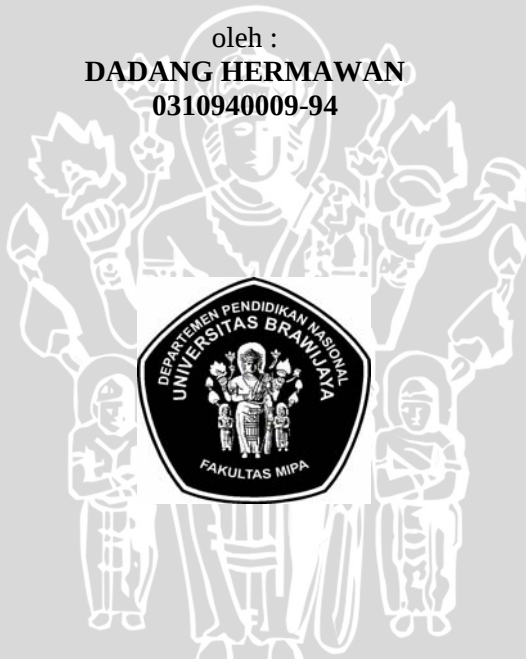


**METODE BEDA PUSAT-UPWIND BIAS
UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN KONVEKSI-DIFUSI SATU DIMENSI**

SKRIPSI

oleh :
DADANG HERMAWAN
0310940009-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



**METODE BEDA PUSAT-UPWIND BIAS
UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN KONVEKSI-DIFUSI SATU DIMENSI**

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :

DADANG HERMAWAN

0310940009-94



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS BRAWIJAYA
MALANG
2008**

LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI

**METODE BEDA PUSAT-UPWIND BIAS
UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN KONVEKSI-DIFUSI SATU DIMENSI**

oleh:

DADANG HERMAWAN

0310940009-94

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji
pada tanggal 30 Juni 2008
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

Pembimbing I,

Pembimbing II,

Dr. Wuryansari M.K., M. Si

NIP. 132 048 784

Drs. Moch. Aruman Imron, MSi

NIP. 131 879 051

**Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika
Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

Dr. Agus Suryanto, M. Sc

NIP. 132 126 049

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LEMBAR PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama : DADANG HERMAWAN

NIM : 0310940009-94

Jurusan : MATEMATIKA

Penulis Skripsi berjudul :

**METODE BEDA PUSAT-UPWIND BIAS
UNTUK MENYELESAIKAN
PERSAMAAN KONVEKSI-DIFUSI SATU DIMENSI**

Dengan ini menyatakan bahwa:

1. Isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama-nama yang termaktub di isi dan tertulis di daftar pustaka dalam Skripsi ini.
2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala resiko yang akan saya terima.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.

Malang, 30 Juni 2008

Yang menyatakan,

(Dadang Hermawan)

NIM. 0310940009-94

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



*Skripsi ini kupersembahkan kepada
Ibunda dan Ayahanda,
yang selalu memberikan yang terbaik buatku
Semua kakak dan adikku,
yang selalu mendukung dan mendoakanku
dan OkkyPuspandari Hendyati,
yang selalu memberi semangat tiada henti.*

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LANGKAHKU MENUJU LANGKAHMU

Lembaran kalbu tlah berubah
Kehampaan tlah berganti
Keceriaanpun mengiringi
Langkahku menuju langkahmu

Langkahku terhenti sejenak
Karena kukehilangan arah
Aku bingung dengan terus memilih
Diantara 2 persimpangan

Lama kuberpikir.....
Akhirnya langkahku
Meninggalkan kekelaman hati
Ternyata dia tidak kemana-mana
Hanya saja tertutup kehitaman hati

Kini langkahku telah kembali
Dan aku juga mengikutimu lagi
Hingga suatu saat.....
Langkahku sejajar dengan langkahmu

(Dadang Hermawan)

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



METODE BEDA PUSAT-UPWIND BIAS UNTUK MENYELESAIKAN PERSAMAAN KONVEKSI-DIFUSI SATU DIMENSI

ABSTRAK

Dalam skripsi ini dibahas metode numerik untuk menyelesaikan persamaan konveksi-difusi satu dimensi. Metode numerik yang digunakan adalah gabungan metode beda hingga pusat orde dua dengan metode upwind bias orde dua. Diskritisasi turunan temporal orde pertama digunakan untuk menghampiri nilai fungsi pada level waktu ke dua. Untuk level waktu selanjutnya digunakan turunan temporal orde dua. Galat minimum diperoleh dengan memodifikasi persamaan konveksi-difusi dan dikaikan dengan kesalahan pemotongan numeriknya. Metode modifikasi tersebut dinamakan MEPDP (modifikasi ekuivalensi persamaan diferensial parsial). Solusi numerik yang dihasilkan diuji terhadap solusi analitik yang berupa fungsi Gauss.

Kata kunci : metode beda hingga pusat, upwind bias, modifikasi ekuivalensi persamaan diferensial parsial (MEPDP), fungsi Gauss.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



A CENTRAL DIFFERENCE-UPWIND BIASED METHOD FOR SOLVING THE ONE DIMENSIONAL CONVECTION-DIFFUSION EQUATION

ABSTRACT

This final project discusses a numerical method to solve a one dimensional convection-diffusion equation. The equation is solved numerically by using combination between second-order central finite difference method and upwind biased method. The first order temporal derivative is used to approximate the second time level, while the second order temporal derivative is used to approximate the next time level. The minimum error is determined by performing modification on the partial differential equation corresponding to truncation error. This modification leads to MEPDE. The resulting numerical scheme is verified using an analytical solution namely Gauss function..

Keyword : central finite difference method, upwind biased, modified equivalent partial differential equation (MEPDE), Gauss function.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT, yang telah melimpahkan rahmat, taufik dan hidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan dengan baik. Shalawat dan salam tetap tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam penulisan skripsi ini, dukungan dan bantuan dari berbagai pihak banyak diterima oleh penulis. Oleh sebab itu, penulis berterima kasih kepada:

1. Dr. Wuryansari, M. K., M.Si. selaku Pembimbing I sekaligus Ketua Program Studi Matematika atas dorongan, semangat, dan bimbingan, serta waktu yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini,
2. Drs. Moch. Aruman Imron, MSi. selaku Pembimbing II atas bimbingan, serta waktu yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini,
3. Dr. Agus Suryanto, M.Sc. selaku Ketua Jurusan Matematika atas segala motivasi, bimbingan, nasehat, dan kesempatan yang diberikan kepada penulis,
4. Ayah, ibu, keluargaku, dan adek Okky atas segala doa, kasih sayang, dukungan, dan pengertian yang senantiasa diberikan,
5. Dra. Endang Wahyu H.,MSi selaku Penasehat Akademik atas segala bimbingan dan pengarahan selama penulis menjalani perkuliahan,
6. Semua dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan bekal ilmu kepada penulis,
7. Teman-teman Matematika angkatan 2003 dan The Touring Team atas dukungan dan semangatnya, serta
8. Semua pihak yang tidak dapat dituliskan satu-persatu, yang sudah membantu penulis dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari sepenuhnya bahwa penulisan skripsi ini tidak lepas dari kesalahan atau kekurangan. Oleh sebab itu, saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan oleh penulis. Akhir kata, semoga skripsi ini bermanfaat bagi para pembaca sekalian.

Malang, Juni 2008
Penulis

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN JUDUL	i
HALAMAN PENGESAHAN	iii
HALAMAN PERNYATAAN	v
ABSTRAK	xi
ABSTRACT	xiii
KATA PENGANTAR	xv
DAFTAR ISI	xvii
DAFTAR TABEL	xix
DAFTAR GAMBAR	xxi
DAFTAR SIMBOL	xxiii
DAFTAR LAMPIRAN	xxv
 BAB I PENDAHULUAN	 1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Perumusan Masalah	2
1.3. Tujuan	2
1.4. Batasan Masalah	2
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	 3
2.1. Persamaan Diferensial Parsial	3
2.2. Deret Taylor	4
2.3. Kesalahan Pemotongan	4
2.4. Beda Hingga	5
2.4.1. Pendekatan Beda Maju	7
2.4.2. Pendekatan Beda Mundur	8
2.4.3. Pendekatan Beda Pusat	9
2.5. Persamaan Konveksi-difusi	12
2.6. Solusi Eksak Persamaan Konveksi-Difusi	
Satu Dimensi	13
 BAB III PEMBAHASAN	 15
3.1. Skema Numerik Persamaan Konveksi-Difusi	15
3.1.1 Metode Beda Pusat	15
3.1.2 Metode Upwind Bias	16
3.1.3 Metode Beda Pusat-Upwind Bias	17

3.2. Kesalahan Pemotongan Metode Bada Pusat- Upwind Bias	23
3.2.1. Kesalahan Pemotongan Turunan Temporal Pertama	23
3.2.1. Kesalahan Pemotongan Turunan Spasial Pertama	23
3.2.3. Kesalahan Pemotongan Turunan Spasial ke Dua	24
3.3. Modifikasi Ekuivalensi Persamaan Diferensial Parsial	25
3.4. Algoritma Skema Numerik Metode Bada Pusat- Upwind Bias	30
3.5. Kinerja Numerik	31
3.5.1. Uji Keakuratan Skema Numerik.....	31
3.5.2. Perbandingan Metode	35
3.5.3. Uji Keakuratan Bobot dan Pengaruh <i>Peclet Number</i>	38
BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN	43
4.1. Kesimpulan.....	43
4.2. Saran.....	44
DAFTAR PUSTAKA	45
LAMPIRAN	47

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.1 Tabel Beda Hingga Orde Dua.....	11
---	----

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.1	Diskritisasi beda hingga dari $T = T(x)$ dengan lebar grid konstan Δx	6
Gambar 2.2	Diskritisasi fungsi dengan dua variabel bebas $T(x, y)$ dengan lebar grid konstan Δx dan Δy	7
Gambar 2.3	Pendekatan beda maju.	8
Gambar 2.4	Pendekatan beda mundur.	9
Gambar 2.5	Pendekatan beda pusat.	10
Gambar 3.1	Stensil untuk metode beda pusat orde dua	16
Gambar 3.2	Stensil untuk metode upwind bias.	16
Gambar 3.3	Stensil untuk metode beda pusat-upwind bias untuk $j = 2$	18
Gambar 3.4	Stensil untuk metode beda pusat-upwind bias untuk $j = 3, 4, \dots, Nt$	21
Gambar 3.5	Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 0$	32
Gambar 3.6	Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 0,5$	32
Gambar 3.7	Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 1$	33
Gambar 3.8	Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 3$	33
Gambar 3.9	Galat metode beda pusat-upwind bias terhadap solusi eksak sebagai fungsi waktu.	34
Gambar 3.10	Verifikasi metode beda pusat ($\omega = 0$) dengan solusi eksak pada saat $t = 3$	35
Gambar 3.11	Verifikasi metode beda pusat-upwind bias ($\omega = 0,25$) dengan solusi eksak pada saat $t = 3$..	36
Gambar 3.12	Verifikasi metode beda pusat-upwind bias ($\omega = 0,75$) dengan solusi eksak pada saat $t = 3$..	36
Gambar 3.13	Verifikasi metode upwind bias ($\omega = 1$) dengan solusi eksak pada saat $t = 3$	37

Gambar 3.14 Galat solusi numerik terhadap solusi eksak berdasarkan nilai ω	38
Gambar 3.15 Galat berdasarkan ω untuk $c = 0,1$ dengan $Pe = 25$ dan $Pe = 2,5$	39
Gambar 3.16 Galat berdasarkan ω untuk $c = 0,4$ dengan $Pe = 25$ dan $Pe = 2,5$	40



DAFTAR SIMBOL

<u>Simbol</u>	<u>Keterangan</u>
x	variabel spasial pada sumbu x
y	variabel spasial pada sumbu y
t	variabel temporal
T	solusi persamaan konveksi-difusi satu dimensi
$\frac{\partial T}{\partial x}$	turunan pertama T terhadap x
$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$	turunan ke dua T terhadap x
$\frac{\partial T}{\partial t}$	turunan pertama T terhadap t
Δx	ukuran langkah pada sumbu x
Δy	ukuran langkah pada sumbu y
Δt	ukuran langkah waktu
C	laju konveksi
D	koefisien difusi
ω	bobot
ζ	karakteristik kecepatan gelombang
μ	karakteristik amplitudo gelombang
$N_\lambda = \lambda / \Delta x$	jumlah grid dalam satu panjang gelombang
$c = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$	<i>Courant number</i>
$s = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$	bilangan difusi
$Pe = \frac{c}{s}$	<i>Peclet number</i>
TE_t	kesalahan pemotongan turunan temporal pertama
TE_x	kesalahan pemotongan turunan spasial pertama
TE_{xx}	kesalahan pemotongan turunan spasial ke dua

Simbol

$$A^{trans}$$

$$\alpha = \frac{c}{2}$$

$$\beta = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$$

$$E1 = \alpha\omega$$

$$F1 = (\alpha(1-\omega) + 4\alpha\omega + \beta)$$

$$G1 = (1 + 3\alpha\omega + 2\beta)$$

$$H1 = (\alpha(1-\omega) - \beta)$$

$$E2 = 2\alpha\omega$$

$$F2 = [(1-\omega)2\alpha + 8\alpha\omega + 2\beta]$$

$$G2 = [3 + 6\alpha\omega + 4\beta]$$

$$H2 = [2\alpha(1-\omega) - 2\beta]$$

Keterangan

transpos matrik A



DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

Lampiran 1	47
------------------	----

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Semakin berkembangnya ilmu pengetahuan mempermudah penyelesaian suatu masalah. Perkembangan ilmu pengetahuan dan kemajuan matematika memberikan sumbangsih yang besar dalam pemecahan masalah-masalah pada bidang teknik, ekonomi, sains, dan lain-lain. Salah satu contoh perkembangan matematika adalah dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial banyak ditemukan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu contohnya adalah persamaan panas atau persamaan konveksi-difusi yang dalam beberapa dekade terakhir banyak menjadi obyek penelitian.

Persamaan konveksi-difusi adalah suatu persamaan diferensial parsial yang menguraikan gejala perpindahan seperti perpindahan kalor, perpindahan massa, dinamika fluida (perpindahan momentum), dan lain-lain. Semua proses perpindahan mengikuti suatu prinsip konservasi tertentu.

Persamaan konveksi-difusi satu dimensi dapat diselesaikan dengan menggunakan berbagai metode beda hingga. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dengan metode beda hingga umumnya lebih mudah diperoleh daripada penyelesaian eksaknya. Metode yang dapat digunakan antara lain metode beda pusat dan upwind bias. Metode-metode numerik tersebut mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Sebagian besar metode-metode numerik tersebut mempunyai kesalahan pemotongan atau perbedaan dengan solusi eksak. Usaha untuk memperkecil kesalahan pemotongan menjadi topik menarik dalam analisa numerik. Dalam skripsi ini di kemukakan salah satu alternatif metode untuk memperkecil kesalahan pemotongan.

Dalam skripsi ini metode yang digunakan adalah paduan antara metode beda pusat dengan metode upwind bias. Penggabungan dua metode tersebut diharapkan mampu menutupi kekurangan yang dimiliki satu sama lain, sehingga diperoleh kesalahan yang relatif kecil. Metode beda hingga yang digunakan dalam metode ini berorde dua. Dalam metode ini juga terdapat suatu parameter bobot yang menentukan kecenderungan metode atau skema yang digunakan

yaitu metode beda pusat atau metode upwind bias. Dengan menganalisa kesalahan pemotongan metode ini, diperoleh suatu persamaan yang menghasilkan bobot optimal untuk meminimalkan kesalahan pemotongan.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan pada latar belakang di atas, maka perumusan masalah yang dikaji dalam penulisan skripsi ini adalah :

1. Bagaimana solusi numerik persamaan konveksi-difusi dengan gabungan metode beda pusat dan metode upwind bias?
2. Bagaimana menentukan kesalahan pemotongan persamaan konveksi-difusi dengan metode beda pusat-upwind bias?
3. Bagaimana menentukan bobot ω optimal dengan teknik modifikasi ekuivalensi persamaan diferensial parsial?
4. Bagaimana analisa numerik persamaan konveksi-difusi dan keakuratan bobot optimal yang diperoleh?

1.3 Tujuan

Berdasarkan perumusan masalah di atas, maka tujuan dari penulisan skripsi ini adalah :

1. Menyelesaikan persamaan konveksi-difusi dengan metode gabungan antara metode beda pusat dan metode upwind bias.
2. Menentukan kesalahan pemotongan dari persamaan konveksi-difusi dengan metode beda pusat-upwind bias.
3. Menentukan bobot ω optimal dengan teknik modifikasi ekuivalensi persamaan diferensial parsial.
4. Menganalisa hasil skema numerik dan menguji keakuratan bobot optimal yang diperoleh.

1.4 Batasan Masalah

Batasan masalah skripsi ini adalah :

1. Syarat awal yang digunakan adalah fungsi Gauss.
2. Persamaan konveksi-difusi yang digunakan hanya persamaan konveksi-difusi satu dimensi.

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui (variabel tak bebas) dengan satu atau lebih turunan-turunannya (Edward & Penney, 2001).

Suatu persamaan diferensial dikatakan berorde- n jika turunan tertinggi dalam persamaan tersebut adalah turunan ke- n , sedangkan persamaan diferensial disebut mempunyai derajat k jika turunan tertinggi dalam persamaan diferensial tersebut berpangkat k (Glenn, 2005).

Ada dua macam persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang fungsi tidak diketahui atau variabel tak bebasnya bergantung hanya pada satu variabel bebas (Edward & Penney, 2001). Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat hubungan antara beberapa variabel bebas, satu variabel tak bebas dan turunan parsial dari variabel tak bebas tersebut. (Strauss, 1992).

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi persamaan linier dan nonlinier. Persamaan diferensial parsial dikatakan linier jika variabel tak bebas T dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara linier (tidak dipangkatkan atau dikalikan). Sedangkan persamaan diferensial parsial dikatakan nonlinier jika variabel tak bebas T dan turunannya muncul dalam persamaan dengan cara tak linier (dipangkatkan atau dikalikan) (Farlow, 1994).

Bentuk umum PDP linier orde dua dengan dua variabel bebas adalah :

$$A \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + D \frac{\partial T}{\partial x} + E \frac{\partial T}{\partial y} + FT = G, \quad (2.1)$$

dengan A, B, C, D, E, F dan G merupakan fungsi dalam x dan y . PDP orde dua dalam dua variabel yang tidak berbentuk seperti persamaan (2.1) disebut persamaan diferensial parsial nonlinier.

Suatu klasifikasi penting dalam PDP adalah penggolongan PDP menjadi parabolik, hiperbolik, dan eliptik. Persamaan linier orde dua pada persamaan (2.1) diklasifikasikan berdasarkan aturan berikut :

1. Persamaan (2.1) disebut PDP parabolik jika $B^2 - 4AC = 0$
 2. Persamaan (2.1) disebut PDP hiperbolik jika $B^2 - 4AC > 0$
 3. Persamaan (2.1) disebut PDP eliptik jika $B^2 - 4AC < 0$.
- (Lam, 1994).

2.2 Deret Taylor

Deret Taylor menjadi dasar dalam metode numerik. Pada prinsipnya, deret Taylor sangat penting untuk menghampiri nilai suatu fungsi pada suatu titik tertentu. Jika suatu fungsi T dan turunannya kontinyu pada interval tertentu yang memuat x dan nilai T di titik x_i diberikan maka nilai fungsi di titik x_{i+1} yang terletak pada jarak Δx dari titik x_i dapat ditentukan dengan menggunakan deret Taylor

$$T(x_{i+1}) = T(x_i) + T'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{T''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots + \frac{T^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + R_n, \quad (2.2)$$

dengan

$$R_n = \frac{T^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1}, \quad x_i \leq \xi \leq x_{i+1} \quad (2.3)$$

(Chapra, 2002).

2.3 Kesalahan Pemotongan

Deret Taylor akan memberikan perkiraan suatu fungsi dengan akurat jika semua suku dalam deret tersebut diperhitungkan. Dalam kenyataannya hanya beberapa suku pertama saja yang diperhitungkan sehingga hasil perkiraan tidak tepat seperti hasil penyelesaian analitik. Kesalahan karena tidak diperhitungkannya suku-suku akhir deret Taylor disebut kesalahan pemotongan.

Pada persamaan (2.2), kesalahan pemotongannya adalah persamaan (2.3) yang menunjukkan bahwa kesalahan pemotongan

mempunyai orde $n+1$ yang biasa dinotasikan $O(\Delta x^{n+1})$ dengan $\Delta x = x_{i+1} - x_i$. Kesalahan pemotongan akan semakin kecil apabila Δx kecil dan suku-suku akhir deret tersebut diperhitungkan (Triatmojo, 2002).

2.4 Beda Hingga

Suatu metode numerik yang memanfaatkan deret Taylor untuk mendekati nilai turunan disebut metode beda hingga. Terdapat empat faktor penting dalam metode beda hingga tersebut, yaitu:

1. Derajat deret
2. Titik di mana turunan tersebut didekati
3. Orde turunan
4. Nilai fungsi yang telah diketahui yang digunakan dalam metode sebagai nilai awal.

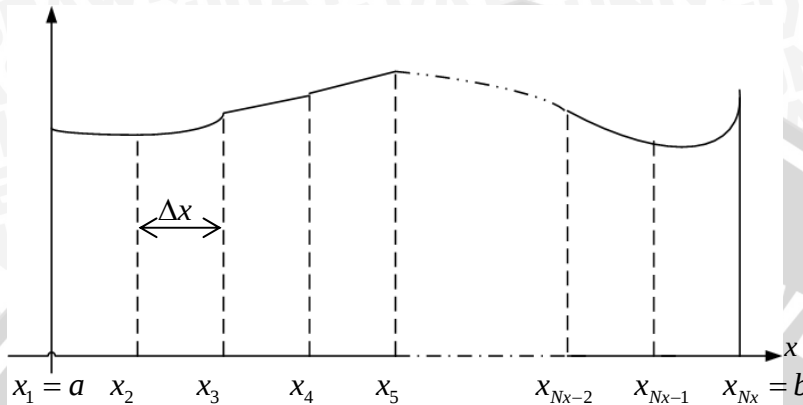
Pendekatan turunan dengan menggunakan rumusan beda hingga dapat dilakukan dari kiri, kanan, atau titik tengah yang akan digunakan untuk menentukan nilai fungsi pada titik tertentu yang biasa dikenal dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Ross, 1984).

Untuk memahami teknik beda hingga, pertama kali perlu dikenalkan istilah dan konsep dasar dalam kaitannya dengan teori pendekatan. Konsep dasarnya sangat sederhana. Domain penyelesaian PDP terlebih dahulu dibagi menjadi sejumlah hingga grid (mesh). Turunan pada masing-masing titik kemudian didekati dengan beda hingga. Cara lain adalah menyatakan penyelesaian PDP dengan interpolasi polinom dan turunan dari polinom tersebut.

Perhatikan fungsi $T(x)$ yang merupakan fungsi kontinu dengan satu variabel seperti diilustrasikan pada Gambar 2.1. Domain x yaitu selang $[a,b]$ dibagi menjadi $Nx - 1$ sub-interval (Nx titik) sedemikian sehingga

$$T(x_i) = T(x_1 + (i-1)\Delta x) \equiv T_i \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, Nx \quad (2.4)$$

dengan $\Delta x = (b - a) / Nx$. Bilangan bulat i menyatakan indeks titik sepanjang koordinat x .



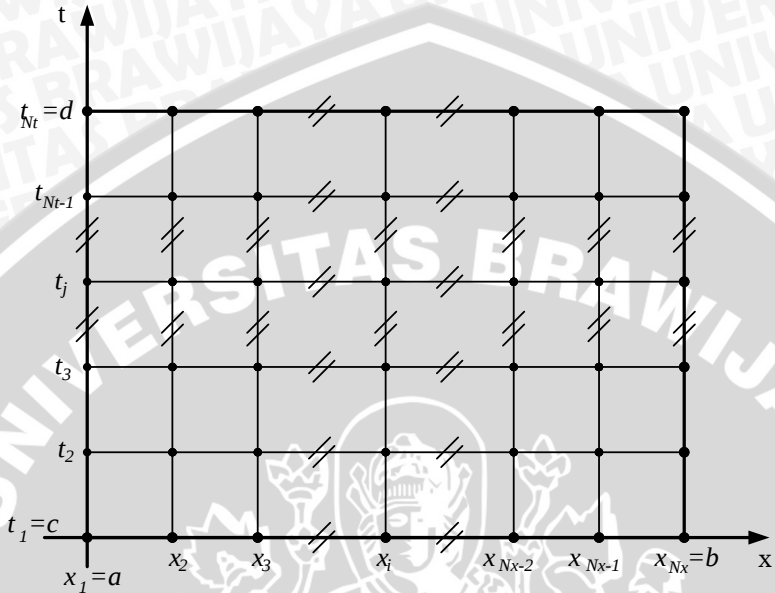
Gambar 2.1 Diskritisasi beda hingga dari $T = T(x)$ dengan lebar grid konstan Δx .

Diskritisasi domain untuk fungsi dengan dua variabel bebas dapat dilakukan dengan cara yang sama. Interval x dibagi dengan cara tersebut di atas, demikian pula untuk interval y yaitu selang $[c, d]$, seperti diilustrasikan pada Gambar 2.2. Dengan cara yang sama, fungsi $T(x_i, t_j)$ dapat dinyatakan sebagai

$$T(x_i, t_j) = T(x_1 + (i-1)\Delta x, t_1 + (j-1)\Delta t) \equiv T_i^j; i = 1, 2, \dots, Nx$$

$$\text{dan } j = 1, 2, \dots, Nt \quad (2.5)$$

dengan $\Delta t = (d - c) / Nt$.



Gambar 2.2 Diskritisasi fungsi dengan dua variabel bebas $T(x, t)$ dengan lebar grid konstan Δx dan Δt .

(Suryanto, 2005).

2.4.1 Pendekatan Beda Maju

Jika pada pendekatan turunan pertama yang digunakan adalah titik x_i dan x_{i+1} , maka deret Taylornya menjadi :

$$T_{i+1}^j = T_i^j + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots \quad (2.6)$$

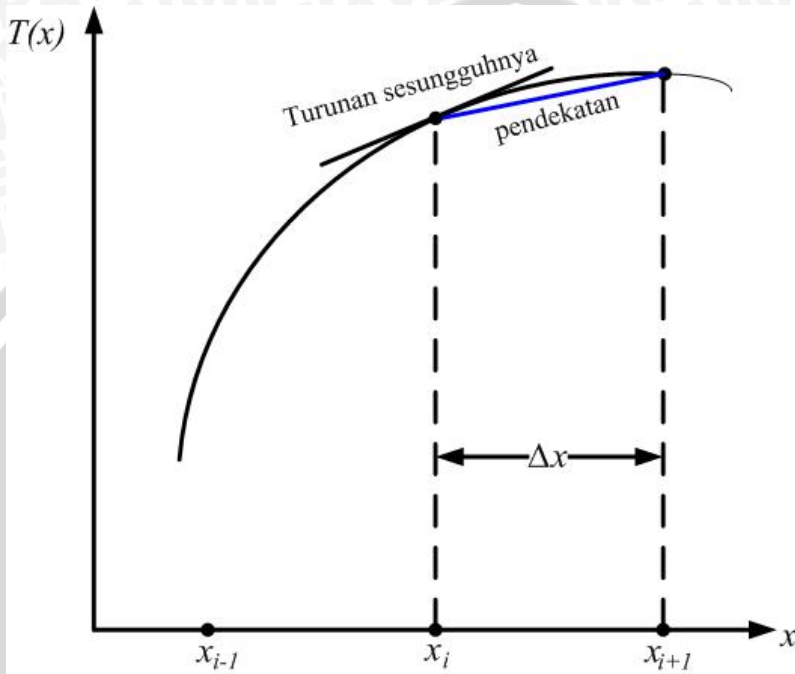
atau dapat ditulis

$$T_{i+1}^j = T_i^j + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + O(\Delta x^2). \quad (2.7)$$

Jadi pendekatan beda hingga maju untuk turunan pertama terhadap x adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.8)$$

Dari uraian di atas didapatkan kesalahan pemotongan dengan orde Δx . (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.3 Pendekatan beda maju

(Chapra, 2002).

2.4.2 Pendekatan Beda Mundur

Jika pada pendekatan turunan pertama yang digunakan adalah titik x_i dan x_{i-1} , maka deret Taylornya menjadi :

$$T_{i-1}^j = T_i^j - \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots \quad (2.9)$$

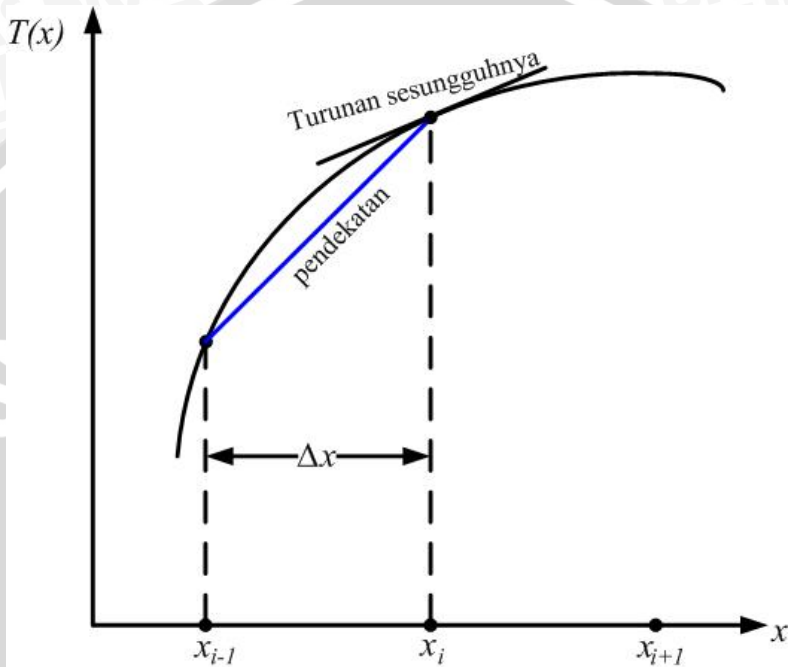
atau dapat ditulis

$$T_{i-1}^j = T_i^j - \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + O(\Delta x^2). \quad (2.10)$$

Jadi pendekatan beda hingga mundur untuk turunan pertama terhadap x adalah sebagai berikut :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (2.11)$$

Dari uraian di atas didapatkan kesalahan pemotongan dengan orde Δx . (Triatmodjo, 2002).



Gambar 2.4 Pendekatan beda mundur

(Chapra, 2002).

2.4.3 Pendekatan Beda Pusat

Cara ke tiga pendekatan turunan pertama adalah mengurangi ekspansi deret Taylor maju :

$$T_{i+1}^j = T_i^j + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.12)$$

dengan ekspansi deret Taylor mundur :

$$T_{i-1}^j = T_i^j - \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.13)$$

sehingga diperoleh

$$T_{i+1}^j - T_{i-1}^j = 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.14)$$

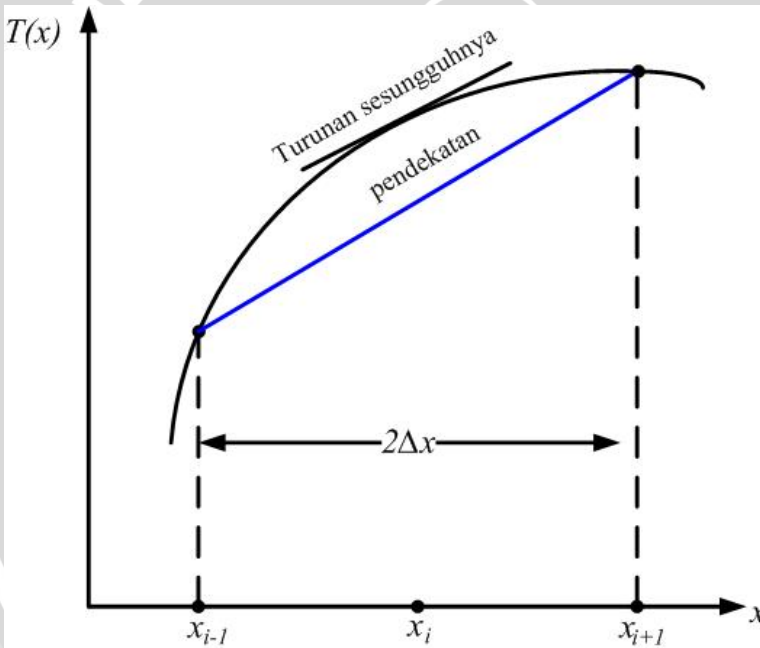
atau dapat ditulis

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} - \frac{\Delta x^2}{3} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.15)$$

atau

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} - O(\Delta x^2). \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) adalah skema beda pusat untuk turunan pertama, dengan kesalahan pemotongan orde $O(\Delta x^2)$. Dengan demikian beda pusat lebih akurat daripada beda maju maupun mundur. (Chapra, 2002)



Gambar 2.5 Pendekatan beda pusat

(Chapra, 2002).

Dengan cara yang sama, dapat ditentukan pendekatan turunan pertama, ke dua dan seterusnya dengan beda hingga, dan dengan orde dua, tiga dan seterusnya. Sebagai ilustrasi akan ditentukan pendekatan turunan pertama dengan metode beda maju orde ke dua.

Beda maju orde dua hampir sama dengan orde pertama yaitu menggunakan ekspansi Taylor :

$$T_{i+2}^j = T_i^j + 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + 4 \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 8 \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.17)$$

Untuk mendapatkan beda maju turunan pertama terhadap x orde dua, maka persamaan (2.12) dikalikan dengan 4 kemudian dikurangi persamaan (2.17), sehingga diperoleh

$$-3T_i^j + 4T_{i+1}^j - T_{i+2}^j = 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} - 4 \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots, \quad (2.18)$$

atau dapat ditulis

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-3T_i^j + 4T_{i+1}^j - T_{i+2}^j}{2\Delta x} + O(\Delta x^2). \quad (2.19)$$

Persamaan (2.19) adalah skema beda maju untuk turunan pertama, dengan kesalahan pemotongan orde $O(\Delta x^2)$.

Berikut ini adalah tabel pendekatan turunan pertama hingga turunan ke empat yang mempunyai orde dua dengan metode beda hingga maju, mundur dan metode beda pusat.

Tabel 2.1 Tabel Beda Hingga Orde Dua

BEDA HINGGA	SKEMA NUMERIK
Beda Maju	$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{-3T_i + 4T_{i+1} - T_{i+2}}{2\Delta x}$
	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{2T_i - 5T_{i+1} + 4T_{i+2} - T_{i+3}}{\Delta x^2}$
	$\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \approx \frac{-5T_i + 18T_{i+1} - 24T_{i+2} + 14T_{i+3} - 3T_{i+4}}{2\Delta x^3}$
	$\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \approx \frac{3T_i - 14T_{i+1} + 26T_{i+2} - 24T_{i+3} + 11T_{i+4} - 2T_{i+5}}{\Delta x^4}$

Beda Mundur	$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{3T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{2\Delta x}$
	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{2T_i - 5T_{i-1} + 4T_{i-2} - T_{i-3}}{\Delta x^2}$
	$\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \approx \frac{5T_i - 18T_{i-1} + 24T_{i-2} - 14T_{i-3} + 3T_{i-4}}{2\Delta x^3}$
	$\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \approx \frac{3T_i - 14T_{i-1} + 26T_{i-2} - 24T_{i-3} + 11T_{i-4} - 2T_{i-5}}{\Delta x^4}$
Beda Pusat	$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x}$
	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta x^2}$
	$\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \approx \frac{T_{i+2} - 2T_{i+1} + 2T_{i-1} - T_{i-2}}{2\Delta x^3}$
	$\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \approx \frac{T_{i+2} - 4T_{i+1} + 6T_i - 4T_{i-1} + T_{i-2}}{\Delta x^4}$

(Mathews, 2004).

2.5 Persamaan Konveksi-Difusi

Persamaan konveksi-difusi pada umumnya adalah suatu persamaan diferensial parsial yang menguraikan gejala perpindahan seperti perpindahan kalor, perpindahan massa, dinamika fluida (perpindahan momentum), dan lain lain. Semua proses perpindahan menyatakan suatu prinsip konservasi tertentu. Sebagai contoh, temperatur suatu cairan di dalam suatu pipa yang panas akan naik karena adanya fenomena konveksi dan temperatur fluida atau cairan tersebut akan kembali normal atau turun, karena adanya fenomena difusi. Dengan demikian persamaan diferensial parsial, dalam hal ini persamaan konveksi-difusi mengandung dua fenomena yaitu difusi dan konveksi sehingga persamaan tersebut biasa disebut persamaan konveksi-difusi.

Model persamaan konveksi-difusi satu dimensi yang umum digunakan adalah

$$\frac{\partial T}{\partial t} + C \frac{\partial T}{\partial x} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad (2.20)$$

dengan t menyatakan waktu, x menyatakan ruang, $C \geq 0$ dan $D \geq 0$ berturut-turut adalah laju konveksi dan koefisien difusi, dan T suatu kuantitas skalar (sebagai contoh temperatur) (Polanco, 2000).

2.6 Solusi Eksak Persamaan Konveksi-Difusi Satu Dimensi

Salah satu solusi eksak persamaan konveksi-difusi satu dimensi (2.20), dengan syarat awal

$$T(x, 0) = \frac{0,1}{\sqrt{0,01}} \exp \left[-\frac{(x-0,5)^2}{0,01} \right] \quad (2.21)$$

adalah

$$T(x, t) = \frac{0,1}{\sqrt{0,01+4Dt}} \exp \left[-\frac{(x-0,5-Ct)^2}{0,01+4Dt} \right]. \quad (2.22)$$

(Polanco, 2000)

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB III PEMBAHASAN

3.1 Skema Numerik Persamaan Konveksi-difusi

Diberikan model persamaan konveksi-difusi satu dimensi pada persamaan (2.20)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + C \frac{\partial T}{\partial x} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Untuk mendapatkan skema numerik metode beda pusat-upwind bias, digunakan beda hingga.

3.1.1 Metode Beda Pusat

Untuk memperoleh skema beda pusat dari persamaan konveksi-difusi dilakukan pendekatan beda hingga. Untuk turunan temporal pertama fungsi T digunakan pendekatan beda mundur orde pertama yang berbentuk

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta t}, \quad (3.1)$$

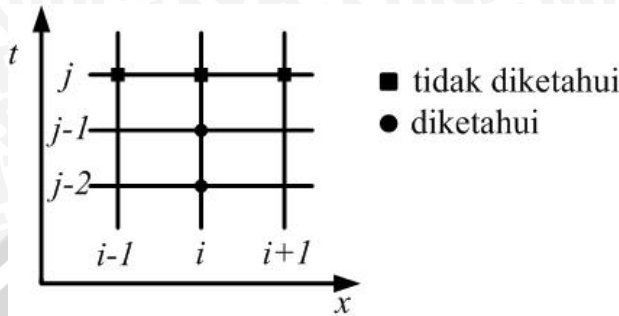
dan pendekatan beda mundur orde dua

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{3T_i^j - 4T_i^{j-1} + T_i^{j-2}}{2\Delta t}. \quad (3.2)$$

Pendekatan orde pertama pada persamaan (3.1) digunakan untuk mencari nilai-nilai T pada titik-titik domain spasial level waktu pertama (titik-titik ke dua), sedangkan pendekatan orde ke dua pada persamaan (3.2) digunakan untuk mencari nilai-nilai T pada titik-titik domain spasial level waktu ke dua (titik-titik ke tiga) dan seterusnya sampai dengan batas grid yang telah ditentukan.

Bila pendekatan turunan spasial pertama dan ke dua fungsi T menggunakan pendekatan beda pusat orde ke dua, maka skema numerik metode beda pusat orde dua untuk persamaan konveksi-difusi satu dimensi (2.20) berbentuk

$$\left[\frac{3T_i^j - 4T_i^{j-1} + T_i^{j-2}}{2\Delta t} \right] + C \left[\frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \right] = D \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right]. \quad (3.3)$$



Gambar 3.1 Stensil untuk metode beda pusat orde dua

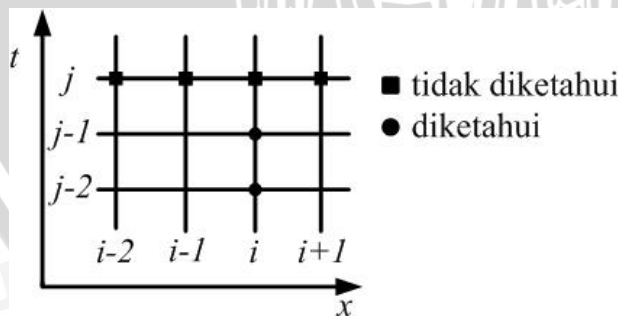
3.1.2 Metode Upwind Bias

Metode upwind bias memiliki skema numerik yang hampir sama dengan metode beda pusat. Perbedaannya terletak pada pendekatan untuk turunan spasial pertama fungsi T , yang didekati dengan beda mundur orde ke dua

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j}{2\Delta x} \quad (3.4)$$

Dengan demikian skema numerik metode upwind bias orde dua untuk persamaan konveksi-difusi satu dimensi (2.20) berbentuk

$$\begin{aligned} \left[\frac{3T_i^j - 4T_{i-1}^{j-1} + T_{i-2}^{j-2}}{2\Delta t} \right] + C \left[\frac{3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j}{2\Delta x} \right] \\ = D \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right] \end{aligned} \quad (3.5)$$



Gambar 3.2 Stensil untuk metode upwind bias

3.1.3 Metode Beda Pusat-Upwind Bias

Untuk mendapatkan skema numerik yang akan digunakan dalam skripsi ini, maka metode beda pusat dan metode upwind bias pada persamaan (3.3) dan persamaan (3.5) digabung sehingga menghasilkan skema numerik baru yang biasa disebut sebagai metode beda pusat-upwind bias yang berbentuk

$$\left[\frac{3T_i^j - 4T_i^{j-1} + T_i^{j-2}}{2\Delta t} \right] + C \left[(1-\omega) \left(\frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) + \omega \left(\frac{3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j}{2\Delta x} \right) \right] = D \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right]. \quad (3.6)$$

Dalam skema tersebut, bobot ω menentukan kecenderungan metode yang digunakan dan diasumsikan tidak negatif serta $0 \leq \omega$. Bila $\omega = 0$, maka pendekatan persamaan konveksinya menggunakan beda pusat, sedangkan bila $\omega = 1$, maka menggunakan metode upwind bias.

Untuk mencari nilai-nilai T pada titik-titik domain spasial level waktu pertama (titik-titik ke dua) digunakan turunan temporal pertama orde satu, sehingga persamaan (3.6) menjadi

$$\left[\frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta t} \right] + C \left[(1-\omega) \left(\frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \right) + \omega \left(\frac{3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j}{2\Delta x} \right) \right] = D \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{(\Delta x)^2} \right]. \quad (3.7)$$

Dengan mengambil $\alpha = \frac{c}{2}$ dan $s = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$, di mana $c = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$ adalah Courant number dan s adalah bilangan difusi, maka persamaan (3.7) dapat ditulis sebagai

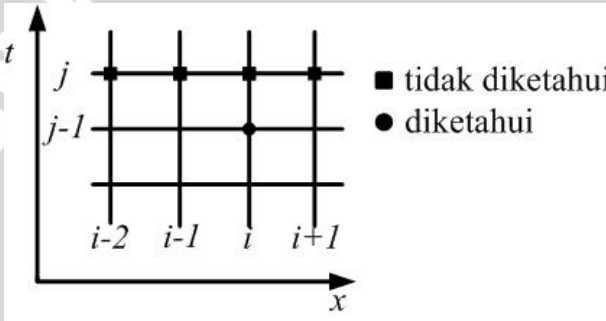
$$\left[T_i^j - T_i^{j-1} \right] + \alpha \left[(1-\omega) (T_{i+1}^j - T_{i-1}^j) + \omega (3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j) \right] = s (T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j), \quad (3.8)$$

atau

$$\alpha\omega T_{i-2}^j - (\alpha(1-\omega) + 4\alpha\omega + s)T_{i-1}^j + (1 + 3\alpha\omega + 2s)T_i^j + (\alpha(1-\omega) - s)T_{i+1}^j = T_i^{j-1}. \quad (3.9)$$

Dengan mengambil $E1 = \alpha\omega$, $F1 = (\alpha(1-\omega) + 4\alpha\omega + s)$, $G1 = (1 + 3\alpha\omega + 2s)$ dan $H1 = (\alpha(1-\omega) - s)$, persamaan (3.9) dapat ditulis menjadi

$$E1T_{i-2}^j - F1T_{i-1}^j + G1T_i^j + H1T_{i+1}^j = T_i^{j-1}. \quad (3.10)$$



Gambar 3.3 Stensil untuk metode beda pusat-upwind bias untuk $j=2$

Persamaan (3.10) digunakan untuk menentukan nilai fungsi T pada domain temporal level ke dua dengan nilai $i = 1, 2, \dots, Nx$, dan $j = 2$ sedangkan untuk langkah $j = 1$ digunakan syarat awal.

Untuk menentukan nilai T pada level waktu ke dua ($j = 2$), persamaan (3.10) di implementasikan $\forall i, 1 \leq i \leq Nx$.

$i = 1$:

$$G1T_1^2 + H1T_2^2 = T_1^1 - E1.T(-2\Delta x, j = 2) + F1.T(-\Delta x, j = 2)$$

$i = 2$:

$$F1T_1^2 + G1T_2^2 + H1T_3^2 = T_2^1 - E1.T(-\Delta x, j = 2)$$

$i = 3$:

$$E1T_1^2 - F1T_2^2 + G1T_3^2 + H1T_4^2 = T_3^1$$

⋮

$$i = N_x - 1:$$

$$E1T_{N_x-3}^2 - F1T_{N_x-2}^2 + G1T_{N_x-1}^2 + H1T_{N_x}^2 = T_{N_x-1}^1$$

$$i = N_x:$$

$$E1T_{N_x-2}^2 - F1T_{N_x-1}^2 + G1T_{N_x}^2 = T_{N_x}^1 - H1.T(N_x + \Delta x, j = 2).$$

Uraian tersebut dapat diringkas menjadi bentuk

$$A_1 T_i^2 = T_i^1 + B_1 ; i = 0, 1, 2, \dots, N_x, \quad (3.11)$$

di mana

$$A_1 = \begin{bmatrix} G1 & H1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F1 & G1 & H1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E1 & -F1 & G1 & H1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E1 & -F1 & G1 & H1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & E1 & -F1 & G1 \end{bmatrix}$$

$$(T_i^2)^{trans} = \begin{bmatrix} T_1^2 & T_2^2 & T_3^2 & \dots & T_{N_x-1}^2 & T_{N_x}^2 \end{bmatrix},$$

$$(T_i^1)^{trans} = \begin{bmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 & \dots & T_{N_x-1}^1 & T_{N_x}^1 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -E1.T(-2\Delta x, j=2) + F1.T(-\Delta x, j=2) \\ -E1.T(-\Delta x, j=2) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -H1.T(Nx + \Delta x, j=2) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya untuk mencari nilai fungsi T pada domain temporal level ke tiga dan seterusnya digunakan persamaan (3.6). Mengingat $\alpha = \frac{c}{2}$, $s = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$, dan $c = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$, maka persamaan (3.6) dapat ditulis sebagai :

$$\left[3T_i^j - 4T_i^{j-1} + T_i^{j-2} \right] + 2\alpha \left[(1-\omega)(T_{i+1}^j - T_{i-1}^j) + \omega(3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j) \right] = 2s \left[T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j \right], \quad (3.12)$$

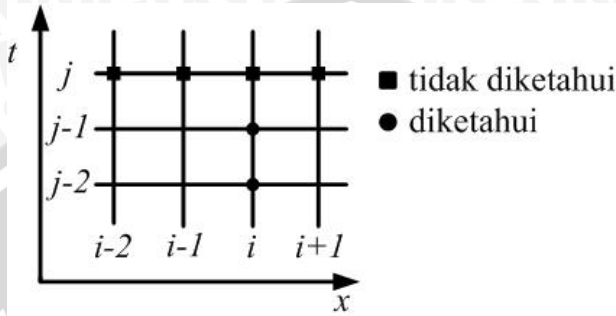
atau

$$\left[2\alpha(1-\omega) - 2s \right] T_{i+1}^j + \left[3 + 6\alpha\omega + 4s \right] T_i^j - \left[(1-\omega)2\alpha + 8\alpha\omega + 2s \right] T_{i-1}^j + 2\alpha\omega T_{i-2}^j = 4T_i^{j-1} - T_i^{j-2}. \quad (3.13)$$

Dengan mengambil $E2 = 2\alpha\omega$, $F2 = \left[(1-\omega)2\alpha + 8\alpha\omega + 2s \right]$,

$G2 = \left[3 + 6\alpha\omega + 4s \right]$ dan $H2 = \left[2\alpha(1-\omega) - 2s \right]$, persamaan (3.13) dapat ditulis menjadi:

$$E2T_{i-2}^j - F2T_{i-1}^j + G2T_i^j + H2T_{i+1}^j = 4T_i^{j-1} - T_i^{j-2}. \quad (3.14)$$



Gambar 3.4 Stensil untuk metode beda pusat-upwind bias untuk $j=3,4,...Nt$

Dari persamaan (3.14), untuk menentukan nilai T pada level waktu ke tiga dan seterusnya ($j=3,4,...Nt$), persamaan (3.14) diimplementasikan $\forall i, 1 \leq i \leq Nx$.

$i=1$:

$$G2T_1^j + H2T_2^j = 4T_1^{j-1} - T_1^{j-2} - E2.T(-2\Delta x, j=3,4,...Nt) + F2.T(-\Delta x, j=3,4,...Nt)$$

$i=2$:

$$F2T_1^j + G2T_2^j + H2T_3^j = 4T_2^{j-1} - T_2^{j-2} - E2.T(-\Delta x, j=3,4,...Nt)$$

$i=3$:

$$E2T_1^j - F2T_2^j + G2T_3^j + H2T_4^j = 4T_3^{j-1} - T_3^{j-2}$$

$\vdots$

$i=Nx-1$:

$$E2T_{Nx-3}^j - F2T_{Nx-2}^j + G2T_{Nx-1}^j + H2T_{Nx}^j = 4T_{Nx-1}^{j-1} - T_{Nx-1}^{j-2}$$

$i=Nx$:

$$E2T_{Nx-2}^j - F2T_{Nx-1}^j + G2T_{Nx}^j = 4T_{Nx}^{j-1} - T_{Nx}^{j-2} - H2.T(Nx + \Delta x, j=3,4,...Nt).$$

Uraian tersebut dapat diringkas menjadi bentuk

$$A_2 T_i^j = 4T_i^{j-1} - T_i^{j-2} + B_2 \quad ; i = 0, 1, 2, \dots, N_x, \quad (3.15)$$

di mana

$$A_2 = \begin{bmatrix} G2 & H2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -F2 & G2 & H2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E2 & -F2 & G2 & H2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E2 & -F2 & G2 & H2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & E2 & -F2 & G2 \end{bmatrix}$$

$$(T_i^j)^{trans} = [T_1^j \quad T_2^j \quad T_3^j \quad \dots \quad T_{N_x-1}^j \quad T_{N_x}^j],$$

$$(T_i^{j-1})^{trans} = [T_1^{j-1} \quad T_2^{j-1} \quad T_3^{j-1} \quad \dots \quad T_{N_x-1}^{j-1} \quad T_{N_x}^{j-1}],$$

$$(T_i^{j-2})^{trans} = [T_1^{j-2} \quad T_2^{j-2} \quad T_3^{j-2} \quad \dots \quad T_{N_x-1}^{j-2} \quad T_{N_x}^{j-2}], \text{ dan}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} -E2.T(-2\Delta x, j = 3, 4, \dots, Nt) + F2.T(-\Delta x, j = 3, 4, \dots, Nt) \\ -E2.T(-\Delta x, j = 3, 4, \dots, Nt) \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -H2.T(N_x + \Delta x, j = 3, 4, \dots, Nt) \end{bmatrix}.$$

3.2 Kesalahan Pemotongan Metode Beda Pusat-Upwind Bias

3.2.1 Kesalahan pemotongan turunan temporal pertama

Dengan menggunakan ekspansi Taylor diperoleh :

$$\begin{aligned} -4T_i^{j-1} = & -4T_i^j + 4\Delta t \frac{\partial T}{\partial t} - 4 \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \\ & + 4 \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + O(\Delta t^4), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} T_i^{j-2} = & T_i^j - 2\Delta t \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{4\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \\ & - \frac{8\Delta t^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + O(\Delta t^4). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Bila persamaan (3.16) dan (3.17) dijumlahkan, maka diperoleh

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{4}{2} \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + O(\Delta t^3) = \left[\frac{3T_i^j - 4T_i^{j-1} + T_i^{j-2}}{2\Delta t} \right]. \quad (3.18)$$

Dari persamaan (3.18) diperoleh :

$$TE_t = -\frac{4}{2} \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + O(\Delta t^3). \quad (3.19)$$

3.2.2 Kesalahan pemotongan turunan spasial pertama

Dengan menggunakan ekspansi Taylor diperoleh :

$$\begin{aligned} (1-\omega)T_{i+1}^j = & (1-\omega)T_i^j + \Delta x(1-\omega) \frac{\partial T}{\partial x} + (1-\omega) \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ & + (1-\omega) \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + (1-\omega) \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^5), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} -(1-\omega)T_{i-1}^j = & -(1-\omega)T_i^j + \Delta x(1-\omega) \frac{\partial T}{\partial x} - (1-\omega) \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \\ & + (1-\omega) \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - (1-\omega) \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^5), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned}
-4\omega T_{i-1}^j &= -4\omega T_i^j + 4\omega\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} - 4\omega \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 4\omega \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \\
&\quad - 4\omega \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^5),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

$$\begin{aligned}
\omega T_{i-2}^j &= \omega T_i^j - 2\omega\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + 4\omega \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - 8\omega \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \\
&\quad + 16\omega \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^5).
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Persamaan (3.20)-(3.23) dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}
(1-\omega) \left[T_{i+1}^j - T_{i-1}^j \right] + \omega \left[3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j \right] \\
= 2\Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + 2(1-3\omega) \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + O(\Delta x^4),
\end{aligned} \tag{3.24}$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned}
(1-\omega) \left[\frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2\Delta x} \right] + \omega \left[\frac{3T_i^j - 4T_{i-1}^j + T_{i-2}^j}{2\Delta x} \right] \\
= \frac{\partial T}{\partial x} + (1-3\omega) \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + O(\Delta x^3).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Dari persamaan (3.25) diperoleh

$$TE_x = (1-3\omega) \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + O(\Delta x^3). \tag{3.26}$$

3.2.3 Kesalahan pemotongan turunan spasial ke dua

Dengan menggunakan ekspansi Taylor diperoleh :

$$\begin{aligned}
T_{i+1}^j &= T_i^j + \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \\
&\quad + \frac{\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + O(\Delta x^6),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$T_{i-1}^j = T_i^j - \Delta x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \frac{\Delta x^5}{5!} \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + O(\Delta x^6). \quad (3.28)$$

Persamaan (3.27) dan (3.28) dijumlahkan, sehingga diperoleh

$$\left[T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j \right] = \Delta x^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^4}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^6), \quad (3.29)$$

atau dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^4) = \left[\frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right]. \quad (3.30)$$

Dari persamaan (3.30) diperoleh

$$TE_{xx} = \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + O(\Delta x^4). \quad (3.31)$$

Untuk mendapatkan kesalahan numerik metode beda pusat-upwind bias, persamaan (3.19), (3.26), dan (3.31) disubstitusikan ke dalam persamaan berikut :

$$TE = TE_t + CTE_x - DTE_{xx}, \quad (3.32)$$

sehingga diperoleh

$$TE = \left[-\frac{4}{2} \frac{\Delta t^2}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \right] + \left[C(1-3\omega) \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} \right] - \left[D \frac{\Delta x^2}{12} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right] + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3), \quad (3.33)$$

atau disederhanakan menjadi

$$TE = \frac{\Delta x^2}{12} \left[2C(1-3\omega) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right] - 2 \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3). \quad (3.34)$$

3.3 Modifikasi Ekuivalensi Persamaan Diferensial Parsial

Modifikasi ekuivalensi persamaan diferensial (MEPDP) digunakan untuk menyelidiki karakteristik numerik dari difusi dan konveksi dalam skema beda hingga yang diperoleh (3.6). Teknik

MEPDP melibatkan penentuan kembali ekspansi Taylor dari skema numerik. MEPDP dari persamaan (2.20), yaitu

$$\frac{\partial T}{\partial t} + C \frac{\partial T}{\partial x} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + TE = 0, \quad (3.35)$$

dimana TE adalah kesalahan pemotongan dari skema numerik metode beda pusat-upwind bias (3.34). Ekuivalensi PDP untuk mensubstitusi turunan temporal persamaan (2.20) adalah

$$C \frac{\partial T}{\partial x} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (3.36)$$

atau

$$\left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.37)$$

Sehingga dari persamaan (3.37) diperoleh :

$$- \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} \approx \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right]^3 \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}. \quad (3.38)$$

Untuk penurunan persamaan (3.38), diberikan pada lembar lampiran. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.38) ke dalam persamaan (3.34) diperoleh kesalahan pemotongan MEPDP

$$\begin{aligned} TE = & \frac{\Delta x^2}{12} \left[2C(1-3\omega) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right] + \\ & \frac{2\Delta t^2}{6} \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right]^3 \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3), \end{aligned} \quad (3.39)$$

atau dapat ditulis

$$\begin{aligned} TE = & \frac{2\Delta t^2}{6} \left[C^3 \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - 3C^2 D \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + 3CD^2 \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} - D^3 \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} \right] \\ & + \frac{\Delta x^2}{12} \left[2C(1-3\omega) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right] + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Menurut Hyett dan Noye (Polanco, 2000), kesalahan pemotongan MEPDP berbentuk:

$$TE = \sum_{k=3}^{\infty} C(\Delta x)^{k-1} \frac{\eta_k}{k!} \frac{\partial^k T}{\partial x^k} \quad (3.41)$$

Dengan menyamakan setiap suku pada persamaan (3.40) dan (3.41), maka diperoleh :

- untuk $k=3$

$$C(\Delta x)^2 \frac{\eta_3}{3!} \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = \left[\frac{2\Delta t^2}{6} C^3 + \frac{\Delta x^2}{6} C(1-3\omega) \right] \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}$$

$$\frac{\eta_3}{3!} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2 6} 2C^2 + \frac{1}{6} (1-3\omega)$$

$$\frac{\eta_3}{3!} = \frac{1}{6} \left[2c^2 + (1-3\omega) \right] \quad (3.42)$$

- untuk $k=4$

$$C(\Delta x)^3 \frac{\eta_4}{4!} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = \left[-\frac{2\Delta t^2}{6} 3C^2 D - \frac{\Delta x^2}{12} D \right] \frac{\partial^4 T}{\partial x^4}$$

$$\frac{\eta_4}{4!} = - \left[\frac{2\Delta t^2}{\Delta x^3 6} 3CD + \frac{1}{12\Delta x} \frac{D}{C} \right]$$

$$\frac{\eta_4}{4!} = -\frac{1}{12} \left[12cs + \frac{s}{c} \right], \quad (3.43)$$

- untuk $k=5$

$$C(\Delta x)^4 \frac{\eta_5}{5!} \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} = \frac{2\Delta t^2}{6} 3CD^2 \frac{\partial^5 T}{\partial x^5}$$

$$\frac{\eta_5}{5!} = \frac{\Delta t^2}{\Delta x^4} D^2 = s^2, \quad (3.44)$$

- untuk $k=6$

$$C(\Delta x)^5 \frac{\eta_6}{6!} \frac{\partial^6 T}{\partial x^6} = -\frac{2\Delta t^2}{6} D^3 \frac{\partial^6 T}{\partial x^6}$$

$$\frac{\eta_6}{6!} = -\frac{\Delta t^2}{3\Delta x^5} \frac{D^3}{C}$$

$$\frac{\eta_6}{6!} = -\frac{s^3}{3c} \quad (3.45)$$

Persamaan (3.42)-(3.45) digunakan untuk menentukan nilai karakteristik perambatan gelombang, yaitu rasio antara solusi numerik dan solusi eksak untuk amplitudo dan kecepatan gelombang setelah satu periode. Noye (Polanco, 2000) menotasikan karakteristik amplitudo gelombang dengan ζ , sedangkan karakteristik kecepatan gelombang dinotasikan dengan μ , di mana

$$\zeta = \exp \left[2\pi \sum_{k=4(2)}^{\infty} (-1)^{(k/2)+1} \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda}} \right)^{k-1} \frac{\eta_k}{k!} \right] \quad (3.46)$$

dan

$$\mu = 1 + \sum_{k=3(2)}^{\infty} (-1)^{(k-1)/2} \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda}} \right)^{k-1} \frac{\eta_k}{k!} \quad (3.47)$$

Parameter $N_{\lambda} = \lambda / \Delta x$ didefinisikan sebagai jumlah grid dalam satu panjang gelombang. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.42)-(3.45) ke dalam persamaan (3.46) dan (3.47), diperoleh

$$\zeta = \exp \left[2\pi \left(\frac{1}{12} \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda}} \right)^3 \left(12cs + \frac{s}{c} \right) - \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda}} \right)^5 \left(\frac{s^3}{3ck} \right) + \dots \right] \right]$$

$$= \exp \left[\frac{\pi}{6} \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda}} \right)^3 \frac{s}{c} \left((1+12c^2) - 4 \left(\frac{2\pi}{N_{\lambda}} \right)^2 s^2 + \dots \right) \right] \quad (3.48)$$

dan

$$\begin{aligned}\mu &= 1 + \left[-\left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 \frac{1}{6} (2c^2 + (1-3\omega)) + \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^4 (s^2) + \dots \right] \\ &= 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 \left[(1-3\omega + 2c^2) - 6s^2 \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 + \dots \right].\end{aligned}\quad (3.49)$$

Pada persamaan (3.48) terlihat bahwa karakteristik amplitudo gelombang tidak memuat ω . Bobot hanya berpengaruh pada kecepatan gelombang, sehingga untuk meminimalkan kesalahan numerik, suku yang mengandung bobot pada persamaan (3.49) dieliminasi yaitu

$$-\frac{1}{6} \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 \left[(1-3\omega + 2c^2) - 6s^2 \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 + \dots \right] = 0. \quad (3.50)$$

Persamaan (3.50) menghasilkan

$$-\frac{1}{6} \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 = 0, \quad (3.51)$$

atau

$$\left[(1-3\omega + 2c^2) - 6s^2 \left(\frac{2\pi}{N_\lambda}\right)^2 + \dots \right] = 0. \quad (3.52)$$

Mengingat semakin besar nilai parameter N_λ , maka polinomial pada persamaan (3.52) mempunyai nilai yang sangat kecil, sehingga dapat diabaikan. Hal tersebut mengakibatkan nilai

$$(1-3\omega + 2c^2) = 0, \quad (3.53)$$

sehingga diperoleh nilai bobot ω optimal

$$\omega = \omega_{opt} = \frac{1}{3} [1 + 2c^2]. \quad (3.54)$$

3.4 Algoritma Skema Numerik Metode Beda Pusat-Upwind Bias

Algoritma skema numerik metode beda pusat-upwind bias diuraikan sebagai berikut:

Input : lebar domain x , lebar grid x (Δx), waktu t , lebar grid t (Δt), banyak sub-interval t (Nt), banyak sub-interval x (Nx), kecepatan konveksi (C), koefisien difusi (D), kondisi awal $T(x,0)$.

Output : $T(x,t)$

Langkah-langkah :

Langkah 1 : Hitung nilai $c = C \frac{\Delta t}{\Delta x}$, dan $s = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$.

Langkah 2 : hitung nilai $\alpha = \frac{c}{2}$, $Pe = \frac{c}{s}$, dan $\omega = \frac{1}{3}(1 + 2c^2)$.

Langkah 3 : hitung nilai $E1 = \alpha\omega$, $F1 = (\alpha(1-\omega) + 4\alpha\omega + s)$,
 $G1 = (1 + 3\alpha\omega + 2s)$ dan $H1 = (\alpha(1-\omega) - s)$.

Langkah 4 : menghitung nilai T_i^j dengan langkah (5-12)

Langkah 5 : untuk $j = 2$ dan $i = 1, 2, \dots, Nx$ dengan
Langkah-langkah (6-8)

Langkah 6 : Bentuk matrik A1 dengan entri-entri E1, F1, G1, dan H1, dan bentuk matrik B1 yang merupakan nilai ruas kanan sistem persamaan linier yang dibentuk oleh skema.

Langkah 7 : hitung nilai V1
 $V1 = A1^{-1}(T_i^1 - B1)$.

Langkah 8 : diperoleh nilai T_i^2 dari V1
 $T_i^2 = V1$

langkah 9 : untuk $j = 3, 4, \dots, Nt$ dan $i = 1, 2, \dots, Nx$
dengan langkah-langkah (10-13)

Langkah 10 : hitung nilai, $E2 = 2\alpha\omega$,
 $F2 = [(1-\omega)2\alpha + 8\alpha\omega + 2s]$,

$$G2 = [3 + 6\alpha\omega + 4s] \text{ dan}$$

$$H2 = [2\alpha(1 - \omega) - 2s].$$

Langkah 11 : Bentuk matrik A2 dengan entri-entri E2, F2, G2, dan H2, dan bentuk matrik B2 yang merupakan nilai ruas kanan sistem persamaan linier yang dibentuk oleh skema.

Langkah 12 : hitung nilai V2

$$V2 = A2^{-1}(4T_i^{j-1} - T_i^{j-2} - B2).$$

Langkah 13 : diperoleh nilai T_i^j dari V2

$$T_i^j = V2$$

Langkah 14 : plot solusi $T(x, t)$ yang diperoleh

Langkah 15 : selesai.

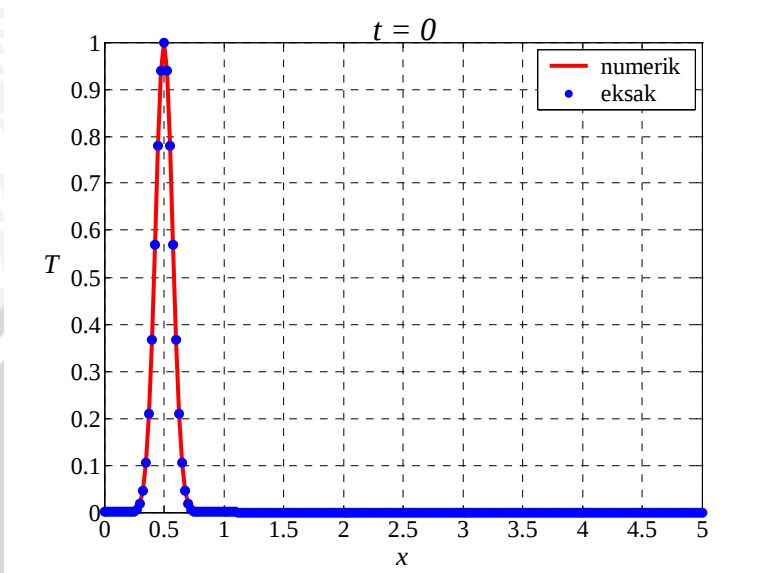
3.5 Kinerja Numerik

Untuk menguji kinerja metode beda pusat-upwind bias dilakukan simulasi untuk beberapa kasus. Pada tiap kasus ditampilkan solusi yang dihasilkan dari metode beda pusat-upwind bias dibandingkan dengan solusi eksak.

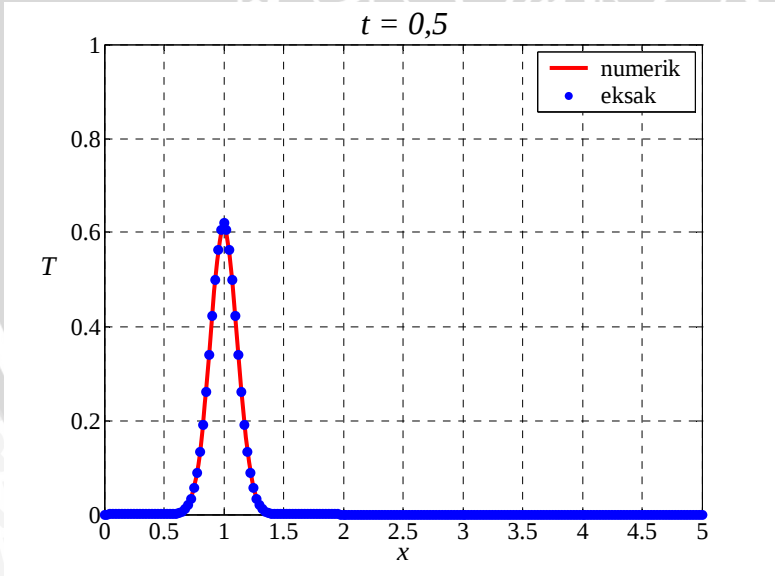
3.5.1 Uji Keakuratan Skema Numerik

Untuk uji keakuratan skema numerik disimulasikan fenomena konveksi difusi pada persamaan konveksi-difusi, untuk $0 \leq t \leq 3$ dan $0 \leq x \leq 5$, dengan $\Delta x = 1/40$, $\Delta t = 0,01$, kecepatan konveksi $C = 1$, dan koefisien difusi $D = 0,008$. Dari data tersebut diperoleh *Courant number* $c = 0,4$ dan *Peclet number* $Pe = 3,125$ serta

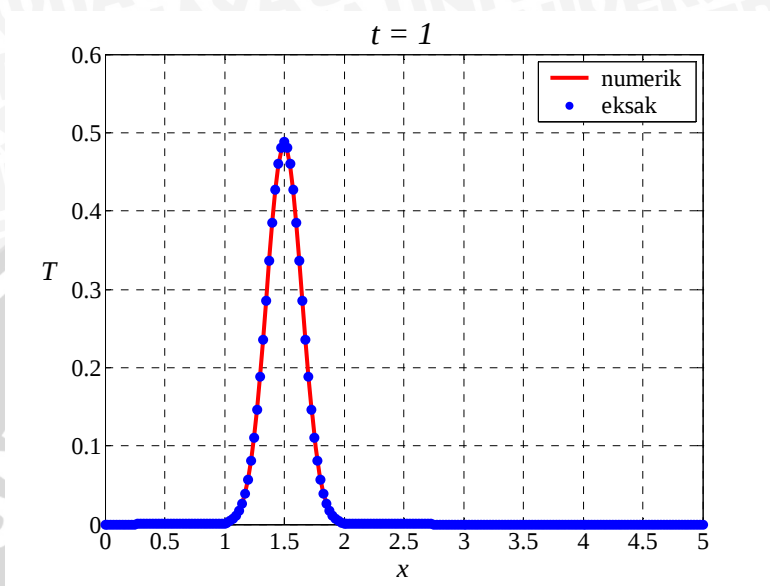
bobot optimal 0,44. Di sini *Peclet number* dirumuskan $Pe = \frac{C}{D} \Delta x$.



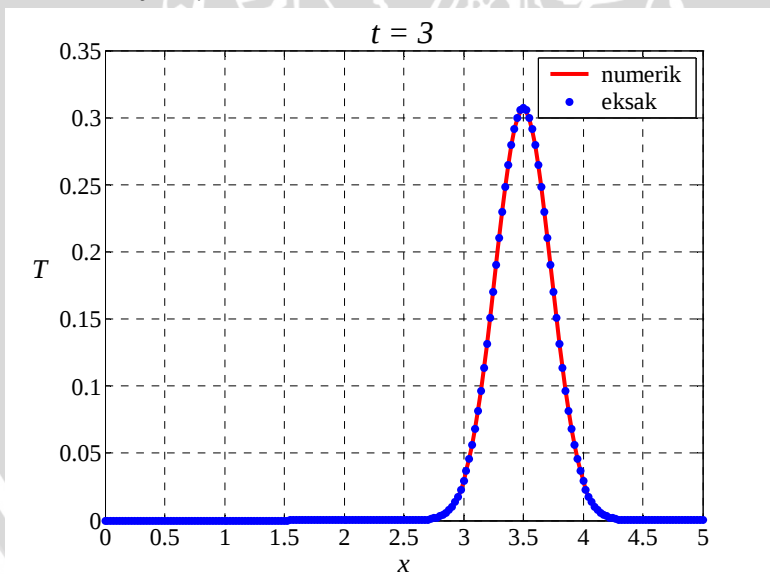
Gambar 3.5 Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 0$.



Gambar 3.6 Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 0,5$.



Gambar 3.7 Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 1$.

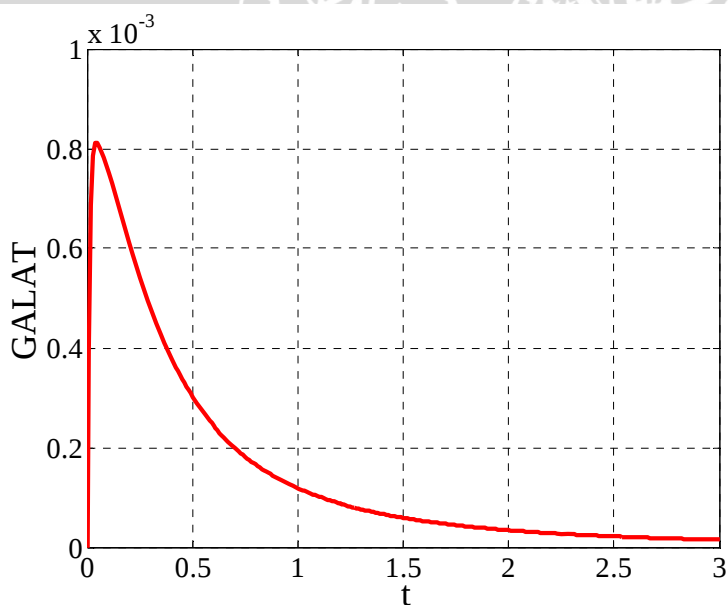


Gambar 3.8 Verifikasi solusi numerik dengan solusi eksak pada saat $t = 3$.

Pada Gambar 3.5 terlihat bahwa pusat *pulse* dengan tinggi 1 pada awalnya berada pada titik $x=0,5$. Pada $t=0,5$ gelombang bergerak searah sumbu x sejauh 0,5. Karena adanya efek difusi, tinggi *pulse* maksimal berkurang menjadi sekitar 0,6. Pada $t=1$ *pulse* mengalami efek difusi seraya bergerak searah sumbu x sejauh 1 dari posisi awalnya. Pada Gambar 3.8, pada $t=3$, pusat *pulse* berada pada $x=3,5$ dengan tinggi maksimal di bawah 0,4. Pada keempat gambar tersebut juga terlihat bahwa solusi numerik dan eksak mempunyai hasil yang hampir sama. Perbedaan hasil perhitungan antara solusi eksak dan solusi numerik disajikan lebih jelas dalam plot grafik galat pada gambar 3.9. Perhitungan galat dilakukan dengan menggunakan rumus:

$$\text{Galat} = \sum_{i=1}^{N_x} \left(T(x_i, t_j) - \text{Tex}(x_i, t_j) \right)^2, \quad \forall t_j, j=1, 2, \dots, N_t, \quad (3.55)$$

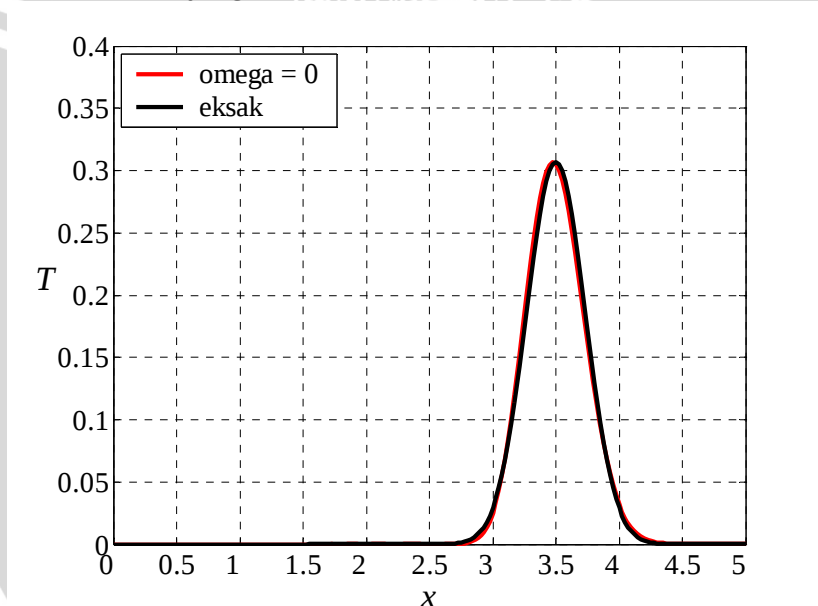
dimana $T(x_i, t_j)$ dan $\text{Tex}(x_i, t_j)$ berturut-turut adalah solusi numerik dan solusi eksak.



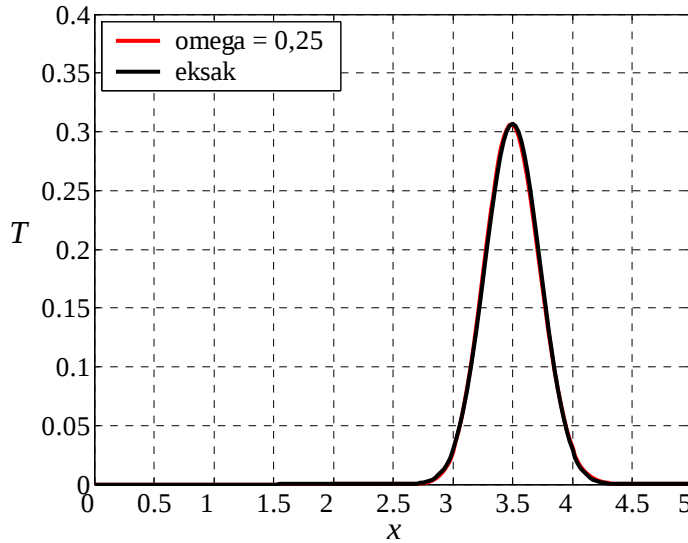
Gambar 3.9 Galat metode beda pusat-upwind bias terhadap solusi eksak sebagai fungsi waktu.

3.5.2 Perbandingan metode

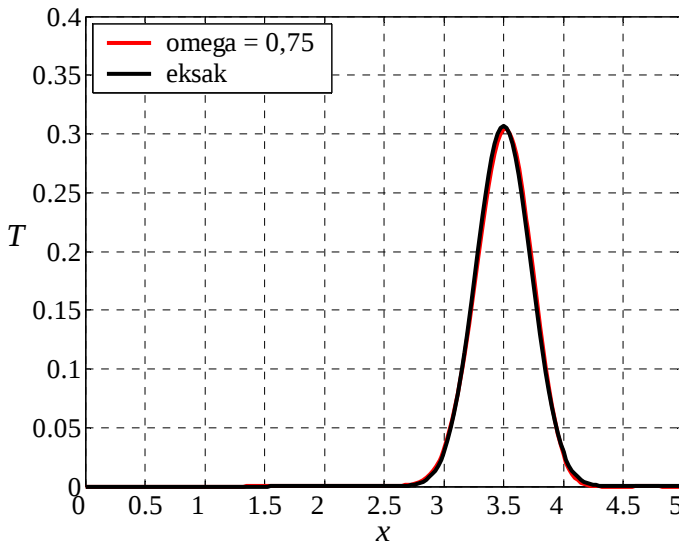
Untuk membandingkan metode, digunakan interval $0 \leq t \leq 3$ dan $0 \leq x \leq 5$, dengan $\Delta x = 1/40$, $\Delta t = 0,01$, kecepatan konveksi $C = 1$, dan koefisien difusi $D = 0,008$. Dari data tersebut diperoleh Courant number $c = 0,4$ dan Peclet number $Pe = 3,125$. Untuk memperlihatkan pengaruh bobot, digunakan lima nilai bobot, yaitu $\omega = 0$, $\omega = 0,25$, $\omega = 0,75$, $\omega = 1$ dan ω optimal. Untuk $\omega = 0$ berarti metode yang digunakan adalah metode beda pusat, $\omega = 1$ digunakan metode upwind bias, dan untuk ω optimal menggunakan metode beda pusat-upwind bias, sedangkan untuk $\omega = 0,25$, $\omega = 0,75$ digunakan untuk mengamati pengaruh bobot terhadap solusi numerik yang dihasilkan.



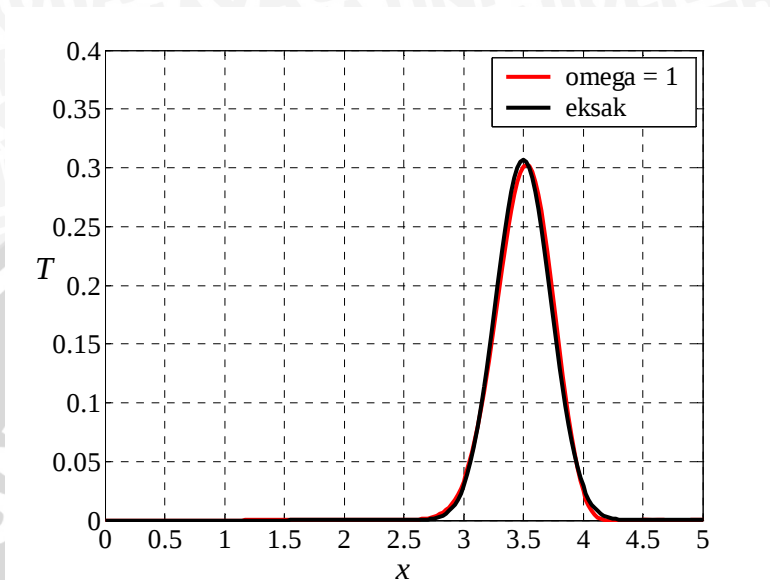
Gambar 3.10 Verifikasi metode beda pusat ($\omega = 0$) dengan solusi eksak pada $t = 3$.



Gambar 3.11 Verifikasi metode beda pusat-upwind bias ($\omega = 0,25$) dengan solusi eksak pada $t = 3$.

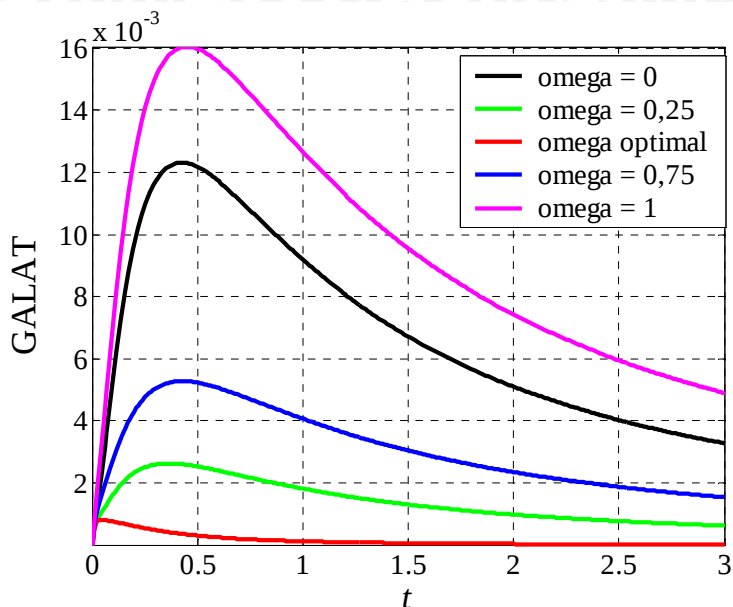


Gambar 3.12 Verifikasi metode beda pusat-upwind bias ($\omega = 0,75$) dengan solusi eksak pada $t = 3$



Gambar 3.13 Verifikasi metode upwind bias ($\omega = 1$) dengan solusi eksak pada saat $t = 3$.

Untuk verifikasi ω optimal dengan solusi eksak, terdapat pada Gambar 3.8. Pada kelima gambar tersebut terlihat bahwa untuk $\omega = 0$ dan $\omega = 0,25$, kecepatan pergerakan pulse numerik lebih lambat atau di belakang solusi eksak, sedangkan untuk $\omega = 0,75$ dan $\omega = 1$, kecepatan pergerakan pulse numerik lebih cepat atau mendahului solusi eksak. Untuk nilai ω optimal, grafik solusi numerik berimpit dengan solusi eksaknya. Dengan kata lain, untuk $\omega < \omega$ optimal, kecepatan pergerakan pulse lebih lambat atau di belakang solusi eksak, sedangkan untuk $\omega > \omega$ optimal, kecepatan pergerakan pulse lebih cepat atau mendahului solusi eksak

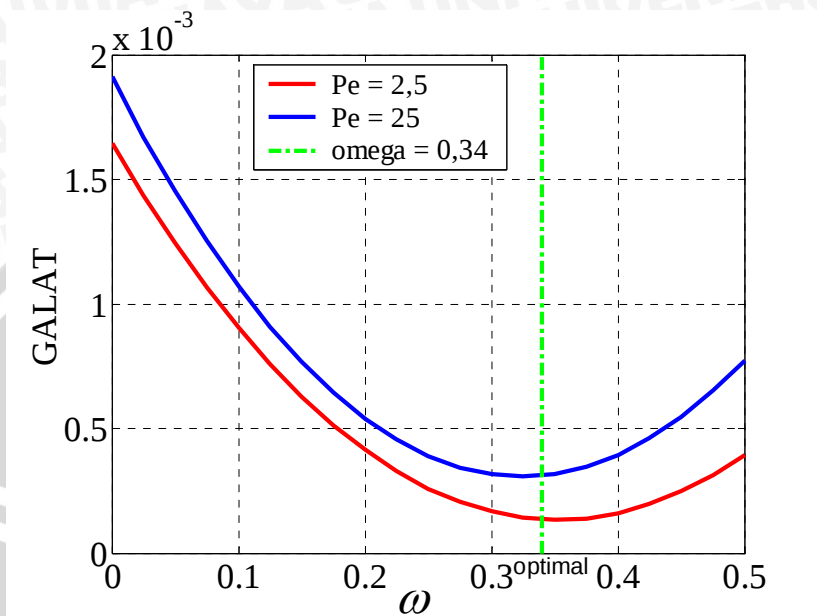


Gambar 3.14 Galat solusi numerik terhadap solusi eksak berdasarkan nilai ω .

Seperti terlihat pada Gambar 3.14, galat minimum diperoleh untuk nilai ω optimal, yaitu dengan menggunakan metode beda pusat-upwind bias. Penggabungan dua metode tersebut sangat baik untuk diterapkan karena mempunyai galat yang paling kecil bila dibandingkan dengan galat yang dihasilkan bila metode-metode tersebut digunakan sendiri-sendiri.

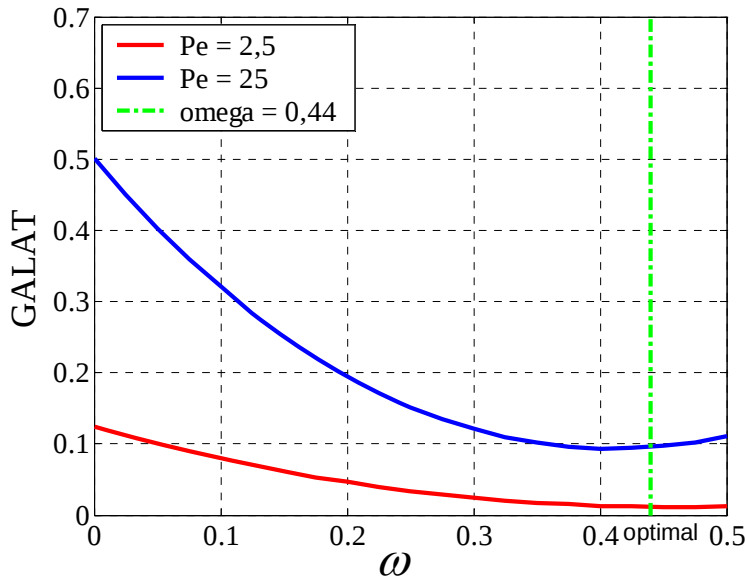
3.5.3 Uji Keakuratan Bobot dan Pengaruh Peclet Number (Pe)

Untuk studi kasus yang pertama disimulasikan pengaruh nilai Peclet number (Pe) dan bobot ω terhadap model. Simulasi dilakukan dalam interval $0 \leq t \leq 0,025$ dan $0 \leq x \leq 1$, dengan $\Delta x = 1/40$, $\Delta t = 0,0025$, kecepatan konveksi $C = 1$, dan dua koefisien difusi dengan dua nilai Peclet number yaitu 2,5 dan 25. Dari data tersebut digunakan Courant number $c = 0,1$ serta bobot $0 \leq \omega \leq 0,5$ dan $\Delta \omega = 0,025$.



Gambar 3.15 Galat berdasarkan ω untuk $c = 0,1$ dengan $Pe = 25$ dan $Pe = 2,5$.

Untuk studi kasus yang ke dua, simulasi dilakukan dalam interval $0 \leq t \leq 0,25$ dan $0 \leq x \leq 1$, dengan $\Delta x = 1/40$, $\Delta t = 0,01$, kecepatan konveksi $C = 1$, dan dua koefisien difusi dengan dua nilai *Peclet number* yaitu 2,5 dan 25. Dari data tersebut digunakan *Courant number* $c = 0,4$ serta dengan bobot $0 \leq \omega \leq 0,5$ dan $\Delta \omega = 0,025$.



Gambar 3.16 Galat berdasarkan ω untuk $c = 0,4$ dengan $Pe = 25$ dan $Pe = 2,5$.

Seperti terlihat pada Gambar 3.15 dan Gambar 3.16, semakin kecil nilai *Peclet number* (Pe), maka semakin kecil galat yang dihasilkan untuk semua nilai bobot ω dan sebaliknya. Galat paling minimum diperoleh dengan bobot ω optimal. Semakin besar *Courant number* (c), maka semakin besar pula nilai bobot ω optimal yang digunakan untuk mendapatkan galat yang minimum.

Pada studi kasus satu dan dua juga diuji keakuratan nilai bobot ω optimal yang diperoleh dari persamaan (3.54) dengan membandingkan nilai bobot ω optimal tersebut terhadap Gambar 3.15 dan Gambar 3.16. Untuk memperoleh galat pada Gambar 3.15 dan Gambar 3.16, digunakan perhitungan galat dengan rumus :

$$\text{Galat} = \sum_{j=1}^{N_t} \sum_{i=1}^{N_x} \left(T(x_i, t_j, \omega_m) - \text{Tex}(x_i, t_j, \omega_m) \right)^2, \forall t_j, j = 1, \dots, N_t, \quad (3.56)$$

di mana $T(x_i, t_j, \omega_m)$ adalah solusi numerik dan $Tex(x_i, t_j, \omega_m)$ adalah solusi eksak.

Pada Gambar 3.15 terlihat bahwa dengan $c = 0,1$, bobot ω optimal mempunyai nilai lebih kurang antara 0,325 dan 0,35, sedangkan bobot ω optimal yang dihasilkan pada persamaan (3.54) dengan $c = 0,1$ mempunyai nilai 0,34. Pada Gambar 3.16 dengan $c = 0,4$, bobot ω optimal mempunyai nilai lebih kurang antara 0,425 dan 0,45, sedangkan bobot ω optimal yang dihasilkan pada persamaan (3.54) dengan $c = 0,1$ mempunyai nilai 0,44.

Dari studi kasus satu dan dua, maka persamaan (3.54) dapat diterapkan mengingat keakuratan nilai yang dihasilkan.



UNIVERSITAS BRAWIJAYA



BAB IV KESIMPULAN DAN SARAN

4.1 Kesimpulan

Dalam skripsi ini telah dibahas skema numerik untuk menyelesaikan persamaan konveksi-difusi satu dimensi. Dari hasil pembahasan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Skema numerik metode beda pusat-upwind bias diperoleh dengan mendekati turunan spasial dan temporal model dengan beda hingga. Turunan temporal pertama didekati dengan beda mundur orde satu dan dua, turunan spasial pertama didekati dengan beda pusat dan beda mundur orde dua, sedangkan turunan spasial ke dua didekati dengan beda pusat.
2. Kesalahan pemotongan yang dihasilkan oleh metode beda pusat-upwind bias sebesar

$$\text{TE} = \frac{\Delta x^2}{12} \left[2C(1-3\omega) \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - D \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \right] - 2 \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 T}{\partial t^3} + O(\Delta x^3) + O(\Delta t^3).$$

3. Nilai bobot ω yang optimal diperoleh dengan memodifikasi model dan kesalahan pemotongan yang berbentuk

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{1}{3} [1 + 2c^2].$$

Bobot optimal digunakan untuk meminimumkan galat atau kesalahan solusi numerik.

4. Dari hasil pengujian terhadap solusi eksak dapat ditunjukkan bahwa metode beda pusat-upwind bias dapat merepresentasikan solusi persamaan konveksi-difusi dengan cukup baik. Sedangkan dari verifikasi terhadap metode beda pusat dan metode upwind bias, terlihat bahwa metode beda pusat-upwind bias mempunyai kesalahan dengan solusi eksak yang paling kecil. Bobot ω optimal yang diperoleh dari modifikasi ekuivalensi persamaan diferensial parsial layak digunakan karena keakuratan telah teruji.

4.2 Saran

Untuk penelitian selanjutnya, disarankan :

1. Menguji kestabilan metode beda pusat-upwind bias, sehingga dapat diketahui syarat kestabilannya .
2. Menerapkan pada persamaan konveksi-difusi yang mempunyai dimensi lebih tinggi mengingat metode ini mempunyai galat yang baik.
3. Menerapkan teknik modifikasi ekuivalensi pada metode-metode numerik lainnya yang memungkinkan.



DAFTAR PUSTAKA

- Chapra, S.C. dan Canale, R.P. 2002. *Numerical Methods for Engineers: with software and programming applications. Fourth Edition*. McGraw-Hill Higher Education. New York.
- Edward, C.H. dan Peney, D.E. 2001. *Differential Equations and Linier Algebra*. Prentice-Hall Inc. New Jersey.
- Farlow, S.J. 1994. *An Introduction to Differential Equation and Their Application*. Mc Graw-Hill, Inc. New Jersey
- Glenn, L. 2005. *Differential Equation: a Modelling Approach*. McGraw-Hill Higher Education. New York.
- Hoffman, J.D. 2001. *Numerical Method for Engineers and Scientist 2nd edition revised and expanded*. Marcel Dekker Inc. New York.
- Lam.C.H.1994. *Applied Numerical Method For Partial Differential Equation*. Prentice Hall. Singapore.
- Mathews, J.H. dan Fink, K.D. 1992. *Numerical Method Using Matlab 4rd edition*. Pearson Prentice-Hall. New Jersey.
- Polanco, F.G. dan Robert, L.M. 2000. *An Implicit Finite Difference Approximation to the One-Dimensional Transport Equation*. J. ANZIAM. pp C1179-C1198.
- Ross, L.S. 1984. *Differential Equation 3rd edition*. John Wiley & Sons. New York.
- Strauss, W.W. 1992. *Partial Differential Equation*. John Willey & Sons Inc. Canada.
- Suryanto, A. 2005. *Diktat Kuliah Persamaan Diferensial Parsial Numerik*. Universitas Brawijaya. Malang.
- Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset. Yogyakarta.

UNIVERSITAS BRAWIJAYA



LAMPIRAN

Lampiran 1. Penurunan Persamaan (3.38)

Model persamaan konveksi-difusi

$$C \frac{\partial T}{\partial x} - D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

$$\left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right] \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2)$$

Kedua ruas diturunkan terhadap temporal, menjadi

$$\left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Kemudian persamaan (2) disubstitusikan ke (3), diperoleh

$$\left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right] \left[- \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (4)$$

atau

$$- \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Persamaan (5) diturunkan terhadap temporal, diperoleh

$$- \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial^3 T}{\partial t^3}. \quad (6)$$

Selanjutnya, persamaan (2) disubstitusikan ke (6), diperoleh

$$- \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right]^2 \left[- \left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right] \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = - \frac{\partial^3 T}{\partial t^3}, \quad (7)$$

atau

$$\left[C - D \frac{\partial}{\partial x} \right]^3 \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} = - \frac{\partial^3 T}{\partial t^3}. \quad (8)$$