

BAB II TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Penelitian sebelumnya banyak membahas tentang tegangan sisa yang terjadi pada komponen struktur, antara lain :

R. Ghfiri, A. Amroche, A. Imad dan G Mesmacque (2000) dalam tulisannya “*fatigue life estimation after crack repair in 6005 A-T6 aluminium alloy using the cold expansion hole technique*”, menjelaskan tentang teknik memperbaiki retakan struktur dengan proses hole drilling (HD) dan *cold expansion hole* (CE). Proses ini menimbulkan *compressive residual stress* (tegangan sisa tekan) yang dapat meningkatkan ketahanan terhadap fatigue crack initiation

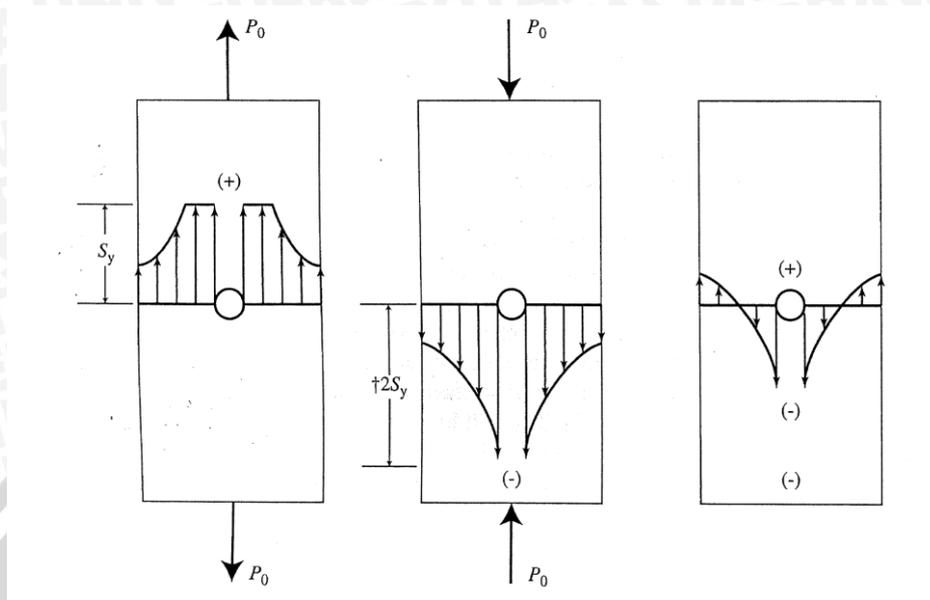
Priyo Tri Iswanto, N. Shin Ichi, H. Nobusuke (2002), dalam tulisannya “*effect of compressive mean stress and compressive residual stress on fatigue properties of stainless steel SUS304*”, menjelaskan bahwa *compressive mean stress* dan *compressive residual stress* meningkatkan kekuatan *fatigue* dari specimen sebesar 425 MPa dengan pemberian *compressive mean stress* dan *residual stress* sebesar 183,57 MPa. Selain itu, *compressive residual stress* dapat menghambat perambatan retak pada specimen.

V. Nigrelli, S. Pasta (2007) dari Universitas Palermo dalam jurnalnya “*Finite Element Simulation of Residual Stress Induced by Split-Sleeve Cold Expansion Hole Process*”, memberikan gambaran bahwa *Split-Sleeve Cold Expansion Hole Process* di modelkan tiga dimensi untuk mengetahui tegangan sisa yang terjadi dengan menggunakan *software* DEFORM. Dalam *software* ini pemodelan perhitungan tegangan sisa yang terjadi menggunakan *lagrangian implicit code* yang biasanya dipakai dalam pembentukan logam. Hasil dari penelitian ini adalah tegangan sisa terjadi pada daerah lubang berupa *compressive residual stress* (tegangan sisa tekan). Tegangan sisa tekan tersebut hamper sama dengan penyelesaian menggunakan *analytical solution* yang dikembangkan oleh Guo.

2.2 Tegangan Sisa

Tegangan sisa ini dapat merugikan tetapi juga dapat menguntungkan. Jika terdapat tegangan sisa tarik pada material yang mengalami beban tarik maka akan memberikan resultan positif dan jika melewati tegangan luluhnya akan menjadi awal mula terjadinya patahan, sebaliknya jika beban berupa tegangan tarik dan terdapat

tegangan sisa tekan pada material maka tegangan sisa ini akan memberi resultan negative dan mengurangi efek beban ke material.



Gambar 2.1 Tegangan sisa

Sumber : Stephens (2001:248)

Pada gambar 2.1 tersebut adalah *stretching (tensile overload)* dari sebuah pelat berlubang. Dengan mengasumsikan material pelat *elastic-perfectly plastic* pada gambar (a) dapat dilihat distribusi tegangan yang terjadi pada saat pembebanan tarik dilakukan, karena ada perubahan penampang maka pada daerah sekitar lubang akan terjadi konsentrasi tegangan sehingga tegangan pada daerah sekitar lubang menjadi besar dan terjadi deformasi plastis.

Pada gambar (b) beban pada pelat diganti tegangan tekan sehingga apabila dilakukan superposisi akan tampak seperti pada gambar (c)

2.3 Beban Siklus

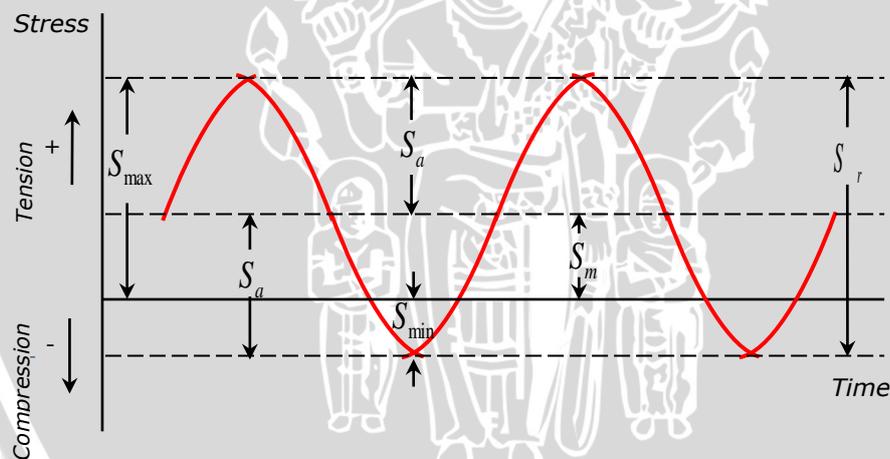
Beban dibagi menjadi dua jenis, yaitu beban statik dan beban dinamis, Beban siklus merupakan beban dinamis. Beban siklus adalah beban yang berubah terhadap waktu. Beban-beban ini dan jenis beban lainnya yang terjadi dalam anggota-anggota mesin menghasilkan tegangan yang disebut tegangan berulang (*repeated stresses*), tegangan bolak-balik (*alternating stresses*), atau tegangan berfluktuasi (*fluctuating stresses*)

Pembebanan berulang yang diberikan pada suatu komponen tentunya memiliki tegangan maksimum dan tegangan minimum. Tegangan maksimum yang diberikan pada material sebenarnya masih di bawah kekuatan akhir dari bahan tersebut dan bahkan cukup sering berada di bawah tegangan *yield*. Tegangan ini diberikan pada benda dalam waktu yang lama hingga mengalami kegagalan. Kegagalan akibat beban siklus ini disebut suatu *fatigue failure*.

Faktor yang paling menentukan terjadinya kegagalan *fatigue* adalah adanya siklus tegangan atau pembebanan yang berulang (*cyclic*). Rasio tegangan yang diberikan R , mempunyai pengaruh yang berarti pada laju pertumbuhan retak. Seperti dijelaskan sebelumnya, rasio tegangan didefinisikan sebagai perbandingan antara tegangan minimum dengan tegangan maksimum.

$$R = \frac{S_{\min}}{S_{\max}} = \frac{K_{\min}}{K_{\max}} \quad (2-1)$$

Komponen-komponen dari siklus tegangan berfluktuasi ditunjukkan oleh Gambar 2.2



Gambar 2.2 Model Pembebanan Berulang

Sumber : Dieter (1988:124)

Pembagian komponen siklus pembebanan berulang pada gambar 2.2 adalah sebagai berikut :

1. Tegangan rata-rata (S_m), yaitu nilai rata-rata dari tegangan maksimum dan tegangan minimum pada siklus.

$$S_m = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2} \quad (2-2)$$

2. Daerah tegangan atau jangkauan tegangan (S_r), yaitu perbedaan antara tegangan maksimum dengan tegangan minimum pada suatu siklus.

$$S_r = S_{\max} - S_{\min} \quad (2-3)$$

3. Tegangan bolak balik atau amplitudo tegangan (S_a), yaitu setengah dari jangkauan tegangan.

$$S_a = \frac{S_r}{2} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2} \quad (2-4)$$

Rasio tegangan berpengaruh terhadap kondisi beban yang dialami oleh suatu komponen. Dalam hubungannya membentuk kondisi beban, rasio tegangan memiliki hubungan dengan amplitudo tegangan. Hubungan antara rasio tegangan, amplitudo tegangan terhadap kondisi beban adalah sebagai berikut :

<i>Fully Reserved</i>	:	$R = -1$	$A = \infty$
<i>Zero to max</i>	:	$R = 0$	$A = 1$
<i>Zero to min</i>	:	$R = \infty$	$A = -1$

Kasus tegangan pembalikan penuh (*complete reverse stress*) terjadi pada $R = -1$. Ketika R menjadi semakin positif dimana sebanding dengan penambahan tegangan rata-rata, maka batas umur *fatigue* menjadi lebih besar.

2.3.1 Pengaruh Tegangan Rata-Rata

Tegangan amplitudo:

$$S_a = \sigma a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2 \quad (2-5)$$

Tegangan rata-rata:

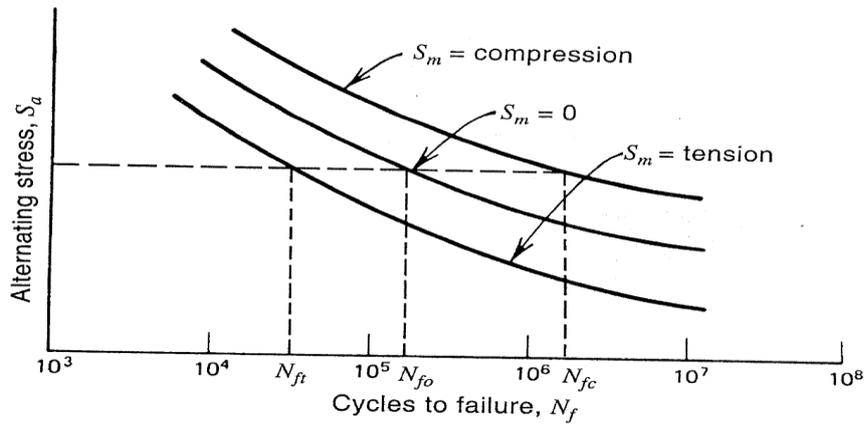
$$S_m = \sigma m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2 \quad (2-6)$$

Rasio tegangan:

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} \quad (2-7)$$

Besarnya tegangan rata-rata yang bekerja akan menentukan terhadap besarnya tegangan amplitudo yang diijinkan untuk mencapai suatu umur lelah tertentu. Bila tegangan rata-rata sama dengan 0 atau rasio tegangan sama dengan -1, maka besarnya tegangan amplitudo yang diijinkan adalah nilai batas lelahnya. Dengan demikian jika

tegangan rata-ratanya semakin besar maka tegangan amplitudonya harus diturunkan. Hal ini terlihat pada alternatif diagram Goodman atau pada diagram-diagram lainnya, lihat Gambar 2.3 berikut ini.



Gambar 2.3 : pengaruh tegangan sisa terhadap kelelahan

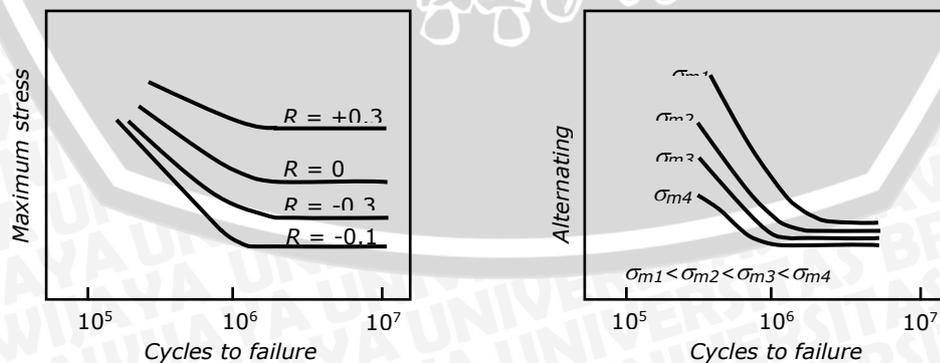
Sumber : Stephens,2001:248

2.3.2 Pengaruh Rasio Tegangan (*Stress Ratio*)

Rasio tegangan (R) mempunyai pengaruh yang berarti pada laju pertumbuhan retak. Rasio tegangan didefinisikan sebagai perbandingan antara tegangan minimum dengan tegangan maksimum

$$R = \sigma_{min}/\sigma_{max} = K_{min}/K_{max} \quad (2-8)$$

Bannantine (1990) menjelaskan bahwa untuk nilai ΔK yang konstan dengan semakin besar nilai R, maka laju pertumbuhan retak juga semakin besar. Faktor yang menentukan terjadinya kegagalan lelah (*fatigue*) adalah siklus tegangan atau pembebanan yang berulang seperti halnya pada gambar 2.4.

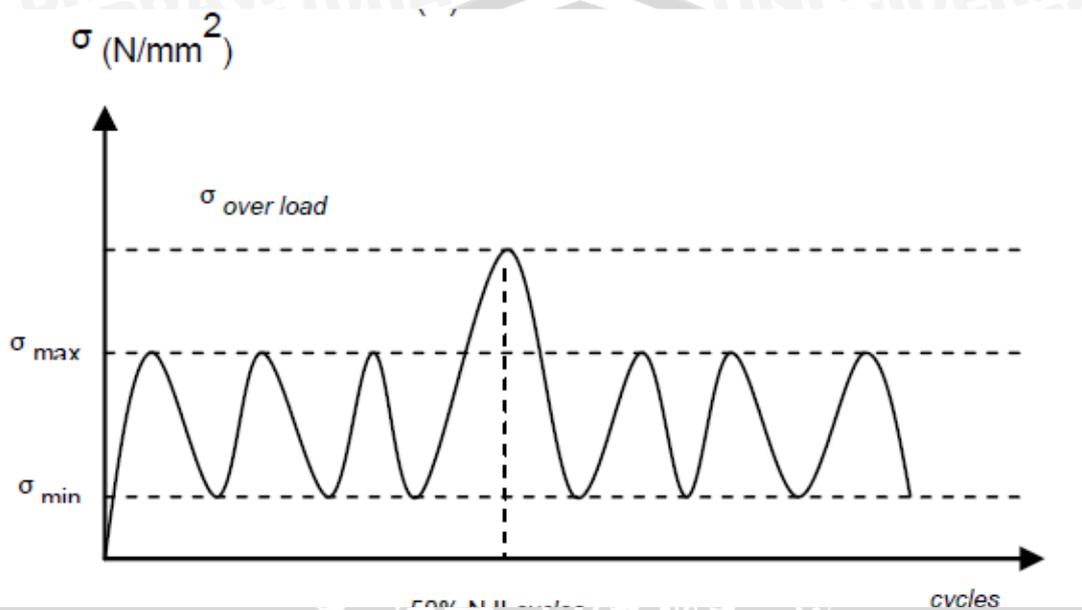


Gambar 2.4 Variasi tegangan terhadap umur *fatigue*

Sumber :Dieter (1988:126)

2.3.3 Pengaruh *Overload*

Pemberian satu *overload* atau *underload* pada siklus pembebanan dengan amplitudo konstan dapat mengakibatkan percepatan atau perlambatan pertumbuhan retak. *Overload* dan *underload* menyebabkan konsentrasi tegangan yang tinggi di ujung retak, sehingga dapat menghasilkan tegangan sisa tarik maupun tekan yang dapat mempengaruhi laju perambatan retak.



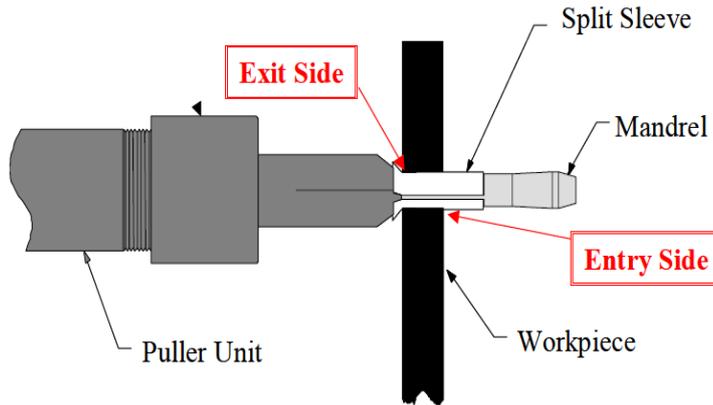
Gambar 2.5 Siklus pembebanan dengan *overload*

Sumber : Munir.2009

Penambahan satu *overload* pada pembebanan siklus seperti pada gambar 2.5 dapat menyebabkan kurangnya pertumbuhan retak atau *crack retardation*.

2.4 *Cold expansion hole*

Cold expansion hole adalah salah satu teknik yang digunakan untuk menghasilkan tegangan sisa tekan pada permukaan lubang sambungan pelat. Bola baja atau mandrel dengan kekuatan tinggi ditekan pada pelat sampai mengalami deformasi plastis local pada permukaannya. Proses *cold expansion hole* ditunjukkan pada gambar 2.6 :



Gambar 2.6 : Proses *Cold Expansion Hole*

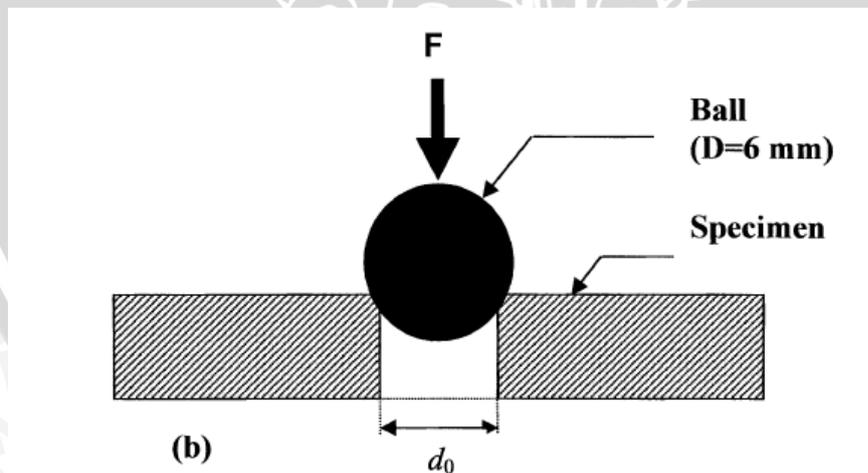
Sumber : Shanmuka, 2006 : 3

Pada proses *cold expansion hole*, tercipta daerah yang dinamakan *cold expansion hole affected zone (CEAZ)*. Daerah ini mengalami deformasi plastis dan pada daerah itu terdapat tegangan sisa tekan. Besarnya CEAZ dipengaruhi oleh yang besarnya dapat dihitung dengan persamaan berikut :

$$DCE = [(D-d_0)/d_0] \times 100\% \quad (2-9)$$

Keterangan : D adalah diameter bola (mm)

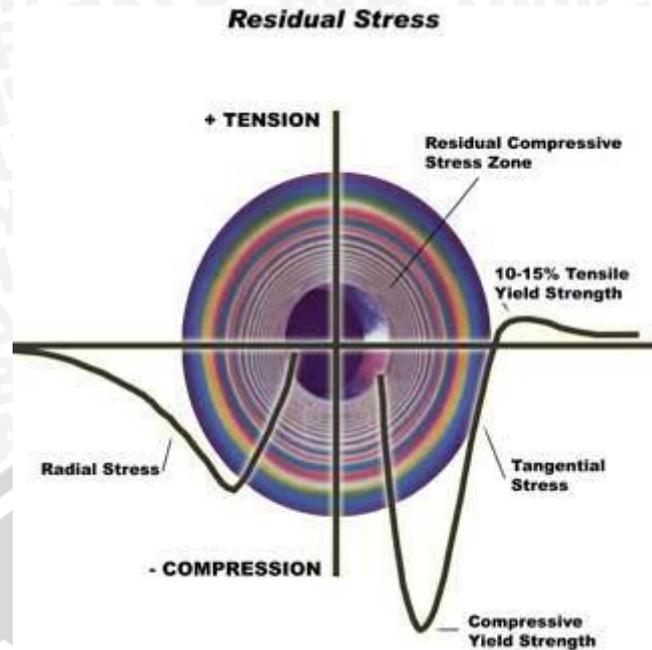
D₀ adalah diameter lubang sebelum *cold expansion hole* (mm)



Gambar 2.7 Diameter bola pada proses *cold expansion hole*

Sumber : R. Ghifri, 2009

Distribusi tegangan yang terjadi pada proses *cold expansion hole* dapat dilihat pada gambar 2.8 :



Gambar 2.8 Distribusi tegangan pada proses cold expansion hole
 Sumber : Shanmuka, 2006 : 3

Dari gambar diatas dapat diketahui bahwa hasil proses *cold expansion hole* menghasilkan tegangan sisa tekan kemudian berubah menjadi tegangan sisa tarik ketika semakin jauh dari lubang. Daerah yang terjadi tegangan sisa tekan merupakan daerah yang diinginkan karena daerah ini yang akan melawan tegangan dari luar. Sedangkan tegangan sisa tarik adalah hasil yang merugikan, karena tegangan tersebut akan menambah tegangan dari luar komponen.

Tegangan sisa adalah gaya elastis yang dapat mengubah jarak antar atom dalam bahan tanpa adanya beban dari luar. Tegangan sisa ditimbulkan karena adanya deformasi plastis yang tidak seragam dalam suatu bahan, antara lain disebabkan oleh gaya mekanik dari luar. Walaupun tegangan sisa tidak tampak secara visual namun sesungguhnya tegangan sisa tersebut bertindak sebagai beban yang tetap yang akan menambah nilai beban kerja yang diberikan dari luar.

$$\sigma = \frac{\Delta l}{l_0} E \tag{2-10}$$

σ = tegangan sisa (Pa)

Δl = perubahan panjang (m)

l_0 = panjang mula-mula

E = modulus elastisitas (Pa)

Sedangkan untuk arah tegangan bisa dilihat dalam persamaan berikut :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (2-11)$$

σ_x = tegangan tegak lurus garis gaya

ϵ_x = regangan tegak lurus garis gaya

ϵ_y = regangan searah garis gaya

ν = poisson ratio

2.5 Analisa Tegangan

2.5.1 Tegangan

Tegangan adalah suatu ukuran intensitas pembebanan yang dinyatakan oleh gaya dan dibagi oleh luas di tempat gaya tersebut bekerja (Iremonger, 1990).

Terdapat dua macam gaya yang bekerja pada benda untuk menghasilkan tegangan:

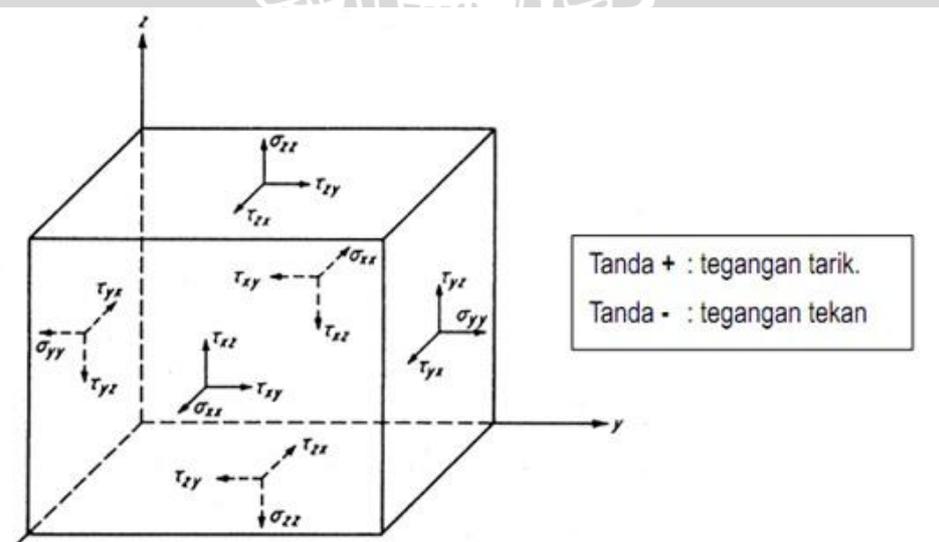
1. Gaya Permukaan (*surface forces*) yang mana gaya bekerja pada suatu permukaan dari benda.

Contoh : gaya kontak antara roda gigi, antara ball bearing, pelat yang di rol, dll.

2. Gaya Benda (*body forces*) yang mana disebut demikian karena gaya ini bekerja pada setiap elemen dari benda tersebut.

Contoh : gaya sentrifugal

Untuk komponen tegangan pada suatu elemen kubus umum dinyatakan sebagai berikut:



Gambar 2.9 Komponen tegangan pada elemen kubus

Sumber : Dally & Rillely (1991:10)

Notifikasi nama :

σ_{xy} : - huruf *subscript* pertama menunjukkan normal bagian luar atau bidang dimana tegangan bekerja.

- huruf *subscript* kedua menunjukkan arah dari tegangan tersebut

Pengandaian bahwa tegangan adalah terbagi rata sering dilakukan dalam perencanaan (E.Shigley. 1986). Hasilnya sering disebut tegangan tarik murni (*pure tension*), tegangan tekan murni (*pure compression*) atau tegangan geser murni (*pure shear*), tergantung pada cara kerja beban atas benda yang sedang diamati. Tegangan, σ , dikatakan terbagi rata, maka harganya dapat dihitung dari persamaan :

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2 - 12)$$

Dengan :

σ = besar tegangan (MPa)

F = gaya yang bekerja pada benda (N)

A = luas penampang (mm)

Pengandaian tentang tegangan terbagi rata memerlukan hal sebagai berikut :

1. Batang adalah lurus dan terbuat dari bahan yang homogen
2. Garis kerja gaya berhimpit dengan titik pusat penampang
3. Penampang diambil pada jarak yang cukup jauh dari kedua ujung dan dari setiap perubahan penampang yang mungkin ada (E. Shigley, 1986).

2.5.2 Regangan

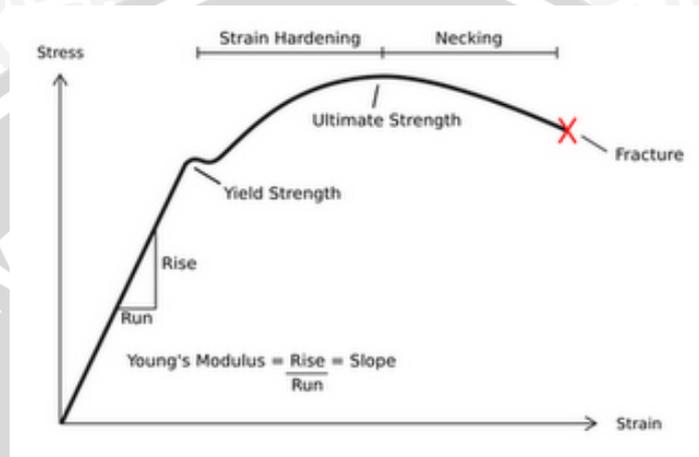
Regangan adalah suatu perubahan bentuk tanpa dimensi untuk menyatakan adanya deformasi (Iremonger, 1990).

Bila beban diberikan pada suatu benda atau struktur maka akan terjadi tegangan dalam benda/komponen sehingga terjadi perubahan bentuk atau dimensi. Perubahan bentuk pada benda inilah yang disebut regangan (*strain*). Besar dari regangan disebut *strain intensity*.

Seperti halnya tegangan regangan juga memiliki unsur-unsur tertentu. Di antara setiap perpindahan dari titik dalam material memiliki hubungan yang tetap. Untuk mengetahuinya adalah hal yang mudah dengan mengamati regangan dalam dua dimensi.

2.5.3 Hubungan Tegangan –Regangan

Tegangan dan regangan senantiasa berhubungan pada setiap bahan (walaupun hubungan ini dapat berubah karena suhu, laju pembebanan dan sebagainya). Pada kondisi tegangan di bawah tingkat kritis akan memenuhi Hukum Hooke yang menyatakan bahwa deformasi adalah berbanding lurus terhadap beban yang ditimbulkan. Hal ini sesuai dengan diagram tegangan regangan dalam gambar 2.10:



Gambar 2.10 : kurva tegangan - regangan

Sumber : <http://www.tech.clayton.edu/eddins/stress.html>

Keterangan :

$\sigma_p = \text{proportional stress}$

$\sigma_E = \text{elastic stress}$

$\sigma_Y = \text{yield stress}$

$\sigma_U = \text{ultimate stress}$

Dalam hal ini:

- Titik proporsional merupakan titik keseimbangan antara tegangan regangan
- Titik luluh merupakan titik tempat terjadinya penambahan regangan tanpa penambahan beban
- Titik *ultimate* merupakan titik tempat tegangan tertinggi yang dapat dicapai oleh bahan tersebut
- Titik patah merupakan titik tempat bahan tersebut patah

Di dalam diagram tegangan regangan dikenal :

- Daerah elastis yaitu daerah tempat terjadinya deformasi elastis (dari nol sampai batas elastis)
- Daerah plastis merupakan daerah tempat terjadinya deformasi plastic (dari batas elastis sampai titik ultimate)
- Daerah patah merupakan daerah tempat terjadinya patah

Hukum Hooke secara sistematis dirumuskan

$$E = \sigma / \epsilon \quad [N / mm^2] \quad (2-13)$$

Dengan :

$$E = \text{modulus elastisitas bahan (Modulus young)} \quad [N / mm^2]$$

Modulus elastisitas atau modulus Young dinyatakan sebagai perbandingan antara tegangan dan regangan. Modulus elastisitas merupakan karakteristik suatu logam tertentu, karena setiap logam mempunyai modulus elastisitas yang berbeda. Makin besar modulus elastisitas, makin kecil regangan elastis yang dihasilkan akibat pemberian tegangan. Makin besar gaya tarik menarik antara atom logam, makin tinggi pula modulus elastisitasnya.

Pada kondisi plastis, deformasi yang terjadi pada material bersifat irreversible dan pada kondisi ini hukum hooke sudah tidak berlaku lagi. Salah satu karakteristik yang perlu dipahami dari deformasi plastis pada material logam adalah logam tidak mempunyai sifat mampu tekan (incompressible), sehingga pada deformasi plastis volume dari material logam adalah konstan

Bila dilihat pada diagram tegangan-regangan sebenarnya pada kondisi plastis hubungan tegangan-regangan dapat dirumuskan dengan :

$$\sigma = K \epsilon^n \quad (2-14)$$

dengan : σ adalah tegangan

K adalah konstanta penguatan

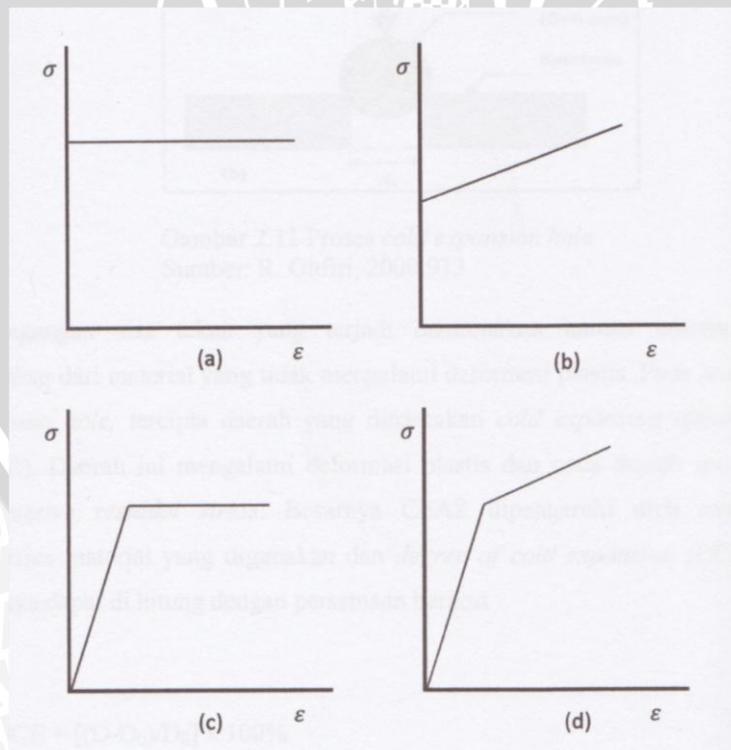
ϵ adalah regangan

n adalah eksponensial *strain hardening*

Dalam analisa untuk mendapatkan penyelesaian masalah deformasi, maka perlu untuk mengidealiskan hubungan tegangan-regangan yang terjadi. Pada umumnya ada empat permodelan pengidealisaian dari sudut pandang terjadinya deformasi pada material, yang pertama adalah *rigid perfectly plastic*, pada pemodelan ini material tidak mengalami deformasi elastic terlebih dahulu, namun langsung mengalami deformasi

plastis pada saat diberi pembebanan sampai batas tertentu. Deformasi akan terus terjadi jika pembebanan terus dilakukan walaupun besar pembebanan tidak ditambahkan. Pada kurva diagram tegangan-regangan pemodelan material ini dapat dilihat pada gambar 2.11 (a). pemodelan yang kedua adalah *rigid linear strain hardening*, yaitu pemodelan material yang tanpa mengalami deformasi elastic, sehingga hanya terjadi deformasi plastis dan pada saat penambahan secara linear pada diagram tegangan-regangan. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat pada gambar 2.11(b). kedua pemodelan ini sangat cocok digunakan untuk menggambarkan yang bersifat plastis.

Untuk material logam sendiri biasanya tergolong material yang *elastoplastic*, yang mana pada material terjadi dua macam deformasi yaitu deformasi elastic dan deformasi plastis. Pada material jenis ini pemodelan yang digunakan adalah jenis ketiga dan keempat, yaitu *elastic perfectly plastic* dan *elastic linear strain hardening*. Pada pemodelan ini material akan mengalami deformasi elastic terlebih dahulu selama diberi pembebanan sampai batas tertentu, kemudian akan mengalami deformasi plastis. Untuk *elastic perfectly plastic*, deformasi plastis yang terjadi tidak diikuti penguatan tegangan sedangkan *elastic linear strain hardening*, deformasi plastis yang terjadi akan diikuti dengan penguatan tegangan. Berikut adalah gambar kurva tegangan-regangan berbagai macam pemodelan material :



Gambar 2.11 Pemodelan material pada diagram tegangan-regangan
Sumber : Dieter. (1988;73)

2.6 Metode Elemen Hingga

Pemakaian Metode Elemen Hingga (MEH) selama ini antara lain untuk menganalisa struktur, yang berada pada pengaruh pembebanan (gaya maupun tekanan), gradien temperatur yang akan memberikan akibat berupa deformasi, tegangan maupun perubahan temperatur yang dialami oleh struktur tersebut. Tujuan utama dari analisa ini adalah untuk memperoleh nilai pendekatan tegangan dan perpindahan yang terjadi pada struktur tersebut.

Prosedur perhitungan dengan Metode Elemen Hingga (MEH)

1. Diskretisasi dan pemilihan elemen

Proses ini adalah proses pembagian struktur menjadi elemen-elemen kecil yang lebih sederhana yang dihubungkan pada titik simpul (*node*), kemudian dilakukan pemilihan elemen seperti model awal dari struktur. Hal ini dilakukan untuk mempermudah analisa.

2. Memilih fungsi pendekatan

Variasi perpindahan pada suatu elemen didekati dengan fungsi interpolasi yang didasarkan pada harga simpul yang mengitari. Fungsi yang paling umum digunakan adalah polinomial. Pendekatan dengan fungsi interpolasi ini disebabkan karena sulitnya mencari jawaban tertutup sehingga dipilih suatu bentuk jawaban, yaitu distribusi perpindahan yang merupakan besaran yang tidak diketahui dengan memakai fungsi yang harus memenuhi hukum, prinsip dan syarat batas yang menjadi sifat persoalan yang ada.

3. Menurunkan persamaan matrik kekakuan [k]

Dengan prinsip usaha virtual akan dihasilkan persamaan matrik kekakuan elemen dengan *governing equation* yang didasari oleh parameter dasar berupa displacement, tegangan dan regangan yang terhubung dengan tiga persamaan kinematik, konstitutif dan *internal-equilibrium equation* sebagai berikut

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-15)$$

- *Boundary condition*

Boundary Condition dijelaskan dalam bentuk u

Jika u sebagai *displacment*, maka *boundary condition* berupa *fixed support* seperti pada gambar

- Total energi potensial

Fungsi total energi potensial pada permasalahan ini diketahui sebagai berikut :

Energi Internal dapat dijelaskan sebagai berikut :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e} d\Omega. \quad (2-16)$$

Dimana $\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{E} \mathbf{e}$ adalah densitas energi regangan.

- Persamaan elemen hingga

Untuk memudahkan penyelesaian tipe elemen umum, titik *nodes* diberi label 1 hingga n DOF. Seperti pada persamaan berikut :

$$\mathbf{u}^e = [u_{x1} \quad u_{y1} \quad u_{x2} \quad \dots \quad u_{xn} \quad u_{yn}]^T. \quad (2-17)$$

- Interpolasi *Displacement*

Persamaan *Displacement* pada elemen diinterpolasikan dari *node-node displacement*. Diasumsikan fungsi interpolasi digunakan pada kedua komponen *displacement*.

$$u_x(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i^e(x, y) u_{xi}, \quad u_y(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i^e(x, y) u_{yi}, \quad (2-18)$$

Dari interpolasi akan didapatkan elemen *shape function*

$$\mathbf{e}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_n^e}{\partial y} & \frac{\partial N_n^e}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u}^e. \quad (2-19)$$

- Elemen Energi

Untuk mendapatkan persamaan elemen kekakuan, fungsi total energi potensial dijadikan persamaan dengan elemen tunggal :

$$W^e = \int_{\Omega^e} h \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega^e + \int_{\Gamma^e} h \mathbf{u}^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma^e \quad (2-20)$$

- Persamaan Elemen Kekakuan

Dengan memasukkan hubungan $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$, $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u}^e$ dan $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\mathbf{e}$ ke Π^e bentuk *quadratic* dalam *nodal displacement* :

Maka didapatkan matrik elemen kekakuan

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} h \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega^e, \quad (2-21)$$

dimana:

[k] : matrik kekakuan elemen

[B] : matrik konstitutive hubungan regangan dan perpindahan

Adapun matrik B untuk elemen tetrahedral adalah sebagai berikut :

$$B_1 = \begin{bmatrix} f_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & f_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & f_{i,z} \\ f_{i,y} & f_{i,x} & 0 \\ 0 & f_{i,z} & f_{i,y} \\ f_{i,z} & 0 & f_{i,x} \end{bmatrix} \quad (2-22)$$

4. Menghitung matrik beban total

Beban yang bekerja didefinisikan menjadi 3 macam, sehingga beban total adalah :

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q}_{NF} + \mathbf{Q}_{BF} + \mathbf{Q}_T$$

Dimana:

\mathbf{Q}_{NF} : beban pada konsentrasi nodal

\mathbf{Q}_{BF} : beban *body force* (akibat beban sendiri)

\mathbf{Q}_T : beban traksi (*surface traction*)

5. Merakit elemen menjadi struktur

Perakitan persamaan elemen akan dibawa ke bentuk persamaan global, yang prosesnya harus memenuhi sifat konvergen dan sifat sinambung. Salah satunya antara lain : titik-titik yang semula bersebelahan harus tetap bersebelahan satu sama lain setelah elemen dikenai beban. Bentuk persamaan global elemen yaitu :

$$[K] \{q\} = \{R\} \tag{2-23}$$

Dimana:

- [K] : matrik kekakuan elemen.
- {q} : vektor perpindahan simpul.
- {R} : matrik beban total.

Setelah matrik kekakuan global diperoleh dan syarat-syarat batasnya dimasukkan maka perpindahan simpul (q) dapat dicari. Suatu syarat batas memberikan informasi bagaimana struktur ditopang dalam ruang, dengan memasukkan nilai perpindahan yang telah ditetapkan sesuai kondisi pada struktur.

6. Mendapatkan perpindahan global

Persamaan global yang telah mendapatkan syarat batas, merupakan sekumpulan persamaan linier yang secara umum dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{aligned} k_{1.1} q_1 + k_{1.2} q_2 + \dots + k_{1.n} q_n &= R_1 \\ k_{2.1} q_1 + k_{2.2} q_2 + \dots + k_{2.n} q_n &= R_2 \\ k_{n.1} q_1 + k_{n.2} q_2 + \dots + k_{n.n} q_n &= R_n \end{aligned} \tag{2-24}$$

Persamaan di atas akan diselesaikan dengan cara eliminasi Gauss untuk mendapatkan besaran-besaran primer yaitu q₁, q₂, q₃ q_n.

7. Mendapatkan besaran sekunder dan interpretasi hasil

Dari besaran pertamanya yang berupa perpindahan, dapat dicari besaran sekunder yang dapat berupa tegangan maupun regangan, dengan menggunakan hubungan antara keduanya. Hubungan tegangan-regangan pada kondisi 3D dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \tag{2-25}$$

Hubungan tersebut dapat ditulis dalam bentuk simbol berikut :

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \epsilon \} \tag{2-26}$$



Hubungan regangan dengan perpindahan adalah :

$$\{\epsilon\} = [B] \{d\} \quad (2-27)$$

Sehingga tegangan dapat dirumuskan sebagai :

$$\{\sigma\} = [C] [B] \{d\} \quad (2-28)$$

Hasil akhir dari perhitungan dengan metode elemen hingga ini berupa harga distribusi tegangan yang akan diplot di sepanjang struktur untuk dianalisis sesuai dengan rumusan masalah yang ada.

2.7 Software ABAQUS CAE 6.11

ABAQUS merupakan suatu *software* berbasis *finite element* dengan penyelesaian numeric yang dapat digunakan pada berbagai persoalan *engineering*.

Beberapa persoalan yang mampu diselesaikan meliputi:

1. Analisis struktur statis / dinamis baik linier atau bukan.
2. Fenomena elektromagnetik
3. Perpindahan panas dan mekanika fluida

Secara umum solusi metode elemen hingga dapat dibagi menjadi 3 bagian utama, yaitu:

1. *Preprocessing*

Adalah tahap pembuatan model fisik dari masalah yang akan diselesaikan dan membuat *input file* yang akan digunakan dalam simulasi nantinya. Dalam tahap ini ditentukan beberapa hal seperti:

- Menentukan tipe elemen dan material yang digunakan beserta *properties*-nya
- Menentukan *keypoint*, *lines*, *area* atau *volume*
- Menentukan beban yang bekerja pada material
- Menentukan kondisi batas (*boundary condition*)
- Melakukan *meshing* pada *lines*, *area* atau *volume* sesuai kebutuhan
- Menentukan jenis analisis yang digunakan
- Pembuatan *input file*

Pada tahap ini tingkat ketelitiannya disesuaikan dengan analisis dimensi yang digunakan. Semisal 1 dimensi, 2 dimensi, *axi-symmetric*, atau 3 dimensi.

2. *Simulation*

Tahap dilakukannya perhitungan masalah numeris yang sudah didefinisikan dalam tahap *preprocessing*. Hasil perhitungan akan disimpan di dalam file biner yang siap diolah dalam tahap *postprocessing*.

3. *Postprocessing*

Tahap akhir dimana hasil *solving (running program)* bisa dilihat. Pada tahap ini adabeberapa hal yang dapat kita amati, yaitu:

- *Stress contour diagram*

2.8 Hipotesa

Adanya proses *Cold Expansion Hole* akan menghasilkan tegangan sisa tekan pada daerah di sekitar lubang sehingga tegangan sisa tarik akibat pembebanan *single overload* akan berkurang oleh tegangan sisa tekan tersebut.

