

**INTEGER LINEAR PROGRAM SOLVED
BY BRANCH-AND-BOUND METHOD
TO DETERMINE OPTIMAL INTEGER SOLUTION
(Case study at Shuttle cock company " KENDEDES" Malang)**

ABSTRACT

The objective of this research is to model optimization problem at Shuttle Cock Company "KENDEDES" using integer linear program as well as to determine the combination of product volume such that the profit is optimum.

The result of research indicate that problem of optimization at shuttle cock company "KENDEDES" representing pure integer linear program. Determination of product combination in the year 2006 with integer linear program solved by Branch-And-Bound method yields profit of Rp.1.203.559.302 or increased up to 3,59% from Rp.1.161.843.569 compared to determination of company product combination in the same year.

Keywords : Integer, Branch-and-Bound Method, Integer Linear Program, Pure Integer Linear Program.

**PENYELESAIAN PROGRAM LINIER INTEGER
DENGAN METODE BRANCH-AND-BOUND
UNTUK MENENTUKAN SOLUSI INTEGER OPTIMAL
(Studi kasus pada perusahaan Shuttle cock "KENDEDES"
Malang)**

ABSTRAK

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui model program linier integer untuk masalah optimasi di perusahaan shuttle cock "KENDEDES" dan menentukan kombinasi volume produksi agar menghasilkan keuntungan yang optimal.

Dari hasil penelitian diketahui bahwa masalah optimasi di perusahaan shuttle cock "KENDEDES" merupakan program linier integer murni. Penentuan kombinasi produk pada tahun 2006 dengan program linier integer yang diselesaikan menggunakan metode Branch-and-Bound menghasilkan keuntungan Rp.1.203.559.302 atau naik sebesar 3,59% dibandingkan dengan penentuan kombinasi produk yang dilakukan perusahaan pada tahun yang sama yaitu sebesar Rp.1.161.843.569.

Kata kunci : Integer, Metode Branch-and-Bound, Program linier integer, Program linier integer murni

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Sejak diperkenalkan akhir dasawarsa 1940-an, pemrograman linier merupakan salah satu alat riset operasi yang efektif. Keberhasilannya berakar dari keluwesannya dalam menjabarkan berbagai situasi kehidupan nyata di bidang militer, industri, pertanian, transportasi, ekonomi, kesehatan dan bahkan ilmu sosial dan perilaku. Disamping itu, tersedianya program komputer untuk memecahkan masalah-masalah program linier yang sangat luas merupakan faktor penting dalam tersebarnya penggunaan teknik ini.

Pada banyak masalah praktis, variabel keputusan (solusi) akan berarti hanya jika berupa bilangan bulat (*integer*). Sebagai contoh, seringkali diperlukan menugaskan orang, menetapkan mesin dan kendaraan untuk suatu kegiatan pada besaran-besaran yang utuh. Akan tetapi pada formula dan penyelesaian model-model secara implisit mengandung asumsi bahwa variabel keputusan dapat berbentuk pecahan (*noninteger*) (Hiller dan Lieberman, 1990).

Pada saat penerapan program linier menghasilkan solusi-solusi non-integer, terkadang diasumsikan bahwa nilai solusi tersebut dapat dibulatkan ke nilai integer terdekat. Metode ini tidak akan menyebabkan kesulitan, jika contohnya, $x_1=8.004$ paku dibulatkan menjadi 8.000 paku, mengingat harga paku hanya beberapa rupiah saja per buahnya. Akan tetapi, jika sedang dipertimbangkan untuk memproduksi pesawat jet dan $x_1=7.4$ jet, maka pembulatan dapat mempengaruhi keuntungan (atau biaya) bermiliar-miliar rupiah.

Sampai saat ini, penggunaan metode matematis untuk memecahkan masalah manajemen semakin meluas terutama di bidang industri. Selain karena dapat meningkatkan efisiensi dan produktifitas perusahaan, penggunaan teknik matematika juga lebih logis, konsisten dan sistematis. Industri pada dasarnya didirikan untuk menyediakan barang atau jasa keperluan masyarakat dengan menggunakan faktor-faktor produksi yang bertujuan untuk memperoleh keuntungan. Faktor-faktor produksi sering dinyatakan dengan modal, mesin, tenaga kerja dan bahan mentah.

Untuk memaksimalkan keuntungan, suatu perusahaan harus dapat memanfaatkan kapasitas faktor-faktor produksi secara optimal. Untuk industri yang memproduksi lebih dari satu macam produk,

diperlukan adanya perencanaan kombinasi produk agar faktor-faktor produksi dapat digunakan secara optimal serta diperoleh keuntungan yang maksimal.

Perusahaan Shuttle Cock “KENDEDES” Malang adalah perusahaan yang memproduksi barang, yaitu mulai mengolah bahan baku sampai menjadi barang jadi. Perusahaan ini memproduksi tiga type produk yaitu Shuttle Cocks merk Yuniur, Kendedes dan Smash. Sebagai perusahaan yang sedang berkembang, sangat penting untuk menentukan kombinasi volume produksi secara tepat agar diperoleh keuntungan yang maksimal.

1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan uraian latar belakang diatas penulis mencoba merumuskan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana model program linier integer untuk masalah optimasi di perusahaan shuttle cock “KENDEDES”?
2. Bagaimana menentukan kombinasi volume produksi shuttle cock pada perusahaan shuttle cock “KENDEDES” dengan mengoptimalkan faktor-faktor produksi agar menghasilkan keuntungan yang maksimal ?

1.3 BATASAN MASALAH

Agar penelitian lebih fokus, maka terdapat beberapa batasan masalah dalam penelitian ini yaitu :

1. Metode simpleks digunakan untuk menyelesaikan program linier relaksasi dari program linier integernya.
2. Pembuatan model matematika dari masalah perusahaan shuttle cocks “KENDEDES” Malang didasarkan pada data penelitian yang diperoleh dari perusahaan tersebut.

1.4 TUJUAN

Tujuan penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Mengetahui model program linier integer untuk masalah optimasi di perusahaan shuttle cock “KENDEDES”.
2. Menentukan kombinasi volume produksi shuttle cock pada perusahaan shuttle cock “KENDEDES” dengan mengoptimalkan faktor-faktor produksi agar menghasilkan keuntungan yang maksimal.

1.5 MANFAAT PENELITIAN

Manfaat dari penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Manfaat Industri
Sebagai bahan pertimbangan bagi perusahaan dalam pengambilan keputusan untuk menyusun rencana anggaran biaya di tahun yang akan datang.
2. Manfaat akademik
Sebagai sarana untuk mengaplikasikan ilmu yang telah didapat khususnya mata kuliah yang bersifat matematika aplikatif.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Program Linier

Pemrograman linier merupakan pendekatan pemecahan masalah yang dikembangkan untuk situasi yang melibatkan fungsi linier maksimalisasi atau minimalisasi yang dipengaruhi oleh kendala linier yang membatasi tingkat pencapaian tujuan tersebut (Anderson, dkk. 1996).

Sementara itu, menurut Supranto (1983) pemrograman linier ialah suatu persoalan untuk menentukan besarnya masing-masing nilai variabel sedemikian rupa sehingga nilai fungsi tujuan (*obyektif function*) yang linier menjadi optimum (maksimum atau minimum) dengan memperhatikan pembatasan-pembatasan yang ada yaitu pembatasan mengenai inputnya. Pembatasan-pembatasan inipun harus dinyatakan dalam ketidaksamaan yang linier. Secara umum perumusan model dari program linier adalah sebagai berikut :

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan nilai yang dicari sehingga dapat menghasilkan berbagai kombinasi optimum (maksimum atau minimum) dari :

Fungsi tujuan

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

dengan syarat bahwa fungsi tujuan tersebut memenuhi kendala-kendala sebagai berikut :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq, =, \geq) b_m$$

$$\text{dan } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$$

Menurut Gass (1975) bentuk diatas dapat ditulis sebagai berikut :

(a). Optimumkan (maksimumkan atau minimumkan)

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j (\leq, =, \geq) b_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

dan $x_j \geq 0$

(b). Optimumkan (maksimumkan atau minimumkan)

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{c}\mathbf{X}$$

dengan kendala

$$\mathbf{A}\mathbf{X} (\leq, =, \geq) \mathbf{b}$$

$$\text{dan } \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

dimana $\mathbf{c} = (c_{ij})_{1 \times n}$ adalah matriks baris, $\mathbf{X} = (x_{ij})_{n \times 1}$ adalah matriks kolom, $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{b} = (b_{ij})_{n \times 1}$ adalah matriks kolom, dan $\mathbf{0}$ adalah matriks nol.

(c). Optimumkan (maksimumkan atau minimumkan)

$$\mathbf{c}\mathbf{X}$$

dengan kendala

$$x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2 + \dots + x_n\mathbf{P}_n (\leq, =, \geq) \mathbf{P}_0$$

$$\text{dan } \mathbf{X} \geq \mathbf{0}$$

dimana $\mathbf{P}_j$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$ adalah kolom ke- j pada matrik $\mathbf{A}$ dan $\mathbf{P}_0 = \mathbf{b}$.

Menurut Taylor (2000) terdapat tiga tahap pada penggunaan program linier. Pertama, masalah harus dapat diidentifikasi sebagai sesuatu yang dapat diselesaikan dengan program linier. Kedua, masalah yang tidak terstruktur harus dapat dirumuskan dalam model matematika, sehingga menjadi terstruktur. Ketiga, model harus diselesaikan dengan teknik matematika yang telah dibuat.

Menurut Hiller dan Lieberman (1990) beberapa asumsi yang melandasi program linier yaitu :

1. *Linearitas* berarti bahwa semua fungsi matematis pada model program linier harus merupakan fungsi-fungsi linier
2. *Proporsionalitas* berarti bahwa tingkat perubahan atau kecondongan fungsi adalah konstan. Oleh karena itu, perubahan dari ukuran tertentu pada nilai variabel keputusan (x_j) akan menghasilkan perubahan yang relatif sama pada nilai fungsi (Z)
3. *Additivitas* berarti bahwa untuk setiap fungsi, nilai fungsi total dapat diperoleh dengan menjumlahkan kontribusi-kontribusi individual ($c_j x_j$ untuk fungsi tujuan dan $a_{ij} x_j$ untuk suatu fungsi kendala) dari masing-masing kegiatan

4. *Divisibilitas* berarti bahwa unit-unit kegiatan dapat dibagi kedalam bagian sekecil-kecilnya, sehingga nilai-nilai variabel keputusan tidak harus integer (hanya 0 dan 1 atau bilangan bulat) tetapi diperbolehkan noninteger (misalnya $\frac{1}{2}$; 0.58; 38.875)
5. *Deterministik* berarti bahwa semua parameter pada model program linier (yaitu nilai-nilai C_j , a_{ij} dan b_j) konstan dan diketahui atau ditentukan secara pasti.

2.2 Program Linier Integer

Program integer (*Integer programming*) merupakan bentuk khusus atau variasi dari program linier atau program nonlinier, dimana satu atau lebih dari variabel-variabel pada vektor penyelesaiannya memiliki nilai-nilai bukan pecahan atau bilangan bulat yang disebut integer (Nasendi dan Anwar, 1985).

Sementara itu menurut Anderson, dkk (1996) yang dimaksud dengan program linier integer adalah pendekatan yang digunakan untuk masalah yang dapat diselesaikan sebagai pemrograman linier tetapi memerlukan tambahan persyaratan bahwa beberapa atau semua variabel keputusan harus berupa bilangan bulat (integer).

Suatu variabel disebut integer, jika variabel tersebut hanya diperkenankan untuk memiliki nilai-nilai integer yang terletak diantara batas yang tetap (*fixed bounds*). Misalnya, jika variabel X hanya dapat memiliki nilai-nilai -1, 0, 1, dan 2 maka disebut nilai-nilai integer yang terletak diantara selang -1 dan +2 (Nasendi dan Anwar, 1985).

Teori bilangan erat kaitannya dengan anggota dari bilangan asli 1, 2, 3, 4, ... yang juga disebut positif integer. Begitu juga semua bagian negatif dari bilangan tersebut yaitu -1, -2, -3, -4, ... disebut negatif integer. Lebih lanjut lagi, positif integer, negatif integer dan nol membentuk suatu himpunan bilangan bulat (integer) (Byrne, 1967).

Menurut Winston (1991) terdapat tiga jenis model program linier integer, yaitu model total integer (*pure integer programming*), model integer campuran (*mixed integer programming*) dan model 0-1 integer (*binary integer programming*). Pada dasarnya model matematik untuk program linier integer serupa dengan model program linier dengan ditambahkan satu batasan bahwa variabel-variabel keputusannya harus berupa bilangan bulat.

Secara umum model dasar atau model baku dari program linier integer dapat dirumuskan sebagai berikut :
 optimumkan (maksimumkan atau minimumkan)

$$Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad \text{untuk } j = 1, 2, \dots, n$$

dengan kendala

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \text{atau} \geq b_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \dots, m$$

dan $x_j \geq 0$

x_j integer untuk $j = 1, 2, 3, \dots, p (\leq n)$.

Pada batasan integer, apabila $p = n$ maka disebut **model integer murni** dan jika $p \leq n$ disebut **model integer campuran**. Sementara itu, apabila x_j harus bernilai 0 atau 1 maka disebut **model integer biner**.

Pada program linier, salah satu asumsi yang melandasinya adalah divisibilitas variabel dan kendalanya. Dengan demikian, pada program linier kegiatan-kegiatan atau variabel-variabelnya bersifat kontinu. Sementara itu pada program linier integer kegiatan-kegiatan atau variabel-variabelnya bersifat diskrit.

Untuk masalah dua variabel, perluasan sederhana prosedur grafik dari program linier dapat digunakan untuk menemukan solusi. Metode Branch-and-Bound digunakan untuk menyelesaikan program linier integer yang lebih besar. Kelebihan utama metode Branch-and-Bound adalah fleksibilitasnya, prosedur ini dapat digunakan untuk program linier integer murni maupun program linier integer campuran (Hiller dan Lieberman, 2001).

2.3 Program Linier Relaksasi

Pada program linier, metode penyelesaiannya didasari oleh pengenalan bahwa pemecahan optimum terjadi di titik ekstrim dari ruang pemecahan. Hasil yang penting ini pada intinya mengurangi usaha pencarian pemecahan optimum dari sejumlah pemecahan yang tidak terbatas menjadi sejumlah yang terbatas (Taha, 1996).

Sementara itu, pada program linier integer adanya persyaratan bilangan bulat untuk variabel keputusan menyebabkan kesulitan dalam pencarian pemecahan optimumnya karena usaha

pencarian dimulai dengan sejumlah titik yang terbatas. Untuk memudahkan pencarian pemecahan optimumnya, persyaratan bilangan bulat dihilangkan sehingga model tersebut menjadi program linier yang disebut program linier relaksasi dari program linier integer.

Pencarian pemecahan optimum pada program linier integer dimulai pada pemecahan optimum program linier relaksasinya. Hal ini disebabkan karena terdapat kemungkinan yang lebih besar bahwa kedua pemecahan itu akan terletak berdekatan satu sama lain, sehingga meningkatkan kemungkinan untuk menemukan pemecahan integer tersebut secara cepat.

Beberapa definisi dan teorema yang berlaku pada program linier relaksasi adalah sebagai berikut :

2.3.1 Definisi Relaksasi (Lawrence , 1998)

Sebuah masalah relaksasi $Z^R = \max \{ f(x) : x \in T \subseteq R^n \}$ adalah relaksasi dari program integer $Z = \max \{ c(x) : x \in X \subseteq R^n \}$ jika :

1. $X \subseteq T$
2. $f(x) \geq c(x) , \forall x \in X$

Teorema 2.3.1.1 (Lawrence , 1998)

Jika masalah Relaksasi adalah relaksasi dari program integer maka $Z^R \geq Z$.

Bukti :

Jika x^* solusi optimal dari program integer, maka $x^* \in X \subseteq T$ dan $Z = c(x^*) \leq f(x^*)$ sebagaimana $x^* \in T$, $f(x^*)$ adalah batas bawah pada Z^R dan juga $Z \leq f(x^*) \leq Z^R$ sedemikian hingga $Z^R \geq Z$.

2.3.2 Definisi Relaksasi Program Linier (Lawrence , 1998)

Untuk program integer yang memaksimumkan $\{cx : x \in P \cap Z^n\}$ dengan formulasi $P = \{x \in R_+^n : Ax \leq b\}$, relaksasi program linier dari program integer adalah program linier $Z^R = \max \{cx : x \in P\}$.

Contoh 2.3.2.1 :

Misal model dari program integer adalah maksimal $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ dengan

kendala $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i ; x_j \in Z^+ ; i = 1, 2, \dots, m ; j = 1, 2, \dots, n.$

Relaksasi program linier dari program integer tersebut adalah:

maksimal $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ dengan kendala $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i ; x_j \in R^+ ; i = 1, 2, \dots, n ; j = 1, 2, \dots, n .$

Teorema 2.3.2.1 (Lawrence , 1998)

Misal P_1, P_2 adalah dua bentuk model untuk program integer yang memaksimalkan $\{cx : x \in X \subseteq Z^n\}$ dengan $P_1 \subset P_2$. Jika $Z_i^R = \max \{cx : x \in P_i\}$ untuk $i = 1, 2$ adalah nilai relaksasi program linier yang diasosiasikan maka $Z_1^R \leq Z_2^R, \forall c$.

Bukti :

Diketahui program integer P_1, P_2 memaksimalkan $\{cx : x \in X \subseteq Z^n\}$ menurut definisi 2.3.2 maka $Z_i^R = \max \{cx : x \in P_i\}$. Jika x_i solusi optimal untuk program integer untuk $i = 1, 2$ maka $x_i^* \in x \leq Z^n$ dan $Z_i = c(x_i^*) \leq f(x_i^*)$ sebagaimana $x_i^* \in T$, $f(x_i^*)$ adalah batas bawah pada Z^R dan juga $Z_1^R \leq Z_2^R, \forall c$.

Contoh 2.3.2.2

Misal P_1 maksimal : $Z = x_1 + x_2$

dengan kendala : $2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \in Z^+.$$

Dari program linier relaksasi diperoleh $x^* = (x_1 ; x_2) = (4 ; 1.2)$ dan

$$Z_1^R = 5.2 .$$

Misal P_2 maksimal : $Z = x_1 + x_2$

dengan kendala : $2x_1 + 5x_2 \leq 16$

$$6x_1 + 5x_2 \leq 30$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+^2.$$

Dari program linier relaksasi diperoleh $x^* = (x_1; x_2) = (3.5; 1.8)$ dan $Z_2^R = 5.3$ sehingga diperoleh, $P_1 \subset P_2 \Rightarrow Z_1^R \leq Z_2^R$.

Jadi Contoh 2.3.2.2 memenuhi teorema 2.3.2.1.

Teorema 2.3.2.2 (Lawrence , 1998)

1. Jika masalah relaksasi dari program linier integer menghasilkan solusi yang tidak layak maka masalah program linier integernya juga menghasilkan solusi yang tidak layak.
2. Misal x^* adalah solusi optimal masalah relaksasi. Jika $x^* \in X$ dan $f(x^*) = c(x^*)$ maka x^* adalah solusi optimal program integer.

Dimana :

X = himpunan solusi fisibel untuk program linier integer.

T = himpunan solusi fisibel untuk program linier relaksasi.

$x^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ solusi fisibel optimal untuk program linier relaksasi.

Bukti :

1. Sebagaimana pada definisi relaksasi, jika sebuah masalah relaksasi tak layak $T = \emptyset, \exists X = \emptyset$. Misal x^* adalah solusi optimal masalah relaksasi. Jika $x^* \in X$ dan $f(x^*) = c(x^*)$ maka x^* adalah solusi optimal untuk program linier integer.
2. Sebagaimana $x^* \in X, Z \geq c(x^*) = f(x^*) = Z^R$. Menurut teorema 2.3.1.1 $Z^R \geq Z$ sehingga diperoleh $c(x^*) = Z = Z^R$.

2.4 Metode Simpleks

Untuk menyelesaikan program linier yang melibatkan dua variabel keputusan dapat menggunakan prosedur solusi grafik. Namun banyak masalah pemrograman linier yang terlalu besar untuk diselesaikan secara grafik dan perlu digunakan prosedur solusi aljabar. Prosedur solusi aljabar yang paling banyak digunakan untuk

masalah pemrograman linier disebut metode simpleks yang dikembangkan oleh George Dantzig pada tahun 1947 (Anderson, dkk, 1996).

Menurut Hiller dan Lieberman (1990) metode simpleks merupakan suatu algoritma, yaitu suatu proses dimana suatu prosedur sistematis diulang-ulang (iterasi) sampai hasil yang diinginkan tercapai. Oleh karena itu, metode ini mengganti suatu masalah yang sulit dengan serangkaian masalah yang mudah.

Metode simpleks merupakan pengembangan metode aljabar yang hanya menguji sebagian dari jumlah solusi basis dalam bentuk tabel. Tabel simpleks hanya menggambarkan masalah program linier dalam bentuk koefisiennya saja, baik koefisien fungsi tujuan maupun koefisien setiap kendala. Oleh karena masalah program linier dapat digambarkan dalam berbagai bentuk (maksimum/minimum) dengan kendala berbentuk lebih kecil sama dengan ($\leq$), lebih besar sama dengan ($\geq$) maupun sama dengan ($=$), maka diperlukan bentuk baku untuk menyelesaikan masalah program linier.

2.4.1 Beberapa definisi pada metode simpleks

Bentuk umum permasalahan program linier dapat dituliskan sebagai berikut :

Optimumkan fungsi tujuan :

$$Z = f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad 2.1$$

terhadap kendala dalam bentuk standard :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad 2.2$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad 2.3$$

dengan a_{ij} , b_i dan c_j merupakan suatu konstanta,

$b_i \geq 0$, dan $m < n$.

Menurut Sutawidjaja dan Sudirman (2005), dari bentuk umum diatas dapat didefinisikan istilah-istilah sebagai berikut :

1. Solusi fisibel terhadap permasalahan program linier adalah vektor x yang memenuhi (2.1) dan (2.2), dimana $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.
2. Solusi dasar terhadap (2.2) adalah penyelesaian yang diperoleh dengan jalan mengenolkan $(n - m)$ peubah, sementara itu sisanya dihitung menurut hukum-hukum aljabar dengan syarat determinan dari koefisien m peubah tersebut tidak sama dengan nol. Peubah-peubah sebanyak m buah yang tidak dinolkan disebut peubah dasar.
3. Solusi fisibel dasar adalah solusi dasar yang juga memenuhi syarat (2.3), dengan kata lain seluruh peubah dasar bernilai tidak negatif.
4. Solusi fisibel dasar yang non degenerate adalah solusi fisibel dasar dengan tepat terdapat n buah peubah dasar yang bernilai positif.
5. Solusi fisibel yang optimum adalah solusi fisibel yang mengoptimumkan fungsi tujuan (2.1).
6. Suatu vektor $b \in E^n$ dinamakan kombinasi linier dari vektor-vektor $a_1, a_2, \dots, a_k$ dalam E^n jika $b = \sum_{j=1}^k \lambda_j a_j$ dengan $\lambda_j \in R$.
7. Vektor-vektor $a_1, a_2, \dots, a_k$ yang berdimensi n disebut bebas linier jika $\sum_{j=1}^k \lambda_j a_j = 0$ dengan $\lambda_j \in R$, hanya dipenuhi oleh $\lambda_j = 0, j=1, 2, 3, \dots, k$.
8. Vektor-vektor $a_1, a_2, \dots, a_k \in E^n$ disebut merentang E^n , jika sebarang vektor dalam E^n dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $a_1, a_2, \dots, a_k$.
9. Vektor-vektor $a_1, a_2, \dots, a_j \in E^n$ disebut membentuk basis dari E^n , jika dipenuhi syarat-syarat berikut :
 - a. $a_1, a_2, \dots, a_j$ merentang E^n dan bebas linier
 - b. Jika salah satu dari vektor-vektor $a_1, a_2, \dots, a_j$ dihilangkan maka sisa vektor-vektor tersebut tidak merentang E^n .

10. Suatu himpunan $X \subset E^n$ disebut himpunan cembung (konvek) jika dua titik sebarang x_1, x_2 dalam X maka berlaku $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$, dengan $0 \leq \lambda < 1$.
11. Sebuah titik x disebut titik ekstrim dalam himpunan cembung jika dan hanya jika tidak terdapat x_1, x_2 dengan $x_1 \neq x_2$ dalam himpunan cembung tersebut sehingga $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $0 < \lambda < 1$.

2.4.2 Perumusan metode simpleks (Susanta, 1994)

Perumusan umum Program Linier di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$\text{Optimumkan} \quad : Z = f(X) = CX \quad 2.4$$

$$\text{dengan kendala} : AX = B \quad 2.5$$

$$X \geq 0 \quad 2.6$$

diperoleh $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $X = [x_{ij}]_{n \times 1}$, $B = [b_{ij}]_{m \times 1}$, dan

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Kemudian kendala utama soal dapat pula ditulis sebagai :

$$\sum_{i=1}^n A_i X_i = B.$$

Diantara ke- n vektor A_i dapat dipilih m buah yang bebas linier. Kemudian diberi nama baru : $D = D_1, D_2, \dots, D_m$ merupakan matriks bujur sangkar yang tersusun oleh D_i , $i = 1, 2, \dots, m$ akan membentuk matrik berordo $m \times m$ yang bebas linier sehingga dapat dianggap sebagai basis dalam R^m .

Karena kolom-kolom pada D yang berasal dari A merupakan suatu basis, maka kolom-kolom A lainnya yang tak termasuk sebagai kolom D , bisa dinyatakan sebagai kombinasi linier dari kolom-kolom D sebagai berikut :

$$A_j = y_{1j}D_1 + y_{2j}D_2 + \dots + y_{mj}D_m$$

$$A_j = \sum_{i=1}^m y_{ij}D_i = DY_j \quad 2.7$$

$$\text{jadi} \quad Y_j = D^{-1}A_j. \quad 2.8$$

$$\text{Dengan } Y_j = \begin{bmatrix} y_{1j} \\ y_{2j} \\ \vdots \\ y_{mj} \end{bmatrix}$$

$$\text{dan } D = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_m]$$

setiap matriks basis D akan menentukan suatu solusi dasar bagi $AX = B$, yaitu

$$\overline{X} = D^{-1}B \quad 2.9$$

$$\text{dimana } \overline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \text{ merupakan peubah-peubah basis.}$$

Disusun vektor $\overline{C}$ sesuai dengan $\overline{X}$,

$$\overline{C} = (\overline{c}_1, \overline{c}_2, \dots, \overline{c}_m). \quad 2.10$$

Jika digunakan notasi matrik baris untuk vektor $\overline{C}$

$$\overline{C} = [\overline{c}_1 \ \overline{c}_2 \ \dots \ \overline{c}_m]$$

nilai fungsi tujuannya menjadi

$$f = CX = \overline{C}\overline{X} \quad 2.11$$

$$\begin{aligned} &= [\overline{c}_1 \ \overline{c}_2 \ \dots \ \overline{c}_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \\ &= \overline{c}_1 x_1 + \overline{c}_2 x_2 + \dots + \overline{c}_m x_m \\ &= \sum_{i=1}^m \overline{c}_i x_i. \end{aligned}$$

Didefinisikan Z_j untuk setiap A_j

$$Z_j = \sum_{i=1}^m y_{ij} \overline{c}_j = \overline{C}Y_j \quad 2.12$$

untuk selanjutnya tanda $(-)$ menandakan besaran-besaran basis.

2.4.3 Langkah-langkah metode simpleks (Susanta, 1994)

2.4.3.1 Memajukan Solusi Fisibel Dasar

Dengan menganggap bahwa sudah terdapat solusi fisibel dasar $\bar{X} = D^{-1}B$ dengan $f = \bar{C}\bar{X}$ dapat dihitung Y_j dan Z_j untuk kolom A diluar D . Diandaikan bahwa solusi fisibel di atas belum memberikan penyelesaian yang optimal, maka perlu diadakan penggantian basis. Perubahan ini dikerjakan hanya dengan mengganti satu basis saja. Misalkan basis D_r akan diganti dengan A_k yang berada di luar basis.

Dari persamaan 2.7 ditetapkan

$$\begin{aligned} A_k &= y_{1k}D_1 + y_{2k}D_2 + \dots + y_{rk}D_r + \dots + y_{mk}D_m \\ y_{rk}D_r &= A_k - (y_{1k}D_1 + y_{2k}D_2 + \dots + y_{(r-1)k}D_{(r-1)} + y_{(r+1)k}D_{(r+1)} + \dots + y_{mk}D_m) \\ &= A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m y_{ik}D_i \end{aligned}$$

Jika $y_{rk} \neq 0$ maka diperoleh

$$D_r = \frac{1}{y_{rk}}A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ik}}{y_{rk}}D_i \quad 2.13$$

Solusi fisibel dasar semula, X dirumuskan dengan

$$\begin{aligned} \bar{X} &= D^{-1}B \\ D\bar{X} &= DD^{-1}B \\ D\bar{X} &= B \end{aligned}$$

dimana $D = [D_1 \ D_2 \ \dots \ D_m]$ dan $\bar{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$.

Oleh karena itu dapat dituliskan sebagai berikut :

$$[D_1 \ D_2 \ \dots \ D_m] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = B$$

$$\bar{x}_1 \mathbf{D}_1 + \bar{x}_2 \mathbf{D}_2 + \dots + \bar{x}_r \mathbf{D}_r + \dots + \bar{x}_m \mathbf{D}_m = B$$

Dengan mensubstitusikan persamaan 2.13 akan diperoleh :

$$\bar{x}_1 \mathbf{D}_1 + \bar{x}_2 \mathbf{D}_2 + \dots + \bar{x}_r \left[\frac{1}{y_{rk}} A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i \right] + \dots + \bar{x}_m \mathbf{D}_m = B$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \bar{x}_i D_i + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} A_k - \bar{x}_r \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i = B$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left[\bar{x}_i D_i - \bar{x}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i \right] + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} A_k = B$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left[\bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right] D_i + \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} A_k = B \quad 2.14$$

Supaya penyelesaian ini fisibel maka harus memenuhi 2.3:

$$\bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \geq 0 \quad (i \neq r) \quad 2.15$$

$$\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geq 0 \quad 2.16$$

Dari 2.16 untuk $x_r \neq 0$ harus dipenuhi $y_{rk} > 0$, yaitu :

1. Jika $y_{ik} \leq 0$, ($i \neq r$) maka 2.15 terpenuhi
2. Jika $y_{ik} > 0$, ($i \neq r$) terdapat syarat $\frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} - \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \geq 0$.

Untuk menentukan D_r yaitu basis yang diganti maka disusun dengan memilih r yang memenuhi :

$$\theta = \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} \quad 2.17$$

dimana baris ke - r disebut baris kunci.

Sebagai hasilnya vektor-vektor basis barunya adalah

$$\hat{D}_i = D_i \quad i \neq r$$

$$\hat{D}_r = A_k$$

dimana $\hat{D}$ adalah besaran dalam tabel baru.

Nilai peubah basis baru yaitu $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix}$

yang memenuhi $\hat{X} = \hat{D}^{-1}B$.

Dari 2.14 diperoleh nilai peubah basis yang baru

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}_i &= \bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}}, \quad (i \neq r) \\ \hat{x}_r &= \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} \end{aligned} \right\} \quad 2.18$$

Persamaan 2.18 adalah rumus transformasi bagi nilai peubah dasar yang dalam tabel simpleks terletak pada kolom b_i .

2.4.3.2 Penyajian Vektor-Vektor A_j dengan $\hat{D}_i$

Selanjutnya akan dijabarkan penyajian vektor-vektor A_j selain D dengan vektor-vektor basis baru. Dari persamaan 2.7 dan 2.13 diperoleh :

$$\begin{aligned} A_j &= y_{1j}D_1 + y_{2j}D_2 + \dots + y_{rj}D_r + \dots + y_{mj}D_m \\ &= y_{1j}D_1 + y_{2j}D_2 + \dots + y_{rj} \left[\frac{1}{y_{rk}} A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i \right] + \dots + y_{mj}D_m \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m y_{ij}D_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} A_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left[y_{ij}D_i - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} D_i \right] + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} A_k \\ A_j &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left[y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right] D_i + \frac{y_{rj}}{y_{rk}} A_k \end{aligned} \quad 2.19$$

$$= \sum_{i=1}^m \hat{y}_{ij} \hat{D}_i \quad \text{dengan} \quad \begin{cases} \hat{D}_i = D_i, (i \neq r) \\ \hat{D}_r = A_k \end{cases}$$

Oleh karena itu rumus transformasi yang baru sebagai berikut :

$$\hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

$$\hat{y}_{ij} = y_{ij} - y_{rj} \frac{y_{ik}}{y_{rk}}, (i \neq r) \quad . \quad 2.20$$

Penyajian A_j dengan $\hat{D}_i$ adalah sebagai berikut :

$$A_j = \sum_{i=1}^m \hat{y}_{ij} \hat{D}_i$$

2.4.3.3 Nilai Fungsi Tujuan Yang Baru.

Misalkan $\hat{f}$ adalah nilai fungsi tujuan yang baru, dan

$$\bar{f} = \overline{C X}$$

$$\hat{f} = \hat{C} \hat{X}$$

dengan $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix}$ dan $\hat{C} = [\hat{c}_1 \quad \hat{c}_2 \quad \dots \quad \hat{c}_m]$ diperoleh :

$$\hat{f} = [\hat{c}_1 \quad \hat{c}_2 \quad \dots \quad \hat{c}_m] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{bmatrix}$$

$$\hat{f} = \hat{c}_1 \hat{x}_1 + \hat{c}_2 \hat{x}_2 + \dots + \hat{c}_m \hat{x}_m$$

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^m \hat{c}_i \hat{x}_i$$

dimana $\hat{c}_i = \bar{c}_i, (i \neq r)$ dan $\hat{c}_r = \bar{c}_k$.

Oleh karena itu dengan persamaan 2.18 diperoleh

$$\begin{aligned}
 \hat{f} &= \frac{\hat{\bar{C}}}{\hat{\bar{C}}} \hat{\bar{X}} \\
 &= \sum_{i=1}^m \hat{\bar{C}}_i \hat{\bar{X}}_i \\
 &= \hat{\bar{C}}_1 \hat{\bar{X}}_1 + \hat{\bar{C}}_2 \hat{\bar{X}}_2 + \dots + \hat{\bar{C}}_r \hat{\bar{X}}_r + \dots + \hat{\bar{C}}_m \hat{\bar{X}}_m \\
 &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \hat{\bar{C}}_i \hat{\bar{X}}_i + \hat{\bar{C}}_r \hat{\bar{X}}_r \\
 \hat{f} &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \left[\bar{X}_i - \bar{X}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right] \bar{C}_i + \frac{\bar{X}_r}{y_{rk}} c_k .
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Diberikan suku ke-r : $\bar{C}_r \left[\bar{X}_r - \bar{X}_r \frac{y_{rk}}{y_{rk}} \right] = 0$

Dengan menyisipkan suku ke-r pada persamaan 2.21 diperoleh :

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^m \left[\bar{X}_i - \bar{X}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}} \right] \bar{C}_i + \frac{\bar{X}_r}{y_{rk}} c_k \\
 &= \sum_{i=1}^m \bar{C}_i \bar{X}_i - \frac{\bar{X}_r}{y_{rk}} \left[\sum_{i=1}^m \bar{C}_i y_{ik} \right] + c_k \frac{\bar{X}_r}{y_{rk}}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Didefinisikan $Z_j = \sum_{i=1}^m \bar{C}_i y_{ij}$, sehingga persamaan 2.22 berubah menjadi

$$\begin{aligned}
 \hat{f} &= \sum_{i=1}^m \bar{C}_i \bar{X}_i - \frac{\bar{X}_r}{y_{rk}} (z_k - c_k) \\
 \text{atau} \quad \hat{f} &= f - \theta(z_k - c_k)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dari persamaan 2.23 terlihat bahwa naik atau turunnya fungsi tujuan tergantung pada y_{rk} dan $z_k - c_k$.

2.4.3.4 Perubahan $Z_j - C_j$

Diketahui persamaan

$$\hat{z}_j - c_j = \sum_{i=1}^m \hat{c}_i \hat{y}_{ij} - c_j \quad 2.24$$

dimana $\hat{c}_i = \bar{c}_i, (i \neq r)$ dan $\hat{c}_r = c_k$

dengan mensubstitusikan persamaan 2.20 diperoleh

$$\hat{z}_j - c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^m \bar{c}_i \left[y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \right] + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j$$

Diberikan suku ke-r

$$0 = \bar{c}_r \left[y_{rj} - \frac{y_{rk}}{y_{rk}} y_{rj} \right] \quad 2.25$$

Dengan menjumlahkan persamaan 2.24 dan persamaan 2.25 diperoleh :

$$\begin{aligned} \hat{z}_j - c_j &= \sum_{i=1}^m \bar{c}_i \left[y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj} \right] + c_k \frac{y_{rj}}{y_{rk}} - c_j \\ \hat{z}_j - c_j &= \sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_{ij} - c_j - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} \left[\sum_{i=1}^m \bar{c}_i y_{ik} - c_k \right] \text{ atau} \\ (\hat{z}_j - c_j) &= (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k) \end{aligned} \quad 2.26$$

2.4.3.5 Memilih Basis Baru

Dari persamaan 2.23 , jika A_k masuk basis maka f akan bertambah dengan $-\theta(z_k - c_k)$ dimana $\theta = \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}$, r adalah baris pivot dan y_{rk} selalu dipilih positif. Untuk x_r positif maka pemilihan k dapat ditentukan dengan cara memenuhi syarat perlu :

1. soal maksimum :

$$\text{pilih k sehingga } (z_k - c_k) = \min_j \left\{ z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0 \right\}$$

2. soal minimum :

pilih k sehingga $(z_k - c_k) = \max_j \{ z_j - c_j \mid z_j - c_j > 0 \}$

dimana k disebut *kolom pivot* dan y_{rk} disebut *angka pivot*.

Dari bahasan diatas dapat disusun langkah-langkah perhitungan metode simpleks dalam memaksimumkan fungsi tujuan sebagai berikut. Misalkan kita telah mempunyai solusi fisibel dasar $\bar{X}$ dari suatu permasalahan program linier, dan untuk setiap $A_j \in A$ yang tidak termasuk dalam kolom D telah dihitung Y_j dan $z_j - c_j$ yang bersesuaian.

1. Hitung semua $z_j - c_j \geq 0$ untuk semua $A_j \in D$.
2. Jika semua $z_j - c_j \geq 0$, maka solusi fisibel yang telah dimiliki sudah optimal berarti perhitungan telah selesai.
3. Jika satu atau lebih $z_j - c_j < 0$, dipilih vektor A_k yang akan masuk basis D , dengan menggunakan kriteria :

$$z_k - c_k = \min \{ z_j - c_j \mid z_j - c_j < 0 \}$$

4. Jika semua $y_{ik} \leq 0$ maka solusinya adalah maksimum tak terbatas.
5. Jika paling sedikit ada satu y positif, pilih vektor $A_r \in D$ yang akan meninggalkan matriks basis D , dengan kriteria $\frac{\bar{x}_r}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{\bar{x}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0 \right\}$, kemudian kolom A_r dikeluarkan, diganti dengan A_k .
6. Dengan basis D baru yang dibentuk dari basis D yang lama, hitung penyelesaian baru $\bar{x}_i$ dan nilai baru dari y_{ij} , $z_j - c_j$ dan z dengan langkah-langkah sebagai berikut :

$$a) \quad \hat{\bar{x}}_i = \bar{x}_i - \bar{x}_r \frac{y_{ik}}{y_{rk}}, (i \neq r)$$

$$b) \quad \hat{\bar{x}}_r = \frac{\bar{x}_r}{y_{rk}}$$

$$c) \hat{y}_{rj} = \frac{y_{rj}}{y_{rk}}$$

$$d) \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}} y_{rj}, (i \neq r)$$

$$e) (\hat{z}_j - c_j) = (z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}} (z_k - c_k)$$

7. Kembali ke langkah 2.

2.4.4 Bentuk umum tabel simpleks (Susanta, 1994)

Bentuk baku yang sudah umum digunakan disebut bentuk standar yang memiliki karakteristik sebagai berikut :

1. Nilai ruas kanan setiap kendala non-negative. Apabila nilai ruas kanan kendala negatif, dapat diubah menjadi positif dengan cara mengalikan minus satu (-1). Misalkan $2x_1 + 3x_2 \leq -30$, dapat diubah menjadi $-2x_1 - 3x_2 \geq 30$.
2. Semua kendala berbentuk persamaan, kecuali kendala non-negativity. Apabila kendala berbentuk lebih kecil sama dengan ($\leq$) dapat diubah menjadi persamaan dengan cara menambahkannya dengan *slack variabel*. Misalkan kendala berbentuk $2x_1 + 3x_2 \leq 60$ dapat diubah persamaan menjadi $2x_1 + 3x_2 + S_1 = 60$. Apabila kendala berbentuk lebih besar sama dengan ($\geq$) dapat diubah menjadi persamaan dengan cara mengurangkan *surplus variabel*. Misalkan kendala berbentuk $2x_1 + 3x_2 \geq 30$, dapat diubah persamaan menjadi $2x_1 + 3x_2 - S_2 = 30$.
3. Semua nilai variabel keputusan non-negatif.
4. Fungsi tujuan berbentuk maksimum. Bila fungsi tujuan berbentuk minimum, dapat diubah menjadi bentuk maksimum dengan cara mengalikan minus satu (-1). Misalkan, $Z \min = 40x_1 + 30x_2$, dapat diubah maksimum menjadi $-Z \max = -40x_1 - 30x_2$.

Sebagai gambaran, bentuk standar dari program linier diatas yaitu :

$$Z \max = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

dengan kendala

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1j}x_j + S_1 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2j}x_j + S_2 = b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ij}x_j + S_i = b_i$$

Apabila bentuk standar tersebut dimasukkan dalam tabel, akan diperoleh bentuk umum tabel simpleks seperti ditunjukkan dalam Tabel 2.1 berikut ini:

Tabel 2.1
Format Tabel Metode Simpleks

		c_j	c_1	c_2	$\dots$	c_n		
i	$\bar{c}_i$	$\begin{array}{c} x_j \\ \bar{x}_i \end{array}$	x_1	x_2	$\dots$	x_n	b_i	θ_i
1	$\bar{c}_1$	$\bar{x}_1$	y_{11}	y_{12}	$\dots$	y_{1n}	b_1	θ_1
2	$\bar{c}_2$	$\bar{x}_2$	y_{21}	y_{22}	$\dots$	y_{2n}	b_2	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$\bar{c}_m$	$\bar{x}_m$	y_{m1}	y_{m2}	$\dots$	y_{mn}	b_m	θ_m
		z_j	z_1	z_2	$\dots$	z_n	z	
		$z_j - c_j$	$z_1 - c_1$	$z_2 - c_2$	$\dots$	$z_n - c_n$		

Keterangan :

x_j = Peubah-peubah lengkap

y_{ij} = Koefisien teknis

b_i = Suku tetap (tidak negatif)

c_j = Koefisien fungsi tujuan

$\bar{x}_i$ = Peubah yang menjadi basis dalam table yang dituju

$\bar{c}_i$ = Koefisien fungsi tujuan milik peubah basis x

$$\begin{aligned}\bar{z}_j &= \sum_{i=1}^m c_i y_{ij} \\ z &= \sum_{i=1}^m \bar{c}_i b_i \\ \theta_i &= \frac{b_i}{y_{ik}}, \text{ (hanya untuk) } y_{ik} > 0\end{aligned}$$

2.5 METODE BRANCH AND BOUND

Pendekatan sistematis untuk memecahkan masalah program linier integer pertama kali dikembangkan pada tahun 1958 oleh Ralph Gomory. Algoritma yang dikembangkan merupakan pendekatan aljabar berdasarkan penambahan batasan baru (atau *cuts*) yang sistematis serta dapat dipenuhi oleh program integer, tetapi tidak oleh solusi variabel pecahan, algoritma seperti ini disebut metode bidang pemotong (*cutting plane method*). Suatu alternatif dari metode bidang pemotong adalah metode *Branch-and-Bound* yang dikenalkan pada tahun 1960 oleh A.H.Land dan A.C.Doig dari *London School of Economics and Political Science* (Taylor,2000).

Metode *Branch-and-Bound* dimulai dengan menyelesaikan program linier relaksasi dari program linier integernya. Bila solusi optimal program linier relaksasi memenuhi persyaratan integer, maka merupakan solusi optimal program linier integernya. Namun bila tidak memenuhi persyaratan integer maka dilanjutkan dengan langkah *Branch-and-Bound* (Anderson dkk, 1996).

Metode ini menggunakan suatu diagram yang terdiri dari simpul dan cabang (*branch*) sebagai suatu kerangka dalam proses solusi. Konsep utama yang mendasari metode ini adalah dengan membagi dan menyelesaikan. Karena masalah aslinya berukuran besar dan sangat sulit untuk diselesaikan secara langsung, maka masalah ini dibagi menjadi submasalah yang lebih kecil dan kemudian menjadi anak gugus yang lebih kecil lagi sampai semua submasalah dapat diselesaikan (Hiller dan Lieberman, 2001).

Algoritma *Branch-and-Bound* untuk model integer murni menurut Ecker dan Kupferschmid (1998) adalah sebagai berikut :

1. Initialize

Menyelesaikan program linier relaksasi dari program linier integernya ; jika solusi yang diperoleh memenuhi batasan

integer, **STOP** (solusi yang diperoleh adalah solusi optimal untuk program linier integernya).

Sementara itu, jika satu atau lebih variabel basis tidak memenuhi batasan integer maka lanjutkan ke langkah 2.

2. **Branch**

Jika pada pendekatan pertama mengandung variabel basis yang tidak bulat, misal x_j maka $\lfloor x_j \rfloor < x_j < \lfloor x_j \rfloor + 1$ dengan $\lfloor x_j \rfloor$ bagian bulat dari x_j . Dari sini kemudian dibentuk dua sub masalah program linier integer yang baru dengan cara menambahkan pada permasalahan program linier integer semula dengan kendala $x_j \leq \lfloor x_j \rfloor$ atau $x_j \geq \lfloor x_j \rfloor + 1$.

Proses ini mempersempit daerah solusi fisibel, sedemikian hingga mengeliminasi penyelesaian bilangan tak bulat bagi x_j dari pencabangan selanjutnya dengan tetap mempertahankan semua penyelesaian bulat yang mungkin terhadap permasalahan semula.

3. **Bound**

Mendapatkan suatu batas untuk penyelesaian layak terbaik dari setiap sub masalah dengan cara menyelesaikan relaksasi dari sub masalah tersebut. Batas atas merupakan nilai Z untuk penyelesaian program linier relaksasinya dan batas bawah merupakan nilai Z untuk solusi pembulatan kebawah dari program linier relaksasinya.

4. **Fathom**

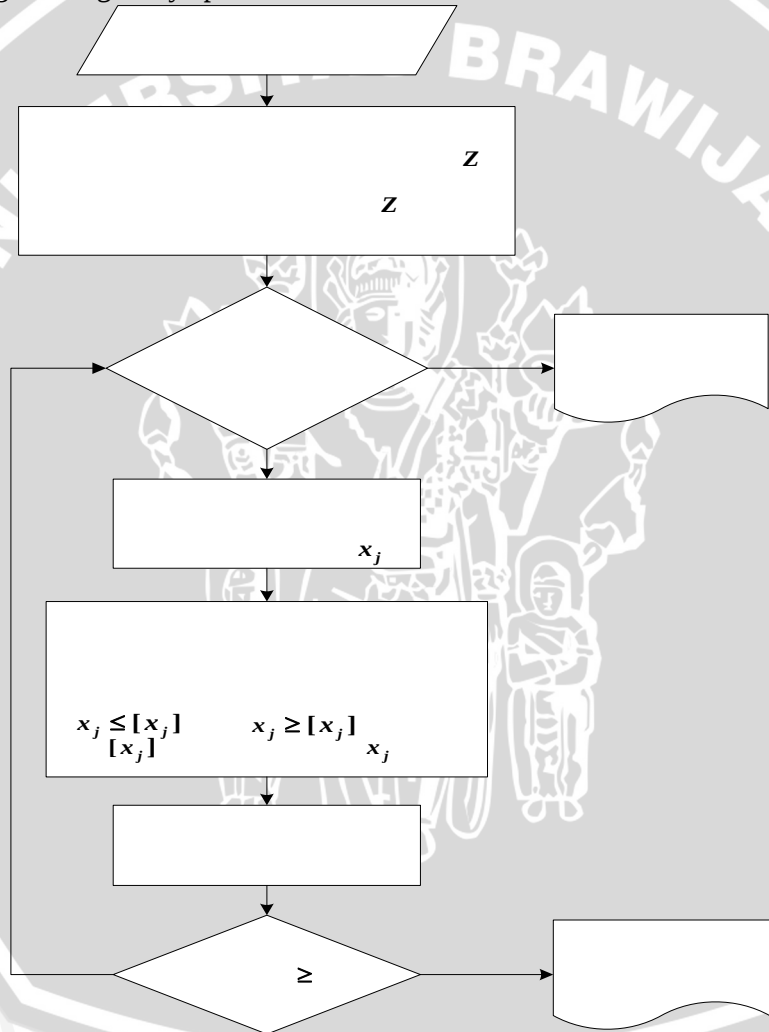
Suatu sub masalah dapat diselesaikan (dihentikan), dan dengan demikian akan dihilangkan dari penghitungan selanjutnya jika memenuhi salah satu dari tiga hal berikut ini :

1. jika penyelesaian program linier relaksasi dari submasalah tersebut menghasilkan solusi yang sudah memenuhi batasan integer.
2. jika nilai Z yang diperoleh dari penyelesaian program linier relaksasi sub masalah tersebut tidak melebihi batas bawahnya (batas submasalah $\leq Z$ untuk masalah maksimasi).
3. jika program linier relaksasi dari sub masalah tersebut tidak mempunyai penyelesaian yang layak (tidak fisibel).

5. Test

Jika tidak ada lagi submasalah sisa dan nilai Z yang diperoleh sudah optimal maka proses dihentikan. Jika tidak demikian maka ulangi langkah 2.

Untuk persoalan program linier integer murni yang memaksimalkan fungsi tujuan, maka algoritma Branch_and_Bound dapat dituliskan langkah-langkahnya pada Gambar 2.1 berikut:



Gambar 2.1

Algoritma Branch-and-Bound untuk program Linier Integer Murni

BAB III

METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Lokasi dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada bulan April 2007. Bertempat di Perusahaan Shuttle Cock “KENDEDES” Malang yang berlokasi di Jalan Kramat Dusun Ngepeh RT. 03 RW. 06 Desa Ngijo Kecamatan Karang Ploso Malang Jawa Timur 65152.

3.2 Metode Pengumpulan Data

Metode pengumpulan data yang digunakan dalam penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Studi Kepustakaan

Metode ini dilakukan dengan cara mempelajari buku-buku kepustakaan yang berhubungan dengan topik pembahasan.

2. Studi Lapangan

Metode ini dilakukan dengan cara turun langsung ke lapangan untuk memperoleh data dan menyelidiki obyek yang diteliti. Pada metode ini dilakukan wawancara langsung terhadap pihak yang berkaitan dengan penelitian dan mengumpulkan data yang diperlukan dalam penelitian.

3.3 Objek Penelitian

Objek yang dijadikan penelitian dalam penulisan tugas akhir ini adalah :

1. Gambaran umum perusahaan

2. Bagian produksi yang meliputi :

- Bahan baku dan bahan penunjang yang dibutuhkan
- Mesin dan peralatan yang digunakan
- Proses produksi
- Hasil produksi

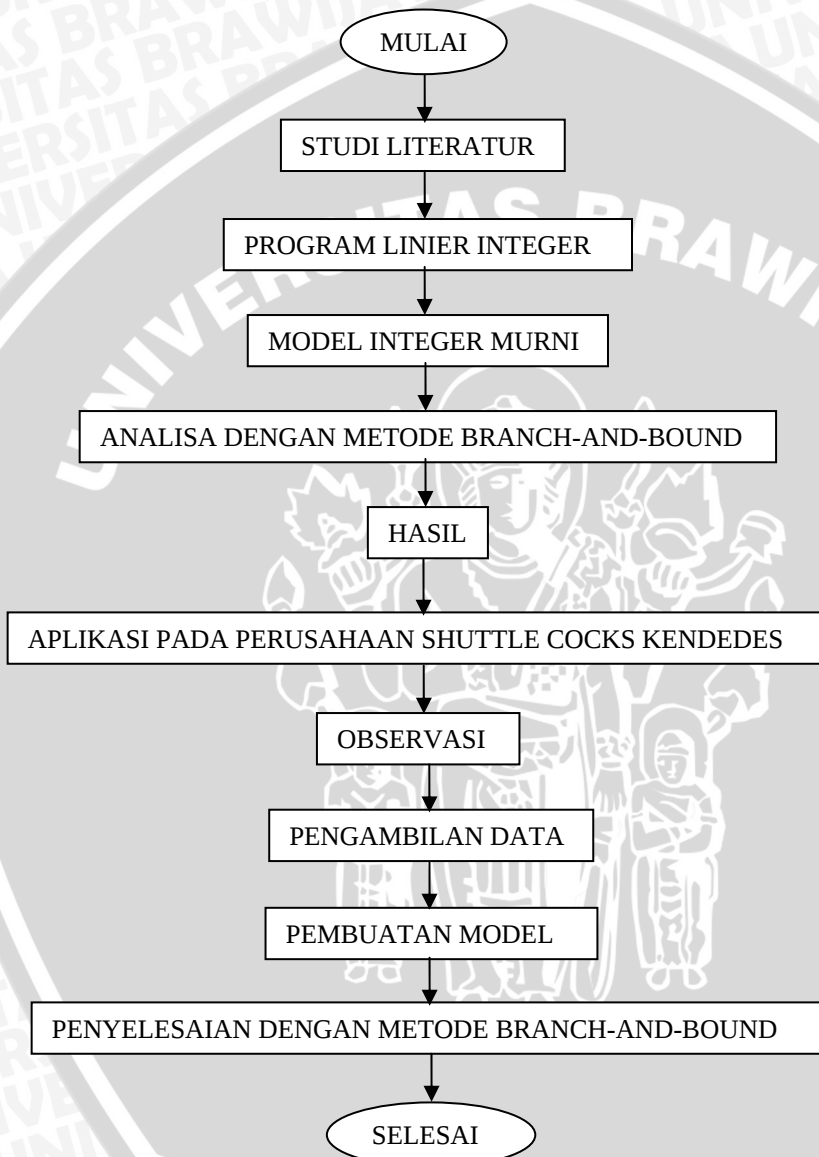
3. Bagian pemasaran yang meliputi :

- Jumlah penjualan
- Harga jual

4. Bagian keuangan

- Biaya produksi

3.4 Diagram alir penelitian



Gambar 3.1
Diagram alir penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Gambaran Umum Perusahaan

Perusahaan Shuttle Cock "KENDEDES" didirikan oleh Bapak Abdul Rochman pada tahun 1996 di daerah Singosari Kabupaten Malang. Nama perusahaan dan merek "KENDEDES" diambil dari salah satu nama tokoh dalam sejarah Singosari. Akan tetapi dalam kegiatan usahanya perusahaan ini tidak bertahan lama, pada tahun 1999 perusahaan ini mengalami pailit. Selanjutnya pada tahun 2000 perusahaan ini berdiri lagi dengan lokasi baru di daerah Kecamatan Karang Ploso Malang.

Perusahaan ini berdiri dengan menggunakan modal sendiri, dan pada tahun 2001 mendapatkan kredit dari Bank JATIM untuk perluasan usahanya. Setelah perusahaan berkembang, perusahaan ini mengajukan ijin usaha dan mengajukan register untuk merek barang produksinya yang disahkan pada tahun 2001 dengan nomor 530/36/429.12/IVI IK/2001 yang berbentuk perusahaan perseorangan.

Untuk dapat bersaing dengan industri yang sejenis, perusahaan ini berusaha untuk selalu mempertahankan mutu dari barang produksinya. Karena keterbatasan dalam modal dan jumlah tenaga ahli maka permintaan dari konsumen tidak semuanya dapat dipenuhi.

4.2 Bagian Produksi

4.2.1 Bahan Baku dan Bahan Penunjang

Perusahaan Shuttle Cock "KENDEDES" memproduksi 3 tipe produk, yaitu Shuttle Cokok merek Yunion, Kendedes dan Smash. Bahan-bahan yang digunakan dalam proses produksi dibedakan menjadi dua, yaitu bahan baku dan bahan penunjang. Adapun bahan baku yang digunakan adalah sebagai berikut :

1. Bulu itik

Penentuan jenis bulu itik yang digunakan tergantung dari tingkat kualitas Shuttle Cock yang dipesan. Untuk Shuttle Cock merek Yunion menggunakan bulu itik jenis BK-1, sementara untuk Shuttle Cock merek Kendedes dan Smash menggunakan bulu itik jenis BK-2 dan BK-3. Karena mahalnya harga bulu itik lokal dan

terbatasnya kualitas, maka perusahaan membeli bulu itik yang diimpor dari Taiwan.

2. Kayu bakau (Gabus)

Kayu bakau di sini berfungsi untuk menancapkan dulu dan juga sebagai pemberat.

Selain bahan baku juga dibutuhkan bahan penunjang yang merupakan bahan pembantu dalam proses produksi. Bahan penunjang yang di butuhkan antara lain :

1. Benang digunakan sebagai bahan pengikat bulu setelah ditancapkan.
2. Lem besi digunakan sebagai penguat bulu agar tetap berbentuk bulat.
3. Stiker digunakan sebagai identitas produk.
4. Tiner digunakan untuk mengencerkan lem.
5. Besi digunakan sebagai penambah berat jika berat shuttle cock kurang dari standard nasional yaitu 4,9 gram.

4.2.2 Mesin dan Peralatan

• Mesin

1. Mesin Oven Bulu
2. Mesin Press Bulu
3. Mesin Bor Gabus
4. Mesin Jahit Shuttle Cock

• Peralatan

1. Gunting
2. Tang jepit
3. Kuas
4. Penggaris

4.2.3 Proses Produksi

Proses produksi Shuttle Cock dibagi dalam beberapa bagian, yaitu :

1. Bagian I

Bertugas untuk mengoven bulu agar mengembang dan kering seperti bentuk aslinya. Kemudian bulu disortir untuk mendapatkan bulu dalam kualitas baik.

2. Bagian II

Setelah bulu di oven, Bag.II bertugas untuk membentuk bulu dengan mesin press bulu.

3. **Bagian III**

Bertugas untuk membuat lubang pada gabus yang sudah dilekatkan dengan kayu bakau.

4. **Bagian IV**

Bulu yang sudah di press kemudian dipasang pada gabus yang sudah di bor.

5. **Bagian V**

Setelah bulu dipasang pada gabus kemudian bulu dijahit dengan mesin jahit shuttle cock.

6. **Bagian VI**

Shuttle cock yang sudah dijahit kemudian disetel (dibulatkan) dengan ukuran diameter 6,5 centimeter.

7. **Bagian VII**

Shuttle cock yang sudah disetel kemudian di lem dengan lem besi dan dikeringkan dengan cara diangin-anginkan selama 24 jam. Shuttle cock yang sudah kering kemudian dirapikan.

8. **Bagian VIII**

Shuttle cock yang sudah di servis kemudian ditimbang beratnya dan dites kemampuannya. Shuttle cock yang tidak memenuhi standard dipisahkan untuk diperbaiki.

9. **Bagian IX**

Shuttle cock yang sudah memenuhi standard kemudian di kemas dan diberi label. Satu kemasan terdiri dari 12 buah Shuttle cock.

4.2.3.1 **Jam Kerja Karyawan**

Jumlah hari dalam satu tahun (tahun 2006) : 365 hari

Jumlah libur hari minggu dan hari besar : 65 hari

Maka standard hari kerja dalam setahun adalah 300 hari, sedangkan jam kerja setiap harinya adalah :

Senin – Kamis dan Sabtu : 07.00 – 15.30

Istirahat : 12.00 – 13.00

Jum'at : 07.00 – 15.00

Istirahat : 11.00 – 13.00

Untuk pekerja bagian produksi yang sistem penggajiannya berdasarkan upah borongan tidak ada ketentuan khusus terhadap jam kerjanya.

4.3 FORMULASI MODEL PROGRAM LINIER INTEGER

1. Variabel Keputusan

Masalah ini berisi tiga variabel keputusan yang menunjukkan jumlah produksi untuk tiap tipe produk (dalam dosin)

x_1 = jumlah shuttle cock tipe Yunior yang diproduksi

x_2 = jumlah shuttle cock tipe Kendedes yang diproduksi

x_3 = jumlah shuttle cock tipe Smash yang diproduksi

2. Fungsi Tujuan

Tujuan perusahaan adalah untuk memaksimumkan total laba. Laba perusahaan adalah jumlah dari laba setiap type produk. Laba yang diambil adalah dengan mengurangi harga jual dengan biaya produksi. Harga jual, Biaya produksi dan Laba untuk tiap-tiap produk diberikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.1

Harga jual, Biaya Produksi dan Laba untuk tiap Tipe Produk

No.	Tipe Produk	Harga Jual (Rp.)	Biaya Produksi (Rp.)	Laba (Rp.)
1	Yunior	33.000	22.136,36364	10.863,63636
2	Kendedes	30.000	19.218,18182	10.781,81818
3	Smash	29.000	18.109,09091	10.890,90909

Sumber : Perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang

Dari Tabel 4.1 diformulasikan fungsi tujuan sebagai berikut:

$$\text{Maksimumkan } Z = 10.863,64x_1 + 10.781,82x_2 + 10.890,91x_3$$

3. Batasan Model

Permasalahan yang dihadapi perusahaan antara lain berkaitan dengan disiplin kerja karyawan. Rendahnya disiplin kerja karyawan mengakibatkan belum optimalnya pemanfaatan faktor-faktor produksi yang dimiliki oleh perusahaan. Antara lain berkaitan dengan persediaan bahan baku dan tenaga kerja. Sehingga setiap bulannya mengakibatkan banyak permintaan yang belum dapat dipenuhi, sementara itu terdapat surplus pada persediaan bahan baku.

Persediaan Bahan Baku dan Tenaga Kerja pada Perusahaan Shuttle Cocks "KENDEDES" bila ditinjau dari segi biaya disajikan pada Tabel 4.2 berikut :

Tabel 4.2

Anggaran Biaya Bahan Baku dan Upah Tenaga Kerja Per bulan

Type Produk	Biaya Bahan Baku (Rp.)		Upah Tenaga Kerja dan Biaya Pengemasan (Rp.)
	Bulu (per dosin)	Gabus (per dosin)	
Yunior	13.363,36	4000	4500
Kendedes	11.818,18	3400	4000
Smash	10.909,09	3200	4000
Anggaran Biaya (per bulan)	Rp. 110.000.000	Rp. 37.000.000	Rp. 38.000.000

Sumber : Perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang

Anggaran biaya untuk persediaan bahan baku per tahun sebesar :

Bulu itik : Rp. 110.000.000 x 12 bulan = 1.320.000.000
 maka anggaran biaya per harinya Rp. 1.320.000.000/300 hari =
 Rp. 4.400.000

Gabus : Rp. 37.000.000 x 12 bulan = Rp. 444.000.000
 maka anggaran biaya per harinya Rp. 444.000.000/300 hari =
 Rp. 1.480.000

Anggaran biaya untuk upah tenaga kerja dan per tahun sebesar :

Rp. 38.000.000 x 12 = Rp. 456.000.000

Maka anggaran biaya untuk upah tenaga kerja per hari sebesar :

Rp. 456.000.000/300 = Rp. 1.520.000

Bentuk linier dari batasan diatas adalah sebagai berikut :

$$13.363,36x_1 + 11.818,18x_2 + 10.909,09x_3 \leq 4.400.000$$

$$4.000x_1 + 3.400x_2 + 3200x_3 \leq 1.480.000$$

$$4.500x_1 + 4.000x_2 + 4.000x_3 \leq 1.520.000$$

Selain mengakibatkan belum optimalnya pemanfaatan faktor-faktor produksi yang dimiliki perusahaan, rendahnya disiplin kerja juga mengakibatkan banyaknya permintaan yang tidak dapat dipenuhi. Hal ini bisa saja di tanggulangi dengan mendatangkan shuttle cocks dari para pengrajin diluar daerah ataupun dengan menambah jumlah karyawan. Akan tetapi pemilik perusahaan Shuttle Cocks "KENDEDES" ingin selalu menjaga mutu barang yang dipasarkan sehingga produksinya selalu terbatas.

Jumlah produksi barang dan permintaan barang pada tahun 2006 disajikan dalam Tabel 4.3 dan Tabel 4.4 berikut ini :

Tabel 4.3
Jumlah Produksi Barang Tahun 2006 (Dalam Dosin)

Type	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Juni	Juli	Agt	Sep	Okt	Nov	Des	Jumlah
Yunior	1075	1225	1316	1274	1373	1310	1379	1375	1250	1185	1152	1190	15104
Kendedes	5650	6042	6205	6137	6622	6501	6149	6645	6150	5643	5411	5830	72985
Smash	1525	1560	1551	1573	1630	1627	1655	1695	1653	1760	1540	1591	19360
Jumlah	8250	8827	9072	8984	9625	9438	9183	9715	9053	8588	8103	8611	107449

Sumber : Perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang

Tabel 4.4
Jumlah Permintaan Barang Tahun 2006 (Dalam Dosin)

Type	Jan	Feb	Mar	Apr	Mei	Juni	Juli	Agt	Sep	Okt	Nov	Des	Jumlah
Yunior	1150	1300	1350	1300	1400	1450	1450	1500	1300	1200	1250	1300	15950
Kendedes	6000	6100	6300	6200	6700	6500	6300	7000	6400	6000	5500	6000	75000
Smash	1700	1750	1750	1700	1750	1700	1850	2000	1850	1800	1600	1700	21150
Jumlah	8850	9150	9400	9200	9850	9650	9600	10500	9550	9000	8350	9000	112100

Sumber : Perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang.

Karena pada tahun 2006 terdapat 300 hari kerja, maka dari Tabel 4.4 jumlah permintaan per hari adalah sebagai berikut:

1. Yuniur : 15950 dosin / 300 hari = 53,1667
2. Kendedes : 75000 dosin / 300 hari = 250
3. Smash : 21150 dosin / 300 hari = 70.5.

Bentuk linier dari kendala permintaan diatas adalah sebagai berikut :

$$x_1 \leq 53.1667$$

$$x_2 \leq 250$$

$$x_3 \leq 70.5$$

Kendala terakhir adalah jumlah masing-masing tipe shuttle cock yang diproduksi harus bernilai positif. Selain itu, karena penjualan untuk semua tipe selalu dalam bentuk bulat yaitu satu dosin, maka terdapat batasan bahwa semua variabel keputusannya harus bernilai integer. Model program linier integer murni untuk masalah optimasi di perusahaan shuttle cock "KENDEDES" adalah :

Maksimumkan $Z = 10.863,64x_1 + 10.781,82x_2 + 10.890,91x_3$

dengan kendala

$$13.363,36x_1 + 11.818,18x_2 + 10.909,09x_3 \leq 4.400.000$$

$$4.000x_1 + 3.400x_2 + 3.200x_3 \leq 1.480.000$$

$$4.500x_1 + 4.000x_2 + 4.000x_3 \leq 1.520.000$$

$$x_1 \leq 53.1667$$

$$x_2 \leq 250$$

$$x_3 \leq 70.5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ dan Integer}$$

4.4 Penentuan Kombinasi Volume Produksi Shuttle Cock pada Perusahaan Shuttle Cock "KENDEDES" dengan Metode Branch-and-Bound

Langkah 1: Menghitung solusi simpleks "Relaxed"

Metode Branch-and-Bound diawali dengan menyelesaikan program linier relaksasi dari oprogram linier integernya dan diselesaikan dengan metode simpleks menggunakan program **QM for Windows**. Solusi dari program liniernya diberikan pada Tabel 4.5.

Tabel 4.5
Solusi simpleks untuk program linier relaksasi

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.8129
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	1,174.323
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	2,022.451
Solution->	50.6133	250.	70.5		4,013,109.29	

Sumber pengolahan data : **QM for Windows**

Dari tabel 4.5 diperoleh solusi fisibel optimal yaitu :

$$x_1 = 50,6133$$

$$x_2 = 250$$

$$x_3 = 70.5$$

dengan nilai fungsi tujuan $Z^R = 4.013.109,29$

Langkah 2: Menetapkan node awal, Batas Atas dan Batas Bawah

Node awal merupakan penyelesaian program linier relaksasi dari program linier integer murni yang pertama dan selanjutnya disebut sebagai **sub masalah 1**. Dari teorema 2.3.1.1. diketahui bahwa $Z^R \geq Z$, sehingga nilai Z optimal untuk program linier integernya tidak akan lebih besar dari nilai Z optimal untuk program linier relaksasi.

$$\text{Batas Atas (BA)} = 4.013.109,29$$

Sementara itu, batas bawah merupakan nilai Z untuk solusi pembulatan dari program linier relaksasi.

$$\text{Batas Bawah (BB)} = 4.001.000,77.$$

Langkah 3: Pencabangan pada node-1, $x_1 \leq 50$, $x_1 \geq 51$

Pada penyelesaian optimal untuk program linier relaksasi, terdapat variabel keputusan yang tidak bernilai bulat sehingga dipilih variabel keputusan dengan bagian desimal terbesar, yaitu $x_1 = 50,6133$.

Kemudian dibentuk dua sub masalah baru, yaitu:

sub masalah 2 = sub masalah 1 + kendala $x_1 \leq 50$

Solusi simpleks dari sub masalah 2 diberikan pada Tabel 4.6

Tabel 4.6
Solusi simpleks untuk sub masalah 2

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	10,781.82
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	10,890.91
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	<=	50.	10,863.64
Solution->	50.	250.	70.5		4,006,446.23	

Sumber pengolahan data : **QM for Windows**

diperoleh $x_1 = 50$, $x_2 = 250$ dan $x_3 = 70.5$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.006.446,23$.

sub masalah 3 = sub masalah 1 + kendala $x_1 \geq 51$

Solusi simpleks untuk sub masalah 3 diberikan pada tabel 4.7

Tabel 4.7
Solusi simpleks untuk sub masalah 3

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.9123
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	0.
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	938.4598
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	>=	51.	-1,327.861
Solution->	51.	249.5628	70.5		4,012,595.85	

Sumber pengolahan data : **QM for Windows**

diperoleh $x_1 = 51$, $x_2 = 249,5628$, $x_3 = 70.5$ dan $Z = 4.012.595,85$.

Karena nilai Z pada sub masalah 3 lebih besar dari sub masalah 2, maka dilakukan pencabangan pada sub masalah 3 dan dipilih variabel dengan bagian desimal terbesar yaitu $x_2 = 249,5628$.

Langkah 4: Pencabangan pada node-3, x_2 ($x_2 \leq 249$, $x_2 \geq 250$)

sub masalah 4 = sub masalah 3 + kendala $x_2 \leq 249$

Solusi simpleks untuk sub masalah 4 diberikan pada tabel 4.8

Tabel 4.8

Solusi simpleks untuk sub masalah 4

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.8129
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	0.
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	2,022.451
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	>=	51.	0.
NEW Constraint 8	0.	1.	0.	<=	249.	1,174.323
Solution->	51.4977	249.	70.5		4,011,934.96	

Sumber pengolahan data : **QM for Windows**

diperoleh $x_1 = 51,4977$, $x_2 = 249$ dan $x_3 = 70,5$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.011.934,96$.

sub masalah 5 = sub masalah 3 + kendala $x_2 \geq 250$

Solusi simpleks untuk sub masalah 5 diberikan pada tabel 4.9

Tabel 4.9

Solusi simpleks untuk sub masalah 5

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.9983
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	0.
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	0.
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	>=	51.	-2,477.451
NEW Constraint 8	0.	1.	0.	>=	250.	-1,016.665
Solution->	51.	250.	70.0263		4,012,151.34	

Sumber pengolahan data : **QM for Windows**

diperoleh $x_1 = 51$, $x_2 = 250$ dan $x_3 = 70,0263$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.012.151,34$.

Langkah 5: Pencabangan pada node-5, x_3 ($x_3 \leq 70$, $x_3 \geq 71$)

sub masalah 6 = sub masalah 5 + kendala $x_3 \leq 70$

Solusi simpleks untuk sub masalah 6 diberikan pada tabel 4.10

Tabel 4.10

Solusi simpleks untuk sub masalah 6

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.8129
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	1,174.323
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	0.
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	>=	51.	0.
NEW Constraint 8	0.	1.	0.	>=	250.	0.
NEW Constraint 9	0.	0.	1.	<=	70.	2,022.451
Solution->	51.0215	250.	70.		4,012,098.06	

Sumber pengolahan data : **QM for Windows**

diperoleh $x_1 = 51$

$x_2 = 244$

$x_3 = 76,5263$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.018.249,93$.

sub masalah 7 = sub masalah 5 + kendala $x_3 \geq 71$

Solusi simpleks untuk sub masalah 7 menghasilkan solusi yang tidak layak sehingga pencabangan selanjutnya dilakukan pada sub masalah 6.

Langkah 6: Pencabangan pada node-6, x_1 ($x_1 \leq 51$, $x_1 \geq 52$)

sub masalah 8 = sub masalah 6 + kendala $x_1 \leq 51$

Solusi simpleks dengan batasan $x_1 \leq 51$ diberikan pada tabel 4.11

Tabel 4.11
Solusi simpleks untuk sub masalah 8

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	10,781.82
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	0.
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	>=	51.	0.
NEW Constraint 8	0.	1.	0.	>=	250.	0.
NEW Constraint 9	0.	0.	1.	<=	70.	10,890.91
NEW Constraint 10	1.	0.	0.	<=	51.	10,863.64
Solution->	51.	250.	70.		4,011,864.41	

diperoleh $x_1 = 51$, $x_2 = 250$ dan $x_3 = 70$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.011.864,41$.

sub masalah 9 = sub masalah 6 + kendala $x_1 \geq 52$

Solusi simpleks untuk sub masalah 9 diberikan pada tabel 4.12

Tabel 4.12
Solusi simpleks untuk sub masalah 9

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	10,863.64	10,781.82	10,890.91			
Constraint 1	13,363.36	11,818.18	10,909.09	<=	4,400,000.	0.9983
Constraint 2	4,000.	3,400.	3,200.	<=	1,480,000.	0.
Constraint 3	4,500.	4,000.	4,000.	<=	1,520,000.	0.
Constraint 4	1.	0.	0.	<=	53.1667	0.
Constraint 5	0.	1.	0.	<=	250.	0.
Constraint 6	0.	0.	1.	<=	70.5	0.
NEW Constraint 7	1.	0.	0.	>=	51.	0.
NEW Constraint 8	0.	1.	0.	>=	250.	-1,016.665
NEW Constraint 9	0.	0.	1.	<=	70.	0.
NEW Constraint 10	1.	0.	0.	>=	52.	-2,477.451
Solution->	52.	250.	68.8014		4,009,673.89	

diperoleh $x_1 = 52$, $x_2 = 250$ dan $x_3 = 68,8014$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.009.673,89$

Semua variabel keputusan pada sub masalah 8 telah memenuhi batasan integer dengan nilai Z optimal lebih besar dari sub masalah 9 maka proses pencabangan dari sub masalah 8 dihentikan. Sementara itu, pada sub masalah 9 masih terdapat variabel keputusan yang tidak bernilai bulat. Apabila dilakukan pencabangan lagi dari sub masalah 9, maka menurut teorema 2.3.2.1. akan diperoleh nilai Z optimal yang lebih kecil dari nilai Z optimal pada sub masalah 9. Oleh karena itu, proses pencabangan dihentikan dan diperoleh solusi integer optimal pada sub masalah 8 dengan nilai sebagai berikut :

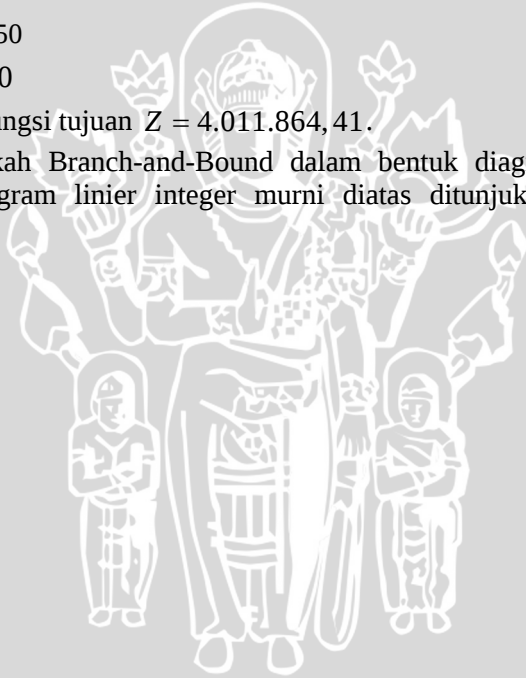
$$x_1 = 51$$

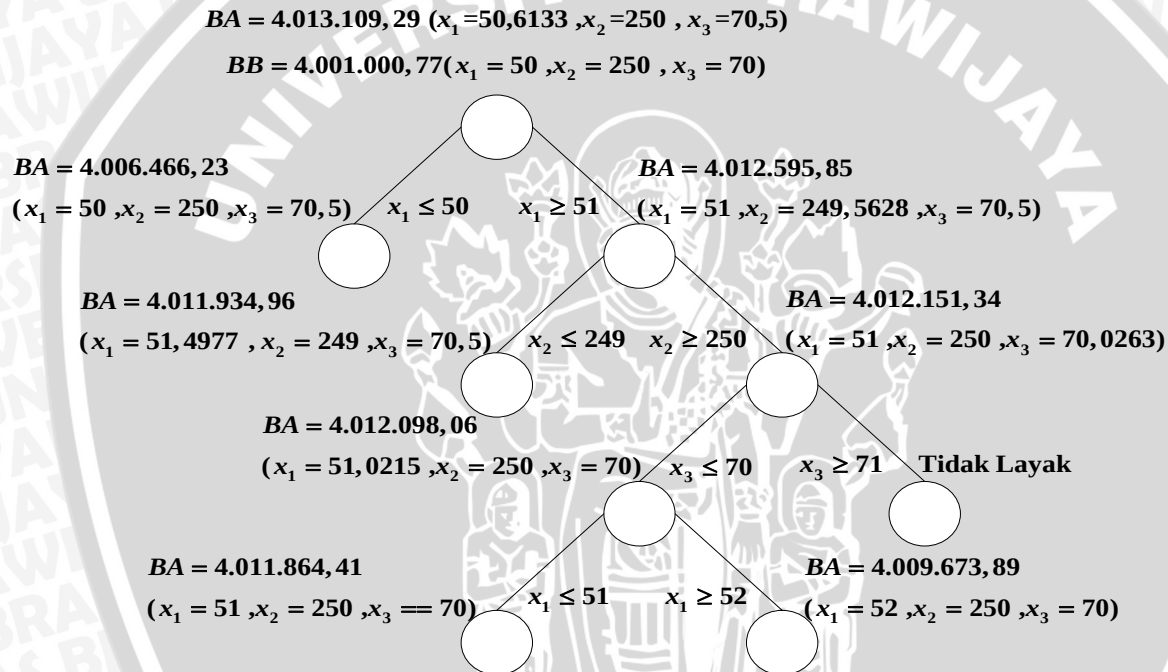
$$x_2 = 250$$

$$x_3 = 70$$

dengan nilai fungsi tujuan $Z = 4.011.864,41$.

Langkah-langkah Branch-and-Bound dalam bentuk diagram pada persoalan program linier integer murni diatas ditunjukkan pada Gambar 4.1.





Gambar 4.1

Diagram Branch-and-Bound dengan solusi integer optimal pada node-8

Dengan kata lain :

Banyaknya Shuttle Cocks merk Yunior yang diproduksi perhari adalah 51 dosin.

Banyaknya Shuttle Cocks merk Kendedes yang diproduksi perhari adalah 250 dosin.

Banyaknya Shuttle Cocks merk Smash yang diproduksi perhari adalah 70 dosin.

Keuntungan yang diperoleh per hari adalah sebesar Rp.4.012.518,25

Keuntungan yang diperoleh setahun adalah :

Yunior : $51 \times 300 = 15.300$ dosin per tahun
 $15.300 \times \text{Rp. } 10.863,64 = \text{Rp. } 166.213.692$

Kendedes : $250 \times 300 = 75.000$ dosin per tahun
 $75.000 \times \text{Rp. } 10.781,82 = \text{Rp. } 808.636.500$

Smash : $70 \times 300 = 21.000$ dosin per tahun
 $21.000 \times \text{Rp. } 10.890,91 = \text{Rp. } 228.709.110$

Total keuntungan per tahun sebesar Rp. 1.203.559.302.

Apabila tidak digunakan metode Branch-and-Bound untuk menentukan solusi integer optimal dari model program linier integer, keuntungan yang diperoleh = $\text{Rp. } 4.001.000,77 \times 300 = \text{Rp. } 1.200.300.231$. terdapat selisih keuntungan sebesar Rp.3.259.071. Sementara itu, dari data perusahaan diketahui keuntungan yang diperoleh pada tahun 2006 adalah sebagai berikut :

Yunior : $15.104 \times \text{Rp. } 10.863,64 = \text{Rp. } 164.084.418,6$

Kendedes : $72.985 \times \text{Rp. } 10.781,82 = \text{Rp. } 786.911.132,7$

Smash : $19.360 \times \text{Rp. } 10.890,91 = \text{Rp. } 210.848.017,6$

dengan total keuntungan sebesar Rp.1.161.843.569.

Perbandingan jumlah produksi pada tahun 2006 dapat dilihat pada Tabel 4.13.

Tabel 4.13
Perbandingan Jumlah Produksi Pada Tahun 2006

Tipe Produk	Jumlah Produksi (Dosin)		Selisih
	Data Penjualan Tahun 2006	Hasil Penelitian	
Yunior	15.104	15.300	196
Kendedes	72.985	75.000	3.015
Smash	19360	21.000	1.640

Dengan kata lain, penentuan kombinasi produk pada tahun 2006 dengan menggunakan program linier integer naik sebesar 3,59% dibandingkan dengan penentuan kombinasi produk yang dilakukan perusahaan pada tahun yang sama.

Pada penelitian ini, beberapa asumsi yang digunakan sebagai landasan berfikir adalah sebagai berikut :

1. Harga jual dan biaya produksi tidak mengalami perubahan selama perencanaan.
2. Bahan baku yang dibutuhkan selalu tersedia.
3. Biaya pengiriman tidak diperhitungkan.



BAB V PENUTUP

5.1 Kesimpulan

Kesimpulan yang dapat diambil dari penelitian ini diantaranya :

1. Bentuk model program linier integer untuk masalah optimasi di perusahaan shuttle cock “KENDEDES” adalah program linier integer murni, dimana jumlah produksi dari tiap tipe produk harus bulat.
2. Dari hasil penelitian diperoleh kombinasi produk optimal yaitu : Shuttle Cocks merk yunior sebanyak 15.300 dosin per tahun, Kendedes sebanyak 75.000 dosin per tahun dan Smash sebanyak 22.800 dosin per tahun dengan total keuntungan sebesar Rp.1.203.559.302 atau meningkat 3,59% dibandingkan dengan penentuan kombinasi produk yang dilakukan perusahaan pada tahun yang sama yaitu sebesar Rp.1.161.843.569. Apabila menggunakan solusi pembulatan untuk mendapatkan solusi integer maka keuntungan yang diperoleh sebesar Rp.1.200.300.231.

5.2 Saran

1. Perusahaan hendaknya segera mengoreksi penentuan kombinasi produk, khususnya untuk shuttle cock merk kendedes yang merupakan produk unggulan sekaligus identitas perusahaan.
2. Untuk penelitian selanjutnya diharapkan model yang dibuat bisa dikembangkan dengan memperhatikan tujuan lain dari perusahaan disamping tujuan untuk memaksimumkan keuntungan, misalnya tujuan tenaga kerja, tujuan laba dan tujuan bahan baku. Untuk menyelesaikan model dengan lebih dari satu tujuan ini, program tujuan (*Goal Programming*) merupakan teknik yang bisa dipergunakan.
3. Pada perhitungan untuk menyelesaikan program linier integer, selain menggunakan program **QM for Windows** bisa menggunakan program **QSB+, LINDO, Super LINDO/PC**.

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Algoritma Branch-and-Bound untuk program Linier Integer Murni	27
Gambar 3.1 Diagram Alir Penelitian.....	30
Gambar 4.1 Diagram Branch-and-Bound dengan solusi integer optimal pada node-8	44



DAFTAR ISI

Halaman

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	iii
LEMBAR PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR TABEL	xv
DAFTAR GAMBAR	xvii
DAFTAR LAMPIRAN	xix
BAB I. PENDAHULUAN	
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	2
1.3. Batasan Masalah	2
1.4. Tujuan	3
1.5. Manfaat Penelitian	3
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA	
2.1. Program Linier	5
2.2. Program Linier Integer	7
2.3. Program Linier Relaksasi	8
2.3.1. Definisi Relaksasi	9
2.3.2. Definisi Relaksasi Program Linier	9
2.4. Metode Simpleks	11
2.4.1. Beberapa Definisi pada Metode Simpleks	12
2.4.2. Perumusan Metode Simpleks	14
2.4.3. Langkah-langkah Metode Simpleks	16
2.4.4. Bentuk Umum Tabel Simpleks	23
2.5. Metode Branch-and-Bound	25
BAB III. METODE PENELITIAN	
3.1. Lokasi dan Waktu Penelitian	29
3.2. Metode Pengumpulan Data	29
3.3. Objek Penelitian	29
3.4. Diagram Alir Penelitian	30

BAB IV. PEMBAHASAN

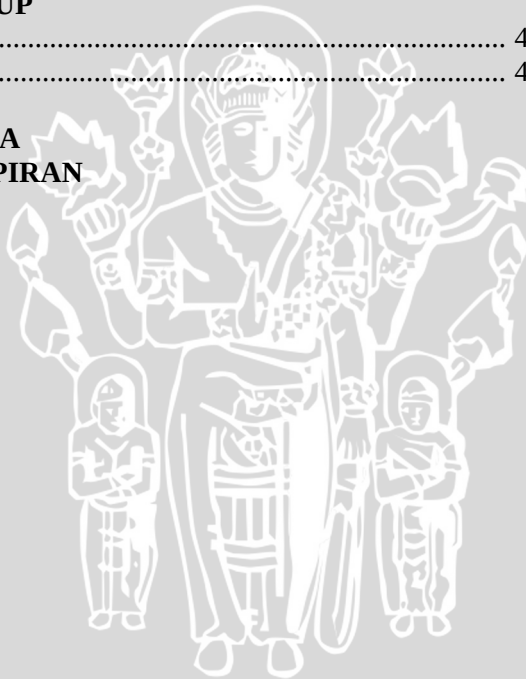
4.1. Gambaran Umum Perusahaan	31
4.2. Bagian Produksi	31
4.2.1. Bahan Baku dan Bahan Penolong	31
4.2.2. Mesin dan Peralatan	32
4.2.3. Proses Produksi	32
4.2.4. Jam kerja karyawan	33
4.3. Formulasi Model Program Linier Integer	34
4.4. Penentuan Kombinasi Volume Produksi Shuttle Cock pada Perusahaan Shuttle Cock “KENDEDES” dengan Metode Branch-and-Bound	37

BAB V. PENUTUP

5.1. Kesimpulan	47
5.2. Saran	47

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN-LAMPIRAN



DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Surat Ijin Pengambilan Data

Lampiran 2 Surat Keterangan Pengambilan Data

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, D.R., D.J.Sweeney dan T.A.Williams. 1996. *Manajemen Sains*. Jilid1. Edisi ketujuh. Erlangga. Jakarta.
- Byrne, J.R. 1967. *Number system : An elementary Approach*. McGraw-Hill. New York
- Ecker, J.G. dan M.Kupferschmid. 1998. *Introduction to Operation Research*. John Willey & sons. New York.
- Gass, Saul.I. 1975. *Linear Programming, Methods and Applications*. Fourth Edition. McGraw-Hill Kogakusha, Ltd. Tokyo.
- Hiller, F.S. dan G.J.Lieberman. 1990. *Pengantar Riset Operasi*. Jilid 1. Edisi kelima. Erlangga. Jakarta.
- Hiller, F.S. dan G.J.Lieberman. 2001. *Introduction to Operation Research*. Edisi ketujuh. McGraw-Hill. New York.
- Lawrence, A., Wolsey. 1998. *Integer Programming*. Edisi kedua. Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta
- Nasendi.B.D. dan Affendi Anwar. 1985. *Program Linier dan Variasinya*. PT Gramedia. Jakarta.
- Supranto,J.M.A. 1983. *Linear Programming*. Edisi kedua. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta.
- Susanta, B. 1994. *Program Linier*. DEPDIKBUD : Direktorat Jendral Pendidikan Tinggi, Proyek Pendidikan Tenaga Guru. Jakarta.
- Sutawidjaja, A. dan Sudirman. 2005. *Program Linear*. Penerbit Universitas Negeri Malang (UM PRESS). Malang.

Taha, H.A.1996. *Riset Operasi*. Jilid 1. Edisi kelima. Binarupa Aksara. Jakarta.

Taylor, B.W. 2000. *Sains Manajemen, "Pendekatan matematika untuk bisnis"*. PT.Salemba Empat. Jakarta.

Winston, W.L. 1991. *Operation Research, "Application and Algorithms"*. Edisi kedua. Duxbury Press. California.



DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Format Tabel Metode Simpleks	24
Tabel 4.1 Harga jual, biaya produksi dan laba untuk tiap tipe Produk	34
Tabel 4.2 Anggaran Biaya Bahan Baku dan Upah Tenaga Kerja Per bulan	35
Tabel 4.3 Jumlah Produksi Barang Tahun 2006	36
Tabel 4.4 Jumlah Permintaan Barang Tahun 2006	36
Tabel 4.5 Solusi simpleks Relaxed pada Studi Kasus	38
Tabel 4.6 Solusi simpleks untuk node-2 pada studi kasus	39
Tabel 4.7 Solusi simpleks untuk node-3 pada studi kasus	39
Tabel 4.8 Solusi simpleks untuk node-4 pada studi kasus	40
Tabel 4.9 Solusi simpleks untuk node-5 pada studi kasus	40
Tabel 4.10 Solusi simpleks untuk node-6 pada studi kasus	41
Tabel 4.11 Solusi simpleks untuk node-8 pada studi kasus	42
Tabel 4.12 Solusi simpleks untuk node-9 pada studi kasus	42
Tabel 4.13 Perbandingan Jumlah Produksi Pada Tahun 2006 ...	45

**PENYELESAIAN PROGRAM LINIER INTEGER
DENGAN METODE BRANCH-AND-BOUND
UNTUK MENENTUKAN SOLUSI INTEGER OPTIMAL
(Studi kasus pada perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang)**

TUGAS AKHIR

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

Oleh :

**RIF'ATUL KHUSNIAH
0210940034-94**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah Robbil'alamin, puji syukur kehadiran Allah SWT karena atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, penulis dapat menyelesaikan tugas akhir ini.

Tugas Akhir ini disusun sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar sarjana di bidang Matematika. Penelitian Tugas Akhir ini dilakukan pada perusahaan Shuttle Cocks "KENDEDES" Malang dengan judul "PENYELESAIAN PROGRAM LINIER INTEGER DENGAN METODE BRANCH-AND-BOUND UNTUK MENENTUKAN SOLUSI INTEGER OPTIMAL (Studi kasus pada perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang).

Penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Drs.H. Sobri Abusini, MT. selaku dosen pembimbing I.
2. Kwardiniya A., S.Si, M.Si. selaku dosen pembimbing II.
3. Dr. Agus Suryanto, MSc. selaku ketua Jurusan Matematika.
4. Dr.Wuryansari Muharini K., M.Si. selaku ketua program studi Matematika.
5. Drs. Marsudi,MS selaku dosen penguji.
6. Prof.Dr. Agus Widodo selaku dosen penguji
7. Dra. Ari Andari MS selaku dosen penguji.
8. Drs. Muh. Arif Rahman M.Kom selaku dosen penasehat akademik.
9. Bapak dan ibu dosen, seluruh karyawan dan laboran Jurusan Matematika Universitas Brawijaya.
10. Bapak Abdul Rochman selaku pimpinan perusahaan Shuttle Cock "KENDEDES" Malang.
11. Bapak, Ibuk, Vivin dan seluruh keluarga yang selalu memberikan semangat dan perhatian.

Penulis sepenuhnya menyadari bahwa penulisan tugas akhir ini masih banyak kekurangan namun penulis berharap semoga tugas akhir ini berguna dan dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Malang, 14 Juni 2007

Penulis

LEMBAR PENGESAHAN TUGAS AKHIR

PENYELESAIAN PROGRAM LINIER INTEGER DENGAN METODE BRANCH-AND-BOUND UNTUK MENENTUKAN SOLUSI INTEGER OPTIMAL (Studi kasus pada perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang)

Oleh :

RIF'ATUL KHUSNIAH
0210940034

Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 05 Juli 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang matematika

Telah diperiksa dan disahkan oleh :

Pembimbing I

Pembimbing II

Drs.H.Sobri Abusini, MT
NIP.131 759 591

Kwardiniya A., S.Si, M.Si
NIP.132 206 315

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Dr. Agus Suryanto, MSc
NIP. 132 126 049

LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Rif'atul Khusniah
NIM : 0210940034
Program Studi : Matematika
Penulis Tugas Akhir berjudul : PENYELESAIAN PROGRAM
LINIER INTEGER DENGAN METODE BRANCH-AND-BOUND
UNTUK MENENTUKAN SOLUSI INTEGER OPTIMAL
(Studi kasus pada perusahaan Shuttle cock "KENDEDES" Malang)

Dengan ini menyatakan bahwa :

1. Isi dari Tugas Akhir yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Tugas Akhir ini.
2. Apabila dikemudian hari ternyata Tugas Akhir yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 14 juni 2007

Yang menyatakan,

(Rif'atul Khusniah)
NIM. 0210940034-94