \in X$ disebut *limit point* dari $\langle A_n \rangle$, jika untuk setiap persekitaran U_x terdapat $n \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m \geq n$, $A_m \cap U_x \neq \emptyset$
- ii) Titik $x \in X$ disebut *cluster point* dari $\langle A_n \rangle$, jika untuk setiap persekitaran U_x dan setiap $n \in \mathbb{N}$, terdapat $m \geq n$ sedemikian hingga $A_m \cap U_x \neq \emptyset$
- iii) $\liminf A_n$ adalah himpunan semua *limit point* dari $\langle A_n \rangle$
- iv) $\limsup A_n$ adalah himpunan semua *cluster point* dari $\langle A_n \rangle$
- v) jika $\limsup A_n = \liminf A_n = A$, maka A adalah *limit* barisan $\langle A_n \rangle$, dikatakan bahwa barisan $\langle A_n \rangle$ konvergen ke A dan ditulis $A = \lim A_n$.

Jika ruang topologi (X, τ_d) dengan τ_d topologi diskrit, maka **Definisi 2.4.1** dan **Definisi 3.1.1** bersesuaian (*coincide*)

Proposisi 3.1.2

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan bagian dalam ruang topologi X , maka berlaku:

$$X \setminus \limsup A_n \subset \liminf (X \setminus A_n)$$

Bukti:

Diambil $x_0 \in X \setminus \limsup A_n$. Maka $x_0 \notin \limsup A_n$.

Berdasarkan **Definisi 3.1.1** terdapat persekitaran U_0 dari x_0 dan suatu $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga untuk setiap $m \geq n_0$ berlaku

$$A_m \cap U_0 = \emptyset$$

Diambil sebarang persekitaran U dari x_0 , maka untuk setiap $m \geq n_0$

$$x_0 \in U \cap (X \setminus A_m) = U \cap A_m^C$$

Jadi $(X \setminus A_m) \cap U \neq \emptyset$ dengan kata lain x_0 titik limit dari $(X \setminus A_m)$

atau $x_0 \in \liminf(X \setminus A_n)$. Jadi

$$X \setminus \limsup A_n \subset \liminf(X \setminus A_n)$$

Proposisi 3.1.3

Jika $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan bagian dari ruang topologi X , maka dengan menggunakan **Definisi 3.1.1** didapat:

- i) $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$
- ii) $\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf A_n \cap \liminf B_n$

Bukti:

- i) Akan dibuktikan

$$\limsup(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \limsup B_n$$

dan

$$\limsup A_n \cup \limsup B_n \subset \limsup(A_n \cup B_n)$$

Diambil $x_0 \in \limsup(A_n \cup B_n)$. Maka untuk persekitaran U_0 dari x_0 dan setiap $n_0 \in \mathbb{N}$ ada $m \geq n_0$ dan berlaku

$$U_0 \cap (A_m \cup B_m) \neq \emptyset$$

Akibatnya $(U_0 \cap A_m) \cup (U_0 \cap B_m) \neq \emptyset$. Jika $U_0 \cap A_m = \emptyset$ maka $U_0 \cap B_m \neq \emptyset$ untuk setiap $m \geq n_0$ berarti $x_0 \in \limsup B_n$.

Jika $U_0 \cap B_m = \emptyset$ maka $U_0 \cap A_m \neq \emptyset$ untuk setiap $m \geq n_0$ berarti $x_0 \in \limsup A_n$. Jadi $x_0 \in \limsup A_n \cup \limsup B_n$.

Maka

$$\limsup(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \limsup B_n$$

Sebaliknya, diambil $A_n \subset A_n \cup B_n$ maka

$$\limsup A_n \subset \limsup(A_n \cup B_n)$$

Demikian pula diambil $B_n \subset A_n \cup B_n$ maka

$$\limsup B_n \subset \limsup(A_n \cup B_n)$$

Akibatnya

$$\limsup A_n \cup \limsup B_n \subset \limsup(A_n \cup B_n)$$

Jadi

$$\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$$

ii) Diambil $(A_n \cap B_n) \subset A_n$. Akibatnya

$$\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf A_n$$

Sebaliknya diambil $(A_n \cap B_n) \subset B_n$. Akibatnya

$$\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf B_n$$

Sehingga

$$\liminf(A_n \cap B_n) \subset \liminf A_n \cap \liminf B_n$$

Proposisi 3.1.4

Dengan menggunakan notasi pada **Proposisi 3.1.3**, maka didapat

$$i) \quad \liminf(A_n \cup B_n) \supset \liminf A_n \cup \liminf B_n$$

$$ii) \quad \liminf(A_n \cup B_n) \subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \cup [\limsup A_n \cap \limsup B_n]$$

Bukti:

i) Akan dibuktikan

$$\liminf A_n \cup \liminf B_n \subset \liminf(A_n \cup B_n)$$

Diambil $A_n \subset (A_n \cup B_n)$. Akibatnya

$$\liminf A_n \subset \liminf(A_n \cup B_n)$$

Sebaliknya diambil $B_n \subset (A_n \cup B_n)$. Akibatnya

$$\liminf B_n \subset \liminf(A_n \cup B_n)$$

Sehingga

$$\liminf A_n \cup \liminf B_n \subset \liminf(A_n \cup B_n)$$

$$ii) \quad \liminf(A_n \cup B_n) \subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \cup [\limsup A_n \cap \limsup B_n]$$

dengan menggunakan **Lemma 2.4.3** pada A_n dan B_n maka:

$$\begin{aligned} \liminf(A_n \cup B_n) &\subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \cup [\limsup A_n \cap \limsup B_n] \\ &\subset (\liminf A_n \cup \limsup B_n) \cap (\liminf B_n \cup \limsup A_n) \end{aligned}$$

Karena simetris, maka akan dibuktikan salah satunya

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \liminf A_n \cup \limsup B_n$$

Misal $x_0 \in \liminf(A_n \cup B_n)$ dan misal $x_0 \notin \limsup B_n$. Maka ada persekitaran U_0 dengan $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $B_m \cap U_0 = \emptyset$ untuk setiap $m \geq n_0$. Misal U persekitaran dari x_0 dan $n \in \mathbb{N}$. Maka $U \cap U_0$ adalah persekitaran dari x_0 . Terdapat n_1 sedemikian hingga untuk setiap $m \geq n_1$ $(A_m \cup B_m) \cap (U \cap U_0) \neq \emptyset$. Misal $n_2 \geq n_0$, $n_2 \geq n_1$, maka jika $m \geq n_2$ didapat $B_m \cap U_0 = \emptyset$ dan $(A_m \cup B_m) \cap (U \cap U_0) \neq \emptyset$. Sehingga $A_m \cap (U \cap U_0) \neq \emptyset$ untuk setiap $m \geq n_2$. Maka $x_0 \in \liminf A_n$.

Akibat 3.1.5

- i) Jika barisan $\langle B_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen maka $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \lim B_n$ dan $\liminf(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \lim B_n$.
- ii) Jika barisan $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ keduanya konvergen maka begitu juga dengan $\langle A_n \cup B_n \rangle$ dan $\lim(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n$.

Bukti:

- i) Dari **Proposisi 3.1.3 (i)** didapat $\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$

Karena B_n konvergen, akibatnya

$$\limsup B_n = \liminf B_n = \lim B_n$$

sehingga

$$\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \lim B_n$$

Dari **Proposisi 3.1.4 (ii)** didapat:

$$\begin{aligned} \liminf(A_n \cup B_n) &\subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \cup [\limsup A_n \cap \limsup B_n] \\ &\subset \liminf A_n \cup [\liminf B_n \cup (\limsup A_n \cap \limsup B_n)] \\ &\subset \liminf A_n \cup [(\liminf B_n \cup \limsup A_n) \cap (\liminf B_n \cup \limsup B_n)] \end{aligned}$$

Karena $\langle B_n \rangle$ konvergen, maka:

$$\subset \liminf A_n \cup [(\lim B_n \cup \limsup A_n) \cap \lim B_n]$$

$$\begin{aligned}
&\subset (\liminf A_n \cup \lim B_n \cup \limsup A_n) \cap (\liminf A_n \cup \lim B_n) \\
&\liminf A_n \subset \limsup A_n, \text{ sehingga:} \\
&\subset (\limsup A_n \cup \lim B_n \cup \limsup A_n) \cap (\limsup A_n \cup \lim B_n) \\
&\subset (\limsup A_n \cup \lim B_n) \cap (\limsup A_n \cup \lim B_n)
\end{aligned}$$

Jadi

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \lim B_n$$

ii) Dari **Proposisi 3.1.3 (ii)** didapat:

$$\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$$

Karena $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ konvergen, maka

$$\limsup(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n \quad (1)$$

Dari **Proposisi 3.1.4 (i)** didapat:

$$\liminf(A_n \cup B_n) \supset \liminf A_n \cup \liminf B_n$$

Karena $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ konvergen, maka

$$\liminf(A_n \cup B_n) \supset \lim A_n \cup \lim B_n \quad (2)$$

Dari **Proposisi 3.1.4 (ii)** didapat:

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \cup [\limsup A_n \cap \limsup B_n]$$

Karena $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ konvergen, maka

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \lim A_n \cup \lim B_n \cup [\lim A_n \cap \lim B_n]$$

$$\subset \lim A_n \cup [\lim B_n \cup (\lim A_n \cap \lim B_n)]$$

$$\subset \lim A_n \cup [(\lim B_n \cup \lim A_n) \cap (\lim B_n \cup \lim B_n)]$$

$$\subset \lim A_n \cup [(\lim B_n \cup \lim A_n) \cap (\lim B_n)]$$

$$\subset (\lim A_n \cup \lim B_n \cup \lim A_n) \cap (\lim A_n \cup \lim B_n)]$$

$$\subset (\lim A_n \cup \lim B_n) \cap (\lim A_n \cup \lim B_n)]$$

Jadi

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \lim A_n \cup \lim B_n \quad (3)$$

Dari persamaan (2) dan (3) didapat:

$$\liminf(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n \quad (4)$$

Dari persamaan (1) dan (4) didapat:

$$\limsup(A_n \cup B_n) = \liminf(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n$$

Sehingga disimpulkan barisan $\langle A_n \cup B_n \rangle$ konvergen

$$\lim(A_n \cup B_n) = \lim A_n \cup \lim B_n$$

Akibat 3.1.6

Jika barisan $\langle A_n \cup B_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen dan jika $\limsup A_n \cap \limsup B_n = \emptyset$, maka kedua barisan $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ juga konvergen.

Bukti:

Dari **Proposisi 3.1.4 (i)** didapat:

$$\liminf(A_n \cup B_n) \supset \liminf A_n \cup \liminf B_n \quad (5)$$

Dari **Proposisi 3.1.4 (ii)** didapat:

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \cup [\limsup A_n \cap \limsup B_n]$$

Karena $\limsup A_n \cap \limsup B_n = \emptyset$, maka:

$$\liminf(A_n \cup B_n) \subset \liminf A_n \cup \liminf B_n \quad (6)$$

Dari persamaan (5) dan (6) didapat:

$$\liminf(A_n \cup B_n) = \liminf A_n \cup \liminf B_n$$

Dari **Proposisi 3.1.3 (ii)** didapat:

$$\limsup(A_n \cup B_n) = \limsup A_n \cup \limsup B_n$$

Barisan $\langle A_n \cup B_n \rangle$ konvergen, maka

$$\liminf(A_n \cup B_n) = \limsup(A_n \cup B_n)$$

$$\liminf A_n \cup \liminf B_n = \limsup A_n \cup \limsup B_n \quad (7)$$

Diketahui $\limsup A_n \cap \limsup B_n = \emptyset$. Misal $\limsup B_n = \emptyset$ karena $\liminf B_n \subset \limsup B_n$. Maka $\liminf B_n = \emptyset$.

Sehingga persamaan (7) menjadi

$$\liminf A_n = \limsup A_n$$

Sebaliknya misal $\limsup A_n = \emptyset$ karena $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

Maka $\liminf A_n = \emptyset$. Sehingga persamaan (7) menjadi

$$\liminf B_n = \limsup B_n$$

Maka dapat dibuktikan bahwa barisan $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ juga konvergen.

Proposisi 3.1.7

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan bagian dari X , maka

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in N} \overline{\left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)}$$

Bukti:

Dari **Definisi 3.1.1** bahwa $x \in \limsup A_n$ jika dan hanya jika untuk setiap $n \in N$ dan setiap persekitaran U_x , terdapat $m \geq n$ sedemikian hingga $A_m \cap U_x \neq \emptyset$, dalam hal ini jika dan hanya jika untuk setiap $n \in N$, x adalah *closure* dari $\bigcup_{m \geq n} A_m$. Sehingga

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in N} \overline{\left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)}$$

Proposisi 3.1.8

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in N$ barisan himpunan bagian dari X , maka $\limsup A_n = \bigcap_{n \in N} \overline{\left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)}$ di mana H dinotasikan sebagai sebarang himpunan bagian cofinal dari N dan irisannya mencakup seluruh H .

Bukti:

Jika $x \in \liminf A_n$, U_x persekitaran dari x dan H himpunan bagian cofinal dari N dan $n_0 \in N$. Maka $A_n \cap U_x \neq \emptyset$ untuk setiap $n \geq n_0$.

Terdapat $m \in H$ dengan $m \geq n_0$ dan $A_m \cap U_x \neq \emptyset$. Maka $x \in \overline{\left(\bigcup_{m \in H} A_m \right)}$. Untuk setiap himpunan bagian cofinal dari H , didapat

$$\liminf A_n \subset \bigcap_H \overline{\left(\bigcup_{m \in H} A_m \right)}$$

Misal $x \notin \liminf A_n$ maka terdapat persekitaran U_x sedemikian hingga untuk setiap $n \in N$ dipilih $m_n \geq n$ dengan $A_{m_n} \cap U_x = \emptyset$.

Diberikan $H_{U_x} = \langle m_n \rangle$ untuk setiap $n \in N$. Kemudian H_{U_x} adalah himpunan bagian cofinal dari N untuk $U_x \cap \left(\bigcup_{m_n \in H_{U_x}} A_{m_n} \right) = \emptyset$.

Maka $x \notin \overline{\left(\bigcup_{m \in H_{U_x}} A_m \right)}$. Sehingga

$$\limsup A_n = \bigcap_{n \in N} \overline{\left(\bigcup_{m \geq n} A_m \right)}$$

Akibat 3.1.9

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan konstan, sedemikian hingga jika $A_n = A_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka terdapat $\lim A_n$ dan $\lim A_n = \overline{A_0}$

Bukti:

Misal N' himpunan bagian dari $\mathbb{N}$. Maka $\overline{\left(\bigcup_{m \in N'} A_m\right)} = \overline{A_0}$ dan $\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\left(\bigcup_{m \geq n} A_m\right)}$. Karena $\langle A_n \rangle$ barisan konstan, maka $\lim A_n = A_0$

3.2 Kekonvergenan Barisan dalam Ruang Topologi $(F_0(X), \tau_0)$.

Definisi kekonvergenan barisan himpunan yang telah diuraikan diatas, sebagaimana yang dimaksud oleh **Definisi 3.1.1** tidak melibatkan pertopologian pada $\wp_0(X)$ atau $F_0(X)$. Pada sub-bab ini akan dibahas kekonvergenan barisan himpunan atas topologi pada koleksi himpunan bagian tertutup tak kosong dari X .

Dalam Kelley (1955) telah diberikan kriteria kekonvergenan barisan himpunan atas suatu topologi, seperti teorema dibawah ini:

Teorema 3.2.1 (Kelley, 1955)

Diberikan barisan himpunan dari ruang topologi (X, τ) .

- Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah barisan konstan, yaitu $A_n = A_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka A_n konvergen ke A_0 .
- Jika $\langle A_n \rangle$ konvergen ke A , maka setiap sub-barisan juga konvergen ke A .
- Jika $\langle A_n \rangle$ tidak konvergen ke A , maka terdapat sub-barisan yang tidak konvergen ke A .

Dalam **Akibat 3.1.8**, **Teorema 3.2.1 (i)** tidak berlaku atas $\wp_0(X)$. Sehingga diganti dengan $F_0(X)$ dan barisan $\langle A_n \rangle$ dan $\langle B_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dinotasikan sebagai barisan-barisan dalam $F_0(X)$. A_n dan B_n dinotasikan sebagai himpunan-himpunan bagian dari X yang tertutup dan tidak kosong.

Proposisi 3.2.2

Kekonvergenan menurut **Definisi 3.1.1** dalam $\mathcal{F}_0(X)$ memenuhi

Teorema 3.2.1 (i)

Bukti:

$A_n = A_0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $\limsup A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m = \overline{A_0}$,
 $\liminf A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} A_m = \overline{A_0}$, $\overline{A_0} = A_0$. Maka $\lim A_n = A_0$

Untuk memenuhi **Teorema 3.2.1 (ii)** diperlukan 2 lemma:

Lemma 3.2.3

Jika $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ adalah sub-barisan dari $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka $\liminf A_n \subset \liminf B_m$

Bukti:

Diberikan $x \in \liminf A_n$ dan persekitaran U_x , maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga $A_n \cap U_x \neq \emptyset, \forall n \geq n_0$. Berhubung $n_0 \in \mathbb{N}$ terdapat $m_0 \in E$ sedemikian hingga $m \geq m_0 \in E$ menjadikan $N_m \geq n_0$ (N adalah fungsi dari E ke $\mathbb{N}$ dan $B_m = A_{N_m}$). Maka untuk setiap $m \geq m_0$, $B_m \cap U_x \neq \emptyset$ sehingga $x \in \liminf B_m$.

Lemma 3.2.4

Dengan notasi yang sama dalam **Lemma 3.2.3**

$\limsup A_n \supset \limsup B_m$

Bukti:

Diberikan $x \in \limsup B_m$ dan persekitaran U_x . jika $n \in \mathbb{N}$ terdapat hubungan $m_1 \in E$ sedemikian hingga jika $m \geq m_1 \in E$, maka $N_m \geq n$. karena $x \in \limsup B_m$, untuk m_1 terdapat $m_2 \geq m_1$ sehingga $B_{m_2} \cap U_x \neq \emptyset$. Diberikan $n_2 = N_{m_2}$. Maka $n_2 \geq n$ dan $A_{n_2} \cap U_x \neq \emptyset$. Maka $x \in \limsup A_n$

Proposisi 3.2.5

Kekonvergenan menurut **Definisi 3.1.1** mencakup **Teorema 3.2.1 (ii)**

Bukti:

Misal $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in E$ barisan yang konvergen ke A_0 dan misal $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in E$ merupakan sub-barisan. Maka:

$$\begin{aligned}
A_0 = \liminf A_n &\subset \liminf B_m \\
&\subset \limsup B_m \\
&\subset \limsup A_n \\
&= A_0
\end{aligned}$$

Sehingga

$$\liminf B_m = \limsup B_m = A_0$$

Untuk teorema ketiga, dibutuhkan dua lemma yang menguatkan dua teorema sebelumnya dan memberikan karakteristik lebih lanjut tentang $\liminf$ dan $\limsup$ yang mengingatkan pada *cluster point* dan *limit point* pada urutan-urutan terminology.

Lemma 3.2.6

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan bagian dari X , maka $\liminf A_n = \bigcap \limsup B_m$ di mana $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ adalah sebarang sub-barisan yang irisannya memberi dampak pada semua sub-barisan.

Bukti:

Menurut **Lemma 3.2.3** dan **Lemma 2.4.3** didapat:

$$\liminf A_n \subset \liminf B_m \subset \limsup B_m$$

Sehingga

$$\liminf A_n \subset \bigcap \limsup B_m$$

Misal $x \notin \liminf A_n$. Maka terdapat persekitaran U_x untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, di pilih $n_m \geq m$ dengan $A_{n_m} \cap U = \emptyset$. $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ didefinisikan pada $B_m = A_{n_m}$. Maka $\langle B_m \rangle$ sub-barisan dan, karena $B_m \cap U = \emptyset$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, maka jelas $x \notin \limsup B_m$.

Lemma 3.2.7

Jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan himpunan bagian dari X , maka $\limsup A_n = \bigcup \liminf B_m$ di mana B_m sebarang sub-barisan dari $\langle A_n \rangle$ yang unionnya memberi dampak pada semua sub-barisan.

Bukti:

Menurut **Lemma 3.2.4** dan **Lemma 2.4.3** didapat:

$$\liminf B_m \subset \limsup B_m \subset \limsup A_n$$

Sehingga $\limsup A_n \supset \cup \liminf B_m$. Misal $x \in \limsup A_n$ dan persekitaran U_x . Maka, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, terdapat $n_m \geq m$ sedemikian hingga $A_{n_m} \cap U_x \neq \emptyset$. Misal $\mathcal{U}_x$ adalah koleksi semua persekitaran x dan diberikan $E = \mathcal{U}_x \times \mathbb{N}$. Dapat dikatakan bahwa G adalah fungsi dari E ke $\mathbb{N}$ di mana $G(U_x, m) = n_m$. Kemudian $B_{(U_x, m)}$ didefinisikan sebagai $B_{(U_x, m)} = A_{n_m}$ adalah sub-barisan dari $\langle A_n \rangle$. Diberikan sebarang persekitaran V_x , $B_{(U_x, m)} \cap V_x \neq \emptyset$ untuk setiap $(U_x, m) \geq (V_x, n)$ dalam E (di mana $n \in \mathbb{N}$). Maka $x \in \liminf B_{(U_x, m)}$.

Proposisi 3.2.8

Kekonvergenan menurut **Definisi 3.1.1** mencakup **Teorema 3.2.1**

(iii)

Bukti:

Di buat kontraposisitif dari **Teorema 3.2.1 (iii)**

Jika setiap sub-barisan dari $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ adalah sub-barisan yang konvergen ke A_0 , maka $\lim A_n = A_0$. Diberikan $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ sub-barisan dari $\langle A_n \rangle$. Kemudian dimisalkan terdapat sub-barisan $\langle C_l \rangle$ untuk setiap $l \in F$ dengan limit A_0 .

$$A_0 = \lim C_l = \liminf C_l \supset \liminf B_m \text{ (menurut Lemma 3.2.3)}$$

$$A_0 \supset \cup \liminf B_m = \limsup A_n \text{ (menurut Lemma 3.2.7)}$$

Disisi lain:

$$A_0 = \lim C_l = \limsup C_l \subset \limsup B_m \text{ (menurut Lemma 3.2.4)}$$

Dan

$$A_0 \subset \cap \limsup B_m = \liminf A_n \text{ (menurut Proposisi 3.2.8)}$$

Sehingga dengan **Lemma 2.4.3** didapat bahwa

$$\liminf A_n = \limsup A_n = A_0.$$

Dalam ruang kompak *Hausdorff* akan ditunjukkan secara langsung bahwa kekonvergenan dalam topologi *Vietoris* sesuai dengan kekonvergenan dalam **definisi 3.1.1**. Kekonvergenan atas topologi *Vietoris* dalam barisan $\langle A_n \rangle$ yang konvergen ke A dinotasikan sebagai:

$$A_n \rightarrow A(\tau_v)$$

Berikut teorema yang merujuk pada Kuratowski (1932)

Teorema 3.2.9

Jika (X, τ) adalah ruang Hausdorff yang kompak dan jika $\langle A_n \rangle$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ barisan dalam $\mathcal{F}_0(X)$, maka $\lim A_n = A$ jika dan hanya jika $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$.

Bukti:

Bukti terstruktur adalah dengan menetapkan urutan fakta sebagai berikut:

- i) Jika $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$ maka $\limsup A_n \subset A$
- ii) Jika $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$ maka $A \subset \liminf A_n$
- iii) Jika $\liminf A_n = A$ maka $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$
- iv) Jika $\limsup A_n = A$ maka $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$

Bukti:

- (i) Misal $x \notin A$. Kemudian selama ruang Hausdorff kompak regular, maka terdapat himpunan-himpunan terbuka G_1, G_2 sedemikian hingga $A \subset G_1, x \in G_2$. $[\bullet, G_1]$ adalah persekitaran dari A dalam $\tau_{\mathcal{J}}$ dan $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$, $A_n \in [\bullet, G_1]$ untuk n yang cukup besar. Artinya $A_n \subset G_1$ untuk setiap $n \geq n_0$. Sehingga $A_n \cap G_2 = \emptyset$ untuk setiap $n \geq n_0$. Maka $x \notin \limsup A_n$.
- (ii) Jika $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$ dan jika $x \in A$ dan G sebarang persekitaran terbuka dari x . I_G persekitaran dari A dalam $\tau_{\mathcal{J}}$. $A_n \in I_G$ untuk setiap $n \geq n_0$. Sehingga $A_n \cap G \neq \emptyset$ untuk setiap $n \geq n_0$. Maka $x \in \liminf A_n$.

Dapat dibuktikan bahwa (i) dan (ii) bersama dengan **Lemma 2.4.3**, jika $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$ maka $\lim A_n = A$.

- (iii) Misal $\liminf A_n = A$. Untuk menunjukkan $A_n \rightarrow A(\tau_{\mathcal{J}})$, akan ditunjukkan bahwa A_n ada dalam tiap persekitaran dari A . Misal I_G adalah persekitaran dari A dan diandaikan $A_n \in I_G$. Maka terdapat barisan $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in \mathbb{E}$ sedemikian hingga $B_m \subset X \setminus G$ untuk setiap $m \in \mathbb{E}$. Hal ini berdampak pada rantai inklusi:

$$A = \liminf A_n \subset \liminf B_m \quad (\text{dengan Lemma 3.2.3})$$

$$\begin{aligned} &\subset \liminf C_m \quad (\text{di mana } C_m = X \setminus G \quad \forall m) \\ &= X \setminus G \quad (\text{dengan **Akibat 3.1.9**}) \end{aligned}$$

Hal ini kontradiktif dengan fakta bahwa $A \in I_G$.

(iv) Misal $[\bullet, G]$ persekitaran dari A dan misal barisan $\langle A_n \rangle \notin [\bullet, G]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Maka $A_n \cap (X \setminus G) \neq \emptyset$ untuk sebarang n . Selanjutnya terdapat barisan $\langle B_m \rangle$ untuk setiap $m \in E$ sedemikian hingga $B_m \subset X \setminus G \neq \emptyset$ untuk setiap $m \in E$. Misal $x_m \in B_m \cap (X \setminus G)$. $X \setminus G$ kompak, barisan $\langle x_m \rangle$ untuk setiap $m \in E$ terdapat titik cluster x_0 dalam $X \setminus G$. Misal U_{x_0} persekitaran dari x_0 . Maka $x_m \in U_{x_0}$ untuk setiap m .

$B_m \cap U_{x_0} \neq \emptyset$ untuk setiap m .

$$x_0 \in \limsup B_m \subset \limsup A_n \quad (\text{dengan **Lemma 3.2.4**})$$

Karena $\limsup A_n = A$ maka $x_0 \in A$. Hal ini kontradiktif dengan fakta bahwa $A \subset G$.

Maka dari (iii) dan (iv) dapat dibuktikan bahwa jika $\lim A_n = A$ maka $A_n \rightarrow A(\tau_v)$.

Sehingga $\lim A_n = A$ jika dan hanya jika $A_n \rightarrow A(\tau_v)$

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

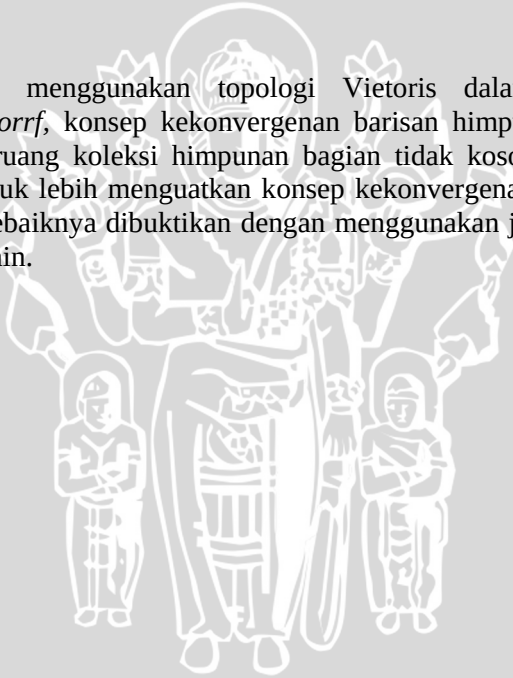
4.1 Kesimpulan

Pada ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong diambil beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Topologi pada ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong dapat dibangun dengan menggunakan topologi Vietoris.
2. Konsep kekonvergenan barisan himpunan dalam ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong dapat dibuktikan atas topologi Vietoris

4.2 Saran

Dengan menggunakan topologi Vietoris dalam ruang kompak *Hausdorff*, konsep kekonvergenan barisan himpunan atas topologi pada ruang koleksi himpunan bagian tidak kosong dapat dibuktikan. Untuk lebih menguatkan konsep kekonvergenan barisan himpunan ini sebaiknya dibuktikan dengan menggunakan jenis-jenis topologi yang lain.



DAFTAR PUSTAKA

- Deshpande, J.V. 1988. **Introduction to Topology**. Tata McGraw-Hill Publishing Co. Ltd., New Delhi.
- Kartono dan Nurwiyati, F.W. 1995. **Pengantar Topologi**. Andi Offset, Yogyakarta.
- Kelley, J.L. 1955. **General Topology**. D. Van Nostrand Company, Canada.
- Klein, E. and Thompson, A.C. 1984. **Theory of Correspondences**. John Wiley and Sons, Canada.
- McCluskey, A. and McMaster, B. 1997. **Topology Course Lecture Notes**.
- Sieradski, A.J. 1992. **An Introduction to Topology and Homotopy**. PWS-KENT Publishing Company, Boston.
- Soehakso, RMJT. **Topologi, diktat kuliah PAM 522**. FMIPA Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.
- Wahyudin. 1987. **Dasar-dasar Topologi**. Tarsito, Bandung.