

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ YANG
DIPERLUAS (BOUSSINESQ-NWOGU)**

TUGAS AKHIR

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh:

M. ZIAUL ARIF
0310940036-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ YANG
DIPERLUAS (BOUSSINESQ-NWOGU)**

TUGAS AKHIR

oleh:
M. ZIAUL ARIF
0310940036-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2007**

LEMBAR PENGESAHAN TUGAS AKHIR

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ YANG
DIPERLUAS (BOUSSINESQ-NWOGU)**

oleh:
M. ZIAUL ARIF
0310940036-94

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 8 Juni 2007
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Agus Suryanto, M. Sc
NIP. 132 126 049

Dr. Wuryansari M.K., M. Si
NIP. 132 300 226

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya

Dr. Agus Suryanto, M. Sc
NIP. 132 126 049

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : M. ZIAUL ARIF

NIM : 0310940036-94

Jurusan : MATEMATIKA

Penulis Tugas Akhir berjudul :

**SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ
YANG DIPERLUAS (BOUSSINESQ-NWOGU)**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi Tugas Akhir yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Tugas Akhir ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Tugas Akhir yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya akan bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 8 Juni 2007

Yang menyatakan,

(M. Ziaul Arif)

NIM. 0310940036-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA

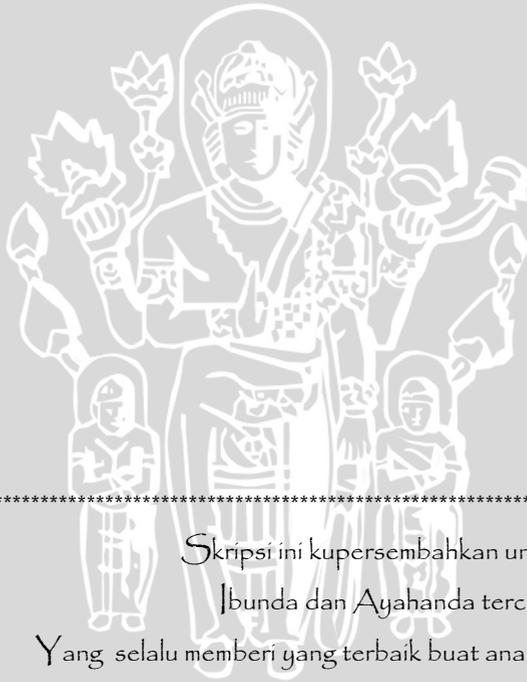


Hai orang-orang beriman apabila dikatakan kepadamu: "Berlapang-
Lapanglah dalam majlis", maka lapangkanlah niscaya Allah akan
memberi kelapangan untukmu. Dan apabila dikatakan:
"Berdirilah kamu", maka berdirilah, niscaya Allah akan
meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu
dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan
beberapa derajat. Dan Allah Maha
Mengetahui apa yang kamu
kerjakan. (QS Al-Mu'ajadilah: 11)



Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan.
(QS. 94: 5-6)

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



Skripsi ini kupersembahkan untuk
Ibunda dan Ayahanda tercinta
Yang selalu memberi yang terbaik buat ananda
Semua kakak-kakakku
Yang selalu memberi dukungan meski dari kejauhan
Dan Daana Istikusuma
Yang selalu memberi semangat saat suka maupun duka

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN BOUSSINESQ YANG DIPERLUAS (BOUSSINESQ-NWOGU)

ABSTRAK

Dalam Tugas Akhir ini dibahas metode numerik untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq yang diturunkan oleh Nwogu (Boussinesq-Nwogu). Metode numerik yang digunakan adalah metode beda hingga orde empat untuk diskritisasi turunan spasial orde pertama dan metode beda hingga orde dua untuk diskritisasi turunan spasial orde ke dua. Untuk diskritisasi temporal digunakan metode Prediktor-Korektor dan Runge-Kutta. Solusi numerik tersebut diverifikasi dengan solusi analitik yang berupa gelombang soliton untuk menunjukkan bahwa skema numerik bekerja cukup baik. Selanjutnya, ditunjukkan pula bahwa solusi numerik yang diperoleh dari metode Prediktor-Korektor memiliki keakuratan yang baik dibandingkan dengan solusi numerik yang diperoleh dari metode Runge-Kutta.

Kata kunci : metode beda hingga, metode prediktor-korektor, metode Runge-Kutta, persamaan Boussinesq yang diperluas (Boussinesq-Nwogu).

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



NUMERICAL SOLUTION OF EXTENDED BOUSSINESQ (NWOGU-BOUSSINESQ)

ABSTRACT

This final project discusses a numerical method to solve extended Boussinesq equations derived by Nwogu (Nwogu-Boussinesq). The equation is numerically solved by using fourth-order accurate finite difference method for first order spatial derivative; second-order accurate for second order spatial derivative; predictor-corrector method and Runge-Kutta method for temporal discretization. The resulting numerical scheme is verified using an analytical solitary wave solution to show that the numerical scheme is correct. It is also shown that the numerical solution using predictor-corrector method has better accuracy than numerical solution using Runge-Kutta method.

Keywords : extended Boussinesq equations (Nwogu-Boussinesq), finite difference method, predictor-corrector methods, Runge-Kutta methods.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirobbil'aalamin, Puji syukur ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam penulisan tugas akhir ini, dukungan dan bantuan dari berbagai pihak banyak diterima oleh penulis. Oleh sebab itu, penulis berterima kasih kepada:

1. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus Ketua Jurusan Matematika atas segala motivasi, bimbingan, nasehat, dan kesempatan yang diberikan kepada penulis,
2. Dr. Wuryansari, M. K., M.Si. selaku Pembimbing II sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas dorongan, semangat, dan bimbingan, serta waktu yang telah diberikan selama penyusunan Tugas Akhir ini,
3. Ayah, ibu, dan kakak-kakakku atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan pengertian yang senantiasa diberikan,
4. Drs. Marsudi, M.S. selaku Penasehat Akademik atas segala bimbingan dan pengarahan selama penulis menjalani perkuliahan,
5. Semua dosen jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis,
6. Wenny, mbak Tika, mbak Dini, dan mas Wahyu, yang sudah menjadi teman-teman seperjuangan di KBI Terapan I,
7. Daana Istikusuma dan Teman-teman Matematika angkatan 2003 atas dukungan dan semangatnya, serta
8. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu, yang sudah membantu penulis dalam penyelesaian tugas akhir ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan tugas akhir ini tidak lepas dari kesalahan atau kekurangan. Oleh sebab itu, saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan oleh penulis. Akhir kata, semoga tugas akhir ini bermanfaat bagi para pembaca sekalian.

Malang, Juni 2007

Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	vii
ABSTRACT	ix
KATA PENGANTAR	xi
DAFTAR ISI	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Rumusan Masalah	1
1.3. Batasan Masalah.....	2
1.4. Tujuan.....	2
BAB II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1. Persamaan Diferensial Parsial	3
2.1.1. Persamaan Diferensial Biasa	3
2.1.2. Persamaan Diferensial Parsial	4
2.2. Deret Taylor	5
2.3. Kesalahan Pemotongan	6
2.4. Metode Beda Hingga.....	6
2.4.1. Pendekatan Beda Maju untuk Turunan Pertama	6
2.4.2. Pendekatan Beda Mundur untuk Turunan Pertama	7
2.4.3. Pendekatan Beda Pusat untuk Turunan Pertama	8
2.4.4. Pendekatan Beda Pusat untuk Turunan Kedua	9
2.5. Metode Prediktor-Korektor	9
2.5.1. Prediktor (<i>Adams-Bashforth</i>).....	10
2.5.2. Korektor (<i>Adams-Moulton</i>)	11
2.6. Metode Runge-Kutta Orde Empat.....	12
2.7. Filter Numerik (<i>Numerical Filter</i>)	14
2.8. Persamaan Boussinesq-Nwogu yang Diperluas	16
2.8.1. Persamaan Boussinesq-Nwogu.....	16
2.8.2. Solusi Gelombang Soliton Persamaan Boussinesq-Nwogu	16

BAB III PEMBAHASAN	21
3.1. Model Persamaan Boussinesq-Nwogu satu Dimensi	21
3.2. Skema Numerik Persamaan Boussinesq-Nwogu	22
3.2.1. Diskritisasi Spasial dengan Metode Beda Hingga.....	22
3.2.2. Diskritisasi Temporal dengan Metode Prediktor-Korektor	23
3.2.3. Diskritisasi Temporal dengan Metode Runge-Kutta	26
3.2.4. Matriks Tridiagonal	27
3.2.5. Filter Numerik (<i>Numerical Filter</i>)	30
3.2.6. Algoritma dan Flowchart Skema Numerik Persamaan Boussinesq-Nwogu	31
3.3. Simulasi Perambatan Gelombang Soliton	34
3.3.1. Prediktor-Korektor.....	34
3.3.2. Runge-Kutta Orde Empat	37
3.3.3. Verifikasi Solusi Numerik dengan Solusi Analitik.....	39
 BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	 43
4.1. Kesimpulan.....	43
4.2. Saran	43
 DAFTAR PUSTAKA	 45
LAMPIRAN	47

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Solusi Soliton Persamaan Boussinesq-Nwogu pada beberapa waktu yang berbeda.....	19
Gambar 3.1. Flowchart skema numerik persamaan Boussinesq-Nwogu	33
Gambar 3.2 Solusi Soliton Boussinesq-Nwogu dengan skema Prediktor-Korektor, $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$	35
Gambar 3.3a Perbandingan pengambilan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan amplitudo $0,045$ m.	36
Gambar 3.3b Perbandingan pengambilan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan amplitudo $0,090$ m.	36
Gambar 3.3c Perbandingan pengambilan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan amplitudo $0,135$ m.	36
Gambar 3.4 Solusi Soliton Boussinesq-Nwogu dengan skema Runge-Kutta, $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$	37
Gambar 3.5a Perbandingan pengambilan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan amplitudo $0,045$ m.	38
Gambar 3.5b Perbandingan pengambilan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan amplitudo $0,090$ m.	38

- Gambar 3.5c Perbandingan pengambilan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan amplitudo $0,135$ m 38
- Gambar 3.6 Perbandingan solusi numerik dan solusi analitik dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan Amplitudo $0,045$ m.... 40
- Gambar 3.7 Perbandingan solusi numerik dan solusi analitik dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan Amplitudo $0,090$ m.... 41
- Gambar 3.8 Perbandingan solusi numerik dan solusi analitik dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ di $t = 6$ dengan Amplitudo $0,135$ m.... 41



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1 47

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Banyak fenomena alam yang dapat dimodelkan dalam matematika. Salah satunya adalah fenomena gerakan gelombang air. Dalam ilmu kelautan, gerakan gelombang air sangat penting untuk dipelajari. Kemampuan untuk memprediksi perubahan bentuk gelombang dari perairan dalam ke perairan dangkal sangat diperlukan untuk memahami proses perambatan gelombang laut menuju pantai.

Pada tahun 1872, *Joseph Valentin Boussinesq* menjelaskan gerakan gelombang air dan menurunkan suatu rumus yang dikenal dengan "*type formulations of water wave problem*" atau persamaan Boussinesq. Persamaan Boussinesq tersebut hanya berlaku pada domain dengan dasar yang rata dan dangkal, serta memiliki efek dispersi dan efek nonlinieritas yang lemah (Wei dan Kirby, 1994). Banyak ilmuwan dunia mengembangkan persamaan tersebut sehingga muncul persamaan Boussinesq yang diperluas atau "*Extended Boussinesq-type*". Salah satu hasil perluasan persamaan Boussinesq adalah "*Extended Boussinesq-Nwogu type*" atau persamaan Boussinesq-Nwogu yang diturunkan oleh *Okey G. Nwogu* (1993).

Secara umum persamaan Boussinesq yang diperluas (*Boussinesq-Nwogu*) merupakan persamaan diferensial parsial non-linier yang sulit ditentukan solusi eksaknya. Untuk itu, metode numerik dapat digunakan sebagai alternatif untuk menentukan solusi persamaan Boussinesq-Nwogu tersebut. Salah satu metode yang digunakan adalah metode beda hingga. Berdasarkan orde akurasi metode beda hingga memiliki beberapa tipe, semakin tinggi orde akurasi maka semakin akurat hasil yang didapatkan.

1.2. Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dikemukakan dalam Tugas Akhir ini adalah bagaimana menyelesaikan persamaan Boussinesq-Nwogu dengan metode beda hingga yang dilanjutkan dengan metode Prediktor-Korektor dan metode Runga-Kutta orde empat. Solusi numerik yang diperoleh akan diverifikasi dengan menggunakan salah

satu solusi eksak untuk kasus kedalaman konstan yaitu gelombang soliton yang terdapat pada literatur untuk menunjukkan bahwa solusi tersebut benar. Selain itu ingin diketahui bagaimana perbandingan solusi yang diperoleh dari metode Prediktor-Korektor dengan solusi yang diperoleh dari metode Runge-Kutta orde empat.

1.3. Batasan Masalah

Pada penulisan Tugas Akhir ini, persamaan yang akan diselesaikan adalah persamaan Boussinesq-Nwogu pada kasus satu dimensi.

1.4. Tujuan

Tujuan penulisan Tugas Akhir ini adalah menyelesaikan persamaan Boussinesq-Nwogu dengan metode beda hingga yang dilanjutkan dengan metode Prediktor-Korektor dan metode Runge-Kutta orde empat. Solusi numerik yang diperoleh diverifikasi dengan solusi gelombang soliton. Solusi yang diperoleh dari metode Prediktor-Korektor dibandingkan dengan solusi yang diperoleh dari metode Runge-Kutta orde empat.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini dibahas dasar-dasar teori yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq-Nwogu, antara lain: persamaan diferensial, metode beda hingga, metode Prediktor-Korektor, metode Runge-Kutta, filter numerik (*numerical filter*), dan persamaan Boussinesq-Nwogu beserta solusi eksak gelombang solitonnya.

2.1. Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat satu turunan atau lebih dari suatu fungsi yang tidak diketahui.

Suatu persamaan diferensial dikatakan berorde- n jika turunan tertinggi dalam persamaan tersebut adalah turunan ke- n , sedangkan persamaan diferensial disebut mempunyai derajat k jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut berpangkat k (Glenn, 2005).

Persamaan diferensial dapat dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

2.1.1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara satu fungsi (variabel tak bebas) dengan satu variabel bebas dan turunan dari fungsi tersebut terhadap variabel bebasnya. Variabel y biasa digunakan sebagai variabel tak bebas, sedangkan t atau x biasa digunakan sebagai variabel bebasnya.

Persamaan diferensial biasa linier adalah bentuk persamaan yang di dalamnya hanya terdapat turunan yang berderajat satu dan tidak ada koefisien yang bergantung pada variabel tak bebasnya.

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} + ay = F(x). \quad (2.1)$$

Secara umum persamaan diferensial biasa linier orde n , dalam variabel tak bebas y dan variabel bebas x dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = F(x) \quad (2.2)$$

dengan $a_n \neq 0$.

Jika terdapat koefisien yang bergantung pada variabel tak bebasnya atau turunan di dalam persamaan berderajat lebih dari satu maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial biasa non-linier (Hoffman, 2001).

Contoh:

$$y \frac{dy}{dx} + ay = F(x) \quad (2.3)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + ay = F(x)$$

2.1.2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat hubungan antara variabel bebas, variabel tak bebas, dan turunan parsial dari variabel tak bebas tersebut, di mana variabel tak bebas merupakan fungsi yang tidak diketahui dari variabel-variabel bebas (Strauss, 1992).

Contoh:

$$u_x + u_y = 0, \quad (2.4)$$

dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ dan $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial parsial linier dan persamaan diferensial parsial non-linier. Jika variabel tak bebas u dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara linier (tidak dikalikan atau dipangkatkan) maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial linier.

Contoh:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (2.5)$$

dengan $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ dan $u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Jika variabel tak bebas u dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara dikalikan atau dipangkatkan maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial parsial non-linier (Farlow, 1994).

Contoh:

$$u_x + uu_y = f(x, y), \quad (2.6)$$

dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ dan $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

2.2. Deret Taylor

Deret Taylor menjadi dasar dalam metode numerik. Pada prinsipnya, deret Taylor sangat penting untuk memprediksi nilai suatu fungsi pada suatu titik tertentu. Jika suatu fungsi u dan turunannya kontinu pada interval tertentu yang mengandung x dan nilai u di titik x diberikan maka nilai fungsi di titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x dapat ditentukan dengan menggunakan deret Taylor

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + u'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{u''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{u^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + R_n \quad (2.7)$$

dengan,

$$R_n = \frac{u^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}, \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (2.8)$$

(Chapra dan Canale, 2002).

2.3. Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan akurat jika semua suku dalam deret tersebut diperhitungkan. Dalam kenyataannya hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti hasil penyelesaian analitik. Kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku akhir deret Taylor disebut dengan kesalahan pemotongan.

Pada persamaan (2.7), kesalahan pemotongannya adalah persamaan (2.8) yang menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan mempunyai orde $n+1$ yang biasa dinotasikan $o(\Delta x^{n+1})$ dengan $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Kesalahan pemotongan akan semakin kecil apabila Δx kecil dan suku-suku akhir deret tersebut diperhitungkan (Triatmojo, 2002).

2.4. Metode Beda Hingga

Suatu metode numerik yang memanfaatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunan disebut metode beda hingga. Terdapat empat karakter penting dalam metode beda hingga tersebut, yaitu:

1. Derajat deret
2. Titik di mana turunan tersebut didekati
3. Orde turunan
4. Nilai fungsi yang telah diketahui yang digunakan dalam metode sebagai nilai awal.

Pendekatan turunan dengan menggunakan rumusan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, atau titik tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang biasa dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Ross, 1984).

2.4.1. Pendekatan Beda Maju untuk Turunan Pertama

Misalkan u adalah suatu fungsi dari variabel spasial x dan variabel temporal t , dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ adalah turunan parsial u

terhadap x , maka deret Taylor dari u di titik $x_0 + h$ adalah sebagai berikut:

$$u(x_0 + h, t) = u(x_0, t) + hu_x(x_0, t) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_0, t) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_0, t) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\xi, t), \text{ untuk suatu } x_0 \leq \xi \leq x_0 + h. \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.9), maka diperoleh

$$u_x(x_0, t) = \frac{u(x_0 + h, t) - u(x_0, t)}{h} - h \frac{u_{xx}(\xi, t)}{2}. \quad (2.10)$$

Jika diambil suatu grid r untuk variabel spasial x , grid s untuk variabel temporal t , $h = \Delta x$, dan $u(x = r\Delta x, t = s\Delta t) = u_r^s$ maka persamaan (2.10) menjadi

$$(u_x)_r^s = \frac{u_{r+1}^s - u_r^s}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2}u_{xx}(\xi). \quad (2.11)$$

Jika Δx semakin mengecil, maka

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r+1}^s - u_r^s}{\Delta x}. \quad (2.12)$$

Persamaan (2.12) adalah bentuk pendekatan beda maju untuk turunan pertama dengan kesalahan pemotongan Δx (Sahid, 2004).

2.4.2. Pendekatan Beda Mundur untuk Turunan Pertama

Jika pendekatan beda maju pada sub bab 2.4.1 didapatkan dari ekspansi deret Taylor nilai fungsi u di titik $x_0 + h$, maka ekspansi deret Taylor di titik $x_0 - h$ akan menghasilkan suatu pendekatan beda mundur,

$$u(x_0 - h, t) = u(x_0, t) - hu_x(x_0, t) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_0, t) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(x_0, t) + \frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\xi, t), \text{ untuk suatu } x_0 \leq \xi \leq x_0 + h. \quad (2.13)$$

Berdasarkan persamaan (2.13), maka dapat diperoleh

$$u_x(x_0, t) = \frac{u(x_0, t) - u(x_0 - h, t)}{h} + h \frac{u_{xx}(\xi, t)}{2}. \quad (2.14)$$

Dengan cara seperti pada sub bab 2.4.1, maka didapatkan suatu pendekatan turunan pertama yang dikenal dengan pendekatan beda mundur dengan kesalahan pemotongan berorde Δx , yaitu

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_r^s - u_{r-1}^s}{\Delta x} \quad (2.15)$$

(Sahid, 2004).

2.4.3. Pendekatan Beda Pusat untuk Turunan Pertama

Pendekatan beda pusat terhadap turunan pertama diperoleh dengan cara mengurangkan persamaan (2.9) dengan persamaan (2.13), yaitu

$$u(x_0 + h, t) - u(x_0 - h, t) = 2hu_x(x_0, t) + \frac{h^3}{3}u_{xxx}(\xi, t). \quad (2.16)$$

Dari persamaan (2.16) diperoleh

$$u_x(x_0, t) = \frac{u(x_0 + h, t) - u(x_0 - h, t)}{2h} - \frac{h^2}{3}u_{xxx}(\xi, t). \quad (2.17)$$

Dengan perlakuan seperti sub bab 2.4.1, diperoleh

$$(u_x)_r^s = \frac{u_{r+1}^s - u_{r-1}^s}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3}u_{xxx}(\xi). \quad (2.18)$$

Untuk Δx yang kecil, didapatkan pendekatan beda pusat untuk turunan pertama dengan orde kesalahan pemotongan Δx^2 , yaitu

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r+1}^s - u_{r-1}^s}{2\Delta x}. \quad (2.19)$$

Kesalahan pemotongan suatu pendekatan turunan dengan deret Taylor akan semakin kecil jika suku-suku akhir deret tersebut diperhitungkan. Misalkan 5 suku pertama deret Taylor dalam persamaan (2.9) dan (2.13) diperhitungkan, maka akan didapatkan pendekatan beda pusat untuk turunan pertama dengan orde kesalahan pemotongan Δx^4 , yaitu

$$(u_x)_r^s \approx \frac{u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s}{12\Delta x} \quad (2.20)$$

(Hoffman, 2001).

2.4.4. Pendekatan Beda Pusat untuk Turunan ke Dua

Bila persamaan (2.9) dijumlahkan dengan persamaan (2.13), maka diperoleh

$$u(x_0 + h, t) + u(x_0 - h, t) = 2u(x_0, t) + 2\frac{h^2}{2!}u_{xx}(x_0, t) + 2\frac{h^4}{4!}u_{xxxx}(\xi, t). \quad (2.21)$$

Dari persamaan (2.21) diperoleh

$$u_{xx}(x_0, t) = \frac{u(x_0 + h, t) - 2u(x_0, t) + u(x_0 - h, t)}{h^2} - \frac{h^2}{12}u_{xxxx}(\xi, t). \quad (2.22)$$

Dengan cara seperti sub bab 2.4.1, maka didapatkan pendekatan beda pusat turunan ke dua berikut

$$(u_{xx})_r^s \approx \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2}, \quad (2.23)$$

dengan orde kesalahan pemotongannya adalah Δx^2 (McCuen dan Ayyub, 1996).

2.5. Metode Prediktor-Korektor

Metode Prediktor-Korektor (*Adams-Basforth-Moulton*) merupakan salah satu metode numerik banyak langkah. Metode ini dinamakan metode banyak langkah karena metode ini menggunakan lebih dari satu nilai titik sebelumnya untuk menentukan nilai pendekatan titik berikutnya. Metode ini dapat digunakan untuk mengembangkan keakuratan dalam menentukan solusi numerik suatu turunan. Akan tetapi metode ini tidak mempunyai nilai di titik sebelumnya yang akan digunakan untuk menentukan nilai pendekatan di titik selanjutnya. Pada kasus ini, metode lain (Runge-Kutta, Euler's, dan lain-lain) diperlukan dalam menentukan nilai awal.

Terdapat dua bagian dalam metode ini, yaitu Prediktor dan Korektor. Bagian Prediktor digunakan untuk memprediksi nilai dari suatu fungsi yang tidak diketahui pada titik tertentu. Sedangkan bagian Korektor digunakan untuk mengoreksi atau mengembangkan keakuratan dari hasil yang sudah diprediksi oleh Prediktor (McCuen dan Ayyub, 1996).

Persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad (2.24)$$

dapat diselesaikan dengan metode banyak langkah dengan cara menentukan pendekatan nilai y_{i+1} pada titik x_{i+1} yang diwakili persamaan berikut

$$y_{i+1} = a_{m-1}y_i + a_{m-2}y_{i-1} + \dots + a_0y_{i+1-m} + h[b_m f(x_{i+1}, y_{i+1}) + b_{m-1}f(x_i, y_i) + \dots + b_0f(x_{i+1-m}, y_{i+1-m})], \quad (2.25)$$

dengan m adalah bilangan bulat lebih besar dari 1, $i=m-1, 1, \dots, N-1$, dan nilai awal,

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2, \dots, y_{m-1} = \alpha_{m-1},$$

serta $h = \frac{(b-a)}{N}$.

Jika $b_m = 0$, maka persamaan (2.25) disebut persamaan eksplisit, tapi jika $b_m \neq 0$ maka disebut persamaan implisit (Richard dan Douglas, 1989).

2.5.1. Prediktor (*Adams-Bashforth*)

Metode Prediktor disebut juga sebagai metode eksplisit. Metode ini digunakan untuk memprediksi nilai suatu fungsi pada titik tertentu. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

dapat ditentukan dengan mengekspansi deret Taylor maju dari fungsi y sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + f_i h + \frac{f_i'}{2} h^2 + \frac{f_i''}{6} h^3 + \dots, \quad (2.26)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h \left(f_i + \frac{f_i'}{2} h + \frac{f_i''}{6} h^2 + \dots \right). \quad (2.27)$$

Dengan menggunakan pendekatan beda hingga pada turunan di ruas kanan maka berbagai persamaan eksplisit atau Prediktor (*Adams-Bashforth*) dapat dicari persamaan dan kesalahan pemotongannya (Chapra dan Canale, 2002). Persamaan Prediktor tersebut antara lain:

Adams-Bashforth orde dua,

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] + \frac{5}{12} y'''(\xi) h^2, \quad (2.28)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, dan $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$.

Adams-Bashforth orde tiga,

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})] + \frac{3}{8} y^{(4)}(\xi) h^3, \quad (2.29)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, dan $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$, dan seterusnya.

Jadi, semakin tinggi ordenya maka diperlukan nilai awal yang semakin banyak pula (Richard dan Douglas, 1989).

2.5.2. Korektor (*Adams-Moulton*)

Metode Korektor disebut juga sebagai metode implisit. Metode ini digunakan untuk mengoreksi atau mengembangkan keakuratan pendekatan nilai suatu fungsi pada titik tertentu yang sudah diprediksi atau dicari oleh Prediktor. Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang berbentuk,

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha,$$

dapat ditentukan dengan mengekspansi deret Taylor mundur dari fungsi y sebagai berikut:

$$y_i = y_{i+1} - f_{i+1} h + \frac{f'_{i+1}}{2} h^2 - \frac{f''_{i+1}}{6} h^3 + \dots, \quad (2.30)$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$y_{i+1} = y_i + h \left(f_{i+1} - \frac{f'_{i+1}}{2} h + \frac{f''_{i+1}}{6} h^2 + \dots \right). \quad (2.31)$$

Dengan menggunakan pendekatan beda hingga pada turunan di ruas kanan maka berbagai persamaan implisit atau Korektor (*Adams-Moulton*) dapat dicari persamaan dan kesalahan pemotongannya (Chapra dan Canale, 2002). Persamaan Korektor tersebut antara lain:

Adams-Moulton orde tiga,

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} [5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})] - \frac{1}{24} y^{(4)}(\xi) h^3, \quad (2.32)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$, dan $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$.

Adams-Moulton orde empat,

$$y_0 = \alpha, \quad y_1 = \alpha_1, \quad y_2 = \alpha_2$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24} [9f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 19f(x_i, y_i) - 5f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i-2}, y_{i-2})] - \frac{19}{720} y^{(5)}(\xi) h^4, \quad (2.33)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, N-1$ dan $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}$, dan seterusnya.

Seperti pada persamaan Prediktor semakin tinggi ordenya maka diperlukan nilai awal yang semakin banyak pula (Richard dan Douglas, 1989).

2.6. Metode Runge-Kutta Orde Empat

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa yang berbentuk persamaan (2.29),

$$y' = f(x, y) \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

digunakan metode yang memiliki bentuk umum,

nilai baru = nilai lama + kemiringan (*slope*) \times ukuran langkah,
atau secara matematis,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h . \quad (2.34)$$

Berdasarkan persamaan (2.34) di atas, perkiraan kemiringan dari ϕ digunakan untuk mengekstrapolasi dari nilai lama y_i ke nilai baru y_{i+1} sepanjang interval h (Chapra dan Canale, 2002).

Metode Runge-Kutta yang sering digunakan adalah Runge-Kutta orde 4 karena hasil yang diperoleh lebih akurat daripada metode Runge-Kutta berorde di bawahnya.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial (2.24) maka langkah yang digunakan adalah dengan menentukan pendekatan nilai di akhir interval, yang dinotasikan y_{i+1} , berdasarkan nilai awal y_i di titik x_i pada awal interval dengan panjang interval adalah $\Delta x = h$.

Adapun langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Hitung kemiringan (*slope*) K_1 di (x_i, y_i) menggunakan $f(x, y)$,

$$K_1 = f(x_i, y_i) \quad (2.35)$$

2. Mencari hasil pendekatan y di titik tengah interval menggunakan

$$y_i, f(x_i, y_i), \text{ dan } \frac{h}{2},$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) \quad (2.36)$$

3. Hitung *slope* di titik tersebut;

$$K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_1) \quad (2.37)$$

4. Perbaiki hasil pendekatan di titik tersebut dengan menggunakan

$$y_i, K_2, \text{ dan } \frac{h}{2},$$

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} K_2 \quad (2.38)$$

5. Perbaiki *slope* di titik tersebut menggunakan $y_{i+\frac{1}{2}}$, diperoleh K_3 ,

$$K_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_2) \quad (2.39)$$

6. Mencari hasil pendekatan y di akhir interval (y_{i+1}) menggunakan $y_i, K_3, \text{ dan } h$,

$$y_{i+1} = y_i + hK_3 \quad (2.40)$$

7. Hitung *slope* (K_4) di akhir interval,

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \quad (2.41)$$

8. Dengan menggunakan *slope* K_1, K_2, K_3, K_4 , maka hasil pendekatan nilai fungsi di akhir interval adalah:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (2.42)$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa pada persamaan (2.24) dapat digunakan metode Runge-Kutta orde empat dengan bentuk umumnya adalah persamaan (2.42), yaitu

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

dengan, $K_1 = f(x_i, y_i)$

$$K_2 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_1)$$

$$K_3 = f(x_i + 0.5h, y_i + 0.5hK_2)$$

$$K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3)$$

Metode ini akan digunakan untuk menentukan nilai awal pada metode banyak langkah, khususnya metode Prediktor-Korektor (McCuen dan Ayyub, 1996).

2.7. Filter Numerik (*Numerical Filter*)

Untuk suatu model numerik nonlinier, interaksi nonlinier tersebut akan muncul seiring dengan jalannya program atau proses evolusi terjadi. Interaksi nonlinier tersebut dapat menghasilkan suatu gelombang dengan panjang gelombang yang sangat pendek (diasumsikan panjang gelombang tersebut adalah dua kali ukuran grid yang digunakan). Panjang gelombang tersebut akan membesar dengan cepat, sehingga dapat menyebabkan ledakan osilasi (*blowup*) dalam model numerik tersebut.

Adapun cara yang efektif untuk mengeliminasi gelombang pendek tersebut adalah dengan memberikan filter numerik (*numerical filter*) dalam model numerik tersebut. Pada tahun 1970 Shapiro menurunkan suatu filter numerik (*numerical filter*) untuk

kasus persamaan nonlinier berdimensi-1 dengan bentuk umum sebagai berikut:

$$Z_j^* = a_0 Z_j + a_1 (Z_{j+1} + Z_{j-1}) + \dots + a_N (Z_{j+N} + Z_{j-N}) \quad (2.43)$$

dengan $Z = \{\eta, u\}$, $j, j \pm 1, j \pm 2, \dots, j \pm N$ adalah indeks grid nilai yang akan dievaluasi, dan a_0, a_1, \dots, a_N koefisien karakteristik filter.

Seperti pada skema numerik pada umumnya, filter numerik (*numerical filter*) memiliki beberapa tipe berdasarkan orde akurasi. Salah satu tipe filter numerik adalah filter numerik berorde 4. Filter numerik tersebut menggunakan 9 nilai asli yang saling berdekatan sebagai berikut:

$$Z_j^* = \frac{1}{256} [186Z_j + 56(Z_{j+1} + Z_{j-1}) - 28(Z_{j+2} + Z_{j-2}) + 8(Z_{j+3} + Z_{j-3}) - (Z_{j+4} + Z_{j-4})] \quad (2.44)$$

dengan $Z = \{\eta, u\}$ dan Z^* adalah nilai baru $\{\eta, u\}$.

Persamaan (2.44) hanya berlaku untuk nilai $j=5 \dots n-4$, dengan n adalah jumlah grid pada domain spasial. oleh karena itu, untuk nilai $j = 2, 3, 4$, dan $n-3, n-2, n-1$ didefinisikan sebagai berikut:

$j=2, N-1$

$$Z_j^* = \frac{1}{4} [2Z_j + (Z_{j+1} + Z_{j-1})] \quad (2.45)$$

$j=3, N-2$

$$Z_j^* = \frac{1}{16} [10Z_j + 4(Z_{j+1} + Z_{j-1}) - (Z_{j+2} + Z_{j-2})] \quad (2.46)$$

$j=4, N-3$

$$Z_j^* = \frac{1}{64} [44Z_j + 15(Z_{j+1} + Z_{j-1}) - 6(Z_{j+2} + Z_{j-2}) + (Z_{j+3} + Z_{j-3})]. \quad (2.47)$$

(Wei dan Kirby, 1998).

2.8. Persamaan Boussinesq yang Diperluas

2.8.1. Persamaan Boussinesq-Nwogu

Persamaan Boussinesq-Nwogu merupakan salah satu persamaan Boussinesq yang diperluas yang diturunkan oleh *Okey G. Nwogu* (1993). *Nwogu* (1993) menurunkan persamaan tersebut dengan mengasumsikan bahwa tekanan pada permukaan fluida tidak ada dan gaya gesekan diabaikan. Model persamaan Boussinesq-Nwogu satu dimensi adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((h+\eta)u) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6} \right) h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.48a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 \right) h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + (\alpha) h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (2.48b)$$

dengan u adalah kecepatan gelombang dengan arah x dalam waktu t , η adalah koordinat permukaan bebas (elevasi) dengan arah x dalam waktu t , h adalah kedalaman, α merupakan parameter dispersi, g adalah percepatan gravitasi.

Persamaan Boussinesq-Nwogu tersebut tidak hanya berlaku pada dasar air yang rata dan dangkal. Selain itu Persamaan Boussinesq-Nwogu memiliki efek dispersi orde tinggi sehingga bisa menggambarkan gerakan gelombang air secara akurat. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh *Nwogu* (1993) relasi dispersi persamaan tersebut optimal untuk nilai $\alpha = -0,531$ (Walkley, 1999).

2.8.2. Solusi Gelombang Soliton Persamaan Boussinesq-Nwogu

Secara umum solusi eksak persamaan diferensial parsial nonlinier termasuk persamaan Boussinesq-Nwogu sulit untuk dicari atau bahkan tidak dapat dicari. Tetapi beberapa solusi tertentu

mungkin bisa ditentukan, dimana solusi-solusi ini biasanya merupakan karakteristik dari fenomena tertentu. Solusi tersebut dapat dieksploitasi untuk alasan teori sehingga dapat digunakan sebagai pembanding dari solusi numerik untuk menguji akurasi suatu metode numerik yang digunakan. Adapun solusi karakteristik persamaan Boussinesq-Nwogu adalah solusi gelombang soliton. Gelombang soliton adalah "gundukan" gelombang dengan energi berhingga, stabil, menempati ruang terbatas dan tidak menyebar. Dengan kata lain gelombang soliton adalah gelombang dengan profil tertentu dapat merambat dalam rentang waktu relatif lama tanpa mengalami perubahan bentuk dengan kecepatan tertentu (Suryanto, 2004).

Pada tahun 1982 *Schember* mendeskripsikan suatu metode pendekatan analitik solusi soliton persamaan Boussinesq. Dengan langkah yang sama, *G. Wei* dan *James T. Kirby* menurunkan solusi soliton persamaan Boussinesq-Nwogu.

Dengan menganggap bahwa kedalaman air (h) adalah konstan, maka persamaan (2.43) dapat dinyatakan sebagai,

$$\eta_t + hu_x + (\eta u)_x + \left(\beta + \frac{1}{3}\right)h^3 u_{xxx} = 0 \quad (2.49a)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x + \beta h^2 u_{xxt} = 0, \quad (2.49b)$$

dengan,

$$\beta = \frac{\alpha^2}{2} + \alpha.$$

Sebagai ganti kecepatan u , maka digunakan potensial kecepatan ϕ (sehingga $u = \phi_x$) sebagai suatu variabel tak bebas.

Dengan demikian persamaan (2.44) menjadi,

$$\eta_t + h\phi_{xx} + (\eta\phi_x)_x + \left(\beta + \frac{1}{3}\right)h^3 \phi_{xxx} = 0 \quad (2.50a)$$

$$\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x)^2 + g\eta + \beta h^2 \phi_{xxt} = 0. \quad (2.50b)$$

Dengan mensubstitusikan η pada persamaan (2.50b) ke persamaan (2.50a), menghasilkan

$$-\phi_{tt} + gh\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_{xt} - \phi_t\phi_{xx} + gh^3\left(\beta + \frac{1}{3}\right)\phi_{xxxx} - \beta h^2\phi_{xxt} = 0. \quad (2.51)$$

Persamaan (2.51) ditransformasikan ke persamaan diferensial biasa dengan menganggap $u(x,t) = \phi_x(x - Ct) = \phi'(\xi)$ dengan $\xi = x - Ct$ (sehingga $\phi_x = \phi'$ dan $\phi_t = -C\phi'$),

$$(gh - C^2)\phi'' + 3C\phi'\phi'' + \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh^3 - \beta h^2 C^2 \right] \phi'''' = 0. \quad (2.52)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (2.52) maka diperoleh,

$$(gh - C^2)\phi' + \frac{3}{2}C(\phi')^2 + \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh^3 - \beta h^2 C^2 \right] \phi'' = G_1. \quad (2.53)$$

Jika persamaan (2.53) dikalikan dengan $2\phi''$ dan hasilnya diintegrasikan maka didapatkan,

$$(gh - C^2)(\phi')^2 + C(\phi')^3 + \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh^3 - \beta h^2 C^2 \right] (\phi'')^2 = 2G_1\phi' + G_2. \quad (2.54)$$

Selanjutnya diasumsikan bahwa

$$\phi' = A \sec h^2(B\xi). \quad (2.55)$$

Dengan asumsi tersebut dan persamaan (2.49) dapat ditunjukkan bahwa,

$$A = \frac{C^2 - gh}{C} \quad (2.56)$$

$$B^2 = \frac{C^2 - gh}{4 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh^3 - \beta h^2 C^2 \right]}. \quad (2.57)$$

Dari persamaan (2.50b), diperoleh

$$\eta = A_1 \sec h^2(B\xi) + A_2 \sec h^4(B\xi) \quad (2.58)$$

dengan,

$$A_1 = \frac{C^2 - gh}{3 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh - \beta C^2 \right]} h \quad (2.59)$$

$$A_2 = - \frac{(C^2 - gh)^2 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh - 2\beta C^2 \right]}{2ghC^2 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh - \beta C^2 \right]} h. \quad (2.60)$$

Untuk kondisi batas $\eta = a$ (amplitudo) di $\xi = 0$, maka

$$\frac{C^2 - gh}{3\left[\left(\beta + \frac{1}{3}\right)gh - \beta C^2\right]} h - \frac{(C^2 - gh)^2 \left[\left(\beta + \frac{1}{3}\right)gh - 2\beta C^2\right]}{2ghC^2 \left[\left(\beta + \frac{1}{3}\right)gh - \beta C^2\right]} h = a. \quad (2.61)$$

Dengan menyederhanakan persamaan (2.61), diperoleh,

$$2\beta \left(\frac{C^2}{gh}\right)^3 - \left(3\beta + \frac{1}{3} + 2\beta\varepsilon\right) \left(\frac{C^2}{gh}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\beta + \frac{1}{3}\right) \left(\frac{C^2}{gh}\right) + \left(\beta + \frac{1}{3}\right) = 0. \quad (2.62)$$

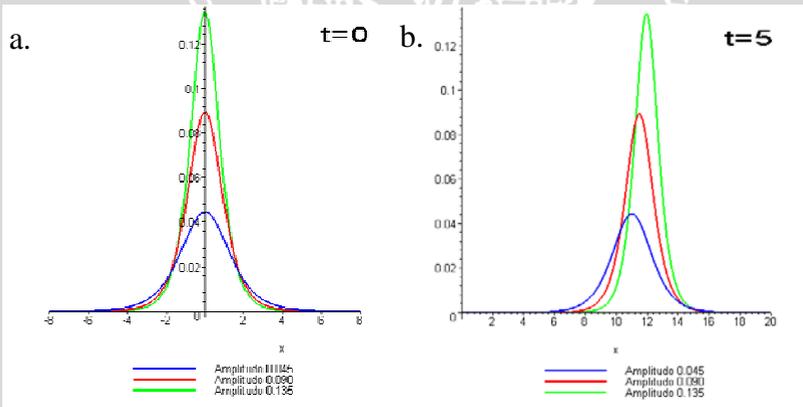
Jadi, kecepatan horisontal u dan elevasi η gelombang soliton persamaan Boussinesq-Nwogu adalah,

$$u = A \operatorname{sech}^2(B(x - Ct)) \quad (2.63)$$

$$\eta = A_1 \operatorname{sech}^2(B(x - Ct)) + A_2 \operatorname{sech}^4(B(x - Ct)), \quad (2.64)$$

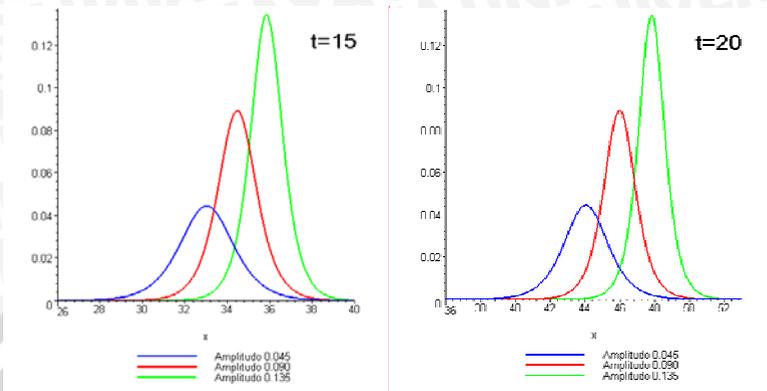
dan nilai C tergantung pada rasio amplitudo a dan kedalaman air h ($\varepsilon = a/h$), yang memenuhi persamaan (2.62) (Wei dan Kirby, 1994).

Berikut adalah gambar solusi gelombang soliton persamaan Boussinesq-Nwogu.



c.

d.



Gambar 2.1 Solusi soliton persamaan Boussinesq-Nwogu pada beberapa waktu yang berbeda.

Pada Gambar 2.1 dapat ditunjukkan bahwa posisi gelombang soliton adalah berbeda untuk waktu yang berbeda, akan tetapi bentuk gelombang tetap sama untuk tiap waktu. Hal ini dapat disimpulkan bahwa gelombang soliton tersebut bergerak dengan kecepatan tertentu tanpa mengalami perubahan bentuk. Dapat ditunjukkan pula bahwa semakin besar amplitudo gelombang maka kecepatan gelombang soliton akan semakin besar.

BAB III PEMBAHASAN

Persamaan Boussinesq-Nwogu merupakan persamaan yang menjelaskan tentang gelombang air. Persamaan Boussinesq-Nwogu merupakan persamaan diferensial parsial nonlinier yang secara umum sulit ditentukan solusi eksaknya. Dalam bab ini akan dijelaskan bagaimana menyelesaikan persamaan Boussinesq-Nwogu dengan metode beda hingga, Prediktor-Korektor, dan Runge-Kutta.

3.1. Model Persamaan Boussinesq-Nwogu Satu Dimensi

Persamaan Boussinesq-Nwogu 1-dimensi didefinisikan pada persamaan (2.48), atau jika turunan terhadap variabel spasial x dipindah ke ruas kanan sehingga bentuk persamaan menjadi:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left((h + \eta)u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6} \right) h^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h^2 \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right) \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(u + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 \right) h^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\alpha \right) h \frac{\partial^2 (hu)}{\partial x^2} \right) = -u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (3.1b)$$

dengan u adalah kecepatan gelombang dengan arah x dalam waktu t , η adalah koordinat permukaan bebas (elevasi) dengan arah x dalam waktu t , h adalah kedalaman, α merupakan parameter dispersi, dan g adalah percepatan gravitasi.

Jika $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, dan $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, maka persamaan (3.1a) dan persamaan (3.1b) dapat ditulis sebagai,

$$\eta_t = -\left((h + \eta)u \right)_x - \left[\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{6} \right) h^3 u_{xx} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h^2 (hu)_{xx} \right]_x \quad (3.2a)$$

$$\left(u + h \left[\left(\frac{1}{2}\alpha^2 \right) hu_{xx} + \left(\alpha \right) (hu)_{xx} \right] \right)_t = -uu_x - g\eta_x. \quad (3.2b)$$

Jika dimisalkan, $U(u) = u + h \left[\left(\frac{1}{2} \alpha^2 \right) h u_{xx} + (\alpha) (hu)_{xx} \right]$ (3.3a)

$$w = (h + \eta)u \quad (3.3b)$$

$$v = \left(\frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{6} \right) h^3 u_{xx} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h^2 (hu)_{xx} \quad (3.3c)$$

$$\begin{aligned} E(\eta, u) &= -\left((h + \eta)u \right)_x - \left[\left(\frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{6} \right) h^3 u_{xx} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h^2 (hu)_{xx} \right]_x \\ &= -w_x - v_x \end{aligned} \quad (3.3d)$$

$$F(\eta, u) = -g\eta_x - uu_x, \quad (3.3e)$$

maka persamaan (3.2a) dan (3.2b) dapat ditulis sebagai berikut

$$\eta_t = E(\eta, u) \quad (3.4a)$$

$$\left[U(u) \right]_t = F(\eta, u) \quad (3.4b)$$

dengan syarat batas $u(n, t) = 0$, dan n adalah grid di akhir domain spasial x .

3.2. Skema Numerik Persamaan Boussinesq-Nwogu

Persamaan (3.4) akan didiskritkan terhadap spasial dan temporal.

3.2.1. Diskritisasi Spasial dengan Metode Beda Hingga

Untuk melakukan diskritisasi domain spasial dengan metode beda hingga, nilai turunan pertama u akan didekati dengan beda hingga orde empat dan nilai turunan ke dua u akan didekati dengan beda hingga orde dua, sebagai berikut:

$$\left(u_x \right)_r^s = \frac{u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s}{12\Delta x} \quad (3.5)$$

$$\left(u_{xx} \right)_r^s = \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2}, \quad (3.6)$$

dengan r dan s menyatakan titik diskritisasi berturut-turut terhadap x dan t .

Persamaan beda hingga (3.5) dan (3.6) disubstitusikan ke persamaan (3.3a)-(3.3e) menghasilkan,

$$U(u)_r^s = u_r^s + h_r \left[\left(\frac{1}{2} \alpha^2 \right) h_r \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2} + (\alpha) \frac{(hu)_{r+1}^s - 2(hu)_r^s + (hu)_{r-1}^s}{\Delta x^2} \right] \quad (3.7a)$$

$$E(\eta, u) = -\frac{w_{r-2}^s - 8w_{r-1}^s + 8w_{r+1}^s - w_{r+2}^s}{12\Delta x} - \frac{v_{r-2}^s - 8v_{r-1}^s + 8v_{r+1}^s - v_{r+2}^s}{12\Delta x} \\ = -\frac{1}{12\Delta x} \left[\left(w_{r-2}^s - 8w_{r-1}^s + 8w_{r+1}^s - w_{r+2}^s \right) + \left(v_{r-2}^s - 8v_{r-1}^s + 8v_{r+1}^s - v_{r+2}^s \right) \right], \quad (3.7b)$$

$$F(\eta, u) = -g \frac{\eta_{r-2}^s - 8\eta_{r-1}^s + 8\eta_{r+1}^s - \eta_{r+2}^s}{12\Delta x} - u_r^s \frac{u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s}{12\Delta x} \\ = -\frac{1}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^s - 8\eta_{r-1}^s + 8\eta_{r+1}^s - \eta_{r+2}^s \right) + u_r^s \left(u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s \right) \right). \quad (3.7c)$$

dengan w dan v adalah

$$v_r^s = \left(\frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{1}{6} \right) h_r^3 \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2} + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) h_r^2 \frac{(hu)_{r+1}^s - 2(hu)_r^s + (hu)_{r-1}^s}{\Delta x^2} \quad (3.7d)$$

$$w_r^s = \left(h_r + \eta_r^s \right) u_r^s \quad (3.7e)$$

Dan dengan mensubstitusikan persamaan (3.7b) ke persamaan (3.4a) dan persamaan (3.7c) ke persamaan (3.4b) diperoleh berturut-turut,

$$\eta_t = -\frac{1}{12\Delta x} \left[\left(w_{r-2}^s - 8w_{r-1}^s + 8w_{r+1}^s - w_{r+2}^s \right) + \left(v_{r-2}^s - 8v_{r-1}^s + 8v_{r+1}^s - v_{r+2}^s \right) \right], \quad (3.8a)$$

$$[U(u)]_t = -\frac{1}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^s - 8\eta_{r-1}^s + 8\eta_{r+1}^s - \eta_{r+2}^s \right) + u_r^s \left(u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s \right) \right), \quad (3.8b)$$

Dari uraian di atas, telah didapatkan diskritisasi terhadap spasial yaitu persamaan (3.8a) dan (3.8b) yang akan digunakan dalam mendiskritkan persamaan Boussinesq-Nwogu terhadap variabel temporal.

3.2.2. Diskritisasi Temporal dengan Metode Prediktor-Korektor

Dengan melakukan pendekatan beda hingga untuk turunan spasial, persamaan Boussinesq-Nwogu direduksi menjadi sistem persamaan diferensial biasa. Sistem persamaan tersebut akan diselesaikan dengan Prediktor (*Adams-Bashforth*) orde tiga, dengan

skema umum persamaan (2.29) dan Korektor (*Adams-Moulton*) orde empat, dengan skema umum persamaan (2.33).

Secara khusus metode ini akan digunakan untuk menyelesaikan persamaan (3.4a) dan (3.4b), sehingga diperoleh skema Prediktor (*Adams-Bashforth*),

$$\eta_r^{*s+1} = \eta_r^s + \frac{\Delta t}{12} \left[23E(\eta^s, u^s) - 16E(\eta^{s-1}, u^{s-1}) + 5E(\eta^{s-2}, u^{s-2}) \right] \quad (3.9a)$$

$$U_r^{*s+1} = U_r^s + \frac{\Delta t}{12} \left[23F(\eta^s, u^s) - 16F(\eta^{s-1}, u^{s-1}) + 5F(\eta^{s-2}, u^{s-2}) \right], \quad (3.9b)$$

Persamaan (3.7b) disubstitusikan ke persamaan (3.9a) menghasilkan,

$$\begin{aligned} \eta_r^{*s+1} = & \eta_r^s + \frac{\Delta t}{12} \left(\left(-\frac{23}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^s - 8w_{r-1}^s + 8w_{r+1}^s - w_{r+2}^s \right) + \left(v_{r-2}^s - 8v_{r-1}^s + 8v_{r+1}^s - v_{r+2}^s \right) \right] \right. \\ & + \left(\frac{16}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^{s-1} - 8w_{r-1}^{s-1} + 8w_{r+1}^{s-1} - w_{r+2}^{s-1} \right) + \left(v_{r-2}^{s-1} - 8v_{r-1}^{s-1} + 8v_{r+1}^{s-1} - v_{r+2}^{s-1} \right) \right] \\ & \left. - \left(\frac{5}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^{s-2} - 8w_{r-1}^{s-2} + 8w_{r+1}^{s-2} - w_{r+2}^{s-2} \right) + \left(v_{r-2}^{s-2} - 8v_{r-1}^{s-2} + 8v_{r+1}^{s-2} - v_{r+2}^{s-2} \right) \right] \right). \quad (3.10a) \end{aligned}$$

Persamaan di atas, merupakan persamaan Prediktor, yang akan memprediksi nilai fungsi η pada grid $s+1$.

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.7a) dan (3.7c) ke persamaan (3.9b) menghasilkan,

$$\begin{aligned} U_r^{*s+1} = & u_r^s + h_r \left[\left(\frac{1}{2} \alpha^2 \right) h_r \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2} + (\alpha) \frac{(hu)_{r+1}^s - 2(hu)_r^s + (hu)_{r-1}^s}{\Delta x^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{12} \left(-\frac{23}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^s - 8\eta_{r-1}^s + 8\eta_{r+1}^s - \eta_{r+2}^s \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + u_r^s \left(u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s \right) \right) \right) \\ & + \frac{16}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^{s-1} - 8\eta_{r-1}^{s-1} + 8\eta_{r+1}^{s-1} - \eta_{r+2}^{s-1} \right) \right. \\ & \left. + u_r^{s-1} \left(u_{r-2}^{s-1} - 8u_{r-1}^{s-1} + 8u_{r+1}^{s-1} - u_{r+2}^{s-1} \right) \right) \\ & - \frac{5}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^{s-2} - 8\eta_{r-1}^{s-2} + 8\eta_{r+1}^{s-2} - \eta_{r+2}^{s-2} \right) \right. \\ & \left. + u_r^{s-2} \left(u_{r-2}^{s-2} - 8u_{r-1}^{s-2} + 8u_{r+1}^{s-2} - u_{r+2}^{s-2} \right) \right). \quad (3.10b) \end{aligned}$$

Persamaan di atas merupakan persamaan Prediktor, yang akan memprediksi nilai fungsi $U(u)$ pada grid $s+1$.

Setelah diprediksi nilai η dan $U(u)$, selanjutnya nilai tersebut akan dievaluasi dengan persamaan Korektor. Persamaan Korektor (*Adams-Moulton*) adalah

$$\eta_r^{s+1} = \eta_r^s + \frac{\Delta t}{24} \left[9E(\eta^{*s+1}, u^{*s+1}) + 19E(\eta^s, u^s) - 5E(\eta^{s-1}, u^{s-1}) + E(\eta^{s-2}, u^{s-2}) \right] \quad (3.11a)$$

$$U_r^{s+1} = U_r^s + \frac{\Delta t}{24} \left[9F(\eta^{*s+1}, u^{*s+1}) + 19F(\eta^s, u^s) - 5F(\eta^{s-1}, u^{s-1}) + F(\eta^{s-2}, u^{s-2}) \right] \quad (3.11b)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.7b) ke persamaan (3.11a), diperoleh persamaan berikut,

$$\begin{aligned} \eta_r^{s+1} = & \eta_r^s + \frac{\Delta t}{24} \left(\left(\frac{9}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^{*s+1} - 8w_{r-1}^{*s+1} + 8w_{r+1}^{*s+1} - w_{r+2}^{*s+1} \right) + \left(v_{r-2}^{*s+1} - 8v_{r-1}^{*s+1} + 8v_{r+1}^{*s+1} - v_{r+2}^{*s+1} \right) \right] \right. \\ & - \left(\frac{19}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^s - 8w_{r-1}^s + 8w_{r+1}^s - w_{r+2}^s \right) + \left(v_{r-2}^s - 8v_{r-1}^s + 8v_{r+1}^s - v_{r+2}^s \right) \right] \\ & + \left(\frac{5}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^{s-1} - 8w_{r-1}^{s-1} + 8w_{r+1}^{s-1} - w_{r+2}^{s-1} \right) + \left(v_{r-2}^{s-1} - 8v_{r-1}^{s-1} + 8v_{r+1}^{s-1} - v_{r+2}^{s-1} \right) \right] \\ & \left. - \left(\frac{1}{12\Delta x} \right) \left[\left(w_{r-2}^{s-2} - 8w_{r-1}^{s-2} + 8w_{r+1}^{s-2} - w_{r+2}^{s-2} \right) + \left(v_{r-2}^{s-2} - 8v_{r-1}^{s-2} + 8v_{r+1}^{s-2} - v_{r+2}^{s-2} \right) \right] \right). \quad (3.12a) \end{aligned}$$

Dan dengan mensubstitusikan persamaan (3.7c) ke persamaan (3.11b), diperoleh persamaan berikut

$$\begin{aligned} U_r^{s+1} = & U_r^s + h_r \left[\left(\frac{1}{2} \alpha^2 \right) h_r \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2} + (\alpha) \frac{(hu)_{r+1}^s - 2(hu)_r^s + (hu)_{r-1}^s}{\Delta x^2} \right] \\ & + \frac{\Delta t}{24} \left(-\frac{9}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^{*s+1} - 8\eta_{r-1}^{*s+1} + 8\eta_{r+1}^{*s+1} - \eta_{r+2}^{*s+1} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + u_r^{*s+1} \left(u_{r-2}^{*s+1} - 8u_{r-1}^{*s+1} + 8u_{r+1}^{*s+1} - u_{r+2}^{*s+1} \right) \right) \right. \\ & - \frac{19}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^s - 8\eta_{r-1}^s + 8\eta_{r+1}^s - \eta_{r+2}^s \right) \right. \\ & \left. \left. + u_r^s \left(u_{r-2}^s - 8u_{r-1}^s + 8u_{r+1}^s - u_{r+2}^s \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^{s-1} - 8\eta_{r-1}^{s-1} + 8\eta_{r+1}^{s-1} - \eta_{r+2}^{s-1} \right) \right. \\
& \quad \left. + u_r^{s-1} \left(u_{r-2}^{s-1} - 8u_{r-1}^{s-1} + 8u_{r+1}^{s-1} - u_{r+2}^{s-1} \right) \right) \\
& - \frac{1}{12\Delta x} \left(g \left(\eta_{r-2}^{s-2} - 8\eta_{r-1}^{s-2} + 8\eta_{r+1}^{s-2} - \eta_{r+2}^{s-2} \right) \right. \\
& \quad \left. + u_r^{s-2} \left(u_{r-2}^{s-2} - 8u_{r-1}^{s-2} + 8u_{r+1}^{s-2} - u_{r+2}^{s-2} \right) \right) \Bigg), \quad (3.12b)
\end{aligned}$$

Skema (3.10a) dan (3.10b) merupakan skema Prediktor yang akan memprediksi nilai η dan U pada grid $s+1$, sedangkan skema (3.12a) dan (3.12b) merupakan skema Korektor yang akan mengkoreksi nilai η dan U pada grid $s+1$ yang sudah diprediksi skema Prediktor.

Skema Prediktor-Korektor dapat diaplikasikan apabila nilai η dan U pada grid $s, s-1, s-2$ untuk semua nilai r diketahui. Untuk itu skema Prediktor-Korektor memerlukan skema lain untuk mencari nilai η dan U di semua r pada grid $s, s-1, s-2$.

3.2.3. Diskritisasi Temporal dengan Metode Runge-Kutta

Karena skema Prediktor-Korektor hanya bisa menghitung nilai η dan U pada grid $s = 4, 5, 6, \dots, N$ dengan syarat nilai η dan U pada grid $s = 1, 2, 3$ diketahui, maka untuk mencari nilai η dan U pada grid s tersebut diperlukan skema lain yaitu skema Runge-Kutta orde empat sebagai berikut:

$$\eta_r^{s+1} = \eta_r^s + \frac{k_{1E} + 2k_{2E} + 2k_{3E} + k_{4E}}{6} \quad (3.13a)$$

$$U_r^{s+1} = U_r^s + \frac{k_{1F} + 2k_{2F} + 2k_{3F} + k_{4F}}{6} \quad (3.13b)$$

dengan,

$$K_{1E} = \Delta t E(\eta^s, u^s)$$

$$K_{1F} = \Delta t F(\eta^s, u^s)$$

$$K_{2E} = \Delta t E\left(\eta^s + \frac{1}{2}k_1, u^s + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$K_{2F} = \Delta t F\left(\eta^s + \frac{1}{2}k_1, u^s + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$K_{3E} = \Delta t E\left(\eta^s + \frac{1}{2}k_2, u^s + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$K_{3F} = \Delta t F\left(\eta^s + \frac{1}{2}k_2, u^s + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$K_{4E} = \Delta t E(\eta^s + k_3, u^s + k_3)$$

$$K_{4F} = \Delta t F(\eta^s + k_3, u^s + k_3)$$

Dari skema Runge-Kutta orde empat didapatkan nilai η dan $U(u)$ pada grid $s=1,2,3$ yang akan digunakan sebagai nilai awal pada skema Prediktor-Korektor. Sehingga Persamaan Boussinesq-Nwogu dapat diselesaikan dengan skema Prediktor-Korektor. Akan tetapi baik skema Prediktor-Korektor maupun skema Runge-Kutta hanya bisa mencari nilai η dan $U(u)$, sedangkan nilai u dari $U(u)$ belum diketahui. Oleh karena itu untuk mencari nilai u dari $U(u)$ dapat dilakukan dengan menggunakan metode iterasi.

3.2.4. Matriks Tridiagonal

Didefinisikan $U(u)$ persamaan (3.7a) pada grid ke- s sebagai berikut:

$$U^s(u) = u_r^s + h_r \left[\left(\frac{1}{2}\alpha^2\right) h_r \frac{u_{r+1}^s - 2u_r^s + u_{r-1}^s}{\Delta x^2} + (\alpha) \frac{(hu)_{r+1}^s - 2(hu)_r^s + (hu)_{r-1}^s}{\Delta x^2} \right]$$

Dari persamaan di atas, untuk menentukan nilai u dari $U(u)$ dapat dilakukan beberapa iterasi. Iterasi yang digunakan adalah dengan mengambil grid s sebarang dan $1 \leq r \leq n$.

$r=1$:

$$U_1^s = u_1^s + h_1 \left[\left(\frac{1}{2}\alpha^2\right) h_1 \frac{u_2^s - 2u_1^s + u_0^s}{(\Delta x)^2} + (\alpha) \frac{(hu)_2^s - 2(hu)_1^s + (hu)_0^s}{(\Delta x)^2} \right]$$

$r=2$:

$$U_2^s = u_2^s + h_2 \left[\left(\frac{1}{2}\alpha^2\right) h_2 \frac{u_3^s - 2u_2^s + u_1^s}{(\Delta x)^2} + (\alpha) \frac{(hu)_3^s - 2(hu)_2^s + (hu)_1^s}{(\Delta x)^2} \right]$$

∴
r=n-2:

$$U_{n-2}^s = u_{n-2}^s + h_{n-2} \left[\frac{1}{2} \alpha^2 h_{n-2} \frac{u_{n-1}^s - 2u_{n-2}^s + u_{n-3}^s}{(\Delta x)^2} + (\alpha) \frac{(hu)_{n-1}^s - 2(hu)_{n-2}^s + (hu)_{n-3}^s}{(\Delta x)^2} \right]$$

r=n-1:

$$U_{n-1}^s = u_{n-1}^s + h_{n-1} \left[\frac{1}{2} \alpha^2 h_{n-1} \frac{u_n^s - 2u_{n-1}^s + u_{n-2}^s}{(\Delta x)^2} + (\alpha) \frac{(hu)_n^s - 2(hu)_{n-1}^s + (hu)_{n-2}^s}{(\Delta x)^2} \right]$$

r=n:

$$U_n^s = u_n^s + h_n \left[\frac{1}{2} \alpha^2 h_n \frac{u_{n+1}^s - 2u_n^s + u_{n-1}^s}{(\Delta x)^2} + (\alpha) \frac{(hu)_{n+1}^s - 2(hu)_n^s + (hu)_{n-1}^s}{(\Delta x)^2} \right]$$

Dari uraian di atas untuk grid s sebarang dan $1 \leq r \leq n$ didapatkan:

r=1:

$$U_1^s = \left(\frac{\alpha^2 h_1^2 + 2\alpha h_1 h_0}{2(\Delta x)^2} \right) u_0^s + \left(1 - \frac{\alpha^2 h_1^2 + 2\alpha h_1^2}{(\Delta x)^2} \right) u_1^s + \left(\frac{\alpha^2 h_1^2 + 2\alpha h_1 h_2}{2(\Delta x)^2} \right) u_2^s$$

r=2:

$$U_2^s = \left(\frac{\alpha^2 h_2^2 + 2\alpha h_2 h_1}{2(\Delta x)^2} \right) u_1^s + \left(1 - \frac{\alpha^2 h_2^2 + 2\alpha h_2^2}{(\Delta x)^2} \right) u_2^s + \left(\frac{\alpha^2 h_2^2 + 2\alpha h_2 h_3}{2(\Delta x)^2} \right) u_3^s$$

∴

r=n-2:

$$U_{n-2}^s = \left(\frac{\alpha^2 h_{n-2}^2 + 2\alpha h_{n-2} h_{n-3}}{2(\Delta x)^2} \right) u_{n-3}^s + \left(1 - \frac{\alpha^2 h_{n-2}^2 + 2\alpha h_{n-2}^2}{(\Delta x)^2} \right) u_{n-2}^s + \left(\frac{\alpha^2 h_{n-2}^2 + 2\alpha h_{n-2} h_{n-1}}{2(\Delta x)^2} \right) u_{n-1}^s$$

r=n-1:

$$U_{n-1}^s = \left(\frac{\alpha^2 h_{n-1}^2 + 2\alpha h_{n-1} h_{n-2}}{2(\Delta x)^2} \right) u_{n-2}^s + \left(1 - \frac{\alpha^2 h_{n-1}^2 + 2\alpha h_{n-1}^2}{(\Delta x)^2} \right) u_{n-1}^s + \left(\frac{\alpha^2 h_{n-1}^2 + 2\alpha h_{n-1} h_n}{2(\Delta x)^2} \right) u_n^s$$

$r=n$:

$$U_n^s = \left(\frac{\alpha^2 h_n^2 + 2\alpha h_n h_{n-1}}{2(\Delta x)^2} \right) u_{n-1}^s + \left(1 - \frac{\alpha^2 h_n^2 + 2\alpha h_n^2}{(\Delta x)^2} \right) u_n^s + \left(\frac{\alpha^2 h_n^2 + 2\alpha h_n h_{n+1}}{2(\Delta x)^2} \right) u_{n+1}^s.$$

Persamaan (3.7a) menjadi,

$$U^s(u) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0^s \\ u_1^s \\ u_2^s \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-2}^s \\ u_{n-1}^s \\ u_n^s \\ u_{n+1}^s \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-3} & b_{n-3} & c_{n-3} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^s \\ u_2^s \\ u_3^s \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-3}^s \\ u_{n-2}^s \\ u_{n-1}^s \\ u_n^s \end{bmatrix}}_{u^s} + \underbrace{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & c_n \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_0^s \\ u_{n+1}^s \\ \vdots \\ u^s \end{bmatrix}}$$

Keterangan:

$$a_j = \left(\frac{\alpha^2 h_j^2 + 2\alpha h_j h_{j-1}}{2(\Delta x)^2} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$b_j = \left(1 - \frac{\alpha^2 h_j^2 + 2\alpha h_j^2}{(\Delta x)^2} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$c_j = \left(\frac{\alpha^2 h_j^2 + 2\alpha h_j h_{j+1}}{2(\Delta x)^2} \right), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Dari uraian di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$U^s(u) = \overline{A}u^s + \overline{B}\hat{u}^s$$

dengan A adalah matriks koefisien $n \times n$, u^s adalah matriks u untuk $1 \leq r \leq n$ pada tingkat grid s , B adalah matriks koefisien $n \times 2$ dan \hat{u}^s adalah matriks tambahan 1 grid di awal dan di akhir domain spasial.

3.2.5. Filter Numerik (Numerical Filter)

Persamaan (2.44)-(2.47) digunakan untuk mengeliminasi interaksi nonlinier yang dapat menyebabkan ketidakstabilan pada model numerik yang didapatkan. Oleh karena itu pada setiap grid x berlaku,

$$r = 5 \dots n-4$$

$$Z_r^* = \frac{1}{256} [186Z_r + 56(Z_{r+1} + Z_{r-1}) - 28(Z_{r+2} + Z_{r-2}) + 8(Z_{r+3} + Z_{r-3}) - (Z_{r+4} + Z_{r-4})] \quad (3.14)$$

$$r = 2, n-1$$

$$Z_r^* = \frac{1}{4} [2Z_r + (Z_{r+1} + Z_{r-1})] \quad (3.15)$$

$$r = 3, n-2$$

$$Z_r^* = \frac{1}{16} [10Z_r + 4(Z_{r+1} + Z_{r-1}) - (Z_{r+2} + Z_{r-2})] \quad (3.16)$$

$$r = 4, n-3$$

$$Z_r^* = \frac{1}{64} [44Z_r + 15(Z_{r+1} + Z_{r-1}) - 6(Z_{r+2} + Z_{r-2}) + (Z_{r+3} + Z_{r-3})], \quad (3.17)$$

dengan $Z = \{\eta, u\}$.

3.2.6. Algoritma dan *Flowchart* Skema Numerik Persamaan

Boussinesq-Nwogu

Adapun algoritma skema numerik persamaan Boussinesq-Nwogu adalah sebagai berikut:

Input : lebar domain x , lebar grid x (Δx), waktu t , lebar grid t (Δt), variabel kedalaman ($h(x)$), kondisi awal ($u(x,0)$, $\eta(x,0)$).

Output : η^{s+1} , u^{s+1} .

Langkah-langkah:

Langkah 1 : diskritisasi kondisi awal $u(x,0)$, $\eta(x,0)$, dan variabel kedalaman $h(x)$.

Langkah 2 : untuk $r=1,2,3,\dots,n$
Hitung $u(r,1)$, $\eta(r,1)$ dari kondisi awal

Langkah 3 : untuk $r=1,2,3,\dots,n$ dan $s=2,3$ lakukan langkah (4-8)

Langkah 4 : menghitung nilai $\eta(r,s)$ dan $U(r,s)$ dengan metode Runge-Kutta

Langkah 5 : menghitung nilai $u(r,s)$ dari $U(r,s)$ dengan langkah (6-8)

Langkah 6 : untuk $r=1,2,3,\dots,n$

Bentuk matriks koefisien \bar{A} , \bar{B} , \hat{u}^s (dari Syarat batas) dan $\bar{\beta}(r,s)$ adalah nilai ruas kanan skema Runge-Kutta.

Langkah 7 : hitung nilai w

$$w = A^{-1}(\bar{\beta}(r,s) - \bar{B}\hat{u}^s)$$

Langkah 8 : didapatkan nilai u_r^{s+1} dari w

$$u_r^{s+1} = w$$

Langkah 9 : untuk $s=4,\dots,n-1$ lakukan langkah (10-24)

Langkah 10: menghitung nilai $\eta^*(r,s)$ dan $U^*(r,s)$ dengan metode Prediktor

Langkah 11: menghitung nilai $u^*(r,s)$ dari $U^*(r,s)$ dengan langkah (12-14)

Langkah 12: untuk $r=1,2,3,\dots,n$

Bentuk matriks koefisien \bar{A} , \bar{B} , \hat{u}^s (dari Syarat batas) dan $\bar{\gamma}(r,s)$ adalah nilai ruas kanan skema Prediktor.

Langkah 13: hitung nilai v

$$v = A^{-1}(\bar{\gamma}(r,s) - \bar{B}\hat{u}^s)$$

Langkah 14: didapatkan nilai u_r^{*s+1} dari v

$$u_r^{*s+1} = v$$

Langkah 18: mengkoreksi nilai $\eta(r,s)$ dan $U(r,s)$ dari metode Prediktor dengan metode korektor

Langkah 19: menghitung nilai $u(r,s)$ dari $U(r,s)$ dengan langkah (20-22)

Langkah 20: untuk $r=1,2,3,\dots,n$

Bentuk matriks A dan $\bar{\delta}(r,s)$ adalah nilai ruas kanan skema Korektor.

Langkah 21: hitung nilai y

$$y = A^{-1}(\bar{\delta}(r,s) - \bar{B}\hat{u}^s)$$

Langkah 22: didapatkan nilai u_r^{s+1} dari y

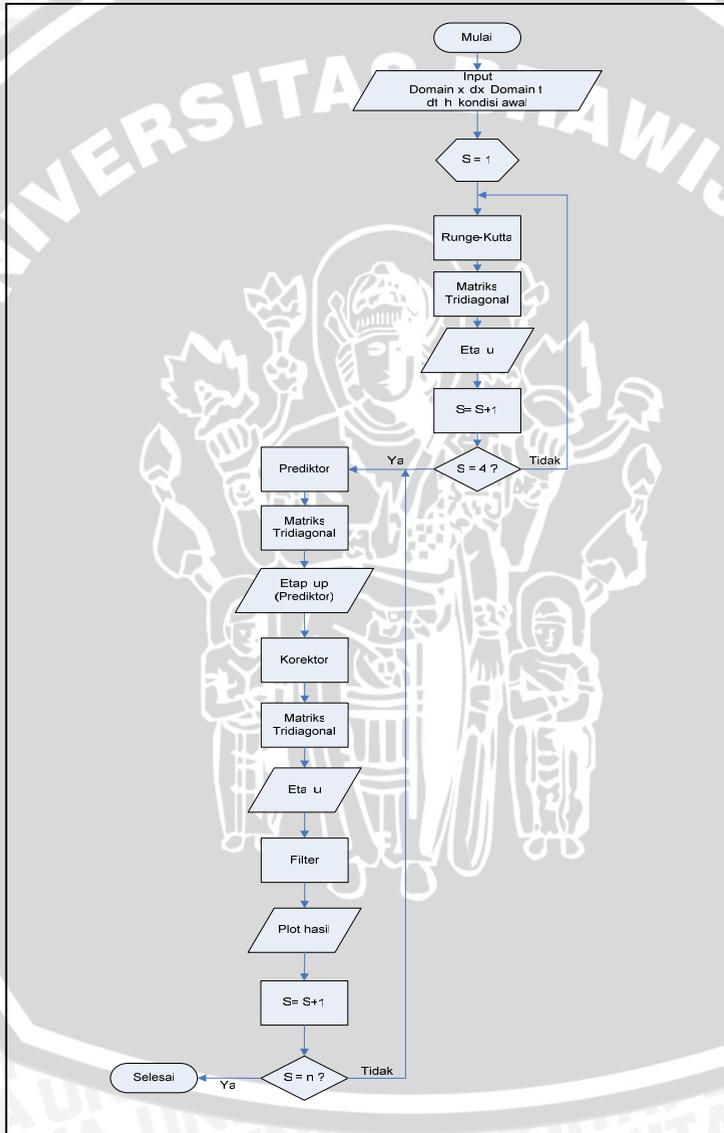
$$u_r^{s+1} = y$$

Langkah 23 : filtering nilai $\eta(r,s)$ dan $u(r,s)$

Langkah 24 : plot solusi $\eta(x,t)$ dan $u(x,t)$ yang diperoleh.

Langkah 25 : selesai.

Flowchart skema numerik persamaan Boussinesq-Nwogu adalah sebagai berikut:



Gambar 3.1. *Flowchart* skema numerik persamaan Boussinesq-Nwogu

3.3. Simulasi Perambatan Gelombang Soliton

Dalam sub bab ini akan disimulasikan perambatan gelombang soliton dengan skema Prediktor-Korektor dan Runge-Kutta orde empat. Hasil simulasi kedua skema tersebut akan diverifikasi dengan solusi analitik yaitu gelombang soliton.

3.3.1 Prediktor-Korektor

Dengan menggunakan skema Prediktor orde tiga dan Korektor orde empat, simulasi perambatan gelombang soliton akan dilakukan dalam interval $-20 \leq x \leq 20$ dan $0 \leq t \leq 6$. Amplitudo awal yang digunakan adalah 0,045 m, 0,090 m, dan 0,135 m dengan variasi nilai Δx dan Δt . Syarat awal yang digunakan adalah:

$$u(x,0) = A \operatorname{sech}^2(Bx)$$

$$\eta(x,0) = A_1 \operatorname{sech}^2(Bx) + A_2 \operatorname{sech}^4(Bx),$$

dengan,

$$A = \frac{C^2 - gh}{C}$$

$$B^2 = \frac{C^2 - gh}{4 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh^3 - \beta h^2 C^2 \right]}$$

$$A_1 = \frac{C^2 - gh}{3 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh - \beta C^2 \right]} h$$

$$A_2 = - \frac{(C^2 - gh)^2 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh - 2\beta C^2 \right]}{2ghC^2 \left[\left(\beta + \frac{1}{3} \right) gh - \beta C^2 \right]} h,$$

dan C solusi dari,

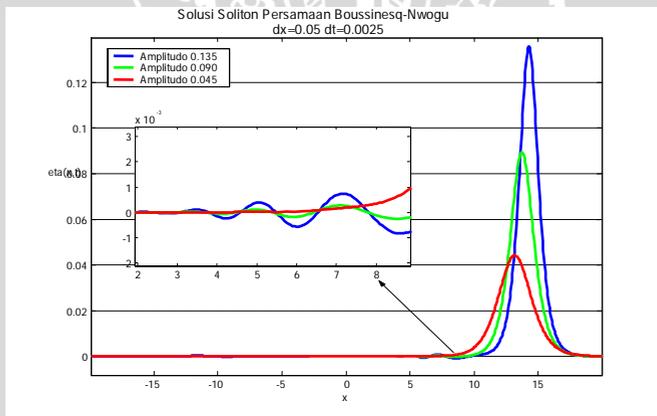
$$2\beta \left(\frac{C^2}{gh} \right)^3 - \left(3\beta + \frac{1}{3} + 2\beta \frac{a}{h} \right) \left(\frac{C^2}{gh} \right)^2 + 2\frac{a}{h} \left(\beta + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{C^2}{gh} \right) + \left(\beta + \frac{1}{3} \right) = 0.$$

Dalam Tugas Akhir ini, nilai C dari persamaan tersebut dicari dengan menggunakan program MAPLE (lampiran).

Skema numerik digunakan untuk mensimulasikan gerakan

gelombang soliton di atas kedalaman air yang konstan yaitu $h=0,45\text{m}$ dengan berbagai variasi amplitudo seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 3.2.

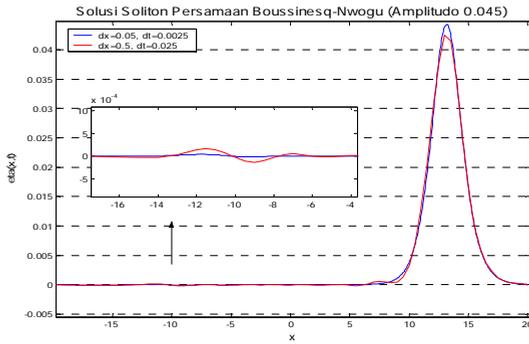
Pada Gambar 3.2 dapat dijelaskan bahwa dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$, serta dengan amplitudo awal yang berbeda yaitu $0,045\text{ m}$, $0,090\text{ m}$, dan $0,135\text{ m}$ solusi numerik yang didapatkan adalah stabil. Akan tetapi, semakin tinggi amplitudo awal yang digunakan, maka semakin tinggi osilasi ekor gelombang soliton yang terjadi. Pada Gambar 3.2 (amplitudo $0,135\text{ m}$) osilasi terjadi pada $3 < x < 10$, sedangkan pada Gambar 3.2 (amplitudo $0,045\text{ m}$) osilasi tidak terjadi. Hal ini dapat disimpulkan bahwa hasil yang didapatkan secara fakta berkaitan dengan skema numerik yang digunakan hanya pendekatan nilai secara diskrit. Sehingga hasil numerik yang didapatkan kurang bersesuaian dengan gelombang soliton yang sebenarnya.



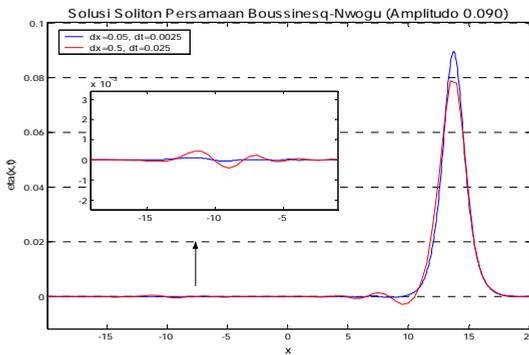
Gambar 3.2. Solusi Soliton Boussinesq-Nwogu dengan skema Prediktor-Korektor, $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ pada saat $t = 6$

Dalam metode numerik, pengambilan Δx dan Δt juga sangat berpengaruh dalam mendapatkan hasil yang sesuai dengan fakta. Berdasarkan sifat deret Taylor semakin kecil Δx dan Δt maka kesalahannya akan semakin kecil. Pada kasus ini ditunjukkan bahwa semakin kecil nilai Δ yang digunakan baik terhadap spasial maupun temporal, maka semakin baik solusi grafik Boussinesq-

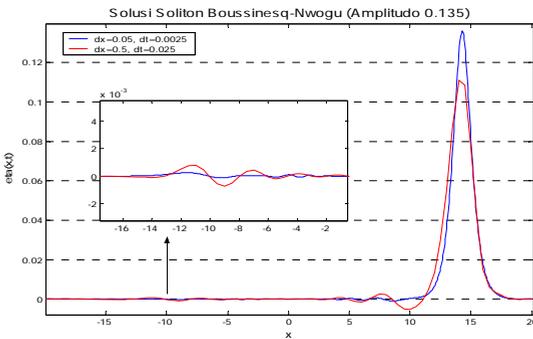
Nwogu yang didapatkan. Berikut Gambar perbandingan pengambilan Δx dan Δt dalam mensimulasikan solusi gelombang soliton Boussinesq-Nwogu.



(a)



(b)



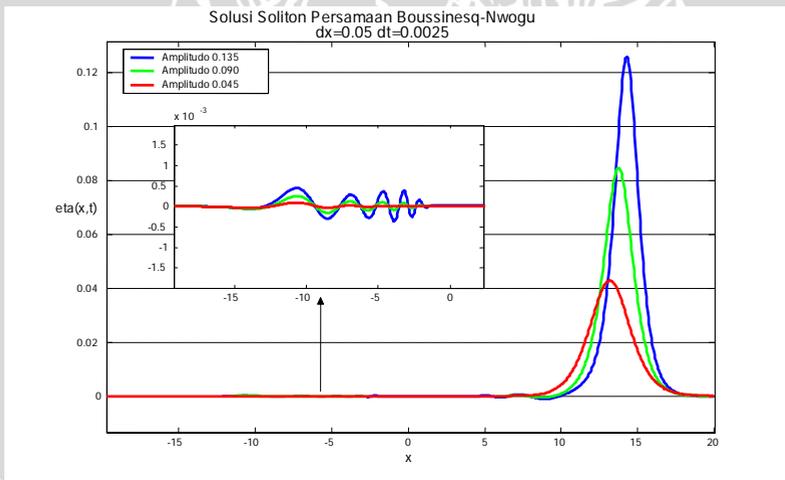
(c)

Gambar 3.3. Perbandingan pengambilan nilai Δx dan Δt dalam interval $x \in [-20, 20]$ pada saat $t = 6$ dengan variasi amplitudo.

Pada Gambar 3.3, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap variasi amplitudo, osilasi yang terjadi pada solusi gelombang soliton dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ lebih kecil daripada osilasi pada solusi gelombang soliton dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$. Hal ini menunjukkan bahwa semakin kecil Δx dan Δt yang digunakan, maka semakin bagus hasil numerik yang didapatkan.

3.3.2 Runge-Kutta Orde Empat

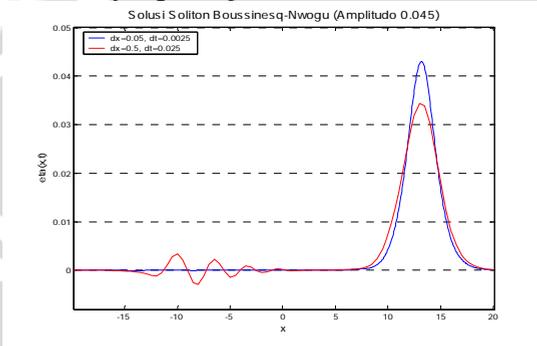
Dengan metode Runge-Kutta orde empat, simulasi perambatan gelombang soliton dilakukan dalam interval $-20 \leq x \leq 20$ dan $0 \leq t \leq 6$. Syarat awal, amplitudo awal, dan variasi Δx dan Δt didefinisikan seperti pada 3.3.1.



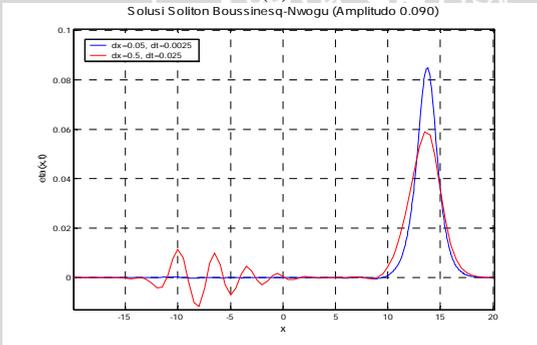
Gambar 3.4. Solusi Soliton Boussinesq-Nwogu dengan skema Runge-Kutta, $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ dalam interval $x \in [-20, 20]$ pada saat $t = 6$

Seperti pada simulasi dengan metode Prediktor-Korektor, bahwa semakin besar amplitudo yang digunakan, maka semakin besar pula osilasi solitoni yang muncul.

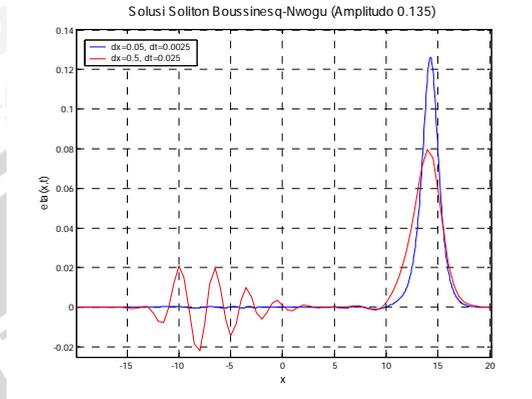
Pada simulasi ini, pengambilan Δx dan Δt juga sangat mempengaruhi hasil yang didapatkan.



(a)



(b)



(c)

Gambar 3.5. Perbandingan pengambilan nilai Δx dan Δt dalam interval $x \in [-20, 20]$ pada saat $t = 6$ dengan variasi amplitudo.

Pada Gambar 3.5 dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap variasi amplitudo, osilasi yang terjadi pada solusi gelombang soliton dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ lebih kecil daripada osilasi pada solusi gelombang soliton dengan $\Delta x = 0,5$ dan $\Delta t = 0,025$.

3.3.3. Verifikasi Solusi Numerik dengan Solusi Analitik

Solusi gelombang soliton untuk persamaan Boussinesq-Nwogu yang diturunkan oleh , *G. Wei* dan *James T. Kirby* adalah sebagai berikut:

$$u(x,t) = A \operatorname{sech}^2(B(x - Ct))$$

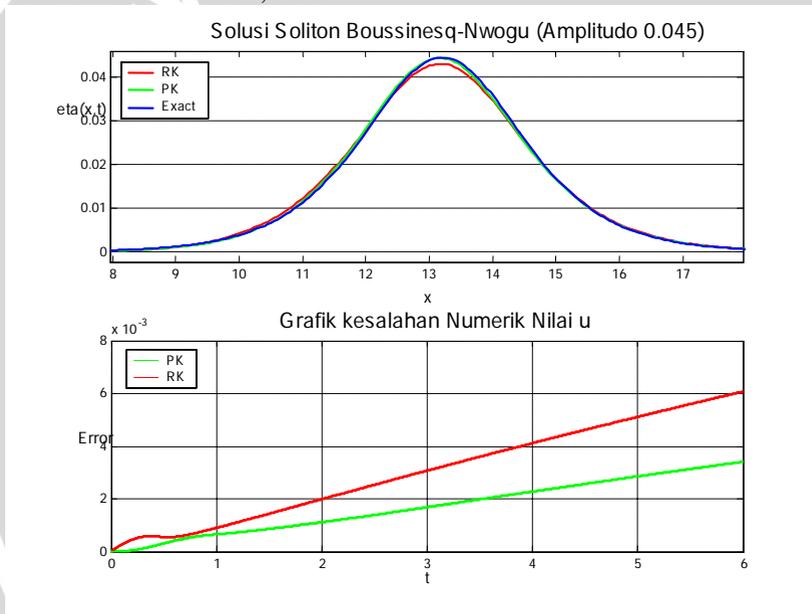
$$\eta(x,t) = A_1 \operatorname{sech}^2(B(x - Ct)) + A_2 \operatorname{sech}^4(B(x - Ct)),$$

dengan A , B , A_1 , dan A_2 didefinisikan berturut-turut pada persamaan (2.56), (2.57), (2.59), dan (2.60). Sedangkan nilai C merupakan solusi dari persamaan (2.62).

Gerakan gelombang soliton pada domain adalah salah satu percobaan yang baik untuk menguji kestabilan skema numerik yang digunakan. Karena gelombang soliton dapat menggambarkan karakteristik fenomena gundukan gelombang air yang dapat ditentukan dari persamaan Boussinesq-Nwogu. Dengan

menverifikasikan solusi numerik dengan solusi analitik akan dibuktikan bahwa skema numerik yang digunakan adalah benar.

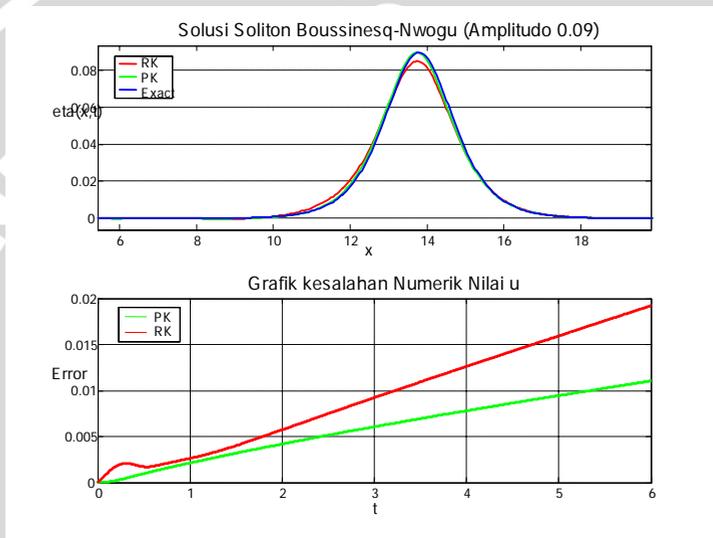
Gambar (3.6)-(3.8) menunjukkan verifikasi solusi numerik dengan solusi analitik beserta nilai kesalahan maksimum pada tiap waktu. Gambar 3.6 menunjukkan solusi gelombang soliton dengan amplitudo awal 0,045 m. Verifikasi solusi numerik dengan solusi analitik untuk skema Runge-Kutta didapat kesalahan numerik maksimum untuk nilai u pada interval $t \in [0,6]$ dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ adalah $6,07 \times 10^{-3}$. Sedangkan untuk skema Prediktor-Korektor didapat kesalahan numerik maksimum untuk nilai u adalah $3,4 \times 10^{-3}$.



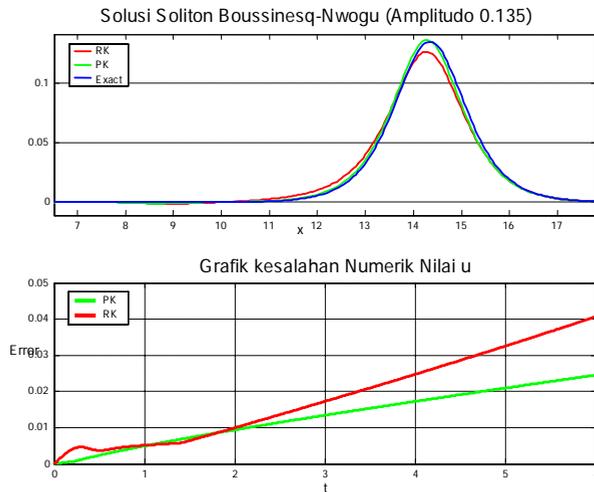
Gambar 3.6. Verifikasi solusi numerik dengan solusi analitik dalam interval $x \in [-20,20]$ pada saat $t = 6$ dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ (Amplitudo 0,045 m)

Gambar 3.7 menunjukkan solusi gelombang soliton dengan amplitudo awal 0,090 m. Verifikasi solusi numerik dengan solusi analitik untuk skema Runge-Kutta didapat kesalahan numerik maksimum untuk nilai u adalah $1,92 \times 10^{-2}$. Sedangkan untuk skema Prediktor-Korektor didapat kesalahan numerik maksimum untuk

nilai u adalah $1,1 \times 10^{-2}$. Sedangkan untuk amplitudo 0,135 m, kesalahan numerik maksimum nilai u untuk skema Runge-Kutta adalah 4×10^{-2} dan untuk skema Prediktor-Korektor memiliki kesalahan numerik maksimum nilai u adalah $2,4 \times 10^{-2}$ seperti ditunjukkan pada Gambar 3.8.



Gambar 3.7. Verifikasi solusi numerik dengan solusi analitik dalam interval $x \in [-20, 20]$ pada saat $t = 6$ dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ (Amplitudo 0,090 m)



Gambar 3.8. Verifikasi solusi numerik dengan solusi analitik dalam interval $x \in [-20, 20]$ pada saat $t = 6$ dengan $\Delta x = 0,05$ dan $\Delta t = 0,0025$ (Amplitudo 0,135 m)

Verifikasi yang dilakukan, menunjukkan bahwa model numerik yang dibangun menghasilkan solusi numerik yang mendekati solusi analitik dengan cukup baik. Kesalahan yang terjadi merupakan akibat dari kesalahan pemotongan skema numerik yang digunakan. Dari verifikasi tersebut dapat disimpulkan pula bahwa kesalahan numerik skema Prediktor-Korektor lebih kecil daripada kesalahan numerik skema Runge-Kutta. Dengan kata lain, skema Prediktor-Korektor memiliki keakuratan yang lebih baik daripada skema Runge-Kutta orde empat.

BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1. Kesimpulan

Dalam Tugas Akhir ini telah dibahas skema numerik untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq-Nwogu satu dimensi. Skema numerik diperoleh dari diskritisasi spasial dengan metode beda hingga dan diskritisasi temporal menggunakan metode Prediktor-Korektor dan metode Runge-Kutta orde empat.

Simulasi perambatan solusi analitik gelombang soliton dilakukan untuk menverifikasi skema numerik yang didapatkan. Hasil verifikasi menunjukkan bahwa skema numerik bekerja dengan cukup baik. Kesalahan numerik terjadi sebagai akibat dari kesalahan pemotongan skema numerik yang digunakan. Dan semakin besar amplitudo awal digunakan maka semakin tinggi osilasi yang terjadi. Hal ini dikarenakan skema numerik yang digunakan hanyalah pendekatan secara diskrit, sehingga hasil numerik yang didapatkan kurang sesuai dengan gelombang soliton yang sebenarnya. Karena itu pengambilan nilai Δx dan Δt juga sangat berpengaruh pada simulasi. Dengan kata lain, semakin kecil Δx dan Δt yang digunakan maka akan semakin baik hasil simulasinya. Dan berdasarkan kesalahan numerik yang terjadi, disimpulkan pula bahwa skema Prediktor-Korektor memiliki keakuratan yang lebih baik daripada skema Runge-Kutta orde empat.

4.2. Saran

Untuk selanjutnya, disarankan untuk menggunakan skema numerik berorde tinggi atau menggunakan skema numerik dengan grid bertingkat (*Staggered grid*). Selain itu, untuk hasil yang lebih mencerminkan keadaan sesungguhnya, sangat dianjurkan untuk meneliti persamaan Boussinesq-Nwogu pada dimensi yang lebih tinggi dengan menggunakan dasar air yang tidak rata (*uneven bottoms*) atau menggunakan bentuk topografi yang menyerupai pantai dengan berbagai syarat batas.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR PUSTAKA

- Chapra, S.C. dan Canale, R.P. 2002. *Numerical Methods for Engineers: with software and programming applications. Fourth Edition*. McGraw-Hill Higher Education. New York.
- Dingemans, M.W. 1997. *Water Wave Propagation Over Uneven Bottoms: part 2-non-linear wave propagation*. World Scientific. Singapore.
- Farlow, S.J. 1994. *An Introduction to Differential Equations and Their Application*. Mc Graw-Hill, inc. New Jersey.
- Fuhrman, D.R. 2004. *Numerical Solutions of Boussinesq Equations for Fully Nonlinear and Extremely Dispersive Water Waves*. University of Denmark. Denmark.
- Glenn, L. 2005. *Differential Equation: a modelling approach*. McGraw-Hill Higher Education. New York.
- Hoffman, J.D. 2001. *Numerical for Engineers and Scientists 2th Edition Revised and Expanded*. Marcel Dekker, inc. New York.
- Kirby, J.T., Wei, G., dan Chen, Q. 1998. *FUNWAVE 1.0 Fully Nonlinear Boussinesq Wave Model Documentation and User's Manual*. University of Delaware. Newark.
- Lam, C.H. 1994. *Applied Numerical Method for Partial Differential Equation*. Prentice Hall Simon and Schster (Asia) Pte Ltd. Singapore.
- Mathews, J.H. dan Fink, K.D. 1992. *Numerical Method Using Matlab 4rd Edition*. Pearson Prentice Hall. New Jersey.
- McCuen, R.H. dan Ayyub, B.M. 1996. *Numerical Methods for Engineers*. Prentice hall. New Jersey.

Richard, L.B. dan Faires, J.D. 1989. *Numerical Analysis*. PSW-Kent Publishing Company. New York.

Ross, L.S. 1984. *Differential Equation 3rd Edition*. John Wiley and sons, inc. New York.

Sahid. 2004. *Pengantar Komputasi Numerik dengan Matlab*. FMIPA UNY. Yogyakarta.

Strauss, W.W. 1992. *Partial Differential Equations*. John Wiley and sons,inc. New York.

Suryanto, A. 2004. *Diktat Kuliah Pemodelan Matematika*. Universitas Brawijaya. Malang.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset. Yogyakarta.

Walkley, M.A. 1999. *A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations*. University of leeds.

Wei, G. dan Kirby, J.T. 1994. *A Time Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations*. University of Delaware. Newark.

Wei, G. dan Kirby J.T. 1998. *Simulation of Water Waves by Boussinesq Models*. University of Delaware. Newark.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Mencari nilai C untuk setiap variasi amplitudo

Mencari nilai C untuk Amplitudo 0,045 m

$$\begin{aligned} \text{➤ } Z: &= 2 * (-0.39) * ((C^2) / (9.8 * 0.45))^3 - (3 * (-0.39) \\ &+ (1/3) + 2 * (-0.39) * (0.045 / 0.45)) \\ &* ((C^2) / (9.8 * 0.45))^2 + 2 * (0.045 / 0.45) \\ &* ((-0.39) + (1/3)) * ((C^2) / (9.8 * 0.45)) \\ &+ (-0.39) + (1/3) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z: &= -0.009094500145 C^6 + 0.04703115814 C^4 - 0.002569916857 C^2 - 0.0566666667 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{➤ } \text{solve}(Z, C);$$

$$-0.9916970476 I, 0.9916970476 I, -1.143180176, 1.143180176, -2.201814419, 2.201814419$$

Mencari nilai C untuk Amplitudo 0,090 m

$$\begin{aligned} \text{➤ } Z: &= 2 * (-0.39) * ((C^2) / (9.8 * 0.45))^3 - (3 * (-0.39) \\ &+ (1/3) + 2 * (-0.39) * (0.090 / 0.45)) \\ &* ((C^2) / (9.8 * 0.45))^2 + 2 * (0.090 / 0.45) \\ &* ((-0.39) + (1/3)) * ((C^2) / (9.8 * 0.45)) \\ &+ (-0.39) + (1/3) = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z: &= -0.009094500145 C^6 + 0.05104183270 C^4 - 0.005139833714 C^2 - 0.0566666667 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{➤ } \text{solve}(Z, C);$$

$$-0.9661426877 I, 0.9661426877 I, -1.124168523, 1.124168523, -2.298273578, 2.298273578$$

Mencari nilai C untuk Amplitudo 0,135 m

$$\begin{aligned} \text{➤ } Z: &= 2 * (-0.39) * ((C^2) / (9.8 * 0.45))^3 - (3 * (-0.39) \\ &+ (1/3) + 2 * (-0.39) * (0.135 / 0.45)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & *((C^2)/(9.8*0.45))^2+2*(0.135/0.45) \\ & *((-0.39)+(1/3))*((C^2)/(9.8*0.45)) \\ & +(-0.39)+(1/3)=0; \end{aligned}$$

$$Z := -0.009094500145 C^6 + 0.05505250728 C^4 - 0.007709750571 C^2 - 0.05666666667 = 0$$

➤ **solve(Z,C);**

$$-0.9425082191 I, 0.9425082191 I, -1.107927809, 1.107927809, -2.390439778, 2.390439778$$

